



Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Het bepalen van de Hausdorff-dimensie van willekeurige fractalen

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door Bob Langefeld

Delft, Nederland
Augustus 2019

Inhoudsopgave

1	Inleiding	2
2	Hausdorff-dimensie	5
3	Berekenen van de Hausdorff-dimensie	7
4	Introductie van Martingalen	13
5	Willekeurige fractalen	16

1 Inleiding

Het is lastig om precies te definiëren wat een fractal is. Er bestaat dan ook geen algemene consensus in de wiskundige gemeenschap over de formele definitie van een fractal. Echter zijn er wel enkele eigenschappen die van fractalen worden verwacht. De meest voor de hand liggende eigenschap die aan een fractal kan worden toegekend is zijn zelf-gelijkenis. Deze zelfgelijkenis kan exact zijn, dat wil zeggen dat het fractal op elke schaal exact bestaat uit kopies van zichzelf. Echter kunnen fractalen ook zelf-gelijkenis tonen in de ruimere zin, bijvoorbeeld door slechts ongeveer de zelfde patronen te vertonen op verschillende schalen of alleen een statistische zelf-gelijkenis te hebben. Op deze manier worden bijvoorbeeld wolken of kustlijnen ook vaak als fractalen gezien.

1.1 Dimensie

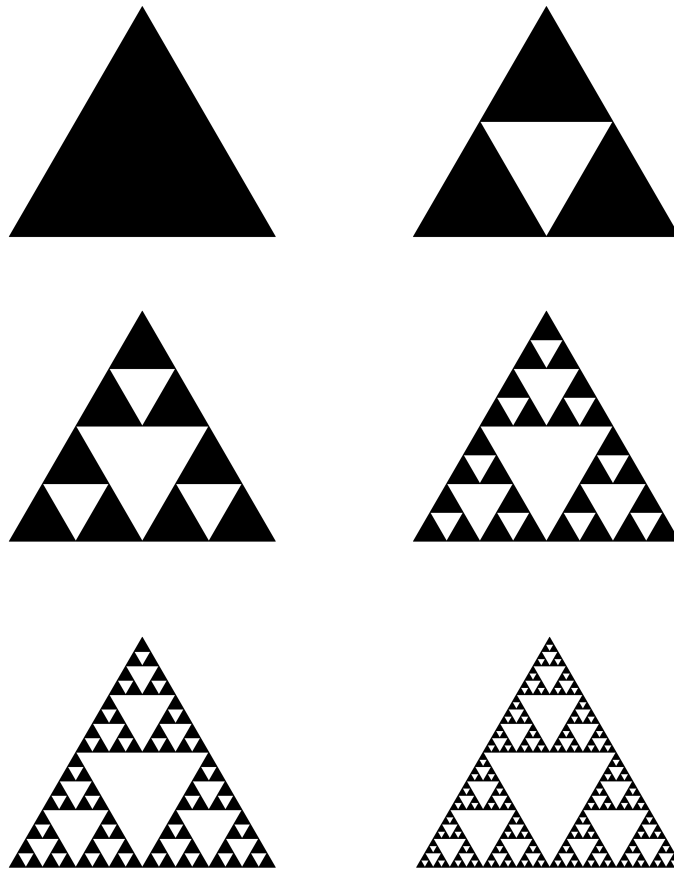
Dimensie zal een cruciaal begrip blijken in de leer van fractalen. Het is dan ook de moeite waard om ons af te vragen wat de dimensie van een figuur eigenlijk betekent. Waarom is een lijn 1-dimensionaal en een vlak 2-dimensionaal? De vraag lijkt triviaal of zelfs bijna van filosofische aard. Het is dan ook niet zo heel eenvoudig om het antwoord hier op te vinden. Een eerste voor de hand liggende gedachte is om te kijken naar de hoeveelheid parameters die nodig zijn om de locatie van een punt te beschrijven. Zo kunnen we elk punt in \mathbb{R}^3 met precies drie parameters beschrijven. De punten op een willekeurig 2-dimensionaal vlak in \mathbb{R}^3 kunnen met twee parameters beschreven worden, waarbij we opmerken dat de dimensie van een figuur losstaat van de dimensie van de ruimte waarin deze ligt. Een betere beschrijving van dimensie is de mate waarin een figuur de ruimte opvult. Er zijn veel verschillende definities van dimensie, waarvan de Hausdorff-dimensie de meest gebruikte is in de leer van fractalen.

1.2 Fractalen

Het zal blijken dat fractalen niet goed kunnen worden beschreven door geheeltalige dimensies, maar eerder door gebroken dimensies. We zullen dit verschijnsel illustreren met een voorbeeld van een beroemd fractal: de Sierpinski-driehoek. Dit fractal wordt geconstrueerd door een gelijkzijdige driehoek in vier gelijke gelijke driehoeken te verdelen en de middelste te verwijderen. De overige drie driehoeken ondergaan hetzelfde proces. Ook zij worden in vieren verdeeld en de middelste driehoek wordt verwijderd. Dit proces wordt oneindig vaak herhaald waardoor het fractal ontstaat dat op elke schaal zelf-gelijkenis vertoont. Echter, met elke stap verdwijnt een kwart van de oppervlakte van de driehoek. Als we beginnen met een driehoek met oppervlak gelijk aan 1, dan is n stappen de overgebleven oppervlakte $(\frac{3}{4})^n$. Omdat n naar oneindig gaat, concluderen we dat de oppervlakte van de sierpinski driehoek gelijk is aan 0.

Op vergelijkbare wijze kunnen we komen tot een uitdrukking van de omtrek. Voor het gemak beginnen we met een driehoek met zijdes gelijk aan 1. Elke

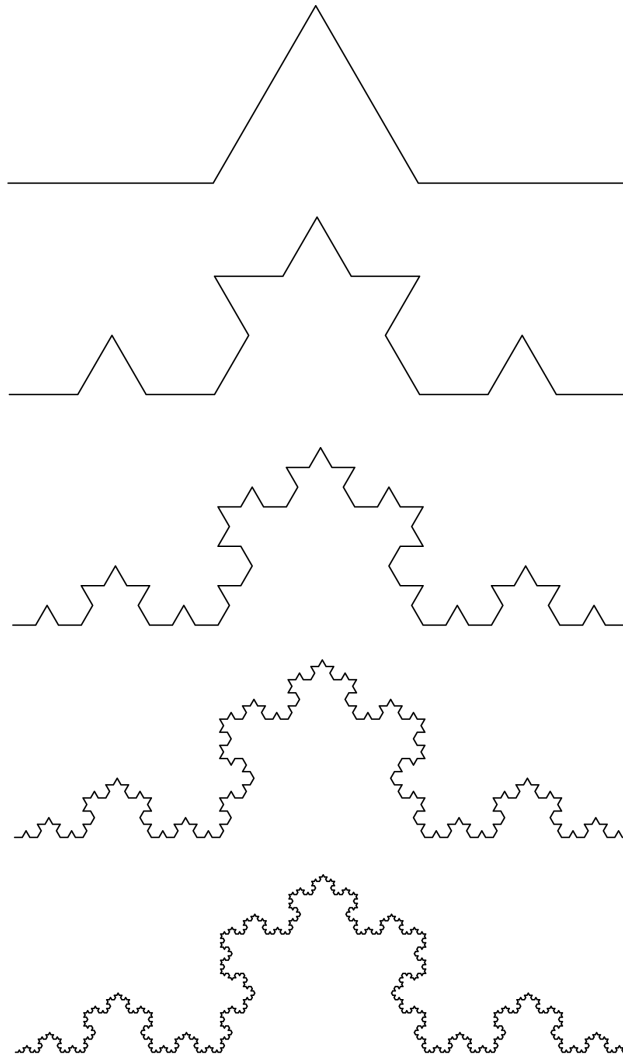
stap ontstaan er drie nieuwe driehoeken met zijdes twee keer zo klein. Na n stappen is de omtrek van het figuur gelijk aan $3 \cdot (\frac{3}{2})^n$. En na oneindig stappen zal de omtrek ook oneindig zijn. We concluderen dat de sierpinski Driehoek geen oppervlakte heeft en een oneindige lengte. Een conclusie die aantoont dat noch lengte, noch oppervlakte geschikte grootheden zijn om de grootte van de Sierpinski Driehoek te beschrijven.



