



BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

**De verstrooiing van het licht berekend voor het Asahi-U substraat
(Engelse titel: The scattering of the light computed for the Asahi-U
substrate)**

Maarten Kooiman

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr. K. Cools

Overige commissieleden

Dr. L. van Iersel

Juli , 2020

Delft

Voorwoord

Voor u ligt het eindverslag van mijn bachelor project. Dit project is gedaan ter afronding van mijn studie technische wiskunde aan de Technische Universiteit Delft. Het uitvoeren van een bachelor project is een leerzaam proces geweest. Hiervoor had ik nog geen ervaring met het wiskundig onderzoek. Tijdens dit project heb ik geleerd om zelfstandig te werken aan een eigen onderzoek. Dit gaf mij de gelegenheid om de kennis en vaardigheden die ik opgedaan had tijdens de bachelor toe te passen. Tijdens dit project heeft de begeleiding mij erg geholpen. Door de ervaring van mijn begeleider Kristof Cools, kon ik snel op weg geholpen worden. Ook wanneer ik ergens mee vast liep tijdens dit project ik vaak snel door hem geholpen worden. Voor deze hulp wil ik hem dan ook van harte bedanken. Tenslotte wil ik Rudi Santbergen bedanken voor de feedback tijdens het project.

Ik wens u veel plezier met het lezen van dit verslag!

Maarten Kooiman
Delft, 7 juli 2020

Samenvatting

In dit project is gewerkt aan een manier om de reflectie van het licht op de textuur van een zonnecel te berekenen. Deze reflectie is berekenend voor de verschillende hoeken van inval en uitval en omgezet in een reflectie matrix. In dit project is verder gewerkt aan een al bestaand wiskundig model. Dat model was in staat het door de verstrooiing ontstaande verre veld te berekenen. Dit model maakt gebruik van de methode van momenten, en past deze toe op eerder ontwikkelde integraal vergelijkingen, die volgen uit de wetten van Maxwell. Tijdens dit project is dit model aangepast zodat het ook bruikbaar werd voor het door ons gemodelleerde substraat, van het Asahi-U type. Ook is in dit project gewerkt aan een manier om de bekende data van het Asahi-U substraat om te zetten naar een wiskundig model. Dit is gedaan door het Asahi-U substraat om te zetten naar een graaf van knopen en takken, met behulp van het programma GMSH. Vervolgens is gewerkt aan een manier om de berekende data van het verre veld om te verwerken tot de reflectie matrices. Dit is gedaan met behulp van een numerieke methode om integralen uit te werken. Tenslotte is de reflectie matrices opgesteld, waaruit de reflectie van het licht op het substraat kan worden afgelezen. Deze opgestelde matrix is anders dan de verwachting niet symmetrisch. De waardes verschillen ook van de waardes die gevonden zijn met behulp van een empirische meting.

Inhoudsopgave

1	Introductie Probleemstelling	6
2	Theoretisch kader	8
2.1	Elektromagnetisme	8
2.1.1	Maxwells vergelijkingen	8
2.1.2	Relatie met het medium	9
2.1.3	Randvoorwaarden	10
2.1.4	Potentiaal	10
2.1.5	Greense functies	11
2.1.6	Boundary integral equation methode	12
2.1.7	PMCHWT vergelijkingen	14
2.1.8	Frequentie domein	14
2.2	Methode van momenten	17
3	Het modelleren van de textuur van de zonnecel	19
3.1	Mesh	20
3.2	Testsubstraat	20
3.3	Asahi-U substraat	21
3.4	Conclusies	21
4	Aanpassingen aan het model	23
4.1	Aanpassingen voor de materiaal keuze	23
4.2	Aanpassingen aan de lichtbron	24
4.3	Resultaten	24
5	Verstrooiing van het licht	26
5.1	Berekening van het verre veld	26
5.2	De berekening van de verstrooiing	26
5.3	Nauwkeurigheid van de numerieke methode	28
5.4	Reflectie Matrices	32
5.5	Conclusies	33
6	Resultaten	34
6.1	Reflectie matrix	34
6.2	Vergelijking met eerder uitgevoerd empirisch onderzoek	35
7	Discussie	38
7.1	Afrondingsfouten numerieke methodes	38
7.2	Beperkingen wiskundig model	39

8	Conclusies	40
9	Aanbevelingen en vervolg onderzoek	41
9.1	Onderzoek naar de symmetrie van de reflectie matrix	41
9.2	Vervolg onderzoek naar de nauwkeurigheid van het model	41
9.3	Licht bron	42
9.4	Data set	42

Symbololen

Symbol	Beschrijving
t	Tijd
r	Positie vector
e	Elektrisch veld intensiteit
d	Elektrische flux dichtheid
j	Elektrische stroom dichtheid
ρ	Elektrische ladingdichtheid
ϵ	Permittiviteit
h	Magnetisch veld intensiteit
b	Magnetisch flux dichtheid
m	Magnetische ladingdichtheid
μ	permeabiliteit
κ	Magnetische ladingdichtheid
η	karacteristieke impedantie
k	golfgetal

Tabel 1: Natuurkundige symbolen

Symbol	Beschrijving
∇	Gradiënt
$\nabla \cdot$	Divergentie
$\nabla \times$	Curl
δ_t	Partieel afgeleide
\mathcal{T}	Tijd domein EFIE operator
\mathcal{K}	Tijd domein MFIE operator
\mathcal{T}_k	Frequentie domein EFIE operator
\mathcal{K}_k	Frequentie domein MFIE operator

Tabel 2: Wiskundige symbolen

1 Introductie Probleemstelling

Motivatie Het belang van duurzame energie bronnen behoeft geen lang betoog. De fossiele brandstoffen vervuilen de aarde en raken op den duur op. Zonne-energie is een van de belangrijkste duurzame energiebronnen. Bij zonne-energie wordt de energie uit het licht van de zon omgezet tot voor de mens bruikbare elektrische energie. Dit proces vindt plaats in zonnecellen. Het is mogelijk om meer energie uit zonnepanelen te halen door het rendement van zonnecellen te verbeteren. In dit project is gewerkt aan een bestaand wiskundig model, namelijk het GENPRO4 model, dat het gedrag van het licht berekend. Dit gebruikte model is in staat om de efficiëntie van de zonnecel te berekenen. Er is in dit project gekeken naar een manier om het bestaande model te verbeteren. Specifieker is er gekeken naar de manier waarop de verstrooiing van het licht op het oppervlak van het textuur van de zonnecel wordt berekend. Deze reflectie wordt berekend als functie van de hoek van inval en de verstrooiingshoek en opgeslagen in een matrix. Echter is deze berekende matrix niet symmetrisch, terwijl dit natuurkundig gezien wel de verwachting is. [6] Vanwege de reciprociteit. Tijdens dit project is gewerkt aan een andere manier om de reflectie matrix te berekenen. Dit is gedaan door de verstrooiing te simuleren door een door de begeleider eerder ontwikkeld wiskundige model wat de stroming over het oppervlakte berekend onder invloed van een elektromagnetische bron.

Deelvragen

- Voor het gebruikte model is het van belang dat de bestaande textuur omgezet wordt naar bruikbare informatie voor het model. De eerste deelvraag richt zich dan ook op deze vraag, Hoe kan de informatie van de textuur omgezet worden naar data die voor het model bruikbaar is?
- Vervolgens moeten de omstandigheden van het gebruikte model aangepast worden om toepasbaar te zijn in onze situatie. De volgende deelvraag zal beantwoord moeten worden, hoe moet het bestaande model aangepast worden aan de gebruikte textuur?
- Verder zal met behulp van de stroming die berekend is de verstrooiing van het licht moeten berekend worden. De volgende vragen zijn hiervoor van belang, Hoe moet kan de verstrooiing van het licht berekend worden met het bestaande model? Levert de gebruikte methode goed resultaat?
- Tenslotte zal er met behulp van de berekende verstrooiing, de reflectie matrices opgesteld moeten worden. Dit stelt ons voor de vraag hoe we dit

moeten gaan doen. Ook is de vraag van belang in hoeverre onze reflectie matrices overeenkomen met de werkelijkheid.

2 Theoretisch kader

In dit hoofdstuk wordt de theorie die gebruikt is voor het project behandeld. De theorie die nodig is om het project optimaal te begrijpen is kernachtig uitgelegd. De overige theorie wordt kort benoemd en de lezer wordt door verwezen naar relevante bron. De voornaamste bronnen die gebruikt zijn voor het opstellen van het theoretische kader zijn, het boek Theory and Computation of Electromagnetic Fields van Jian-Ming Jin en het promotie onderzoek van Yves Behein genaamd Advanced Discretization and Preconditioning Techniques for Electromagnetic Boundary Integral Equations. Hierom zal dit stuk theorie veel overlap hebben met de bronnen, dit is aangegeven met de voetnoten.

