0,999...=1!

Hart, K.P.

Publication date
2020

Document Version
Accepted author manuscript

Published in
Euclides: maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Citation (APA)
Hart, K. P. (2020). 0,999...=1! *Euclides: maandblad voor de didactiek van de wiskunde*, *95*(7), 26-29.
https://fa.its.tudelft.nl/~hart/blog/nulkommanegen.pdf

$0{,}999\ldots = 1$!

K. P. HART

SAMENVATTING. Een beschouwing naar aanleiding van het artikel $0{,}999\ldots = 1$? van Jos Groot, *Euclides* 95 (3). 18–20. Met als conclusie dat het antwoord op de impliciete vraag natuurlijk "Ja" is.

INLEIDING

Over $0{,}999\ldots$ kunnen de gemoederen zeer verhit oplopen. In de goede oude tijd van nieuwsgroepen als `sci.math` vloog men elkaar regelmatig in de haren over de gelijkheid $0{,}999\ldots = 1$.

In het artikel [2] beargumenteert Jos Groot dat deze gelijkheid niet opgaat in de hyperreële getallen van de Niet-StandaardAnalyse. Helaas bevat die argumentatie een beginnersfout. In dit artikel laat ik zien wat die fout is en ook dat $0{,}999\ldots = 1$ in de Niet-StandaardAnalyse gewoon opgaat.

WAT BETEKENT $0{,}999\ldots$ EN WAT BEDOELEN WE MET $0{,}999\ldots = 1$?

In het artikel, [2], van Jos Groot ontbreekt een belangrijk ding, namelijk een ondubbelzinnige afspraak over de betekenis van $0{,}999\ldots$. Door het ontbreken van die afspraak wordt het hele artikel al vanaf het begin ondergraven.

Daarom, om met Bernhard Riemann te spreken

Also zuerst: Was hat man unter $0{,}999\ldots$ zu verstehen?

(In zijn Habilitationsschrift [4] luidde hij met de zin "Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ zu verstehen?" de definitie van de (Riemann-)integraal in.)

Het antwoord op die vraag luidt in de Analyse: $0{,}999\ldots$ (een nul met oneindig veel negens achter de komma) is een *informele schrijfwijze* voor het reële getal bepaald door

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n}$$

die schrijfwijze is weer een afkorting van

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} 9 \cdot 10^{-n}$$

De axioma's voor $\mathbb{R}$ impliceren dat deze limiet bestaat: de rij is monotoon stijgend en begrensd (alle termen zijn kleiner dan 1). Dus: $0{,}999\ldots$ is een andere (informele) schrijfwijze voor bovenstaande limiet.

Date: Monday 09-03-2020 at 21:42:55 (cet).

Ten tweede: de gelijkheid $0{,}999\ldots = 1$ claimt dat die limiet gelijk is aan 1:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} 9 \cdot 10^{-n} = 1.$$

En die claim is per definitie een korte formulering van: voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat een K zó dat voor alle $k \geqslant K$ de ongelijkheid

$$\left| 1 - \sum_{n=1}^{k} 9 \cdot 10^{-n} \right| < \varepsilon$$

geldt.

Dat laatste laat zich snel bewijzen. Bijvoorbeeld door eerst op te merken dat

$$1 - \sum_{n=1}^{k} 9 \cdot 10^{-n} = 10^{-k}$$

en vervolgens de Archimedische eigenschap te gebruiken om vast te stellen dat voor elke $\varepsilon > 0$ een K bestaat met $10^{-k} < \varepsilon$ voor $k \geqslant K$.

Samengevat: $0{,}999\ldots$ is een suggestieve schrijfwijze voor de waarde van een oneindige som en $0{,}999\ldots = 1$ claimt, terecht, dat die waarde gelijk is aan 1.

Maar hoe werkt dit hyperreëel? Wat zegt de Niet-StandaardAnalyse echt over $0{,}999\ldots$?

Decimale ontwikkelingen

Eerst even iets over decimale ontwikkelingen, waarbij we ons beperken tot de reële getallen in het eenheidsinterval. We gebruiken die ontwikkelingen om resultaten van onze berekeningen overzichtelijk/inzichtelijk weer te geven. Achter de suggestieve notatie $0{,}d_1d_2d_3\ldots$ zitten een stelling en een daaruit voortvloeiende afspraak.

De stelling heeft twee componenten.