Figuur 1: De eerste 6 stappen van de constructie van de Sierpinski-driehoek

Een ander voorbeeld van een klassiek fractal is de Koch-kromme, een fractal dat doet denken aan een sneeuwkrystal. In de constructie van de curve wordt begonnen met rechte lijn, die in drieën wordt opgedeeld. Vervolgens wordt het middelste deel vervangen door een gelijkzijdige driehoek met de punt naar buiten, met zijdes $\frac{1}{3}$ van de lengte van de oorspronkelijke lijn, zodat er een soort van stekel gevormd wordt. Elk van de nieuwe vier rechte lijn stukken ondergaat

hetzelfde proces, en zo wordt oneindig vaak doorgegaan. In elke stap wordt het aantal lijnstukken dus vier keer zo groot, maar de lengte drie keer zo klein. Op een zelfde manier redeneren we dat de lengte van de uiteindelijke Koch-curve oneindig moet zijn, omdat $(\frac{4}{3})^n$ naar oneindig gaat als n naar oneindig gaat. Hoewel er wel gesproken kan worden van de oppervlakte onder de kromme, heeft de kromme zelf duidelijk geen oppervlakte.



Figuur 2: De eerste 5 stappen van de constructie van de Koch-kromme

2 Hausdorff-dimensie

De Duitse Wiskundige Felix Hausdorff heeft in 1918 een manier bedacht om een fractal van een ruimtelijke dimensie te voorzien, gebaseerd op overdekkingen van figuren. In Hausdorff zijn visie is de dimensie van een deelverzameling $F \subset \mathbb{R}^n$ de mate waarin de ruimte wordt opgevuld in de buurt van een punt uit F . Als we een kleine bol om zo'n punt maken, hoe gevuld is die bol dan, of beter gezegd: hoe hangt de inhoud van F in die bol af van de straal. Voor een lijnstuk is eenvoudig in te zien dat de inhoud van F in zo'n bol proportioneel is met de straal r . Voor een glad oppervlak zal dit proportioneel zijn met r^2 en voor een glad 3-dimensionaal figuur met r^3 . De macht s waarvoor de hoeveelheid van F bevat in de bol proportioneel is met r^s geeft in zijn opvatting de dimensie van F aan. Zijn definitie van dimensie is nog steeds de meest gebruikte in de fractalen-leer, omdat het gedefinieerd is voor elk mogelijke set. Een bijkomend nadeel van de Hausdorff-dimensie is dat deze vaak lastig te berekenen is.

2.1 De Hausdorff-maat

Voor een verzameling $F \in \mathbb{R}^n$ en een $\delta > 0$ en een $s \geq 0$, definiëren we de Hausdorff-maat van F als volgt: definition

Definitie 2.1 *Hausdorff-maat*

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ is een } \delta \text{-overdekking van } F \right\}$$

Hier betekent $|U_i|$ de diameter van de set U_i , formeel gedefinieerd als $U_i = \sup\{|x - y| : x, y \in U_i\}$. Met een δ -overdekking bedoelen we een telbare familie van sets $\{U_i\}$ die F compleet overdekt, zodat geldt: $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ en $|U_i| < \delta$.

Als δ kleiner wordt, wordt ook het aantal toelaatbare overdekkingen kleiner, en dus wordt het infimum van al deze overdekkingen groter, zodat het volgende limiet altijd bestaat:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

$\mathcal{H}^s(F)$ wordt ook wel de s -dimensionale Hausdorff-maat van F genoemd. Omdat we dieper op de technische aspecten en applicaties van de Hausdorff-maat in gaan, lichten we intuïtief een aantal punten toe over de constructie van de maat.

Voor een set F die bestaat uit een eindig aantal punten zal $\mathcal{H}^0(F)$ gelijk zijn aan dit aantal punten. Voor een glad lijnstuk zal $\mathcal{H}^1(F)$ gelijk zijn aan de lengte van dit lijnstuk. In het algemeen geldt dat als F een Borel-subset is van \mathbb{R}^n dat $\mathcal{H}^n(F) = \frac{\text{vol}^n(F)}{c^n}$ waar c^n het volume van een n -dimensionale bol is met straal 1. Voor "normale" n -dimensionale figuren is $\mathcal{H}^n(F)$ dus altijd proportioneel met het volume.

De reden dat we δ naar 0 laten lopen is om de ruwheid van de set in acht te nemen. Als we bijvoorbeeld de lengte van een kustlijn willen meten,

zouden we dat kunnen doen door te tellen hoeveel pixels de kustlijn snijdt op een sateliet foto en dit aantal te vermenigvuldigen met de lengte van een pixel. Echter als de kustlijn extreem grillig is zal dit uiteraard niet een realistische lengte opleveren, behalve als we de pixel grootte laten slinken tot een formaat kleiner dan de kleinste grillen. Op vergelijkbare wijze moeten de bollen in de overdekking kleiner zijn dan de kleinste "grillen".

2.2 Hausdorff-dimensie

Voor elke set $F \subset \mathbb{R}^n$ bestaat er een unieke $s \geq 0$, zodat $\mathcal{H}^n(F) = \infty$ als $n < s$ en $\mathcal{H}^n(F) = 0$ als $n > s$. De waarde van $\mathcal{H}^n(F)$ springt dus van ∞ naar 0 op $n = s$. $\mathcal{H}^s(F)$ kan zowel 0 als ∞ zijn en elke waarde daar tussenin. Dit resultaat volgt direct uit de volgende stelling.

Stelling 2.1 *Als $\mathcal{H}^p(F) < \infty$, dan $\mathcal{H}^q(F) = 0$, voor alle $q > p$. En als $\mathcal{H}^p(F) > 0$, dan $\mathcal{H}^q(F) = \infty$, voor alle $q < p$.*

Bewijs 2.2 *Laat $\mathcal{H}^p(F) < \infty$ en laat $q > p$, dan*

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^q(F) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^q(F) \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^q : \{U_i\} \text{ is een } \delta \text{-overdekking van } F \right\} \\
&\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^p \cdot \delta^{q-p} : \{U_i\} \text{ is een } \delta \text{-overdekking van } F \right\} \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{q-p} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^p : \{U_i\} \text{ is een } \delta \text{-overdekking van } F \right\} \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{q-p} \mathcal{H}^p(F) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Laat nu $\mathcal{H}^p(F) > 0$ en laat $q < p$, dan

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^q(F) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^q(F) \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^q : \{U_i\} \text{ is een } \delta \text{-overdekking van } F \right\} \\
&\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^p \cdot \delta^{q-p} : \{U_i\} \text{ is een } \delta \text{-overdekking van } F \right\} \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{q-p} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^p : \{U_i\} \text{ is een } \delta \text{-overdekking van } F \right\} \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^{p-q}} \mathcal{H}^p(F) \\
&= 0
\end{aligned}$$

We definiëren de Hausdorff-dimensie van een set F , geschreven als $\dim_H(F)$, als deze unieke s . Formeel schrijven we

$$\dim_H(F) = \inf \{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\}$$

wat equivalent is met

$$\dim_H(F) = \sup \{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

3 Berekenen van de Hausdorff-dimensie

Zoals eerder vermeld, zijn fractalen figuren die in bepaalde mate bestaan uit kopieën van zichzelf. In deze sectie zullen we alleen de fractalen behandelen die uit exacte kopieën van zichzelf bestaan, zoals de Cantor-set en de Sierpinsky-driehoek. De Cantor-set leent zich in het bijzonder goed uit om bepaalde theorieën te illustreren, door zijn eenvoud. We zullen beginnen met concept dat fractalen bestaan uit kopieën van zichzelf te formaliseren om vervolgens een aantal hele belangrijke theorieën af te leiden, zodat de Hausdorff-dimensie van een fractal relatief eenvoudig bepaald kan.

3.1 Samentrekkingen en systemen van geïtereerde functies

Definitie 3.1 *Laat D een gesloten subset zijn van \mathbb{R}^n . Een afbeelding $S : D \rightarrow D$ is een **samentrekking** als voor alle $x, y \in D$ geldt dat $|S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$, met $0 < c < 1$. In het geval van gelijkheid noemen we dit een **similariteit**.*

Definitie 3.2 *Laat $S_1 \dots S_m$ een familie van samentrekkingen zijn, die ook wel een **systeem van geïtereerde functies** wordt genoemd. We noemen de set $F \subset D$ waarvoor geldt dat $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$ **invariant**.*

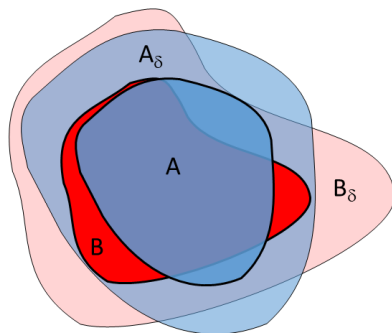
We zullen het bovenstaande illustreren door middel van de Cantor-set. Laat D het interval $[0,1]$ zijn. De bijbehorende samentrekkingen zijn dan $S_1(x) = \frac{1}{3}x$ en $S_2 = 1 - \frac{1}{3}x$, zodat S_1 de linkerkant van de Cantor-set construeert en S_2 de rechterkant. De set F die invariant is ten opzichte van deze samentrekkingen is precies de Cantor-set. Het zal blijken dat deze F uniek is.

