

T.R. van Woudenberg

# Invloedslijnen voor platen

Ingenieurstoel op basis van het  
balkjesmodel

*Figuur 1 op voorblad - Gibraltar airport (Rinaldi, 2013)*

# Invloedslijnen voor platen

## Ingenieurstoel op basis van het balkjesmodel

Door

T.R. van Woudenberg

Het afsluitende eindwerk van de

**Bachelor of Science**  
in Civiele Techniek

bij de Technische Universiteit Delft,  
op 19 juni 2017.

Eerste begeleider:	J.W. Welleman	TU Delft
Tweede begeleider:	P.C.J. Hoogenboom	TU Delft

Een digitale versie van dit Bachelor Eindwerk is beschikbaar op <http://repository.tudelft.nl/>.

## Voorwoord

Dit rapport is geschreven in het kader van het BSc-Eindproject. Dit project vormt de afsluiting van de bachelor Civiele Techniek.

Dit rapport is bedoeld als verslaglegging van de ontwikkeling van een tool voor studenten en ingenieurs. De ingenieurstool is geschreven in Python en met dit verslag ingeleverd. Dit verslag behandelt de achtergrond, toetsing en discussie van de code zodat in vervolgonderzoek de ingenieurstool verder afgemaakt kan worden.

T.R. van Woudenberg  
Delft, juni 2017

## Samenvatting

In het vakgebied van mechanica vormen invloedslijnen een tool waarmee gemakkelijk maatgevende krachten, momenten en verplaatsingen kunnen worden gevonden. Echter, deze invloedslijnen zijn alleen toepasbaar op balken (één-dimensionaal). Binnen de civiele sector zijn naast balken, ook platen een veelgebruikte constructievorm (twee-dimensionaal). Voor platen is echter geen equivalente methode beschikbaar als invloedslijnen die makkelijk en snel inzicht geeft in een constructie.

Dit rapport focust op het ontwikkelen van een ingenieurstool waarmee gemakkelijk invloedslijnen voor platen kunnen worden bepaald. Er is een verbeterings- en ontwikkelingsslag gemaakt op het bachelor eindwerk van eerdere studenten die een model hebben ontwikkeld waarbij de plaat wordt geschematiseerd als een groot aantal verbonden balkjes. Dit model is verbeterd en getoetst aan de hand van modellen voor platen. Vervolgens is dit basismodel toegepast in vier modellen voor invloedslijnen. De modellen berekenen de invloedslijnen voor verplaatsingen, krachtsgrootheden volgens de brute kracht methode, krachtsgrootheden volgens de methode dummybelasting en de oplegreacties uit. Het model met de dummybelasting is de verbeterde versie van het model volgens de brute kracht methode, waarbij gebruikt wordt gemaakt van de methode van Muller-Breslau om snel de oplossing te bepalen. Deze invloedslijnen zijn getoetst aan de hand van oplossingen van Guyon & Massonnet en Pucher.

Er is een breed inzetbaar, snel en betrouwbare ingenieurstool gemaakt waarmee het gedrag van platen wordt benaderd en invloedslijnen kunnen worden bepaald. Het basismodel voldoet aan alle toetsen, echter ontstaan er fouten rond de randen in de oplossingen voor buigmomenten en dwarskracht door de modellering volgens het balkjesmodel. Het model voor invloedslijnen voldoet aan de meeste toetsen. Alleen bij de dwarskrachten zit er een fout in de oplossing, waardoor deze een factor twee tot vier afwijkt van de oplossing van Pucher.

Doordat de plaat als een balkjesmodel wordt benaderd, ontstaat er een grillig effect dat voor fouten in de vergelijking met het plaatmodel zorgt. Dit effect kan nog beter bekeken worden om inzicht te krijgen in hoe het balkjesmodel de plaat het beste kan benaderen. Ook zal onderzocht moeten worden hoe het model het daadwerkelijk gedrag rond de belasting het beste kan benaderen. Er ontstaan in dit punt nu nog grote pieken, die afhankelijk zijn van de detaillering van het model. Als deze punten goed zijn uitgewerkt kan dit model worden gebruikt als basis voor een programma met een makkelijke interface waarmee studenten en/of ingenieurs in de dagelijkse praktijk snel inzicht kunnen krijgen in het gedrag van platen.