De eerste zegt: elke *functie* $f : \mathbb{N} \to \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ bepaalt een reëel getal x_f in $[0,1]$ door

$$x_f = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot 10^{-n}$$

Dat die som bestaat volgt op dezelfde wijze als hierboven: de rij partiële sommen is monotooon stijgend en begrensd door 1.

De tweede zegt het omgekeerde: bij elk reëel getal x in $[0,1]$ bestaat een functie f zó dat $x = x_f$.

De afspraak die hieruit voortvloeit is dat we d_i schrijven in plaats van $f(i)$ en de functie f suggestief als $0{,}d_1d_2d_3\ldots$ noteren. Die notatie is een eigen leven gaan leiden en we vereenzelvigen vaak de *uitdrukking* $0{,}d_1d_2d_3\ldots$ met het *getal* x_f zelf.

Hyperreëel werken

Voor we kijken wat de hyperreële interpretatie van $0{,}999\ldots$ zal zijn moeten we twee dingen uit het boek van Keisler citeren, zie [3, Section 1.5].

Ten eerste is er het Uitbreidingsprincipe (Extension Principle).

Uitbreidingsprincipe. (a) De reële getallen vormen een deelverzameling van de hyperreële getallen en de ordeningsrelatie $<$ is de beperking van de ordeningsrelatie $<^*$ van de hyperreële getallen.

(b) Er is een hyperreëel getal dat groter is dan 0 maar kleiner dan elk positief reëel getal.

(c) Voor elke reëelwaardige functie f van één of meer variabelen is er een bijbehorende hyperreële functie f^* van hetzelfde aantal variabelen. We noemen f^* de natuurlijke uitbreiding van f.

In [2] komen (a) en (b) aan de orde maar (c) niet, zelfs niet impliciet. Dit legt de kiem voor de bovengenoemde beginnersfout.

Onderdeel (c) wordt ook gebruikt om verzamelingen uit te breiden, via de uitbreiding van hun karakteristieke functies. Binnen de verzameling $\mathbb{R}^*$ van de hyperreële getallen krijgen we zo de uitbreiding van de verzameling der natuurlijke getallen als $\mathbb{N}^* = \{x \in \mathbb{R}^* : \chi^*_{\mathbb{N}}(x) = 1\}$.

Verder is er het Overdrachtsprincipe (Transfer Principle). Dit wordt in [2] in het geheel niet genoemd, en dat is dan ook waar de eerder genoemde fout verder ontkiemt en opgroeit.

Overdrachtsprincipe. Elke reële uitspraak die geldt voor één of meer functies geldt voor de natuurlijke (hyperreële) uitbreidingen van die functies.

Zo neemt, bijvoorbeeld, de uitbreiding van de karakteristieke functie van $\mathbb{N}$ alleen de waarden 0 en 1 aan. Immers, er geldt $(\forall x \in \mathbb{R})(\chi_{\mathbb{N}}(x) = 0 \vee \chi_N(x) = 1)$, en dus geldt $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\chi^*_{\mathbb{N}}(x) = 0 \vee \chi^*_{\mathbb{N}}(x) = 1)$.

We weten dat $\mathbb{R}$ aan de Archimedische eigenschap voldoet:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(y \neq 0 \to (\exists n \in \mathbb{N})(|x| < n|y|))$$

In het bijzonder is er voor elke $x \in \mathbb{R}$ een $n \in \mathbb{N}$ met $x < n$, dus

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(x < n)$$

Pas het Overdrachtsprincipe toe:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\exists n \in \mathbb{N}^*)(x <^* n)$$

voor elke $x \in \mathbb{R}^*$ is er een $n \in \mathbb{N}^*$ met $x <^* n$.

Neem een positief hyperreëel getal ϵ dat kleiner is dan elk positief reëel getal, een infinitesimaal dus. Voor elk positief reëel getal x geldt $\epsilon < x^{-1}$, en dus ook $\epsilon^{-1} > x$. Er is dan een $n \in \mathbb{N}^*$ met $\epsilon^{-1} <^* n$; die n is dus kennelijk een 'oneindig groot natuurlijk getal' want voor elk 'gewoon' reëel getal x geldt $x <^* n$.

Hierbij is het Overdrachtsprincipe gebruikt om in te zien dat de gewone rekenregels van $\mathbb{R}$ ook in $\mathbb{R}^*$ gelden.