Definitie 3.3 Voor een set A uit Ω is het δ -parallel lichaam, aangeduid met A_δ , de verzameling punten met afstand kleiner of gelijk dan δ van A . Dat wil zeggen: $A_\delta = \{x \in D : |x - a| \leq \delta \text{ voor een } a \in A\}$

We definiëren vervolgens de volgende metriek op Ω

$$d(A, B) = \inf\{\delta : A \subset B_\delta \text{ en } B \subset A_\delta\}$$

Intuïtief kunnen we deze metriek beschouwen als de mate van gelijkenis tussen twee sets.



Figuur 3: Een schematische afbeelding van A_δ en B_δ . De δ wordt zo gekozen dat $A \subset B_\delta$ en $B \subset A_\delta$

Stelling 3.1 Laat $S_1 \dots S_m$ samentrekkingen zijn op een gesloten set $D \subset \mathbb{R}^n$ en laat Ω de set zijn van alle niet lege compacte subsets van D . Voor alle $E \in \Omega$ definiëren we:

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E)$$

Dan bestaat er een unieke invariante set F , zodat $S(F) = F$. Daarnaast geldt voor elke set $E \in \Omega$ met $S(E) \subset E$ dat:

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E) = F$$

Waar $S^k(E) = \underbrace{S(S(\dots(S(E))))}_{k \text{ keer}}$

Bewijs 3.2 We beginnen het bewijs met op te merken dat de afbeelding S sets uit Ω transformeert naar andere sets in Ω . Laat $E \in \Omega$ een set zijn zodat $S(E) \subset E$, dan geldt $S^k(E) \subset S^{k-1}(E)$, omdat $S^k(E) \in \Omega$. Dus $S^k(E)$ is een dalende rij niet lege compacte sets en zal dus een niet lege compacte intersectie $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} S^k(E)$ hebben. Omdat $S^k(E)$ dalend is geldt nu $S(F) = F$

Om te laten zien dat de invariante set F uniek is maken we gebruik van de eerder geïntroduceerde metriek. Als $A, B \in \Omega$, dan:

$$d(S(A), S(B)) = d\left(\bigcup_{i=1}^m S(A), \bigcup_{i=1}^m S(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d(S_i(A), S_i(B))$$

En dus:

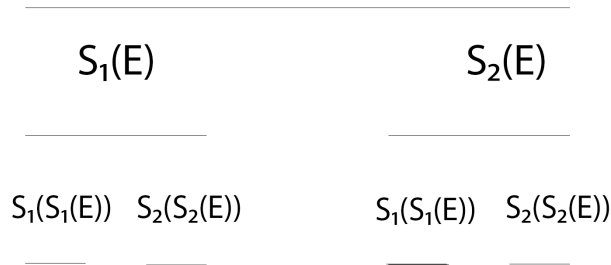
$$d(S(A), S(B)) \leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} c_i\right) d(A, B)$$

Maar nu als A, B beide invariant zijn, dan ook:

$$d(S(A), S(B)) = d(A, B)$$

Dus concluderen we dat $d(A, B) = 0$ en dus $A = B$

E



Figuur 4: Hier is te zien hoe de contracties S_1 en S_2 een interval E afbeelden, zodat uiteindelijk de Cantor-set wordt gevormd.

De bovenstaande theorie laat zien dat invariantie ten opzichte van een systeem van geïtereerde functies niet alleen een eigenschap is van een fractal, maar ook een manier om een fractal te definiëren. We kunnen op deze manier de Cantor-set definiëren als de set F die invariant is ten opzichte van het eerder beschreven

systeem van geïtereerde functies behorend tot dit fractal. Fractalen op deze manier definiëren geeft ons een uitermate krachtige en simpele methode om de Hausdorff-dimensie van een fractal uit te rekenen. Het zal blijken dat de Hausdorff-dimensie gelijk is aan s waarvoor:

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1 \quad (1)$$

Om dit aan te tonen zullen we een gelijke boven- en ondergrens moeten vinden voor de Hausdorff-dimensie. Voor het vinden van de bovengrens moeten we voor een bepaalde s aantonen dat $\mathcal{H}^s(F) < \infty$. Hiervoor hoeven we maar één geschikte overdekking te vinden, zodat $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s < \infty$. Voor de ondergrens moet worden aangetoond dat $\mathcal{H}^s(F) > 0$. Dit is echter lastiger, omdat we moeten aantonen dat de som $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$ groter dan een positieve constante is voor *elke* mogelijke overdekking. We zullen beginnen met het vast stellen van de bovengrens, voor de ondergrens zullen we eerst nog enkele definities en stellingen introduceren om deze moeilijkheden te omzeilen.

Stelling 3.3 *Laat S_i similariteiten op \mathbb{R}^n en laat F de set zijn die invariant is, zodat*

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F) = S(F) \quad (2)$$

*en laat s de oplossing zijn van vergelijking 1
Dan is $\dim_H(F) \leq s$*

Bewijs 3.4 *Neem aan dat s de oplossing is van vergelijking 1. We schrijven $A_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(A)$. Laat J_k de set zijn van alle mogelijke opeenvolgingen (i_1, \dots, i_k) van lengte k . We gebruiken de invariantie van F recursief en kunnen afleiden dat*

$$F = S(F) = S \circ S(F) = S \circ \dots \circ S(F) = \bigcup_{J_k} F_{i_1, \dots, i_k}$$

De afbeelding $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$ is een similariteit is met verhouding $c_{i_1} \dots c_{i_k}$ en dus geldt

$$\sum_{J_k} |F_{i_1, \dots, i_k}|^s = \sum_{J_k} (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s |F|^s = \left(\sum_{i=1}^m c_i^s \right)^k |F|^s = |F|^s$$

We nemen $\delta > 0$ willekeurig en kiezen een k zodat $|F_{i_1, \dots, i_k}| \leq (\max_i c_i)^k \leq \delta$, zodat $\bigcup_{J_k} F_{i_1, \dots, i_k}$ een δ -overdekking is van F . Nu volgt uit de definitie van de Hausdorff-dimensie dat

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \sum_{J_k} |F_{i_1, \dots, i_k}|^s = |F|^s$$

en dus ook $\mathcal{H}^s(F) \leq |F|^s$ waarmee de bovengrens is aangetoond.

Voor het bepalen van de ondergrens introduceren we de definitie van een massaverdeling en de belangrijke bijkomende stelling.

Definitie 3.4 Een *massaverdeling* is een maat μ op een begrensde subset van \mathbb{R}^n die voldoet aan $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$

Stelling 3.5 Laat μ een massaverdeling zijn op F en neem aan dat er voor een bepaalde s getallen $\delta > 0$ en $c > 0$ bestaan zodat

$$\mu(U) \leq c|U|^s$$

voor alle sets U met $U \leq \delta$. Dan $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$ en $\dim_H(F) \geq s$

Bewijs 3.6 Voor elke overdekking $\{U_i\}$ van F hebben we dat

$$0 < \mu(F) = \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq c \sum_i |U_i|^s$$

Dus $\mathcal{H}_\delta^s(F) \geq \mu(F)/c$ als δ klein genoeg is. Door δ naar 0 te laten gaan volgt ook $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$

Stelling 3.5 helpt ons aanzienlijk met het vinden van een ondergrens van een fractal, nu het alleen nog maar nodig is om een geschikte massaverdeling op een fractal F te vinden. Voor de volgende stelling, waar we een ondergrens zullen vinden die gelijk is aan de bovengrens van stelling 3.3, moeten we wel aannemen dat de contracties van F disjunct zijn.