## Inhoudsopgave

1	Figuren- en tabellenlijst .....	2
2	Symbolenlijst .....	8
2.1	Inleiding.....	11
3	Beschrijving basismodel.....	13
3.1	Bepaling elementstijfheidsmatrix .....	15
3.2	Assembleren globale stijfheidsmatrix .....	22
3.3	Toevoegen belasting .....	24
3.4	Verwerking randvoorwaarden.....	24
3.5	Oplossen vrijheidsgraden .....	24
3.6	Bepalen krachtsgrootheden.....	25
3.7	Bepalen oplegreacties .....	30
3.8	Voorbeeld uitvoer .....	30
4	Toetsing basismodel .....	44
4.1	Resultaat.....	44
4.2	Beperkte toepassing balkjesmodel .....	44
4.3	Toets zonder torsie .....	45
4.4	Toets met torsie .....	45
4.5	Toets plaat van Nadai .....	59
5	Beschrijving model invloedslijnen .....	62
5.1	Invloedslijnen verplaatsingen .....	63
5.2	Interpretatie invloedslijnen.....	64
5.3	Voorbeeld uitvoer invloedslijnen verplaatsingen .....	65
5.4	Invloedslijnen krachtsgrootheden - brute kracht .....	69
5.5	Invloedslijnen krachtsgrootheden – snelle route.....	70
5.6	Voorbeeld uitvoer invloedslijnen krachtsgrootheden.....	84
6	Toetsing model invloedslijnen .....	94
6.1	Bareš & Massonnet.....	95
6.2	Pucher.....	96
6.3	Toetsing invloedslijn zakking.....	97
6.4	Toetsing invloedslijn krachtsgrootheden.....	99
7	Conclusie .....	120
8	Discussie.....	121
8.1	Basismodel plaat als balkjesmodel.....	121
8.2	Modellen voor invloedslijnen .....	121
8.3	Aanbevelingen .....	122
9	Bronvermelding .....	123
10	Bijlages.....	124
10.1	Startnotitie.....	124
10.2	Besprekingsverslag tussenrapport .....	130