2.1 Elektromagnetisme

2.1.1 Maxwells vergelijkingen

Het is noodzakelijk om ons eerst te verdiepen in het elektromagnetisme voordat we het wiskundige model kunnen begrijpen.. Zichtbaar licht bestaat namelijk uit elektromagnetische straling. In het elektromagnetisme wordt de reactie tussen materie en een elektromagnetisch veld onderzocht. [1] Maxwell(1831-1879) legde de basis voor het elektromagnetisme.[4] De naar hem vernoemde wetten beschrijven de onderlinge relaties tussen het elektrische-en magnetische-veld. Begrip van deze vergelijkingen is dus cruciaal voor het model. Zoals eerder gezegd beschrijven de onderlinge relaties in het elektromagnetisch veld. Deze velden worden gecreëerd door de elektrische stroom j en de elektrische lading ρ . De vergelijkingen van Maxwell zijn zowel in differentiaal als integraal vergelijkingen te schrijven. [4] In dit project is gebruik gemaakt van de Maxwell vergelijkingen in differentiaal vorm. Dit geeft de volgende vergelijkingen.[1]

$$\nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (2)$$

Vergelijking (1) geeft de relatie aan tussen het elektrisch veld e en de dichtheid van de magnetische flux b . In andere woorden, de kracht van het elektrische veld bepaald de uitstroom van het magnetische veld. Vergelijking 2 beschrijft de relatie tussen de intensiteit van het magnetische veld h en de elektrische flux dichtheid, e . Hierin speelt de stroom j ook een rol. [1]

$$\nabla \cdot \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4)$$

Vergelijking (3) laat de relatie zien tussen de elektrische flux \mathbf{d} en de ladingdichtheid ρ . Vergelijking (4) beschrijft dat de magnetische flux \mathbf{b} divergentie vrij is. Dit komt omdat er natuurkundig gezien geen magnetische lading bestaat. [4] Al hoewel ze natuurkundig niet bestaan kunnen we de magnetische stroom dichtheid \mathbf{m} en magnetische lading dichtheid κ toevoegen. Hierdoor worden de vergelijkingen symmetrisch en dit is wenselijk voor het berekenen. [1] Dit geeft dan de volgende vergelijkingen.

$$\nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{m}(\mathbf{r}, t) \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \kappa(\mathbf{r}, t) \quad (8)$$

2.1.2 Relatie met het medium

Elektromagnetische velden gedragen zich anders in verschillende media. Dit komt doordat materiaal eigenschappen ook een invloed uit oefenen op de elektromagnetische velden. Een eenvoudig voorbeeld hiervan is de geleidbaarheid van het materiaal, het ene materiaal geleidt stroom erg goed en andere materialen doen dat helemaal niet. De vergelijkingen die de relatie tussen het elektromagnetisch veld en het medium weergeven noemen wij de n constitutieve vergelijkingen. Er zijn drie bekende constitutieve vergelijkingen voor elektromagnetische velden. [4] De drie vergelijkingen zijn de volgende: .

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \epsilon(\mathbf{r}, t) * \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \quad (9)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \mu(\mathbf{r}, t) * \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) \quad (10)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) * \sigma(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \quad (11)$$

De eerste twee vergelijking laat een relatie zien tussen de elektrische/magnetische flux dichtheid \mathbf{d} en het elektrisch/magnetisch veld \mathbf{e} . De derde vergelijking is de geleidbaarheid van het materiaal. De geleidbaarheid is niet gebruikt in het wiskundige model, maar is voor de volledigheid genoemd. Verder zijn de drie parameters ϵ , μ en σ afhankelijk van de materiaal keuze. Als deze parameters niet afhankelijk zijn van tijd noemen we het materiaal stationair. En bij een homogeen materiaal zijn deze parameters niet afhankelijk van de positie vector \mathbf{r} . [4]

2.1.3 Randvoorwaarden

Voor het opstellen van het model moeten wij nauwkeurig kijken naar de voorwaarde op de rand. We kijken naar het volgende, een domein $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, en oppervlakte Γ en normaal vector \hat{n} die naar buiten werkt. We definiëren het volgende $\forall r \in \Gamma$

$$e^+(r, t) = \lim_{r' \rightarrow r} e(r', t) \text{ for } r' \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \quad (12)$$

$$e^-(r, t) = \lim_{r' \rightarrow r} e(r', t) \text{ for } r' \in \Omega \quad (13)$$

[1] Op dezelfde manier worden h, d en b gedefinieerd. [1]. De volgende voorwaarden gelden als er een bron op Γ aanwezig is, [3]

$$\hat{n} \times e^+ - \hat{n} \times e^- = -m \quad (14)$$

$$\hat{n} \times h^+ - \hat{n} \times h^- = -j \quad (15)$$

$$\hat{n} \cdot d^+ - \hat{n} \cdot d^- = \rho \quad (16)$$

$$\hat{n} \cdot d^+ - \hat{n} \cdot d^- = \kappa \quad (17)$$

Deze voorwaarden zijn de randvoorwaarden die gebruikt zijn in het wiskundige model. Wanneer er sprake is van een equivalente stroming dan gelden de volgende vergelijkingen

$$j_{eq}(r, t) = \hat{n} \times h(r, t) \quad r \in \Gamma \quad (18)$$

$$m_{eq}(r, t) = -\hat{n} \times e(r, t) \quad r \in \Gamma \quad (19)$$

Voor meer details over de randwaarden en equivalente stromingen verwijzen wij de lezer naar paragraaf 1.2.3 van de thesis van Beghein.

2.1.4 Potentiaal

In het model is gebruik gemaakt van de elektromagnetische potentialen. In de thesis van Beghein is de methode beschreven hoe de potentialen berekend worden. [1]. Wij zullen deze methode hier kort weergeven. Om de potentialen te vinden nemen we aan dat het veld geen magnetische ladingen en stroming bevat. We krijgen dan de volgende vergelijking $\nabla \cdot b(r, t) = 0$ Omdat we hebben dat b divergentie vrij is, bestaat het volgende potentiaal.

$$b(r, t) = \nabla \times a(r, t)$$

Als we deze potentiaal invullen in de eerste Maxwell vergelijking (1) krijgen we de volgende vergelijking.

$$\nabla \times e(r, t) = -\partial_t \nabla \times a(r, t) \quad (20)$$

)) . We kunnen deze vergelijking omschrijven naar de volgende vergelijking

$$\nabla \times (\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) + \partial_t \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)) \quad (21)$$

Waaruit blijkt dat er een potentiaal $\phi(\mathbf{r}, t)$ bestaat waarvoor de volgende vergelijking geldt.

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \partial_t \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) - \nabla \phi(\mathbf{r}, t) \quad (22)$$

Deze potentialen zijn niet uniek, en daarom kan ervoor gekozen worden dat de potentialen aan de Lorenz gauge voorwaarde voldoen. [1] Voor meer uitleg hierover zie de thesis van Beghein. Dan voldoen de potentialen aan de volgende voorwaarde

$$\nabla^2 \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial_t^2}{c^2} \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = -\mu \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (23)$$

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial_t^2}{c^2} \phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (24)$$

De andere potentialen worden op dezelfde manier gevonden, alleen nu wordt er aangenomen dat er geen elektrische ladingen en stromingen zijn. Dit geeft de volgende vergelijkingen.

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \quad (25)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) - \nabla \psi(\mathbf{r}, t) \quad (26)$$

Met deze gegevens kunnen de volgende vergelijkingen worden opgesteld. [1]

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) - \nabla \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \quad (27)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) - \nabla \psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) \quad (28)$$

2.1.5 Greense functies

Een explicite oplossing voor de potentiaal functies kan berekend worden met een Greense functie. [1] Voor de explicite oplossing gaan we kijken naar de volgende vergelijking.

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial_t^2}{c^2} G(\mathbf{r}, t) = -\delta(\mathbf{r})\delta(t) \quad (29)$$

De explicite oplossing in een oneindig domein in \mathbb{R}^3 is de volgende Greense functie[1]

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta(t - |\mathbf{r}|)/c}{4\pi|\mathbf{r}|} \quad (30)$$

Met behulp van deze Greense functie kunnen de potentialen op een expliciete manier opgelost worden. Dit geeft de volgende vergelijkingen voor de potentialen [1]

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \mu \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)}{4\pi R} dV' \quad (31)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{4\pi R} dV' \quad (32)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}', t - R/c)}{4\pi R} dV' \quad (33)$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\kappa(\mathbf{r}', t - R/c)}{4\pi R} dV' \quad (34)$$

waar $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ betekend

2.1.6 Boundary integral equation methode

In het model is gebruik gemaakt van een zogenaamde Boundary integral equation. Hier wordt het elektromagnetisch veld binnen een homogeen domein berekend aan de hand van de stroom $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ op de rand van het domein. In dit homogene domein is de permittiviteit ϵ en de permeabiliteit μ . Op de rand Γ krijgen we de volgende vergelijkingen voor het elektromagnetisch veld. [1]

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) - \nabla \phi(\mathbf{r}, t) = -\mu \partial_t \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)}{4\pi R} ds' + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Gamma} \frac{\int_{-\infty}^{t-R/c} \nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau) d\tau}{4\pi R} ds' \quad (35)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)}{4\pi R} ds' \quad (36)$$

Door het limit van \mathbf{r} naar Γ te nemen, krijgen we de volgende vergelijkingen. [1]

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}^{\pm}(\mathbf{r}, t) = \eta (\mathcal{T}\mathbf{j})(\mathbf{r}, t) \quad (37)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{h}^{\pm}(\mathbf{r}, t) = -(\mathcal{K}\mathbf{j})(\mathbf{r}, t) \pm \frac{1}{2} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (38)$$

$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ is de Karakteristieke impedantie van het medium. De operator \mathcal{T} wordt de Electric Field Integral Equation (EFIE) genoemd. Hij is als volgt gedefinieerd [1]

$$\mathcal{T}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{T}_s \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{T}_h \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (39)$$

$$\mathcal{T}_s \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \int_{\Gamma} \frac{\partial_t \mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)}{4\pi R} ds' \quad (40)$$

$$\mathcal{T}_h \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = c \hat{\mathbf{n}} \times p.v. \int_{\Gamma} \nabla \frac{\int_{-\infty}^{t-R/c} \nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') dt'}{4\pi R} ds' \quad (41)$$

Verder hebben we ook nog een Magnetic Field Integral equation (MFIE), die is als volgt gedefinieerd,

$$\mathcal{K} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\hat{\mathbf{n}} \times p.v. \int_{\Gamma} \nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)}{4\pi R} ds' \quad (42)$$

Het geval van een magnetische stroom kan op dezelfde manier behandeld worden. [1]. We krijgen het volgende stelsel vergelijkingen wat gebruikt is om de vergelijkingen van het model af te leiden.

$$\begin{pmatrix} -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}^{\pm} \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{h}^{\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{K} \pm \frac{1}{2} & -\eta \mathcal{T} \\ \frac{1}{\eta} \mathcal{T} & -\mathcal{K} \pm \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}^{\pm i} \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{h}^{\pm i} \end{pmatrix} \quad (43)$$