Stelling 3.7 Laat $S_1 \dots S_m$ contracties zijn op een gesloten set $D \subset \mathbb{R}^n$, zodat

$$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i|x - y|$$

met $0 < c_i < 1$ voor elke i en elke $x, y \in D$. Neem voor de rest aan dat $F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$ en dat de vereniging disjunct is. Dan is $\dim_H(F) \geq s$, met de s de oplossing van

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$$

Bewijs 3.8 We definiëren $d = \min_{i \neq j} \inf\{|x - y| : x \in S_i(F), y \in S_j(F)\}$, de minimale afstand tussen de compacte sets $S_1(F) \dots S_m(F)$. We schrijven $F_{i_1 \dots i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(F)$ en definiëren de maat $\mu(F_{i_1 \dots i_k}) = (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s$. Nu geldt dat

$$\sum_{i=1}^m \mu(F_{i_1 \dots i_k, i}) = \sum_{i=1}^m (c_{i_1} \dots c_{i_k} c_i)^s \quad (3)$$

$$= (c_{i_1} \dots c_{i_k})^s = \mu(F_{i_1 \dots i_k}) \quad (4)$$

$$= \mu\left(\bigcup_{i=1}^m F_{i_1 \dots i_k, i}\right) \quad (5)$$

zodat μ een massaverdeling op F is met $\mu(F) = 1$.

Als $x \in F$ bestaat er een oneindige reeks i_1, i_2, \dots zodat $x \in F_{i_1 \dots i_k}$ voor elke k . Voor $0 < r < d$ laten we k het kleinste natuurlijke getal zijn zodat

$$c_i \cdots c_k d \leq r < c_i \cdots c_{k-1} d$$

We merken op dat $F_{i_1 \dots i_{j-1} i_j}$ en $F_{i_1 \dots i_{j-1} i_{j'}}$ met $j \neq j'$ zijn gescheiden van elkaar met een afstand van minimaal $\frac{|F|}{|F_{i_1 \dots i_{j-1}}|} d = c_{i_1} \cdots c_{i_{j-1}} d$, waaruit volgt dat

$$F \cap B_r(x) \subset F_{i_1 \dots i_k}$$

en dus

$$\mu(F \cap B_r(x)) \leq \mu(F_{i_1 \dots i_k}) = (c_{i_1} \cdots c_{i_k})^s \leq d^{-s} r^s$$

Voor elke U die snijdt met F , dan is er een $x \in F$ zodat $U \subset B_r(x)$ met $r = |U|$. Dus $\mu(U) \leq d^{-s} |U|^s$ en uit stelling 3.5 volgt dat $\dim_H(F) \geq s$.

We kunnen nu de Hausdorff-dimensie bepalen van fractalen die invariant zijn ten opzichte van een disjunct systeem van geïtereerde functies. Een klassiek voorbeeld dat hier aan voldoet is de Cantor-set. De ratios c_1, c_2 van de similariteiten zijn allebei $1/3$. We vinden $s = \frac{\log(2)}{\log(3)}$ als oplossing van de vergelijking $2 \cdot (1/3)^s = 1$ en concluderen dat de Cantor-set een Hausdorff dimensie heeft van $\frac{\log(2)}{\log(3)}$.

Echter voldoen veel klassieke fractalen niet aan de eis dat $S_1(F) \dots S_m(F)$ disjunct zijn. In het geval van de Sierpinsky-driehoek hebben de similariteiten precies overlap op de hoekpunten en kunnen we de bovenstaande stelling niet zonder meer gebruiken. We kunnen de voorwaarde dat $S_1(F) \dots S_m(F)$ disjunct moeten zijn afzwakken zodat we ook de Hausdorff-dimensie van onder andere Sierpinsky driehoek kunnen bepalen.

Definitie 3.5 Een systeem van geïtereerde functies voldoet aan de **open set voorwaarde** als er een begrensde open set $V \neq \emptyset$ zodat

$$\bigcup_{i=1}^m S_i(V) \subset V$$

met de vereniging disjunct.

Stelling 3.9 Neem aan dat $S_1 \dots S_m$ similariteiten zijn met ratios $0 < c_i < 1$ en voldoen aan de open set voorwaarde. Laat F de invariante set zijn. Dan is $\dim_H(F) = s$ met s de oplossing van

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1$$

Het bewijs van stelling 3.9, wat neerkomt op het vinden van de ondergrens, is veel ingewikkelder en langer dan in het geval waar de similariteiten $S_1(F) \dots S_m(F)$ disjunct zijn. We zullen dit dan ook niet aantonen.

De Sierpinsky-driehoek voldoet aan de open set voorwaarde als voor V het inwendige genomen wordt van E_0 . De drie contracties die de Sierpinsky-driehoek definiëren hebben allemaal een verhouding van $c_i = 1/2$. De hausdorff-dimensie van het fractal kan nu worden gevonden door s op te lossen voor

$$\sum_{i=1}^3 c_i^s = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1$$

en we concluderen dat Hausdorff-dimensie gelijk is aan $\frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1,583$

4 Introductie van Martingalen

In de kansrekening is een martingaal een reëelwaardig stochastisch proces onder de voorwaarde dat de verwachtingswaarde van een element gelijk is aan zijn voorganger. Bij gokspellen en aandeelhandel wordt met een martingaal gerefererd aan een strategie waarbij na verlies de inzet telkens wordt verdubbeld, en op deze manier de kans te vergroten op een netto winst, tegen de prijs van een kleine kans op een heel groot verlies. Een ander voorbeeld van een martingaal is het vermogen van een gokker die herhaaldelijk een spel speelt waarbij een eerlijke munt wordt opgegooid. Bij kop verdient de gokker één euro en bij munt verliest hij één euro, wat effectief een 1-dimensionale random-walk is. De analogie van gokspellen laat zich goed toepassen op martingalen. Deze intuïtieve manier van het beschouwen van martingalen zal worden aangehouden om stellingen over de convergentie van Martingalen aan te tonen, die op hun beurt gebruikt zullen worden om de dimensie van willekeurige fractalen te bepalen

4.1 Definitie Martingaal

Een martingaal is een reeks stochasten X_1, X_2, X_3, \dots zodat voor elke n geldt:

$$E(|X_n|) < \infty$$

$$E(X_{n+1}|X_1, X_2, \dots, X_n) = X_n$$

In het geval van een supermartingaal wordt de tweede voorwaarde vervangen door een ongelijkheid, zodat de verwachting van een stochast ten hoogste gelijk is aan zijn voorganger:

$$E(X_{n+1}|X_1, X_2, \dots, X_n) \leq X_n$$

Het aantal upcrossings tussen a en b in een martingaal $X_{n \in N}$ is het aantal keer dat het proces van positie kleiner dan a klimt naar een positie hoger dan b na N stappen. Formeel, maar ietwat omslachtig definiëren we:

Definitie 4.1 $U_N[a, b]$ is het grootst mogelijke natuurlijke getal k , zodat er natuurlijke getallen S_i, R_i bestaan met:

$$0 \leq S_1 < R_1 < S_2 < R_2 < \dots < S_k < R_k \leq N$$

en:

$$X_{S_i} < a < b < X_{R_i}$$

4.2 Upcrossings

Stelling 4.1 Een rij x_n is convergent dan en slechts dan als voor elke a en b er een eindig aantal upcrossings is.

Bewijs 4.2 Merk eerst op dat een rij x_n convergent is dan en slechts dan als $l = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ gelijk is aan $u = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. Stel de rij x_n is convergent. Als $a < u$ dan bestaat er een N zodat $x_n > a$ voor alle $n > N$, met als gevolg dat er een eindig aantal upcrossings zijn over het interval $[a, b]$. In het geval dat $a \geq u$ dan zal $b > a \geq l = u$. Er bestaat dan een N zodat $x_n < b$ voor alle $n > N$, wat leidt tot hetzelfde gevolg. We concluderen dat in een convergente rij er slechts een eindig aantal upcrossings zijn voor elk willekeurig interval $[a, b]$ voor alle a, b .