Opmerking. Hierboven, en ook hieronder, schrijven we de uitspraken in (standaard) logische taal. Dat is met opzet en nodig: de Niet-StandaardAnalyse is door Robinson in [5] ontwikkeld binnen de Mathematische Logica. Het Uitbreidingsprincipe en het Overdrachtsprincipe zijn vereenvoudigingen van technische gereedschappen die bij dat ontwikkelen gebruikt zijn.

Opmerking. De beweegredenen van Robinson waren, waarschijnlijk, tweeledig. Ten eerste is er een algemene stelling van Skolem die laat zien dat bekende oneindige structuren als $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ stricte uitbreidingen hebben die op het niveau van eerste-orde logica niet te onderscheiden zijn van die structuren zelf. Robinson paste, wellicht gewoon uit nieuwsgierigheid, die stelling toe op $\mathbb{R}$ en verkreeg zo een lichaam $\mathbb{R}^*$ dat (onze) $\mathbb{R}$ als een echte deelverzameling bevat. Die $\mathbb{R}^*$ voldoet aan het Uitbreidingsprincipe als hierboven geformuleerd; voor (a) en (b) volgt dat uit de stelling van Skolem, en het getal uit (b) kun je maken uitgaande van een element van $\mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$. Het Overdrachtsprincipe is een wat toegankelijker formulering van het ononderscheidbaar zijn van $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^*$.

Daarnaast moet al snel gebleken zijn dat door van buiten naar $\mathbb{R}^*$ te kijken onderscheid gemaakt kan worden tussen onze 'echte' reële getallen en de nieuwe elementen van $\mathbb{R}^*$ en dat, dankzij de getallen uit onderdeel (b) van het Uitbreidingsprincipe, Analyse met 'oneindig kleine' en 'oneindig grote' getallen bedreven kon worden, net als in de goede oude tijd van Fermat, Newton, Leibniz, Euler, en andere groten uit de Analyse.

Robinson heeft dat systematisch uitgewerkt en zo is het gebied van de Niet-StandaardAnalyse tot stand gekomen. Dat dit type Analyse niet tot in alle hoeken van de wiskunde is doorgedrongen is wellicht te wijten aan het feit dat men een strict onderscheid moet maken tussen wat wij van buiten aan $\mathbb{R}^*$ observeren en wat in $\mathbb{R}^*$ geldig is *als structuur op zichzelf.* En het artikel van Jos Groot laat zien dat dat niet eenvoudig is en tot fouten leidt.

Opmerking. We kunnen nu de beginnersfout uit [2] laten zien. Zoals hierboven te zien is is de vertaling van een reële uitspraak in feite die uitspraak zelf maar dan met aan elk symbool dat geen variabele is een sterretje gehangen, om aan te geven dat we met de natuurlijke uitbreiding van dat ding van doen hadden.

Wat in het artikel gebeurt is dat naar de rij $\langle x_n \rangle_n$ gekeken wordt, waarbij $x_n = \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k}$ ('een nul met n negens' dus). Vervolgens wordt geconcludeerd dat voor onze infinitesimale ϵ het volgende geldt

$$(\forall n \in \mathbb{N})(x_n <^* 1 -^* \epsilon <^* 1) \tag{$*$}$$

met geen sterretje bij $\mathbb{N}$ en x_n, en wel een sterretje bij $<$ en het minteken. Hieruit concludeerde Jos Groot dat $0{,}999\ldots \leqslant 1 - \epsilon < 1$.

En hier gebeurt waar hierboven voor gewaarschuwd is: het stricte onderscheid tussen wat wij van buiten zien en wat *intern* in $\mathbb{R}^*$ geldt. (En ja, ik ben ook een paar keer in die val getrapt.)

Om te beginnen: wat misschien niet opvalt maar wel cruciaal is is dat de term 'infinitesimaal' (of 'oneindig klein') door ons op bepaalde hyperreële getallen wordt geplakt. Intern in $\mathbb{R}^*$ bestaat dat onderscheid niet; een 'inwoner' van $\mathbb{R}^*$ ziet geen overgang tussen onze reële getallen en de infinitesimalen. Daarom schreef ik hierboven ook dat we 'kennelijk' een oneindig groot natuurlijk getal gevonden hadden: wij zien van buiten een onderscheid tussen de 'gewone' natuurlijke getallen en het oneindig grote natuurlijke getal n; echter, voor $\mathbb{R}^*$ is die n ook een gewoon natuurlijk getal.