Als de stroming equivalent is, dan gelden de onderstaande vergelijkingen. Waarin \mathbf{e}^{i+} en \mathbf{h}^{i+} het elektromagnetisch veld dat uitgestraald wordt door bronnen buiten Ω . [1]

$$\begin{pmatrix} -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}^{+} \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{h}^{+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{K} + \frac{1}{2} & -\eta \mathcal{T} \\ \frac{1}{\eta} \mathcal{T} & -\mathcal{K} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}^{+} \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{h}^{+} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}^{i+} \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{h}^{i+} \end{pmatrix} \quad (44)$$

Als we kijken naar de elektrische en magnetische straling, die gegenereerd wordt door bronnen in Ω respectievelijk, \mathbf{e}^{i-} en \mathbf{h}^{i-} , dan krijgen we de volgende vergelijking.[1] Aangezien de vergelijkingen nu het elektromagnetisch veld aan de binnenkant van het object beschrijven, is met het accent teken aangegeven dat de waarde geldt voor de binnenkant van het object.

$$\begin{pmatrix} -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}^{-} \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{h}^{-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}' + \frac{1}{2} & \eta' \mathcal{T}' \\ -\frac{1}{\eta'} \mathcal{T}' & \mathcal{K}' + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}^{-} \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{h}^{-} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}^{i-} \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{h}^{i-} \end{pmatrix} \quad (45)$$

Met een van deze integraal vergelijkingen kunnen wij nog niet de ontstaande verstrooiing berekenen. Dit komt doordat er rekening gehouden moet worden met zowel de buiten als de binnenkant van het object. De zogenaamde Poggio-Miller-Chan-Harrington-Wu-Tsai (PMCHWT) kan dit wel. In de volgende paragraaf kijken we naar die vergelijking.

2.1.7 PMCHWT vergelijkingen

Met de PMCHWT vergelijking stimuleren wij de verstrooiing van het licht.[1] De vergelijkingen zijn als volgt afgeleid. De vergelijkingen zijn afgeleid voor een diëlektrisch voorwerp Ω , met permittiviteit ϵ' en permeabiliteit μ' . Verder geldt dat er geen bron is in Ω . [1] Dan geldt dat er geen stroom loopt over Γ , dus dan geldt volgens de randvoorwaarden dat, $\hat{n} \times e^+ = \hat{n} \times e^-$ en $\hat{n} \times h^+ = \hat{n} \times h^-$. Aangezien we de verstrooiing voor de buitenkant van het object willen berekenen vervangen wij in vergelijking 45 e^- en h^- voor e^+ en h^+ . Vervolgens trekken wij vergelijking 44 van vergelijking 45 af en krijgen wij de correcte vergelijking.

$$\begin{pmatrix} -\hat{n} \times e^{i+} \\ \hat{n} \times h^{i+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{K} + \mathcal{K}' & \eta\mathcal{T} + \eta'\mathcal{T}' \\ -\frac{1}{\eta}\mathcal{T} - \frac{1}{\eta'}\mathcal{T}' & \mathcal{K} + \mathcal{K}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{n} \times e^+ \\ \hat{n} \times h^+ \end{pmatrix} \quad (46)$$

Met deze vergelijkingen zijn wij in staat om het verstrooide elektromagnetische veld te berekenen, en kunnen we hiermee de reflectie van het textuur berekenen. In het gebruikte wiskundige model is dit gedaan in het frequentie domein. In de volgende paragraaf zal worden uitgelegd hoe er getransformeerd wordt van het tijd domein naar het frequentie domein. Aangezien wij geïnteresseerd zijn in de symmetrie van de reflectie matrix, willen wij nog noemen dat dit stelsel op een symmetrische manier geschreven kan worden. Dan krijgen wij het volgende stelsel

$$\begin{pmatrix} \hat{n} \times h^{i+} \\ -\hat{n} \times e^{i+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\eta}\mathcal{T} - \frac{1}{\eta'}\mathcal{T}' & \mathcal{K} + \mathcal{K}' \\ \mathcal{K} + \mathcal{K}' & \eta\mathcal{T} + \eta'\mathcal{T}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{n} \times e^+ \\ \hat{n} \times h^+ \end{pmatrix} \quad (47)$$

2.1.8 Frequentie domein

De vergelijkingen van Maxwell die nu zijn opgesteld zijn afhankelijk van de tijd en de plaats r . Door middel van een Fouriertransformatie kunnen wij dit om zetten naar vergelijkingen afhankelijk van de frequentie ω en de plaats r . [4] Dit is wenselijk omdat wij in het wiskundige model de verstrooiing berekenen voor een vastgestelde frequentie, en hebben wij hierdoor een dimensie minder, en omdat het lineaire vergelijkingen zijn.

$$\mathcal{F}(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-i\omega t} dt \quad (48)$$

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} * \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (49)$$

Vergelijking (48) laat zien hoe je de fouriertransformatie van de functie $f(t)$ berekend. Het omgekeerde berekenen is ook mogelijk. De fouriergetransformeerde $\mathcal{F}(\omega)$ kan door middel van de vergelijking (49) de bijbehorende functie $f(t)$ weer terug berekend worden.

Door de fouriertransformatie toe te passen op de vergelijkingen van Maxwell, krijgen wij deze vergelijkingen in het frequentie domein, en zijn deze vergelijkingen afhankelijk van de frequentie in plaats van de tijd. Door de inverse Fouriertransformatie is het mogelijk om de waarden van de verschillende grootheden te berekenen afhankelijk van een specifieke tijd. Omdat de fouriertransformatie van $\frac{d}{dt}f(x,t)$ gelijk is aan $i\omega F(x,\omega)$. Worden de Maxwell vergelijkingen in het frequentiedomein de volgende vergelijkingen.[1]

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) - \mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega) \quad (50)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) \quad (51)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = P(\mathbf{r}, \omega) \quad (52)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = K(\mathbf{r}, \omega) \quad (53)$$

Verder is het nog nodig dat we van de van de constitutieve vergelijkingen, ook de fouriertransformatie nemen. We krijgen dan de onderstaande vergelijkingen. Waar ϵ en μ vergelijkingen zijn afhankelijk van ω . Deze worden vaak benaderd als constanten. [1].

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon * \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (54)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \mu * \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \quad (55)$$

Deze constitutieve vergelijkingen substitueren wij in de Maxwells vergelijkingen, en dat geeft de onderstaande vergelijkingen [1]

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) - \mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega) \quad (56)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \epsilon \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) \quad (57)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = P(\mathbf{r}, \omega) \quad (58)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = K(\mathbf{r}, \omega) \quad (59)$$

Het grote verschil tussen beide domeinen is de Greense functie. De potentialen en de integraal representaties worden op dezelfde manier berekend. [1] De Greense functie voldoet nu aan de volgende vergelijking

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} G(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}) \quad (60)$$

$$G(\mathbf{r}) = \frac{e^{-ik|\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}|} \quad (61)$$

Waar $k = \frac{\omega}{c}$

We krijgen de volgende rand integraal operators, [1]

$$(\mathcal{T}_k \mathbf{J})(\mathbf{r}, \omega) = \mathcal{F}\{\mathcal{T} \mathbf{J}\}(\mathbf{r}, \omega) \quad (62)$$

$$\mathcal{T}_k \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = (\mathcal{T}_{s,k} \mathbf{J})(\mathbf{r}, \omega) + \mathcal{T}_{h,k} \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) \quad (63)$$

Expliciet uitgeschreven geeft het de volgende operatoren [1]

$$\mathcal{T}_{s,k} \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = -jk \hat{\mathbf{n}} \times \int_{\Gamma} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \mathbf{J}(\mathbf{r}', \omega) ds' \quad (64)$$

$$(\mathcal{T}_{s,k} \mathbf{J})(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{jk} \hat{\mathbf{n}} \times p.v. \int_{\Gamma} \nabla \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \nabla' \mathbf{J}(\mathbf{r}', \omega) ds' \quad (65)$$

$$(\mathcal{K}_k \mathbf{J})(\mathbf{r}, \omega) = -\hat{\mathbf{n}} \times p.v. \int_{\Gamma} \nabla \times \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \mathbf{J}(\mathbf{r}', \omega) ds' \quad (66)$$

Voor het frequentie domein wordt dan de elektrisch veld integraal vergelijking (FD-FIE) [1]

$$\eta(\mathcal{T}_k \mathbf{J})(\mathbf{r}, \omega) = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}, \omega) \quad (67)$$

De magnetische veld integraal vergelijking (FD-MFIE) voor het frequentie domein is nu als volgt ge-definieert [1]

$$(\mathcal{K}_k \mathbf{J})(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{2} \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}, \omega) \quad (68)$$

Dit geeft de gebruikte frequentie domain PMCHWT vergelijking

$$\begin{pmatrix} -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{i+} \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{i+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_k + \mathcal{K}'_k & \eta \mathcal{T}_k + \eta' \mathcal{T}'_k \\ -\frac{1}{\eta} \mathcal{T}_k - \frac{1}{\eta'} \mathcal{T}'_k & \mathcal{K}_k + \mathcal{K}'_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^+ \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^+ \end{pmatrix} \quad (69)$$

Deze PMCHWT vergelijking voor het frequentie domein is de uiteindelijke vergelijking die gebruikt is voor het berekenen van de elektromagnetische velden in het wiskundige model. Deze integraal vergelijking is opgelost met de methode of moments, waarover in de volgende paragraaf gesproken wordt.