Voor de andere richting nemen we aan dat de rij x_n niet convergeert en dat dus geldt dat $l < u$. We kiezen een interval $[a, b]$ zodat $l < a < b < u$. Voor elke $x_{s_1} < a$ bestaat er een $r_1 > s_1$ zodat $x_{s_1} > b$. En voor elke $x_{s_1} > b$ bestaat er een x_{s_2} met $s_2 > r_1$. Dit wordt oneindig vaak herhaald en er zullen dus ook oneindig veel upcrossings worden gevonden over het interval $[a, b]$

Om de convergentie van een supermartingaal aan te tonen moeten we eerst een grens aantonen aan de verwachting van het aantal upcrossings. Hier komt de analogie van het gokspel zeer goed van pas. Een gokker A speelt een supermartingaal spel in een casino, zijn vermogen definiëren we als X_n . Een gokker B, die een startvermogen heeft van 0, spiegelt de strategie van A, echter alleen als het vermogen van A kleiner is dan a tot dat het vermogen van A groter wordt dan b . Als het vermogen van A weer zakt tot onder a begint gokker B weer met het spiegelen van A. In andere woorden: gokker B lift alleen mee op het succes van de upcrossings van A.

Lemma 4.3 Laat X_n een supermartingaal zijn en $U_N[a, b]$ het aantal upcrossings tot stap n . Dan geldt:

$$E(U_n[a, b]) \leq \frac{E(|X_n|) + |a|}{b - a}$$

Bewijs 4.4 We beginnen het bewijs met het modeleren van het vermogen Z_n van B. Omdat B alleen speelt als A in een upcrossing zit geldt:

$$Z_{k+1} = \begin{cases} Z_k, & \text{als } 0 \leq k < R_1 \text{ of } S_i < k \leq R_{i+1} \\ Z_k + Y_{k+1} - Y_k, & \text{als } R_i \leq k < S_i \end{cases}$$

De verwachting van het vermogen van Z_n wordt dan:

$$E(Z_{k+1}) = \begin{cases} Z_k, & \text{als } 0 \leq k < R_1 \text{ of } S_i < k \leq R_{i+1} \\ Z_k + E(X_{k+1}) - X_k, & \text{als } R_i \leq k < S_i \end{cases}$$

Omdat B 's vermogen Z_n zoals eerder aangegeven een supermartingaal, volgt dat:

$$Z_k + E(X_{k+1}) - Y_k \leq X_k$$

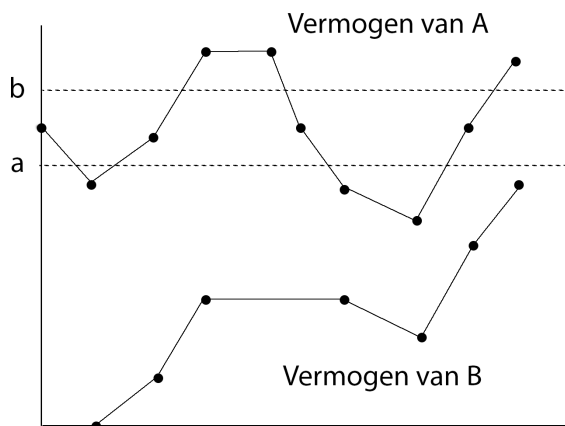
De ongelijkheid volgt door het vermogen van Z_n uit te drukken in het aantal upcrossings van X_n . Voor elke upcrossing van X_n stijgt het vermogen Z_n met tenminste $(b-a)$. In het geval dat gokker A na de laatste upcrossing een slechte reeks neerzet waardoor zijn vermogen onder a komt en gokker B hierin meesleept moet het verschil tussen Y_n en a in rekening genomen worden. Voor B 's vermogen na stappen geldt dan:

$$Z_n \geq (b-a) \cdot (U_n[a, b]) - \max(0, Y_n - a)$$

Omdat B een supermartingaal speelt met een startvermogen van 0 geldt:

$$\begin{aligned} 0 &\geq E(Z_n)(b-a) E(U_n[a, b]) - E(\max(0, X_n - a)) \\ &\geq (b-a) E(U_n[a, b]) + E(-|X_n| - |a|) \end{aligned}$$

Waarmee de ongelijkheid is aangetoond.



Figuur 5: Het vermogen van gokker B die gokker A spiegelt op het moment dat A in een upcrossing zit”

Vanaf hier kunnen we reatief eenvoudig de martingaal convergentie stelling bewijzen.

Stelling 4.5 (Martingaal convergentie stelling) *Als voor een martingaal Y_k geldt dat:*

$$\sup_k E(Y_k) < \infty$$

dan is er een stochast Y , zodat $Y_k \rightarrow Y$ bijna zeker. Daarnaast is $E(Y) < \infty$ bijna zeker.

Bewijs 4.6 *Doordat $\sup_k E(Y_k) < \infty$ zal volgens Lemma 3.3 Y_k slechts een eindig aantal upcrossings hebben voor elke a en b bijna zeker. Volgens Theorie 3.1 convergeert Y_k dan met kans 1. We definiëren $Y = \liminf_{k \rightarrow \infty} Y_k$, zodat $Y_k \rightarrow Y$ bijna zeker. Uit Fatou's lemma volgt nu bovendien dat:*

$$E(|Y|) = E(\liminf_{k \rightarrow \infty} |Y_k|) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E(|Y_k|) \leq \sup_k E(Y_k) < \infty$$

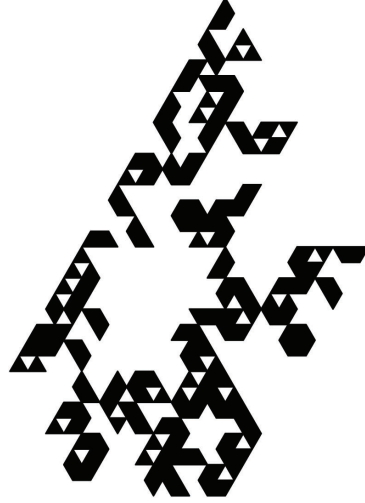
5 Willekeurige fractalen

5.1 Introductie willekeurige fractalen

Klassieke niet willekeurige fractalen worden op een deterministische manier geconstrueerd. De sierpinski driehoek wordt bijvoorbeeld geconstrueerd door een driehoek in vier gelijke driehoeken te verdelen en het middelste driehoek weg te halen. Vervolgens ondergaan de overige drie driehoeken hetzelfde proces. Deze recursieve stap wordt tot in de oneindigheid herhaalt, waardoor de bekende driehoek ontstaat die op elke schaal zelf-gelijkenis vertoont.

Echter kunnen we ook een probabilistische variant van de sierpinski driehoek construeren. In plaats van telkens de middelste driehoek te verwijderen, wordt aan de hand van een bepaalde kansverdeling één van de vier driehoeken verwijderd. De figuur die ontstaat heeft niet meer de exacte zelf-gelijkenis aangezien er op elke schaal willekeur is, echter vertoont het figuur wel statistische zelf-gelijkenis. Dat wil zeggen, in het geval van de hierboven beschreven willekeurige sierpienski-driehoek, dat deze bestaat uit drie kleinere sierpienski driehoeken, die allemaal op dezelfde willekeurige manier zijn geconstrueerd.

Op vergelijkbare manier kunnen we een willekeurige variant maken van de Cantor-set, waar elke stap willekeurig één van de drie intervallen wordt weggehaald. Er kan ook een andere variatie van een willekeurig proces worden toegepast op de constructie van de Cantor-Set, waar net als in het klassieke geval steeds het middelste interval wordt verwijderd, maar waar de twee overgebleven intervallen aan de uiteindes een willekeurig gekozen lengte hebben. Tot slot kan er ook een analoog worden geconstrueerd waarbij elke stap het interval wordt verdeeld in drie gelijke intervallen, maar met willekeur in hoeveel intervallen worden verwijderd.



Figuur 6: Een variant van de Sierpinsky-driehoek waar elke stap 1 van de 4 driehoeken willekeurig wordt verwijderd.

In deze sectie zullen eerst een aantal begrippen en lemmas worden geïntroduceerd om vervolgens eigenschappen van deze types willekeurige fractalen af te leiden. Vooral zal worden gefocust op het bepalen van de Hausdorff-dimensie van deze fractalen.