# 1 Figuren- en tabellenlijst

## FIGURENLIJST

FIGUUR 1 OP VOORBLAD - GIBRALTAR AIRPORT (RINALDI, 2013) .....	II
FIGUUR 2 - POSITIEVE SNEDEKRACHTEN BALKJE IN X-RICHTING MET LENGTE DX EN BREEDTE DY.....	9
FIGUUR 3 - POSITIEVE SNEDEKRACHTEN OP BALKJE IN Y-RICHTING MET LENGTE DY EN BREEDTE DX.....	9
FIGUUR 4 - POSITIEVE RICHTINGEN GLOBALE ASSENSTELSEL .....	10
FIGUUR 5 – VOORBEELD NUMMERING KNOPEN VOOR $N = M = 3$ .....	10
FIGUUR 6 - FLOWCHART BASISMODEL.....	13
FIGUUR 7 - RELATIE TUSSEN POSITIEVE SNEDEKRACHTEN EN POSITIEVE GLOBALE KRACHTEN OP TWEE KNOPEN I EN J MET EEN BALLELEMENT ERTUSSEN.....	16
FIGUUR 8 - RELATIE TUSSEN POSITIEVE SNEDEKRACHTEN EN POSITIEVE GLOBALE KRACHTEN IN ZOWEL X- ALS Y-RICHTING OP KNOOP I MET AANSLUITENDE BALKEN (I), (J), (K) EN (L) .....	18
FIGUUR 9 - OVERZICHT PLAAT MET GENUMMERDE KNOPEN .....	22
FIGUUR 10 - BEPALING $M_{Y-X}$ IN GEMODELLEERDE PLAAT IN KNOOP I MET AANSLUITENDE BALKEN (I), (J), (K) EN (L).....	25
FIGUUR 11 - BEPALING $M_{Y-Y}$ IN GEMODELLEERDE PLAAT IN KNOOP I MET AANSLUITENDE BALKEN (I), (J), (K) EN (L).....	26
FIGUUR 12 - BEPALING $M_{XY}$ IN KNOOP I MET AANSLUITENDE BALKEN (I), (J), (K) EN (L) .....	27
FIGUUR 13 - BEPALING $V_{Z-X}$ IN KNOOP I MET AANSLUITENDE BALKEN (I), (J), (K) EN (L) .....	28
FIGUUR 14 - BEPALING $V_{Z-Y}$ IN KNOOP I MET AANSLUITENDE BALKEN (I), (J), (K) EN (L).....	29
FIGUUR 15 - RECHTHOEKIGE PLAAT, TWEE OVERSTAANDE RANDEN INGEKLEMD, TWEE RANDEN SCHARNIEREND OPGELEGD.....	30
FIGUUR 16 - 3D-PLOT ZAKKING.....	31
FIGUUR 17 - CONTOURPLOT ZAKKING .....	31
FIGUUR 18 - 3D-PLOT HOEKVERDRAAIING OM X-AS .....	32
FIGUUR 19 - 3D-PLOT HOEKVERDRAAIING OM Y-AS .....	32
FIGUUR 20 – 3D-PLOT BUIGEND MOMENT IN X-RICHTING STAPSGEWIJS.....	33
FIGUUR 21 - 3D-PLOT BUIGING MOMENT PER EENHEID VAN BREEDTE IN X-RICHTING GEMIDDELD OVER KNOOP .....	33
FIGUUR 22 - 3D-PLOT BUIGEND MOMENT IN Y-RICHTING STAPSGEWIJS .....	34
FIGUUR 23 - 3D-PLOT BUIGEND MOMENT PER EENHEID VAN BREEDTE IN Y-RICHTING GEMIDDELD OVER KNOOP .....	34
FIGUUR 24 - 3D-PLOT DWARSKRACHT IN X-RICHTING STAPSGEWIJS.....	35
FIGUUR 25 - 3D-PLOT DWARSKRACHT PER EENHEID VAN BREEDTE IN X-RICHTING GEMIDDELD OVER KNOOP. DE BLAUWE PLOT TOONT DE DWARSKRACHT VOLGENS VERGELIJKING 3-30 EN DE RODE PLOT TOONT DE DWARSKRACHT VOLGENS VERGELIJKING 3-31VERGELIJKING 3-33. ....	35
FIGUUR 26 - 3D-PLOT DWARSKRACHT IN Y-RICHTING STAPSGEWIJS.....	36
FIGUUR 27 - 3D-PLOT DWARSKRACHT PER EENHEID VAN BREEDTE IN Y-RICHTING GEMIDDELD OVER KNOOP. DE BLAUWE PLOT TOONT DE DWARSKRACHT VOLGENS VERGELIJKING 3-30 EN DE RODE PLOT TOONT DE DWARSKRACHT VOLGENS VERGELIJKING 3-31. ....	36
FIGUUR 28 - 3D-PLOT DWARSKRACHT PER EENHEID VAN BREEDTE IN Y-RICHTING GEMIDDELD OVER KNOOP INGEZOOMD. DE BLAUWE PLOT TOONT DE DWARSKRACHT VOLGENS VERGELIJKING 3-30 EN DE RODE PLOT TOONT DE DWARSKRACHT VOLGENS VERGELIJKING 3-31. ....	37
FIGUUR 29 - 3D-PLOT WRINGEND MOMENT IN X-RICHTING STAPSGEWIJS.....	38
FIGUUR 30 - 3D-PLOT WRINGEND MOMENT IN Y-RICHTING STAPSGEWIJS.....	38
FIGUUR 31 - 3D-PLOT WRINGEND MOMENT GEMIDDELD OVER KNOOP .....	38
FIGUUR 32 - 3D-PLOT VERTICALE OPLEGKRACHTEN.....	40
FIGUUR 33 LINKS - 3D-PLOT OPLEGMOMENT OM X-AS .....	40
FIGUUR 34 RECHTS - 3D-PLOT OPLEGMOMENT OM Y-AS.....	40
FIGUUR 35 - 3D-PLOT VERTICALE OPLEGKRACHTEN PER EENHEID VAN BREEDTE .....	41
FIGUUR 36 LINKS - 3D-PLOT OPLEGMOMENT OM DE X-AS PER EENHEID VAN BREEDTE .....	41
FIGUUR 37 RECHTS - 3D-PLOT OPLEGMOMENT OM DE Y-AS PER EENHEID VAN BREEDTE .....	41
FIGUUR 38 - 3D-PLOT MET ZOWEL VERTICALE OPLEGKRACHTEN PER EENHEID VAN BREEDTE ALS DWARSKRACHT PER EENHEID VAN BREEDTE .....	42