2.2 Methode van momenten

In het gebruikte wiskundige model worden de PMCHWT integraal vergelijkingen opgelost met de methode van momenten. Bij deze numerieke methode wordt de rand, Γ , van de textuur opgedeeld in kleine objecten. Dit is in ons model gedaan met behulp van het computer programma GMSH. Vervolgens wordt de functie op de deelgebieden benaderd door een zogenaamde basis functie. De som van al deze basis functies op de verschillende deelgebieden geeft uiteindelijk de oplossing voor de integraal vergelijking. In deze paragraaf zal de basis van deze methode uitgelegd worden aan de hand van het boek van Jin. Voor de volledige uitleg verwijzen wij naar hoofdstuk 10, The methode of moments, in het boek van Jian-Ming Jin.[4]

De methode van momenten is uitgelegd aan de hand van een eenvoudig elektrostatisch probleem. We hebben een metalen object S en een potentiaal $\phi(\mathbf{r})$. Dit potentiaal is gevonden met behulp van de Greense functie.[4] Dit geeft de onderstaande vergelijking

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \int_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho_s(\mathbf{r}') dS' \quad (70)$$

Waarin $\rho_s(\mathbf{r}')$ de ladingdichtheid van het oppervlakte is. $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ is de Greense functie en als volgt gedefinieerd [4]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (71)$$

Aangezien $\phi(\mathbf{r})$ een constante moet zijn op een metalen object hebben wij dat [4]

$$\Phi = \int \int_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho_s(\mathbf{r}') dS' \quad \mathbf{r} \in S \quad (72)$$

Vervolgens hebben wij een integraal vergelijking waarin maar een onbekende is, namelijk $\rho_s(\mathbf{r})$. [4] Dit soort vergelijkingen kunnen opgelost worden met de methode van momenten, en wij laten hier zien hoe dit kan worden aangepakt. De functie $\rho_s(\mathbf{r})$ heeft een oneindige vrijheidsgraad en kan daarom niet opgelost worden door een computer, en daarom wordt deze functie benaderd. Dit gebeurt op een eindige deelruimte met behulp van de methode van momenten. De functie wordt benaderd door basis functies. In ons geval ziet het er als volgt uit [4]

$$\rho_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N c_n v_n(\mathbf{r}') \quad (73)$$

Hier zijn $v_n(\mathbf{r}')$ de basis functies, en C_n de onbekende bijbehorende coëfficiënten. De vrijheidsgraad van $\rho_s(\mathbf{r})$ is nu nog maar N . [4] Deze basis functies kunnen over het hele domein opgesteld worden wanneer dit regelmatig is.[4] Dit is bij het textuur wat wij gebruiken echter niet het geval en daarom moeten wij het domein in kleine regelmatige deelgebieden opdelen. In ons geval is dit gedaan met GMSH en levert dit de kleine driehoekjes op. Wanneer wij dit domein in stukjes verdelen krijgen wij de volgende vergelijking. [4]

$$\sum_{n=1}^N c_n \int \int_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') v_n dS' = \Phi \quad \mathbf{r} \in S \quad (74)$$

We kunnen de vergelijking nog steeds niet oplossen, omdat we niet weten wat c_n moet worden. We moeten de vergelijking nog omzetten in een matrix vergelijking. Dit doen we door beide kanten te vermenigvuldigen met een set van functies $w_1(\mathbf{r}), w_2(\mathbf{r}), \dots, w_N(\mathbf{r})$ en we integreren over het oppervlakte S . [4] Dit geeft

$$\sum_{n=1}^N c_n \int \int_S w_m(\mathbf{r}) \int \int_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') v_n dS' dS = \int \int_S w_m(\mathbf{r}) \Phi dS \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (75)$$

In een compactere manier geeft dit [4]

$$\sum_{n=1}^N A_{mn} c_n = b_m \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (76)$$

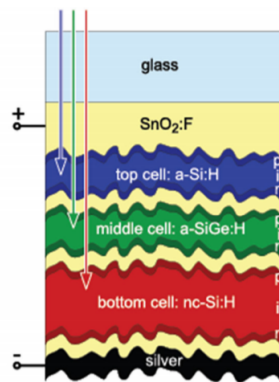
Waar A_{nm} is het geëvalueerde dubbele integraal aan de linkerkant en b_m het integraal aan de rechterkant. Deze vergelijking kan opgelost worden met behulp van een computer programma. Op een soort gelijke manier is de methode van momenten ook toegepast in het gebruikte wiskundige model.

3 Het modelleren van de textuur van de zonnecel

Voordat dat wij de optische eigenschappen van een textuur kunnen modelleren is het nodig dat er een model van de textuur van de zonnecel gemaakt wordt. In dit hoofdstuk zal daarom de volgende deelvraag beantwoord worden, hoe kan de informatie van de textuur omgezet worden naar data die voor het model bruikbaar is? In dit hoofdstuk kijken we alleen maar naar de vorm van het substraat, in het volgende hoofdstuk zullen we ook relevante materiaal eigenschappen bekijken.

Een doorsnee zonnecel is opgebouwd uit meerdere lagen.[6] In dit project is specifiek gekeken naar een commercieel verkrijgbare textuur, namelijk het Asahi-U type. Dit substraat bestaat uit glas met daaronder een laag $\text{SnO}_2 : \text{F}$ en wordt gebruikt in dunne-film silicium zonnecellen. Dit is een doorlatend textuur en is ongeveer 700 nanometer dik. [6]

De voor ons relevante eigenschappen van dit materiaal zijn goed gedocumenteerd. De textuur is eerder onderzocht met een atoomkracht-microscop[5], en de resultaten van dat onderzoek zijn verwerkt in dit onderzoek. Verder is de brekingsindex van het materiaal bekend, en zijn de verstrooiingseigenschappen ook eerder al onderzocht.[6] Voor het onderzoek is het dus van belang dat deze textuur wordt vertaald naar voor het model bruikbare informatie. Hiervoor is het substraat omgezet naar een graaf. Dit is gedaan met behulp van het programma GMSH, en wordt in de paragrafen hieronder breder uitgelegd.



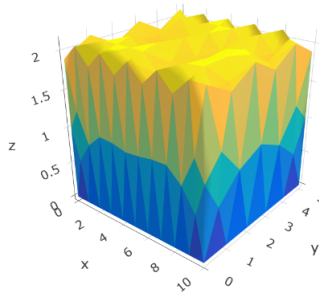
Figuur 1: Een schematische weergave van de dunne-film silicium zonnecel, afbeelding uit het artikel Genpro4 optical model for solar cell simulation and its application to multijunction solar cells[6]

3.1 Mesh

Voor het modelleren van de textuur is het computer programma GMSH gebruikt. Dit programma is in staat om objecten om te zetten in een graaf. Het programma vult het oppervlakte met kleine driehoekjes en benadert op die manier het object. Vervolgens wordt de methode van momenten uitgevoerd op de driehoekjes, om zo de processen te benaderen die plaatsvinden op het oppervlakte.

3.2 Testsubstraat

Tijdens dit project is de textuur op verschillende manieren gemaakt. Eerst is een sterke versimpeling van het substraat gemaakt om te testen of het wiskundige model ook werkt op dit testsubstraat. Bij het maken van dit testsubstraat is ook nog geen rekening gehouden met de daadwerkelijke afmetingen van het Asahi-U substraat. Het is als volgt gemaakt: eerst is met behulp van het programma GMSH een rechthoek gemaakt. Vervolgens is de mesh van dit programma overgezet naar bruikbare data voor het model in Julia. Het mesh bestand in Julia bestaat uit verschillende knooppunten en takken. De z-coördinaat van de knooppunten is vervolgens verhoogd of verlaagd om de piramide-textuur van het substraat na te maken. Dit leverde de onderstaande afbeelding als resultaat. Het was mogelijk om de simulaties te laten werken op het testsubstraat. De uitkomsten van deze simulaties zijn niet relevant voor ons project, omdat de afmetingen van het testsubstraat niet overeenkomen met de echte afbeeldingen van het substraat.



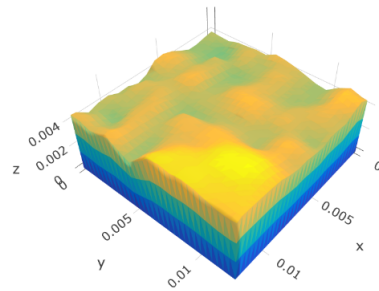
Figuur 2: Het testsubstraat

Wat verder nog opvalt aan de afbeelding is het feit dat de driehoeken erg langgerekt zijn. Het is niet wenselijk voor de methode van momenten dat de driehoeken erg lang gerekt zijn. In het echte substraat is daarom gewerkt met

kleinere driehoeken. Aangezien dit testsubstraat verder niet meer gebruikt is, beïnvloedt dit verder niet de resultaten.

3.3 Asahi-U substraat

Vervolgens zijn de bekende eigenschappen van het Asahi-U substraat verwerkt in het wiskundige model. Het eerste idee was om het gecreëerde testsubstraat aan te passen aan de data om zo het Asahi-U substraat te modelleren. Dit bleek echter niet te werken. Dit kwam door een beperking in het programma GMSH, dit programma maakt namelijk geen recht raster van knooppunten, wat wel nodig is bij het creëren van de juiste piramide structuur. Het is gelukkig mogelijk om in het programma Julia een rechthoek te maken met een recht raster te maken en vervolgens van deze rechthoeken een balk te maken. Vervolgens werd deze balk aangepast zodat het overal de gemeten hoogte had. De grootste beperking van de gebruikte methode was de hoeveelheid data die gebruikt werd. Hierdoor kon de simulatie niet uitgevoerd worden op de gebruikte computer en nam de simulatie tijd enorm toe, waardoor uiteindelijk het substraat 3 keer gehalveerd is. Ook is de dikte van het substraat verminderd om het werkgeheugen minder te belasten. Dit is ook van belang geweest voor de simulatie tijd, omdat het geen lineair model is, waardoor de berekeningstijd exponentieel toeneemt als de dataset groter wordt. De onderstaande afbeelding geeft de simulatie weer van het uiteindelijke gebruikte model van het Asahi-U substraat.



Figuur 3: Het gebruikte gedeelte van het Asahi-U substraat

3.4 Conclusies

In dit hoofdstuk hebben we laten zien hoe we de data van het Asahi-U substraat hebben omgezet naar een computer model waarmee wij kunnen werken. Dit is

gedaan met behulp van de computer programma's GMSH en Julia. Uiteindelijk zijn is de textuur van het Asahi-U substraat precies omgezet naar een bruikbaar model. We hebben alleen om data te besparen maar een klein gedeelte van het substraat gemodelleerd.