5.2 Opzet naar berekenen van de Hausdorff-dimensie van willekeurige fractalen

Lemma 5.1 *laat μ een massaverdeling zijn van R^n en laat $F \subset R^n$ een Borelset zijn en $0 < c < \infty$ een constante. Dan geldt:*

$$\text{als } \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mu(B(x, r)) < cr^s \text{ voor alle } x \in F \text{ dan geldt } H^s(F) \geq \mu(F)/c$$

Bewijs 5.2 *Neem $\delta > 0$ willekeurig en laat $\{U_i\}$ een open δ -overdekking zijn. We definiëren de set F_δ als volgt:*

$$F_\delta = \{x \in F : \mu(B(x, r)) < cr^s \text{ voor alle } 0 < r \leq \delta\}$$

plaatje Voor elke U_i die een punt x bevat van F_δ maken we een bol B met straal $|U_i|$ zodat U_i bevat is in B . Uit de definitie van F_δ volgt nu:

$$\mu(U_i) \leq \mu(B) \leq c|U_i|^s$$

en verder:

$$\mu(F_\delta) \leq \sum_i \{\mu(U_i) : U_i \text{ bevat een punt uit } F_\delta\} \leq c \sum_i |U_i|^s$$

Omdat de δ -overdekking $\{U_i\}$ willekeurig gekozen is geldt de bovenstaande ongelijkheid voor elk mogelijke δ -overdekking. Uit de definitie van H_δ^s volgt nu:

$$\mu(F_\delta) \leq H_\delta^s(F) \leq cH^s(F)$$

Omdat geldt dat $F_\delta = F$ als $\delta \rightarrow 0$ concluderen we dat $\mu(F) \leq cH^s(F)$.

We zullen twee belangrijke begrippen introduceren die cruciaal zullen blijken in het afschatten van een ondergrens van de Hausdorff-dimentie van een (willekeurig) fractal. Voor een punt $x \in \mathbb{R}^n$ met een massaverdeling μ en s_0 definiëren we de s -potentialaals als:

$$\phi_s(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s}$$

en de s -energie :

$$I_s(\mu) = \int \phi_s(x) d\mu(x) = \int \int \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^s}$$

Het volgende lemma toont aan dat als er op een verzameling F dat $\mathcal{H}^s(F) \geq s$ als een massaverdeling μ bestaat met een eindige s -energie.

Lemma 5.3 *Als F een subset is van \mathbb{R}^n en er bestaat een massaverdeling μ op F zodat $I_s(\mu) < \infty$ dan geldt: $\mathcal{H}^s(F) = \infty$*

Bewijs 5.4 *Neem aan dat geldt $s(\mu) < \infty$ voor een massaverdeling μ en definieer:*

$$F_1 = \{x \in F : \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \mu(B(x, r))/r^s > 0\}$$

We bewijzen eerst dat voor deze verzameling geldt: $\mu(F_1) = 0$. Neem $x \in F_1$ willekeurig. Als $\mu(\{x\}) > 0$ dan geldt $I_s(x) = \infty$ en dus nemen we aan dat $\mu(\{x\}) = 0$. We kunnen nu een rij $\{r_i\}$ vinden, afnemend en convergerend naar 0 en een $\epsilon > 0$, zodat voor alle i geldt $\mu(B(x, r_i)) \geq \epsilon r_i^s$. Vervolgens kunnen we een rij $\{q_i\}$ vinden/kiezen, zodat geldt: $q_{i+1} < r_{i+1} < q_i < r_i$ en $\mu(A_i) \leq \frac{1}{4}\epsilon r_i^s$, waar A_i gedefinieerd wordt als de disjuncte ringen $B(x)_{r_i}/B(x)_{q_i}$ rond het punt x

Omdat op elke A_i geldt dat $|x-y|^{-s} \geq r_i^{-s}$ leiden we af:

$$\phi_s(x) = \int \frac{d\mu}{|x-y|^s} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^s} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4}\epsilon r_i^{-s} r_i^s = \infty$$

Maar omdat $I_s(\mu) = \int \phi_s(x) d\mu(x) < \infty$, moet $\phi_s(x) < \infty$ voor bijna alle x . We concluderen dan $\mu(F_1) = 0$. Omdat $\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} (\mu(B_r(x))/r^s) = 0$ voor $x \in F \setminus F_1$, volgt uit lemma 5.1 dat voor alle $c > 0$ geldt dat

$$\mathcal{H}^s(F) \geq \mathcal{H}^s(F \setminus F_1) \geq \mu(F \setminus F_1)/c \geq (\mu(F) - \mu(F_1))/c = \mu(F)/c$$

Dus is $\mathcal{H}^s(F) = \infty$

5.3 Constructie en analyse van de Random Cantor Set

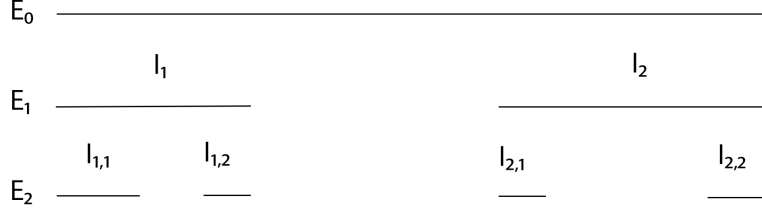
In deze sectie zullen we een willekeurige variatie van de middle-third Cantor set bestuderen waarbij de lengte van elk interval willekeurig is. We bepalen de Hausdorff-dimensie van deze Cantor-set om hier vervolgens een algemener resultaat uit afleiden. We zullen beginnen met het willekeurige fractal te construeren.

We beginnen met het unit interval $E_0 = [0, 1]$. Vervolgens wordt dit interval verdeeld in een linker- en rechter interval I_1 respectievelijk I_2 van willekeurige lengte, die disjunct zijn. We definiëren de set E_1 als de vereniging van I_1 en I_2 . Vervolgens wordt op hun beurt I_1 verdeeld in intervallen $I_{1,1}$ en $I_{1,2}$ en I_2 verdeeld in intervallen $I_{2,1}$ en $I_{2,2}$. De set E_2 is de vereniging van deze vier intervallen. Op een zelfde manier worden zo E_3, E_4, \dots geconstrueerd zodat E_k de vereniging is van 2^k disjuncte k-level intervallen en we merken op dat $E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \dots$. We definiëren de willekeurige Cantor als $F = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$.

Om statistische zelf-gelijkenis te waarborgen wordt opgelegd dat de verhouding in lengte tussen een linker-dochter interval en zijn moederinterval overal gelijk verdeeld. We schrijven deze verhouding van een linker-dochter interval $I_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k}$ met zijn moederinterval $I_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}$ als $C_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k} = \frac{I_{i_1, i_2, \dots, i_k}}{I_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}}$, waar $i_k \in \{1, 2\}$ voor elke k . Er wordt dus opgelegd dat dit willekeurige ratio $C_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k}$ op dezelfde manier verdeeld is als C_1 , de verhouding tussen het linker interval uit E_1 en het unit interval $[0, 1]$. Dit geldt dus voor elk willekeurig linker-dochter interval.

Op een zelfde manier moeten de verhouding tussen een rechter-dochter interval en zijn moeder interval $C_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k} = \frac{I_{i_1, i_2, \dots, i_k}}{I_{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}}}$ ook hetzelfde verdeeld zijn als C_2 . We leggen daarnaast op dat er constantes a, b zijn met $0 < a \leq b < \frac{1}{2}$, zodat $a \leq C_{i_1, i_2, \dots, i_k} \leq b$ voor alle i_1, i_2, \dots, i_k . Dit doen we zodat elk interval bestaat en om tussen elk linker- en rechter dochter-interval een kloof te waarborgen. Echter hoeven C_1 en C_2 niet hetzelfde verdeeld zijn.

Als mogelijk voorbeeld van een willekeurige Cantor-set die aan het bovenstaande voldoet wordt voor elk interval I een munt opgegooid. Bij kop wordt de lengte van linker- en rechter dochter-interval $\frac{|I|}{3}$ genomen. Bij munt wordt als lengte van het linker dochter-interval $\frac{|I|}{4}$ genomen en wordt als rechter ratio een uniform verdeelde stochast tussen 0 en $\frac{1}{2}$ genomen.



Figuur 7: De eerste drie stappen in de constructie van de hierboven beschreven willekeurige Cantor-set

Stelling 5.5 *De hausdorff-dimensie s van de hierboven beschreven Cantor-set is bijna zeker de oplossing van*

$$\mathbb{E}(C_1^s + C_2^s) = 1 \quad (6)$$

Bewijs 5.6 *We merken eerst op dat $\mathbb{E}(C_1^s + C_2^s)$ continu en dalend is en dat de vergelijking $\mathbb{E}(C_1^s + C_2^s) = 1$ altijd een unieke oplossing heeft voor s*

We beginnen het bewijs door een bovengrens te vinden door middel van de convergentie van martingalen. Met $I \in E_k$ wordt bedoeld dat het interval I een k -level interval I_{i_1, i_2, \dots, i_k} van E_k is. Met $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_k)$ wordt de verwachting van een variabele X bedoeld, waarbij al bekend is hoe de set E_k er uit ziet.