FIGUUR 39 LINKS - 3D-PLOT MET ZOWEL OPLEGMOMENTEN PER EENHEID VAN BREEDTE ALS INTERN BUIGMOMENT IN Y-RICHTING .....	42
FIGUUR 40 RECHTS - 3D-PLOT MET ZOWEL OPLEGMOMENTEN PER EENHEID VAN BREEDTE ALS INTERN BUIGMOMENT IN X-RICHTING .....	42
FIGUUR 41 - VIERKANTE PLAAT, SCHARNIEREND OPGELEGD.....	46
FIGUUR 42 – PROCENTUELE FOUT BIJ VARIABLE N .....	46
FIGUUR 43- CONVERGENTIE ZAKKING VAN BELASTINGGEVAL 1A.....	47
FIGUUR 44 - RECHTHOEKIGE PLAAT, SCHARNIEREND OPGELEGD.....	48
FIGUUR 45 - CONVERGENTIE VAN BELASTINGGEVAL 1B.....	48
FIGUUR 46 - VIERKANTE PLAAT, ÉÉN RAND INGEKLEMD, DRIE RANDEN SCHARNIEREND OPGELEGD .....	49
FIGUUR 47 - CONVERGENTIE VAN BELASTINGGEVAL 2.....	49
FIGUUR 48 - VIERKANTE PLAAT, TWEE OVERSTAANDE RANDEN INGEKLEMD, TWEE RANDEN SCHARNIEREND OPGELEGD.....	50
FIGUUR 49 - CONVERGENTIE VAN BELASTINGGEVAL 3.....	50
FIGUUR 50 – RECHTHOEKIGE PLAAT, TWEE OVERSTAANDE RANDEN INGEKLEMD, TWEE RANDEN SCHARNIEREND OPGELEGD.....	51
FIGUUR 51 - CONVERGENTIE VAN BELASTINGGEVAL 3.....	51
FIGUUR 52 - VIERKANTE PLAAT, DRIE RANDEN INGEKLEMD, ANDERE RAND SCHARNIEREND OPGELEGD .....	52
FIGUUR 53 - CONVERGENTIE VAN BELASTINGGEVAL 4.....	52
FIGUUR 54 - VIERKANTE PLAAT, ALLE RANDEN INGEKLEMD .....	53
FIGUUR 55 - CONVERGENTIE VAN BELASTINGGEVAL 5.....	53
FIGUUR 56 - VIERKANTE PLAAT, ALLE RANDEN INGEKLEMD, MET PUNTLAST IN HET MIDDEN .....	54
FIGUUR 57 LINKS – BUIGMOMENT IN X-RICHTING OP BALKELEMENT MET PUNTLAST MIDDEN PLAAT MET N=M=20 .....	54
FIGUUR 58 RECHTS – BUIGMOMENT IN X-RICHTING OP BALKELEMENT MET PUNTLAST MIDDEN PLAAT MET N=M=60 .....	54
FIGUUR 59 LINKS – DWARSKRACHT PER METER IN X-RICHTING MET N=M=20. DE BLAUWE PLOT TOONT DE DWARSKRACHT VOLGENS VERGELIJKING 3-30 EN DE RODE PLOT TOONT DE DWARSKRACHT VOLGENS VERGELIJKING 3-31.....	55
FIGUUR 60 RECHTS - DWARSKRACHT PER METER IN X-RICHTING MET N=M=60. DE BLAUWE PLOT TOONT DE DWARSKRACHT VOLGENS VERGELIJKING 3-30 EN DE RODE PLOT TOONT DE DWARSKRACHT VOLGENS VERGELIJKING 3-31.....	55
FIGUUR 61 - VIERKANTE PLAAT, TWEE RANDEN SCHARNIEREND OPGELEGD, ANDERE RANDEN VRIJ .....	56
FIGUUR 62 - CONVERGENTIE VAN BELASTINGGEVAL 7A.....	57
FIGUUR 63 - RECHTHOEKIGE PLAAT, TWEE RANDEN SCHARNIEREND OPGELEGD, ANDERE RANDEN VRIJ.....	57
FIGUUR 64 -CONVERGENTIE VAN BELASTINGGEVAL 7B .....	58
FIGUUR 65 - PLAAT VAN NADAI, PUNTOPLEGGINGEN OP 3 HOEKEN, BELASTEN MET EENHEIDSKRACHT OP ANDERE HOEK.....	59
FIGUUR 66 - CONVERGENTIE VAN ZAKKING BIJ BELASTINGGEVAL PLAAT VAN NADAI.....	60
FIGUUR 67 - CONVERGENTIE WRINGEND MOMENT $M_{xy}$ BIJ BELASTINGGEVAL PLAAT VAN NADAI .....	60
FIGUUR 68 - 3D-PLOT WRINGEND MOMENT PER EENHEID VAN BREEDTE $M_{xy}$ VOOR PLAAT VAN NADAI.....	61
FIGUUR 69 - FLOWCHART MODEL INVLOEDSLIJNEN VERPLAATSINGEN.....	63
FIGUUR 70 – CIRKELUITSNEDEN MET STRAAL R IN PLAAT BELASTING MET PUNTLAST F EN SCHUIFKRACHT T OP SNEDEVLAKE MET DIKTE H .....	64
FIGUUR 71 - RECHTHOEKIGE PLAAT, TWEE OVERSTAANDE RANDEN INGEKLEMD, TWEE RANDEN SCHARNIEREND OPGELEGD.....	65
FIGUUR 72 - 3D PLOT INVLOEDSLIJN VOOR ZAKKING .....	66
FIGUUR 73 - CONTOURPLOT INVLOEDSLIJN VOOR ZAKKING.....	66
FIGUUR 74 - 3D PLOT INVLOEDSLIJN VOOR HOEKVERDRAAIING OM DE X-AS.....	67
FIGUUR 75 - CONTOURPLOT INVLOEDSLIJN VOOR HOEKVERDRAAIING OM DE X-AS.....	67
FIGUUR 76 - 3D PLOT INVLOEDSLIJN VOOR HOEKVERDRAAIING OM DE Y-AS.....	68
FIGUUR 77 - CONTOURPLOT INVLOEDSLIJN VOOR HOEKVERDRAAIING OM DE Y-AS.....	68
FIGUUR 78 – FLOWCHART MODEL INVLOEDSLIJNEN BRUTE KRACHT .....	69
FIGUUR 79 – METHODE DUMMYBELASTING MET AANGEBRACHT DUMMY KRACHTEN EN MOMENTEN OP KNOPEN I EN J.....	70