4 Aanpassingen aan het model

Het gebruikte wiskundige model berekend aan de hand van de frequentie domein PMCHWT vergelijking, het uitgestraalde elektromagnetisch veld. Het model berekend het uitgestraalde elektromagnetisch veld aan de hand van de elektrische stroming die over het oppervlakte loopt. In het volgende hoofdstuk zal gefocust worden op de manier hoe het uitgestraalde elektromagnetisch veld berekend wordt, eerst zullen wij ons focussen op het berekenen van de oppervlakte stroming. Voor het berekenen van de juiste oppervlakte stroming is het van belang dat eerst het juiste object gemodelleerd wordt, hier in het vorige hoofdstuk naar gekeken. Nadat dat gedaan is, moeten vervolgens de parameters die afhangen van de materiaal keuze aangepast worden. Ook is er gekeken naar de manier waarop de lichtbron gemodelleerd is.

4.1 Aanpassingen voor de materiaal keuze

Het gebruikte model gaat uit van twee objecten. Het object Ω waarvoor de volgende parameters van belang zijn, κ' het golf getal van het licht in dit medium en η' de impedantie van het medium. Het tweede object wat van belang is, is het vacuüm rondom Ω . Hiervoor zijn de parameters κ , het golfgetal en η de impedantie van belang.

Het golfgetal is als volgt gedefinieerd $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, en hangt dus af van de golflengte van het licht, λ . In het gebruikte model berekenen we eerst de reflectie voor het licht met de standaard golflengte van $600 * 10^{-9}$ meter. Dus is het golfgetal voor het vacuüm bekend. Ook de impedantie voor het vacuüm is ook een voor ons bekende waarde. Er geldt namelijk $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$. Verder zijn de waardes van de permeabiliteit en primitiviteit van het vacuüm bekend.

Het golfgetal en de impedantie veranderen wanneer de golf van het ene materiaal wisselt naar het andere. Deze verandering hangt af van de (complexe) brekingsindex, $n = \alpha + i\beta$, van het materiaal. Deze brekingsindex voor het materiaal Glas/ SiO_2 : F is bekend. Hiervoor hebben we ook nog de volgende relatie nodig, namelijk dat $k = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$. Waar $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ de lichtsnelheid in het medium is. Vervolgens moet gelden dat de Green's functies op de rand gelijk zijn. Dus geldt de volgende vergelijking

$$e^{-\frac{\omega}{c_0} n R i} = e^{-k R i} \quad (77)$$

Dus weten we dat $\frac{\omega}{c_0} n = k$. Vervolgens nemen we aan dat ons substraat geen magnetische stroom door laat, dat wil zeggen $\mu_0 = \mu$. Met die aannamen leiden we vervolgens af dat $\epsilon = n^2 \sqrt{\epsilon_0}$. Met deze waardes kunnen we het golfgetal

en de impedantie van het textuur eenvoudig berekenen. Hiervoor hebben we alleen nog de waarde nodig van de frequentie ω , die volgt uit het feit dat $k = \frac{\omega}{c}$ dus weten we dat $c * k = \omega$. Deze waardes worden aangepast in de PMCHWT vergelijking en vervolgens passen we het model op het juiste substraat toe.

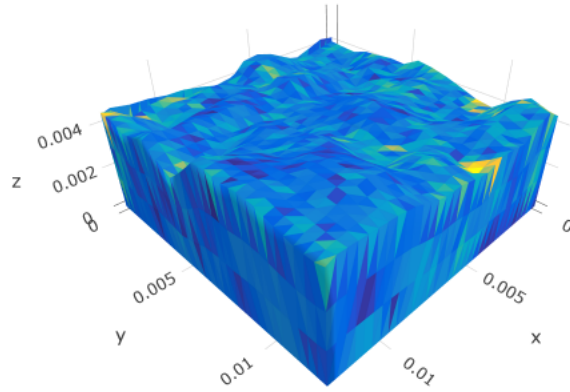
4.2 Aanpassingen aan de lichtbron

In de eerste versies van het model is gebruik gemaakt van een vlakke golf als lichtbron. De golf met een bepaald golfgetal k , is uitgezonden in een bepaalde richting en is oneindig groot, dat wil zeggen waar je ook op het domein kijkt de bijdrage van de golf is hetzelfde. Dit had echter als groot nadeel dat het hierdoor niet mogelijk is om de natuurkundige correctheid van het model te controleren. Dit komt doordat we de wet van energie behoudt niet kunnen toepassen. We weten namelijk dat de intensiteit van de gebruikte energie bron uiteindelijk even groot moet zijn als de intensiteit van de uitgestraalde energie. Wanneer dit ook het geval is in ons model bevestigd dit de correctheid hiervan. Voor meer informatie over vlakke golven verwijzen we de lezer door naar het boek *Theory and Computation of Electromagnetic Fields*, deel 1 hoofdstuk 4 *Theory and Computation of Electromagnetic Fields* van Jian-Ming Jin.[4]

Hierom is er besloten om met een ander soort energie-bron te modelleren. Er is gekozen voor een dipool energie bron. Dit bestaat uit een oneindig kleine bron, met een gekozen positie en richting.[4] Bij dit soort bronnen is het mogelijk om de totale energie te berekenen en op die manier de correctheid van het model te controleren. Het elektromagnetisch veld dat deze bron uitstraalt is rotatie symmetrisch rondom de bron. [4] Verdere achtergrond informatie over dit soort bronnen is niet nodig voor het optimaal begrijpen van dit project, en daarom verwijzen we de lezer door naar het eerder genoemde boek van Jian-Ming Jin, deel 1 paragraaf 2.3. [4]

4.3 Resultaten

Samenvattend hebben wij van het bestaande model de materiaal eigenschappen en de lichtbron moeten aanpassen zodat we de stroming over het oppervlakte van ons substraat konden berekenen. Nadat de textuur op een juiste wijze was gemodelleerd en deze aanpassingen waren doorgevoerd konden we dan ook de stroming over het oppervlakte berekenen. Dit resultaat is geplot, en hoe geler de kleur hoe groter de intensiteit is van het elektrische veld dat over ons textuur stroomt.



Figuur 4: Visualisatie van de stroming over het oppervlakte

Met behulp van de berekende stroming over het oppervlakte wordt het verre veld berekend, en met dat verre veld wordt de uiteindelijke verstrooiing van het licht berekend. In het volgende hoofdstuk zullen we hier nader op in gaan.

5 Verstrooiing van het licht

De textuur van een zonnecel is ontworpen om zo min mogelijk licht te reflecteren en zo veel mogelijk licht door te laten. De efficiëntie van de textuur kan dus bepaald worden door te kijken naar de verstrooiing van het licht. De verstrooiing van het licht is afhankelijk van de golflengte van het licht. In dit onderzoek is gekozen om te werken met een standaard golflengte van $600 \cdot 10^{-9}$ meter, en voor die golflengte zal dan ook de reflectie berekend worden. In deze paragraaf is uitgelegd hoe de verstrooiing van het licht is berekend. De verstrooiing van het licht wordt berekend aan de hand van het verre veld. Hierom zullen we eerst moeten kijken hoe wij het verre veld kunnen berekenen.

5.1 Berekening van het verre veld

Zoals eerder al aangegeven moet eerst het verre veld berekend worden voordat de reflectie berekend kan worden. Het elektromagnetisch veld dat gecreëerd wordt door een bron ver weg, wordt het verre veld genoemd.[4] Het model dat gebruikt is voor dit project, kan het verre veld berekenen. Het verre veld wordt berekend op punten die liggen op een bol van straal 1. Dit wordt gedaan in bol coördinaten. De azimut hoek θ van 0 naar π wordt opgedeeld in 50 stukjes en de zenit hoek ϕ van 0 naar 2π in 100 stukjes. Voor de ontstane punten wordt vervolgens het bijbehorende verre veld berekend.

5.2 De berekening van de verstrooiing

Nadat het verre veld berekend is, kan dit gebruikt worden om de verstrooiing te berekenen. De relatie tussen het verre veld en de totale reflectie van het licht is de onderstaande relatie

$$P(\theta, \phi) = \frac{|E(\theta, \phi)|^2}{\eta} \quad (78)$$

Hier is $P(\theta, \phi)$ het vermogen van het uitgestraalde licht en $E(\theta, \pi)$ het verre veld van de elektrische straling. Deze formule geeft ons de grootte van de het vermogen van het uitgestraalde licht. Vervolgens willen wij de grootte van de reflectie naar de verschillende hoeken berekenen dus gaan we de gebruikte formule normaliseren.

Door deze formule te integreren over een bol krijgen wij uiteindelijk de reflectie van het licht. Het verre veld is berekend in bolcoördinaten, en de reflectie

zal daarom ook in deze coördinaten worden berekend. Vandaar dat we gaan integreren over een bol vormig object. Het gebruik van bolcoördinaten stelt ons ook in staat om de reflectie te berekenen voor de verschillende hoeken. Zo kunnen we berekenen wat de reflectie is voor de hoek horizontale hoek ϕ en de verticale hoek θ . Om te kunnen integreren over een bolvormig object maken we eerst een mesh bestand van een bol aan met straal 1. Voor deze straal is gekozen omdat dit het makkelijkst rekt, en omdat de bol een stuk groter moet zijn dan het object om de reflectie te berekenen. Vervolgens wordt de integratie toegepast door middel van een aangepaste midpoint rule. Deze aangepaste methode gaan we vervolgens toepassen voor de onderstaande functie $P(\theta, \phi)$ en de bol Γ ,

$$P_{totaal} = \int_{\Gamma} \frac{|E(\theta, \phi)|^2}{\eta} ds \quad (79)$$

Vervolgens gaan we de midpoint rule aanpassen zodat wij deze kunnen toepassen op ons oppervlakte integraal. De oorspronkelijk midpoint rule is als volgt gedefinieerd. [2]

$$\int_{x_L}^{x_R} f(x) dx \approx (x_R - x_L) f\left(\frac{x_L + x_R}{2}\right) \quad (80)$$

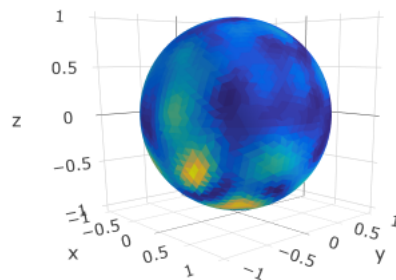
De samengestelde variant van deze methode wordt gebruikt als basis van de integratie methode. Wat hierbij gebeurt is dat we het oppervlakte van de driehoek gaan verdelen in kleine stukjes en we de Riemann som van het integraal gaan benaderen. We nemen om precies te zijn de som van de verschillende waarden van de functie voor het midden van dat oppervlak vermenigvuldigt met de grootte van het oppervlakte. Als we ons oppervlakte dus gaan opdelen in oneindig kleine integralen krijgen we een benadering van het integraal.