Laat I_{i_1, i_2, \dots, i_k} een interval zijn van E_k . Dan geldt voor $s > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|I_{i_1, i_2, \dots, i_k, 1}|^s + |I_{i_1, i_2, \dots, i_k, 2}|^s) &= \mathbb{E}(|C_{i_1, i_2, \dots, i_k, 1}|^s + |C_{i_1, i_2, \dots, i_k, 2}|^s) \cdot |I_{i_1, i_2, \dots, i_k}|^s \\ &= \mathbb{E}(C_1^s + C_2^s) \cdot |I_{i_1, i_2, \dots, i_k}|^s \end{aligned}$$

gezien dat $C_{i_1, i_2, \dots, i_k, 1}$ dezelfde verdeling als C_1 heeft en $C_{i_1, i_2, \dots, i_k, 2}$ dezelfde verdeling heeft als C_2 . Door te sommeren over alle intervallen uit E_k volgt:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{I \in E_{k+1}} |I|^s \mid \mathcal{F}_k \right) = \sum_{I \in E_k} |I|^s \cdot \mathbb{E}(C_1^s + C_2^s)$$

Voor de onvoorwaardelijke verwachting geldt dan:

$$\mathbb{E} \left(\sum_{I \in E_{k+1}} |I|^s \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{I \in E_k} |I|^s \right) \cdot \mathbb{E}(C_1^s + C_2^s) \quad (7)$$

Nemen we nu s zo dat $\mathbb{E}(C_1^s + C_2^s) = 1$, dan is

$$X_k = \sum_{I \in E_k} |I|^s \quad (8)$$

een martingaal. Dit volgt uit:

$$\mathbb{E}(X_{k+1} | \mathcal{F}_k) = \mathbb{E} \left(\sum_{I \in E_{k+1}} |I|^s \middle| \mathcal{F}_k \right) = \sum_{I \in E_k} |I|^s = X_k$$

Uit de convergentiestelling van martingalen volgt dat X_k met kans 1 convergeert naar X en dat $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_0) = 1^s = 1$. Omdat X eindige verwachting heeft is $\Pr(X = \infty) = 0$ en $\Pr(X = 0) = q < 1$. Als $X = 0$ dan moet $\sum_{I \in E_k} |I|^s$ naar 0 convergeren als $k \rightarrow \infty$, maar dan moeten ook zowel $\sum_{I \in E_k \cap I_1} |I|^s$ als $\sum_{I \in E_k \cap I_2} |I|^s$, de linker en de rechter helft van de sets van F , naar 0 convergeren. Uit de zelfgelijkenis van de set leiden we af dat de kans dat één van deze convergeert naar 0 gelijk is aan de kans q dat X convergeert naar 0. Dus $q = q^2$ en we concluderen dat $\Pr(X = 0) = q = 0$. In het bijzonder bestaan er dus getallen M_1 en M_2 zodat

$$0 < M_1 < X_k = \sum_{I \in E_k} |I|^s < M_2 < \infty$$

Omdat elk interval $I \in E_k \leq 2^{-k}$ geldt dat $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq \sum_{I \in E_k} |I|^s < M_2$ als $\delta \geq 2^{-k}$. We zouden dan namelijk een δ -overdekking kunnen maken van 2^k bollen die elk precies elk een interval overdekken. Maar als we nu k naar oneindig laten gaan, kunnen we δ willekeurig klein nemen, met als resultaat dat $\mathcal{H}^s(F) \leq M_2$ en dus $\dim_H(F) \leq s$

Om de bijna zekere ondergrens te bepalen van de Hausdorff-dimensie maken we gebruik van de eerder geïntroduceerde s -energie. We laten s voldoen aan vergelijking 6 en introduceren we een willekeurige maat μ op de set F . Voor $I \in E_k$ is

$$\mu(I) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left\{ \sum |J|^s : J \in E_j \text{ en } J \subset I \right\}$$

We merken de gelijkenis op met 8 en stellen dat ook dit limiet bestaat, en bovendien eindig en groter dan 0 is bijna zeker. We nemen $0 < t < s$ vast en schatten de t -energie van μ . Voor $x, y \in F$ bestaat er een grootst mogelijke k zodat x en y en het zelfde interval $I \in E_k$ zitten. We noteren dit interval als $I = x \wedge y$. Verder merken we op dat als $I \in E_k$ de kloof tussen het linker- en rechter dochter-interval I_1 en I_2 tenminste $d|I|$ is, met $d = 1 - 2b$. Dus:

$$\begin{aligned} \iint_{I=x \wedge y} |x - y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y) &= 2 \int_{x \in I_1} \int_{y \in I_2} |x - y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y) \\ &\leq \int_{x \in I_1} \int_{y \in I_2} d^{-t} |I|^{-t} d\mu(x) d\mu(y) \\ &= 2d^{-t} |I|^{-t} \mu(I_1) \mu(I_2) \end{aligned}$$

Als $I \in E_k$ dan geldt voor de verwachting van $\mu(I)$:

$$\mathbb{E}(\mu(I) | \mathcal{F}_k) = |I|^s$$

en dus:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\iint_{I=x \wedge y} |x-y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y) \mid \mathcal{F}_{k+1} \right) &\leq 2d^{-t} |I|^{-t} \mathbb{E}(\mu(I_1) \mid \mathcal{F}_{k+1}) \mathbb{E}(\mu(I_2) \mid \mathcal{F}_{k+1}) \\ &\leq 2d^{-t} |I|^{-t} |I_1|^s |I_2|^s \\ &\leq 2d^{-t} |I|^{2s-t} \end{aligned}$$

De onafhankelijke verwachting wordt dan:

$$\mathbb{E} \left(\iint_{I=x \wedge y} |x-y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y) \right) \leq 2d^{-t} \mathbb{E}(|I|^{2s-t})$$

Als we sommeren over alle $I \in \mathbb{E}_k$ wordt dit:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{I \in \mathbb{E}_k} \iint_{I=x \wedge y} |x-y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y) \right) &\leq 2d^{-t} \mathbb{E} \left(\sum_{I \in \mathbb{E}_k} |I|^{2s-t} \right) \\ &\leq 2d^{-t} \lambda^k \end{aligned}$$

Met $\lambda = \mathbb{E}(C_1^{2s-t} + C_2^{2s-t}) < 1$, volgt het bovenstaande door herhaaldelijk gebruik te maken van 7. Voor de verwachting van de t -energie van μ geldt dan:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(\int_F \int_F |x-y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{I \in \mathbb{E}_k} \int_F \int_F |x-y|^{-t} d\mu(x) d\mu(y) \right) \\ &\leq 2d^{-t} \sum_0^{\infty} \lambda^k \leq \infty \end{aligned}$$

Waaruit volgt dat de t -energie eindig is bijna zeker. Uit lemma 5.3 volgt nu dat $\dim_H(F) \geq t$

5.4 Generalisatie

We zullen de bovenstaande stelling veralgemenen, zodat ook de Hausdorff-dimensie van andere willekeurige fractalen kan worden bepaald. We beginnen met het beschrijven van een algemeen willekeurig fractal op een vergelijkbare manier hoe de constructie van de willekeurige Cantor-set is beschreven.

Laat $V \subset \mathbb{R}^n$ een open set zijn met afsluiting \overline{V} . Laat $m \geq 2$ het gehele getal zijn in hoeveel componenten we een set in iedere stap van de constructie opdelen. We definiëren $E_0 = \overline{V}$ en E_k als de vereniging van het m^k aantal sets $\overline{V_{i_1, \dots, i_k}}$, met $i_j = 1, \dots, m$ voor $1 \leq j \leq k$ en waar V_{i_1, \dots, i_k} gelijksoortig met V is of de lege set is. Daarnaast moet $E_{k+1} \subset E_k$, zodat $\{E_k\}$ dalend is.

Zoals het geval was met niet willekeurige fractalen en ook met de constructie

van de willekeurige Cantor-set moeten we een voorwaarde hebben zodat componenten $\overline{V_{i_1, \dots, i_k}}$ niet te veel overlappen. We eisen daarom dat $\cap_{i=1}^m V_{i_1, \dots, i_k, i} = \emptyset$ en $V_{i_1, \dots, i_k, i} \subset V_{i_1, \dots, i_k}$, wat in feite op hetzelfde als de open set voorwaarde neerkomt. Vergelijkbaar met het geval van de willekeurige Cantor-set definiëren we $C_{i_1, \dots, i_k} = |V_{i_1, \dots, i_k}| / |V_{i_1, \dots, i_{k-1}}|$ de ratio in lengte tussen een set en zijn moederset. Als V_{i_1, \dots, i_k} de lege set is, stellen we $C_{i_1, \dots, i_k} = 0$. We definiëren het willekeurige fractal als $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$.