Formule $(*)$ is een waarneming van buiten maar niet iets waar de Niet-Standaard-Analyse iets mee kan. Wij zien van buiten nog iets meer:

- als $a \in \mathbb{R}^*$ voldoet aan $x_n <^* a$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ dan geldt $a \geqslant 1$ of $1 - a$ is infinitesimaal
- als ϵ positief en infinitesimaal is dan is 2ϵ dat ook en ook geldt $x_n < 1 - 2\epsilon < 1 - \epsilon$ voor alle $n \in \mathbb{N}$

De conclusie, voor ons, is dat er *geen kleinste* hyperreëel getal is dat groter is dan alle x_n. Op de plek waar Jos Groot 0,999 . . . denkt te zien zit een gat in $\mathbb{R}^*$. Dat gat is te vergelijken met, bijvoorbeeld, het gat in $\mathbb{Q}$ dat in $\mathbb{R}$ opgevuld wordt met $\sqrt{2}$.

Ik heb [2] bij een college Logica besproken en er stak (gelukkig) een student de hand op en zei "Maar er zijn toch ook oneindig grote natuurlijke getallen?" Inderdaad: als we 0,999 . . . in de hyperreële wereld willen interpreteren zullen we rekening met *alle* natuurlijke getallen van $\mathbb{R}^*$ moeten houden, ook die er voor ons 'oneindig groot' uitzien.

0,999 . . . hyperreëel

De hyperreële interpretatie van 0,999 . . . gaat via de natuurlijke uitbreiding

$$f^* : \mathbb{N}^* \to \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

van onze constante functie f en de natuurlijk uitbreiding $\langle x_k^* : k \in \mathbb{N}^* \rangle$ van de rij $\langle x_k : k \in \mathbb{N} \rangle$, gedefinieerd door $x_k = \sum_{n=1}^{k} 9 \cdot 10^{-n}$.

Overdrachtsprincipe, de eerste keer. In $\mathbb{R}$ geldt

$$(\forall k \in \mathbb{N})(x_k < 1)$$

Dus in $\mathbb{R}^*$ geldt

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*)(x_k^* <^* 1)$$

Dit betekent dat voor elke $k \in \mathbb{N}^*$ de partiële som x_k^* kleiner dan 1 is.

Overdrachtsprincipe, de tweede keer. Verder geldt in $\mathbb{R}$ ook

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(x_k > 1 - \varepsilon)$$

(Omdat de rij stijgend is geldt $x_l > 1 - \varepsilon$ dan voor alle $l \geqslant k$.)

Deze formule is dus ook geldig in $\mathbb{R}^*$. Maar dat betekent dat voor elk positief getal ε in $\mathbb{R}^*$ (standaard of infinitesimaal) er een $k \in \mathbb{N}^*$ is met $x_k^* > 1 - \varepsilon$.

Kortom: de hyperreële interpretatie van 0,999 . . . is als de hyperreële som van de natuurlijke uitbreiding van de reeks $\sum 9 \cdot 10^{-n}$. We hebben net vastgesteld dat die som ook gelijk is aan 1.

Er is ook hyperreëel geen speld tussen 0,999 . . . en 1 te krijgen.

In het artikel [1] van Bryan Dawson wordt dit laatste ook vastgesteld en daar wordt wat dieper op de structuur van de natuurlijke uitbreiding van onze constante functie f ingegaan.

Referenties

[1] Bryan Dawson, 0.999 . . . = 1*: An Infinitesimal Explanation*, Math Horizons **24** (2016), 5–7, DOI 10.4169/mathhorizons.24.2.5.

[2] Jos Groot, 0,999 . . . = 1*?*, Euclides **95** (2019/20), no. 3, 18–20.

[3] H. Jerome Keisler, *Elementary calculus. An infinitesimal approach. 3rd ed.*, Dover Publications, Mineola, NY, 2012.

[4] Bernhard Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **13** (1868), 87–132. Habilitationsschrift, 1854.

[5] Abraham Robinson, *Non-standard Analysis*, Indagationes Mathematicae (Proceedings) **64** (1961), 432–440, DOI 10.1016/S1385-7258(61)50044-3.

Faculteit EWI, TU Delft, Postbus 5031, 2600 GA Delft
Email address: k.p.hart@tudelft.nl
URL: http://fa.its.tudelft.nl/~hart