De volgende notatie wordt hierbij gehanteerd. Γ_{∞} is het oppervlakte van de bol, deze is opgebouwd uit kleine driehoekjes γ . Vervolgens hebben we nog de notatie voor het midden van het driehoekje γ , namelijk γ_{mid} . Het oppervlakte van het driehoekje wordt genoteerd met $d\gamma$. Dit geeft de volgende benadering van het integraal.

$$P_{totaal} = \int_{\Gamma_{\infty}} \frac{|E(\theta, \phi)|^2}{\eta} ds \approx \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty}} \frac{|E(\gamma_{mid})|^2}{\eta} * d\gamma \quad (81)$$

Hiermee is de waarde van de totale energie van het gereflecteerde licht berekend. Vervolgens wordt er gekeken naar de richting waarop het licht verstrooid wordt. Hiervoor wordt gekeken naar de waarden van de reflectie voor de individuele driehoekjes, dit geeft namelijk de waarde van de reflectie voor een bepaalde ϕ en θ . Deze waarde wordt vervolgens genormaliseerd omdat we

geïnteresseerd zijn naar welke hoeken het licht verstrooid wordt. Op basis van deze waarde kan de reflectie matrix opgesteld worden. Verder geeft deze methode ook een visualisatie van het gereflecteerde licht. Waarop te zien is hoe het licht gereflecteerd wordt naar de verschillende hoeken, hoe hoger de intensiteit van het licht hoe geler de kleur.

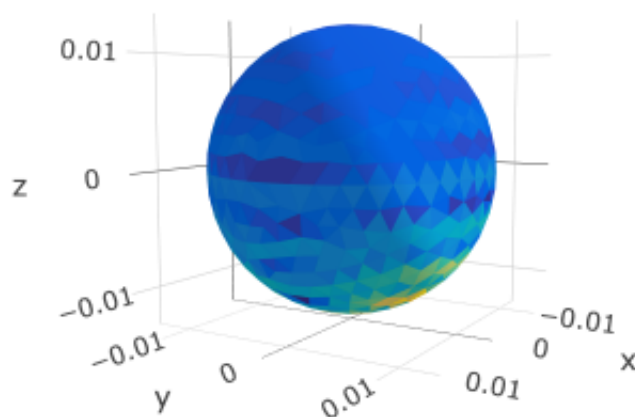


Figuur 5: Visualisatie van de reflectie

5.3 Nauwkeurigheid van de numerieke methode

Voor het het integraal $\int_a^b f(x)dx$, heeft de standaard samengestelde midpoint rule een maximale afrondingsfout van maximaal: $\frac{1}{24}M_2(b-a)h^2$. Waarbij $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$. [2] Dit geeft ons echter geen bruikbare inschatting van de nauwkeurigheid van de methode. Dit komt door de volgende factoren, de bekende afrondingsfout is gebaseerd op de methode toegepast op een één dimensionaal integraal, terwijl wij hier te maken hebben met een twee dimensionaal oppervlakte integraal. Ook weten we niet hoe groot de waarde van M_2 is. De functie die we gebruiken is namelijk al numeriek benaderd en hierdoor kunnen wij er geen afgeleide van nemen. Verder zijn er enkele afrondingsfouten ontstaan doordat dat het verre veld berekend is op een numerieke manier voor een aantal coördinaten. Hierdoor moest het uitrekenen van de functie, de best passende waarde gekozen worden. Hierdoor ontstonden ook afrondfouten waarvan we de grootte niet goed weten. Wel is het mogelijk om de correctheid

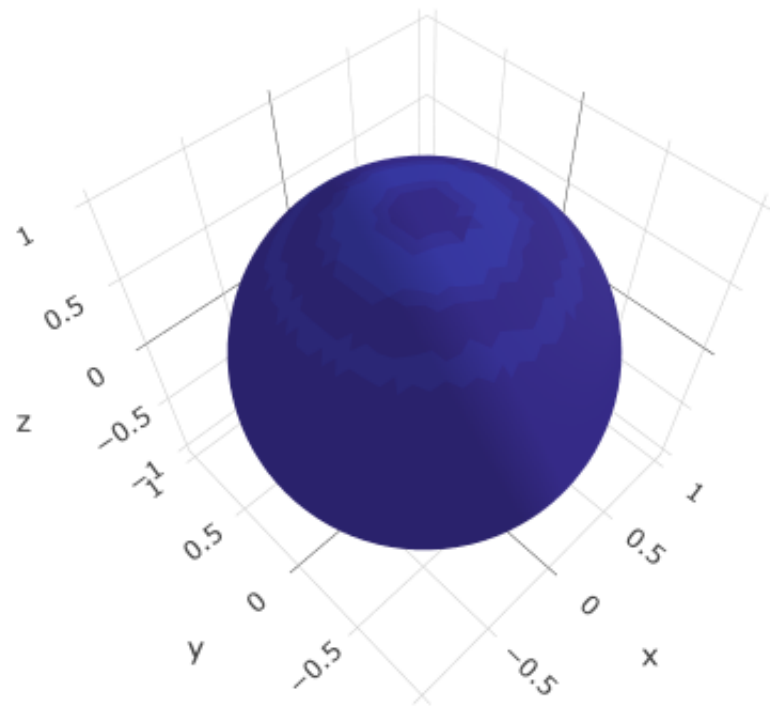
van het model te controleren aan de hand van de natuurkundige correctheid van de resultaten. Wanneer wij de simulatie berekenen voor gebied Γ waarvoor geldt dat de brekingsindex 1 is moet eruit volgen dat er geen reflectie ontstaat maar dat alle energie zich aan de tegenovergestelde zijde van de bron bevindt. Het uitvoeren van de test bleek direct nuttig te zijn, er was namelijk een fout gemaakt bij het invoeren van de dipool bron. Deze fout kon hierdoor opgespoord en verholpen worden. De onderstaande afbeeldingen laten het resultaat zien van de test na de aanpassing van de dipool bron.



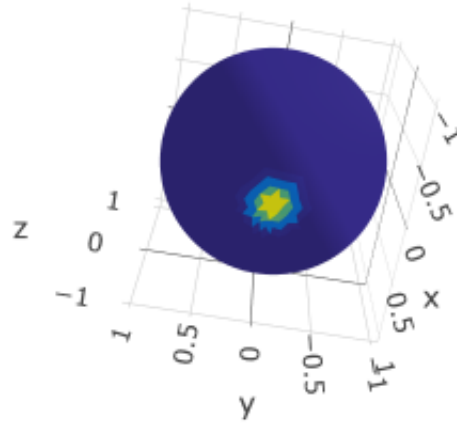
Figuur 6: De elektromagnetische stroming

Op de afbeelding is de elektromagnetische stroming in ampère te zien die over het oppervlakte stroomt. Zoals te zien is, stroomt er (bijna) alleen maar een elektrische stroom aan de onderkant van de bol. Aangezien deze stroming het elektromagnetisch veld genereert, is het te verwachten dat de reflectie zich

ook aan de onderkant van de bol bevind. Dit blijkt ook wanneer we de reflectie berekenen, zoals in de onderstaande afbeeldingen te zien is.



Figuur 7: Het gereflecteerde licht aan de bovenkant



Figuur 8: Het gereflecteerde licht aan de de onderkant

Dit bevestigt de validiteit van de methode. Het natuurkundige principe blijft behouden. Er is namelijk nauwelijks reflectie aan de bovenkant en nagenoeg alle energie van het licht bevindt zich aan de onderkant van de bol. Dit toont aan dat het licht niet gebogen is, wat te verwachten valt aangezien de brekingscoëfficiënt 1 is.

Een ander natuurkundige principe dat de correctheid van het model kan valideren, is het principe van energie behoud. De totale energie blijft gelijk ondanks de ontstaande verstrooiing. De totale energie kunnen we als volgt berekenen. We gebruiken dezelfde numerieke integratie methode en berekenen de totale energie van de dipool voor en na de verstrooiing. Wij moeten de vol-

gende balans krijgen.

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |E_{dipool}(\gamma_{mid})|^2 * d\gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} |E_{dipool}(\gamma_{mid}) + E_{reflectie}(\gamma_{mid})|^2 * d\gamma \quad (82)$$

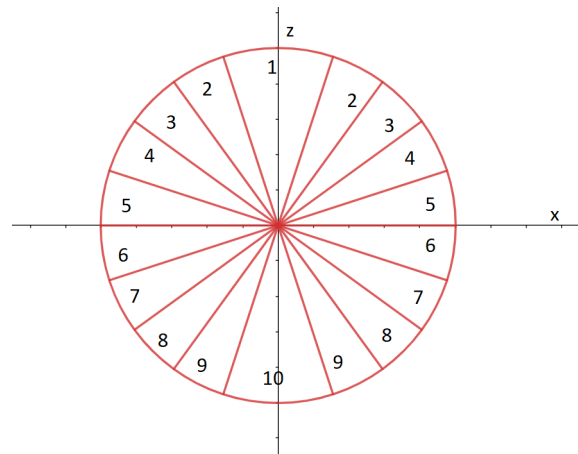
Deze numerieke methode geeft uiteindelijk dat er een verwaarloosbaar klein verschil zit tussen de linker en de rechterkant van de vergelijking. Dit is natuurkundig gezien ook wat we verwachten, en dit bevestigt ook de correctheid van ons model.