Als V_{i_1, \dots, i_k} niet de lege set is en dus $C_{i_1, \dots, i_k} > 0$, dan moet $C_{i_1, \dots, i_k, i}$ hetzelfde verdeeld zijn als C_i , voor elke $1 \leq i \leq m$. In andere woorden: de verdeling van C_{i_1, \dots, i_k} hangt alleen af van de waarde van i_k . Daarnaast zijn C_{i_1, \dots, i_k} onafhankelijk verdeeld voor alle reeksen i_1, \dots, i_k . De stochasten $C_{i_1, \dots, i_k, 1}, \dots, C_{i_1, \dots, i_k, m}$ hoeven niet onafhankelijk te zijn. Op deze manier garanderen we de statistische zelf-gelijkenis van het fractal. Elk niet lege component V_{i_1, \dots, i_k} wordt voor elke i_1, \dots, i_k op dezelfde willekeurige manier weer opgedeeld in m componenten.

Stelling 5.7 *Laat F een set zijn dat voldoet aan het bovenstaande en laat N het aantal sets uit V_1, \dots, V_m zijn dat niet leeg is. Laat de q de kleinste niet negatieve oplossing zijn van*

$$t = \sum_{j=1}^m P(N = j)t^j = f(t) \quad (9)$$

Dan is de set F leeg met kans q . Daarnaast is de Hausdorff dimensie van F met kans $1 - q$ gelijk aan de oplossing voor s van

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^m c_i^s \right) = 1 \quad (10)$$

Bewijs 5.8 *Er is een kans groter dan 0 dat de set F leeg is dan en slechts dan als de kans $P(N = 0) > 0$. Als $N = 0$ is E_1 namelijk leeg en dus is ook F leeg. Als $P(N = 0) = 0$, zal de set nergens 'uitsterven'. De kans q dat F leeg is moet gelijk zijn aan de kans dat alle dochtersets V_1, \dots, V_m allemaal uitsterven. Door de statistische zelf-gelijkenis van F is de kans q_0 dat dit gebeurt gelijk aan $f(q_0)$. Als q de kleinste niet negatieve oplossing is van f , volgt dat, gebruikmakend dat f stijgend is, $P(E_k = \emptyset) = f(P(E_{k-1} = \emptyset)) \leq f(q) = q$ voor alle k , zodat $q_0 \leq q$ en dus $q_0 = q$*

Het bewijs dat de Hausdorff-dimensie van F , in het geval dat F niet leeg is, voldoet aan de oplossing voor s van vergelijking 10 is voornamelijk een veralgemeende versie van stelling 5.5, waar de Hausdorff-dimensie van de willekeurige Cantor-set wordt berekend. Daarom is gekozen dit bewijs niet toe te voegen.

Stelling 5.7 maakt het mogelijk om de Hausdorff-dimensie van een grote klasse willekeurige fractalen uit te rekenen. We zullen enkelen voorbeelden toelichten.

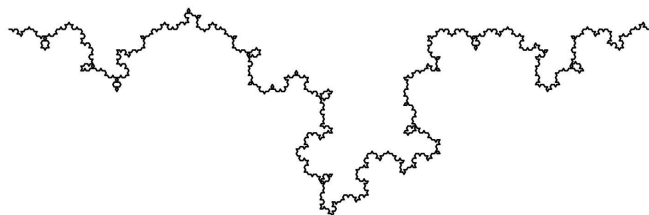
Willekeurige Koch-curve

In de klassieke variant van de Koch-kromme wordt elk interval in drieën verdeeld, vervolgens wordt het middelste deel vervangen door een gelijkzijdige driehoek met de punt naar buiten, en tot slot wordt de basis van de driehoek verwijderd. We beschouwen een willekeurige variant waar we bij elke stap een muntje opgooien of de punt van de driehoek naar buiten staat of naar binnen.

In elke stap wordt een segment van lengte L als het ware vervangen door 6 andere segmenten. 4 van deze segmenten hebben lengte $L/3$, dit zijn de segmenten aan de buitenkant en de twee segmenten van de gelijkzijdige driehoek die of naar binnen wijzen of naar buiten wijzen. De andere 2 segmenten, van de tegenoverliggende driehoek, krijgen lengte 0. Voor de verwachting van c_1, \dots, c_6 geldt dan

$$\sum_{i=1}^6 c_i^s = 4\left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$$

en de Hausdorff-dimensie is dan $s = \frac{\log(4)}{\log(3)}$. Dit is, zoals intuïtief misschien al werd verwacht, gelijk aan de Hausdorff-dimensie van de klassieke variant van de Koch-kromme.



Figuur 8: De met behulp van Python gegenereerde variant van de Koch-kromme waar bij de driehoek willekeurig naar binnen of naar buiten wijst

Willekeurige Sierpinsky-driehoek

We construeren de willekeurige versie van de eerder besproken Sierpinsky-driehoek om vergelijkbare manier als in het klassieke geval. We beginnen met een driehoek E_0 en verdelen deze op in vier gelijk-vormige driehoeken. Met kans $0 < p < 1$ wordt een driehoek behouden in E_1 en met kans $1 - p$ verwijderd. We verdelen in het algemeen elk component V_{i_1, \dots, i_k} elke stap weer op in 4 gelijkvormige driehoeken met gehalveerde lengte $V_{i_1, \dots, i_k, 1}, \dots, V_{i_1, \dots, i_k, 4}$ en leggen op dat elk van deze driehoeken een kans $0 < p < 1$ heeft om te worden behouden. We definiëren dit fractal als $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$

We nemen N voor het aantal niet lege componenten in E_1 . Uit de binomiale verdeling volgt dan dat $P(N = j) = \binom{4}{j} p^j (1-p)^{4-j}$. Uit vergelijking 9 volgt

dat de kans dat $F = \emptyset$ de kleinste positieve oplossing is voor

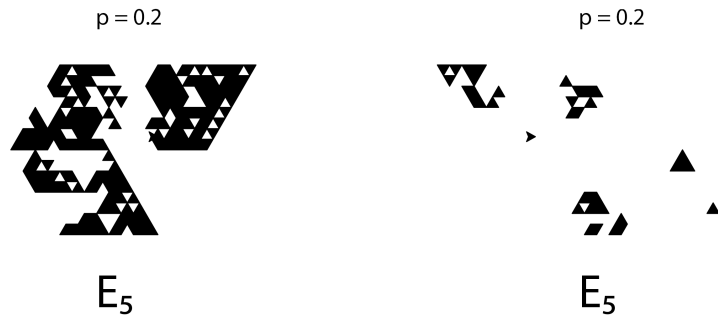
$$t = \sum_{j=1}^4 \binom{4}{j} (pt)^j (1-p)^{4-j} = (pt + 1 - p)^4$$

gebruikmakend van het Binomium van Newton.

Voor elke c_i geldt dat $P(c_i = 0) = 1 - p$ en $P(c_i = \frac{1}{2}) = p$. De Hausdorff-dimensie van F wordt dan, in het geval dat F niet leeg is, de oplossing van s voor

$$1 = E \left(\sum_{i=1}^4 c_i^s \right) = 4 E(c_i) = 4p \left(\frac{1}{2}\right)^s$$

Hieruit volgt dat $\dim_H(F) = \frac{\log(4p)}{\log(2)}$, mits F niet leeg is.



Figuur 9: De set E_5 van deze variant van de Sierpinsky-driehoek, gegenereerd met Python. Links met $p = 0.8$ en rechts met $p = 0.5$

Referenties

- [1] K.J. Falconer, *Fractal Geometry: mathematical foundations and applications*, 3rd edition, Wiley, 1994
- [2] K.J. Falconer, *Techniques in Fractal Geometry*, 3rd edition, Wiley, 1994.
- [3] David Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, 1991.
- [4] Christoph Bandt, Nguyen Viet Hung, Hui Rao *On the open set-condition for self-similar fractals*, Proceedings of the American mathematical society, 2005
- [5] MIT OpenCourseWare *Martingale Convergence Theorem*, Massachusetts Institute Of Technology, 2013