5.4 Reflectie Matrices

Met behulp van de gebruikte numerieke methode kunnen wij de reflectie gaan berekenen. Dit wordt gedaan als functie voor een hoek van inval en verstrooiingshoek, en vervolgens worden de waardes opgeslagen in een matrix. In deze matrix betekenen de kolommen de verschillende hoeken van inval, en de rijen de verschillende hoeken van uitval. De waardes van de matrix is de reflectie voor de bijbehorende hoek. In de onderstaande afbeelding is dit verduidelijkt. Waar α de hoek van uitval is en β de hoek van inval.

$$\begin{pmatrix} & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_1 & f(\alpha_1, \beta_1) & f(\alpha_1, \beta_2) \\ \alpha_2 & f(\alpha_2, \beta_1) & f(\alpha_2, \beta_2) \end{pmatrix}$$

Het computer programma berekend namelijk voor een hoek van inval het percentage van het licht dat gefleeteerd word naar een bepaalde hoek van uitval voor zowel de hoeken θ als ϕ . Dit is echter wel een erg tijdrovende bezigheid aangezien de berekening voor elke hoek van inval uitgevoerd moet worden. Hierom wordt de hoek θ die loopt van 0 naar π op gedeeld in 10 verschillende intervallen. De bol wordt dus als het ware opgedeeld in 10 verschillende delen. Op de onderstaande afbeelding is te zien hoe dit precies gedaan is. Om een matrix te verkrijgen moet de hoek van inval ook opgedeeld worden in 10 verschillende hoeken van inval. De hoek van inval moet echter een reëel getal als waarde hebben. Dus is ervoor gekozen om de gemiddelde hoek θ van een interval te kiezen als de bijbehorende hoek van inval. De matrix is vervolg berekend door de reflectie te berekenen als functie van de hoek van inval naar een verschillend hoek interval. Ook is het van belang om te benoemen dat de ruimte hoek van de verschillende intervallen niet gelijk zijn. Dit kan invloed hebben op het uiteindelijke resultaat.



Figuur 9: Dwarsdoorsnede van de bol die de verschillende intervallen van de hoek θ laat zien

5.5 Conclusies

Met behulp van het berekende verre veld is dus de verstrooiing van het licht berekend. Dit is gedaan met behulp van een numerieke integratie methode. Van deze methode weten we niet de nauwkeurigheid, wel hebben we de correctheid gecontroleerd met behulp van enkele natuurkundige principes die moeten gelden. Met deze numerieke methode konden we de reflectie naar de verschillende hoeken berekenen. Deze hoeken zijn opgedeeld in verschillende hoeken intervallen om de simulatie tijd te verkorten. Dit stelde ons in staat om de reflectie matrix op te stellen. Deze matrix is het uiteindelijke resultaat van het onderzoek en in het volgende hoofdstuk besproken.

6 Resultaten

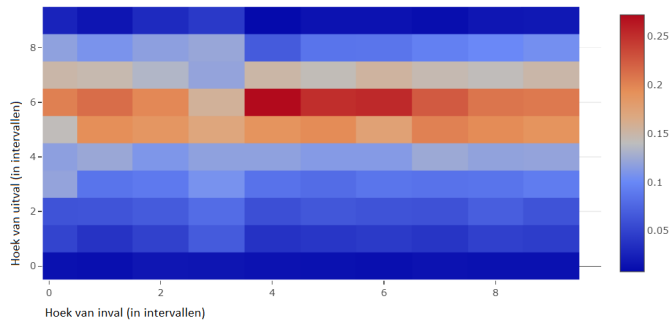
Het uiteindelijke doel van dit project was het berekenen van een reflectie matrix. Deze matrix laat zien hoe het licht reageert wanneer het onder een bepaalde hoek valt op het Asahi-U substraat. Omwille van de tijd is deze matrix alleen maar berekend voor de golflengte van $600 * 10^{-9}$ meter. In deze paragraaf is de reflectie matrix weergegeven en besproken. Vervolgens worden er nog eindconclusies getrokken over dit bachelorproject.

6.1 Reflectie matrix

Met behulp van de computer simulaties is de volgende reflectie matrix opgesteld. Waarin de rijen het deelgebied van de hoek van uitval bepalen en de kolommen het deelgebied van de hoek van inval. Zoals al eerder gezegd is dit gedaan voor de azimuth hoek $0 \leq \theta \leq \pi$, en deze hoek is opgedeeld in 10 verschillende deel intervallen. Dit geeft de onderstaande reflectie matrix.

$$\begin{pmatrix} 0.013 & 0.012 & 0.017 & 0.016 & 0.014 & 0.013 & 0.012 & 0.014 & 0.013 & 0.013 \\ 0.050 & 0.038 & 0.048 & 0.067 & 0.037 & 0.040 & 0.043 & 0.039 & 0.047 & 0.045 \\ 0.061 & 0.062 & 0.067 & 0.079 & 0.058 & 0.064 & 0.061 & 0.060 & 0.069 & 0.061 \\ 0.120 & 0.085 & 0.089 & 0.107 & 0.084 & 0.079 & 0.086 & 0.084 & 0.085 & 0.091 \\ 0.117 & 0.123 & 0.110 & 0.118 & 0.118 & 0.113 & 0.113 & 0.124 & 0.119 & 0.120 \\ 0.142 & 0.194 & 0.188 & 0.171 & 0.190 & 0.196 & 0.176 & 0.202 & 0.196 & 0.190 \\ 0.203 & 0.214 & 0.198 & 0.157 & 0.272 & 0.251 & 0.254 & 0.225 & 0.209 & 0.207 \\ 0.150 & 0.147 & 0.134 & 0.120 & 0.151 & 0.143 & 0.154 & 0.146 & 0.142 & 0.150 \\ 0.118 & 0.108 & 0.117 & 0.122 & 0.067 & 0.085 & 0.086 & 0.094 & 0.100 & 0.105 \\ 0.026 & 0.016 & 0.031 & 0.042 & 0.008 & 0.014 & 0.014 & 0.011 & 0.017 & 0.018 \end{pmatrix}$$

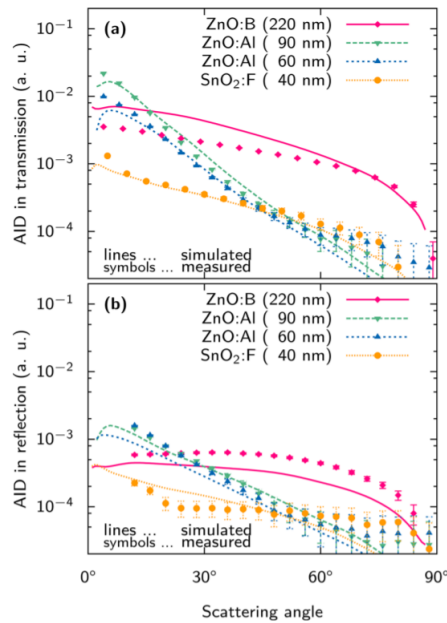
Zoals af te lezen valt is de berekende reflectie matrix niet symmetrisch. Als we kijken naar een willekeurige rij (hoek van uitval) dan lijken de waardes voor de verschillende hoeken van inval niet veel te veranderen. Terwijl we natuurkundig gezien symmetrie verwachten. Dit wordt duidelijk wanneer we de wet van Snellius voor de reflectie bekijken. $\frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{n_2}{n_1}$ dus moet volgen dat $n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$. Wanneer we dus voor de hoek van inval de hoek van uitval kiezen zouden we logisch gezien dezelfde reflectie moeten verwachten. Dit is echter niet het geval in onze reflectie matrix. De resultaten zijn ook gevisualiseerd als een heatmap. Dit geeft een beter overzicht van de resultaten.



Figuur 10: De heatmap van de reflectie matrix

6.2 Vergelijking met eerder uitgevoerd empirisch onderzoek

In een eerder uitgevoerd onderzoek is de reflectie voor het Asahi-U substraat op een experimentele manier berekend.[5] De resultaten van dit onderzoek kunnen vergeleken worden met die resultaten. Op deze manier kan het resultaat experimenteel gevalideerd worden. We vergelijken het met de data die bekend is van het onderzoek van Jäger et al. In de onderstaande resultaten is de verstrooiingshoek van de reflectie en transmissie uitgezet tegenover de Angular intensity distribution (AID). Dat geeft aan hoe groot het gedeelte van de straling naar die bepaalde verstrooiingshoek gereflecteerd is. Dit is een gelijke eenheid als in onze reflectie matrix. Verder is dit gedaan voor een loodrechte hoek van inval voor licht met de golflengte 600 nm.. Het enige verschil is dat wij werken met hoek intervallen, en zij werken met de hoek en delen het figuur op in reflectie en verstrooiing. De resultaten zijn het best vergelijkbaar wanneer wij de simulatie uitvoeren voor een hoek van inval van 0 graden en daarvan de reflectie bekijken.



Figuur 11: De resultaten van het onderzoek van Jäger[5]

De simulatie geeft de volgende resultaten, weergegeven in de tabellen. De tabellen zijn opgesplitst in de reflectie (hoek intervallen 1-5) en de transmissie (hoek intervallen 5-10).

hoek interval	AID
0-18	0.02
18-36	0.05
36-54	0.06
54-72	0.11
72-90	0.12

Tabel 3: Reflectie

hoek interval	AID
0-18	0.04
18-36	0.13
36-54	0.14
54-72	0.19
72-90	0.14

Tabel 4: Transmissie

De volgende verschillen vallen op in vergelijking met de gemeten waardes. De gemeten reflectie blijft na een hoek van 20 graden redelijk constant, terwijl de reflectie in onze simulaties op loopt wanneer de hoek groter wordt. De gemeten transmissie verminderd naar mate de verstrooiingshoek groter wordt, terwijl dit bij onze simulaties niet gebeurt. In de discussie zal er een verklaring gegeven worden waarom de gemeten waardes afwijken van de waardes die gevonden zijn met behulp van onze simulaties.

7 Discussie

Tijdens het project zijn er veel computer berekeningen uitgevoerd, en deze berekeningen hebben uiteindelijk geleid tot ons eindresultaat. Bij numerieke methodes is het altijd van belang om rekening te houden met de afrondingsfouten die ontstaan door de berekeningen.[2] Bij het interpreteren van de resultaten, zullen wij rekening moeten houden dat de berekende waarde niet altijd overeenkomt met de "echte" waarde. Het is mogelijk om de werkelijkheid te beschrijven met behulp van een wiskundig model. Het is belangrijk dat hierbij gerealiseerd wordt dat dit maar een benadering van de werkelijkheid is en dat elk wiskundige model zijn eigen beperkingen heeft. Daarom zullen wij in hoofdstuk de beperkingen van het wiskundige model ook bespreken.

7.1 Afrondingsfouten numerieke methodes

- De verstrooiing van het licht is berekend met een aangepaste midpoint rule. Deze numerieke methode die gebruikt is, behoort niet tot de meest nauwkeurige methodes. Wanneer een betere methode was gebruikt had dit tot een nauwkeuriger eindresultaat geleid.
- Een methode die veel informatie kan geven over de ontstaande afrondingsfouten van de gebruikte numerieke methode om de verstrooiing van het licht te berekenen is , het berekenen van de maximale afrondingsfout. Dit is in ons geval echter niet mogelijk, doordat onze methode oorspronkelijk bedacht is voor één dimensionale integralen. Doordat wij dit niet kunnen uitvoeren is het lastig om een goede inschatting te maken over de nauwkeurigheid van de numerieke integratie methode.
- Eerder in het verslag is al benoemd welke testen gedaan zijn om de betrouwbaarheid van het model dat de verstrooiing berekend te valideren. Dit bevestigt dat de methode correct uitgevoerd is, maar dit geeft ons geen goed beeld over de nauwkeurigheid van het model.
- Ook speelt het feit mee dat de afrondingsfouten opstapelen. Dit komt doordat het model bestaat uit verschillende delen en dat er door gerekend wordt met de afrondingsfouten uit de vorige delen. Hierdoor is het mogelijk dat de gemaakte fouten uiteindelijk gaan opstapelen in het eindresultaat.

7.2 Beperkingen wiskundig model

De numerieke methode, die gebruikt zijn voor het berekenen van de reflectie matrices hebben de volgende beperkingen.

- Een van de beperkingen van het model is hoeveelheid berekeningen dat uitgevoerd moet worden voor de simulaties die het verre veld berekend. Veel van de berekeningen worden uitgevoerd om een geschikt object te maken waarop de methode van moments uitgevoerd kan worden. Dit is nodig want wanneer het object niet groot genoeg is dan convergeert de oplossing niet naar de werkelijke waardes. Dit zorgt ervoor dat de berekeningen lang duren.
- Verder is het gebruikte model niet lineair, waardoor de berekeningstijd exponentieel toenam voor grotere data sets. Doordat de berekeningstijd zo lang werd, is besloten om de reflectie matrix maar voor een specifieke golflengte van het licht te berekenen.
- Doordat de computer die in het modelproces gebruikt is, maar een beperkt werkgeheugen had moest gewerkt worden met een kleinere data set. De gebruikte data set is 8 keer zo klein als de oorspronkelijke data. Doordat er een kleinere dataset gebruikt is zal de berekende reflectie matrix minder goed overeenkomen met de al eerder berekende reflectie matrix. Dit maakt het vergelijken van die twee lastiger.
- Ook is de dikte van het substraat aangepast om het aantal data punten te verkleinen. Dit zal ook invloed gehad hebben op het eindresultaat.
- Tenslotte is de ruimte-hoek niet even groot is bij de verschillende hoekintervallen, verschilt het oppervlakte bij de intervallen. Hierdoor zijn de resultaten ook beïnvloed.

8 Conclusies

Het doel van dit project was, het opstellen van de reflectie matrices die ontstaan door de reflectie van het licht op het substraat. Om dit doel te bereiken zijn er aan het begin van het project enkele deelvragen opgesteld die nodig waren om het onderzoek uit te voeren. De conclusies over deze deelvragen zullen eerst behandeld worden en vervolgens zal het eind resultaat besproken worden.

Voordat de reflectie kon berekend worden was het het nodig dat er eerst een model werd gemaakt van het Asahi-U substraat. Dit met GMSH gemaakte model voldoet aan de eisen voor dit project. Het is een goede benadering voor de werkelijkheid en het is een bruikbaar object voor de methode of moments. De optische eigenschappen van het materiaal konden ook in het model verwerkt worden, zodat het object waarop de integraal vergelijkingen werden toegepast voldeed aan de werkelijkheid.

De verstrooiing die ontstaat door de reflectie van het licht is berekend met het eerder ontwikkelde wiskundige model. Deze verstrooiing levert de uiteindelijke reflectie matrix op. Dit is gedaan door de verstrooiing te integreren over een bolvormig object, waardoor de verstrooiing naar de verschillende hoeken kon berekend worden. De gebruikte numerieke methode bevat waarschijnlijk geen systematische fout, hij voldoet namelijk aan het energie behoudt.

De resultaten van de simulaties vertoonde een verschil in piek met de empirische waarden. Dit wijst op een systematische fout in het huidige model. Verder onderzoek zal moeten aantonen waar de fout in het model zich bevindt, zodat het model kan verbeterd worden.

9 Aanbevelingen en vervolg onderzoek

In dit hoofdstuk worden er aanbevelingen gedaan voor mogelijk vervolg onderzoek, naar aanleiding van de resultaten van dit project.

9.1 Onderzoek naar de symmetrie van de reflectie matrix

Het gebrek van symmetrie in de reflectie matrix vraagt om nader onderzoek. Met behulp van de reciprociteit kan worden aangetoond of dit stelsel een symmetrisch stelsel is. Dit principe geldt voor een medium, met de volgende eigenschappen (ϵ, μ, σ) waarvoor geldt dat de verschillende materiaal eigenschappen (ϵ, μ, σ) symmetrisch zijn.[4] Wanneer wij nu elektromagnetisch veld (E_1, H_1) dat gegenereerd wordt door de bron (J_1, M_1) in dit medium plaatsen, en vervolgens een ander veld (E_2, H_2) met bron (J_2, M_2) er bij plaatsen. Dan geldt de volgende vergelijking [4]

$$\nabla \cdot (H_2 \times E_1 - H_1 \times E_2) = E_1 \cdot J_2 + H_2 \cdot M_1 - E_2 \cdot J_1 + H_1 \cdot M_2 \quad (83)$$

Voor de details van de afleiding verwijzen wij naar het Boek van Jin, hoofdstuk 3.3 Reciprocity Theorems. Zoals te zien is in de vergelijking zijn de parameters van het medium niet meer van belang, in deze vergelijking. Wanneer wij dit nu toepassen op onze situatie waarin we hebben dat $M_1 = M_2 = 0$ krijgen we de onderstaande vergelijking.

$$\nabla \cdot (H_2 \times E_1 - H_1 \times E_2) = E_1 \cdot J_2 - E_2 \cdot J_1 \quad (84)$$

Met behulp van deze elektromagnetische vergelijkingen is het mogelijk om te onderzoeken of het een symmetrisch stelsels is. Deze vergelijking geldt namelijk wanneer de materiaal eigenschappen symmetrisch zijn. Wanneer dus wordt aangetoond dat deze vergelijking geldt voor ons model weten wij dat de reflectie symmetrisch moet zijn.

9.2 Vervolg onderzoek naar de nauwkeurigheid van het model

Zoals eerder in de discussie aangegeven is weten wij op dit moment niet wat de maximale afrondingsfout is van het model, en is de gebruikte numerieke methode niet de meest betrouwbare. In een vervolg onderzoek is het daarom wenselijk dat, er gewerkt wordt met een meer betrouwbare numerieke integratie methode. Ook is het van belang dat de ontstaande afrondingsfouten van die numerieke methode onderzocht worden.

9.3 Licht bron

Tijdens dit project is gewerkt met een dipool energie bron. Deze bron werd gebruikt om een punt te creëren waarvandaan het licht werd uitgezonden. Een andere mogelijkheid is het gebruik van een Gaussian golf. Het gebruik van een andere bron kan mogelijk andere resultaten opleveren. Dit vraagt dus om nader onderzoek naar de verschillende bronnen.

9.4 Data set

Tijdens dit project zijn er vanwege de beperkingen van het model aanpassingen gedaan aan de data set. De hoeveelheid data punten is verminderd en de dikte van het substraat is een stuk minder geworden. Dit kan hebben geleid tot andere resultaten. Hierom is het van belang dat er in een vervolg onderzoek de volledige data set gebruikt wordt. Hier is waarschijnlijk wel computer nodig met een erg hoog werkgeheugen, vanwege de grootte van de data.

Referenties

- [1] Yves Beghein. Advanced discretization and preconditioning techniques for electromagnetic boundary integral equations. 2016,Gent.
- [2] M.J. Vuik C. vuik, F.J. Vermolen M.B van Gijzen. Numerical methods for ordinary differential equations.
- [3] J. R. Reitz & F. J. Milford & R. W. Christy. Foundations of electromagnetic theory. 2008.
- [4] Jian-Ming Jin. Theory and computation of electromagnetic fields.
- [5] R.A.C.M.M. van Swaaij K. Jäger, M. Fischer and M. Zeman. A scattering model for nano-textured interfaces and its application in opto-electrical simulations of thin-film silicon solar cels. *Journal of applied physics*, 2012.
- [6] Takashi Suezaki Gensuke Koizumi Kenji Yamamoto Rudi Santbergen, Tomomi Meguro and Miro Zeman. Genpro4 optical model for solar cell simulation and its application to multijunction solar cells. *IEEE JOURNAL OF PHOTOVOLTAICS, VOL. 7, NO. 3*, May 2017.
- [7] Jeffery Yang Subhendu Guha and Baoji Yan. High efficiency multi-junction thin film silicon cells incorporating nanocrystalline silicon. *Solar Energy Materials Solar Cells*, 2013.