FIGUUR 80 - METHODE EXTRA KNOOP MET INTRODUCTIE EXTRA KNOOP J EN EENHEIDSVERPLAATSING $\Delta W$ KNOOPEN I EN J.....	70
FIGUUR 81 – FLOWCHART MODEL INVLOEDSLIJNEN METHODE DUMMYBELASTING.....	73
FIGUUR 82 - FLOWCHART MODEL VOOR INVLOEDSLIJNEN VOLGENS METHODE EXTRA KNOOP .....	75
FIGUUR 83 - FLOWCHART MODEL INVLOEDSLIJNEN VOOR OPLEGREACTIES .....	83
FIGUUR 84 - RECHTHOEKIGE PLAAT, TWEE OVERSTAANDE RANDEN INGEKLEMD, TWEE RANDEN SCHARNIEREND OPGELEGD.....	84
FIGUUR 85 - 3D-PLOT INVLOEDSLIJN BUIGMOMENT IN X-RICHTING $M_{Y-X}$ IN KNOOP 305 VOLGENS BRUTE KRACHT METHODE .....	85
FIGUUR 86 - CONTOURPLOT INVLOEDSLIJN BUIGMOMENT IN X-RICHTING $M_{Y-X}$ IN KNOOP 305 VOLGENS BRUTE KRACHT METHODE.....	85
FIGUUR 87 - TYPISCH PATROON CONTOURPLOT INVLOEDSLIJN BUIGMOMENT $M_x$ (PUCHER & JUHL, 1964, P. 7) .....	85
FIGUUR 88 - 3D-PLOT INVLOEDSLIJN BUIGMOMENT IN Y-RICHTING $M_{X-Y}$ IN KNOOP 305 VOLGENS BRUTE KRACHT METHODE .....	86
FIGUUR 89 - CONTOURPLOT INVLOEDSLIJN BUIGMOMENT IN Y-RICHTING $M_{X-Y}$ IN KNOOP 305 VOLGENS BRUTE KRACHT METHODE.....	86
FIGUUR 90 - 3D-PLOT INVLOEDSLIJN WRINGEND MOMENT $M_{XY}$ IN KNOOP 305 VOLGENS BRUTE KRACHT METHODE .....	87
FIGUUR 91 - TYPISCH PATROON CONTOURPLOT INVLOEDSLIJN WRINGEND MOMENT $M_{XY}$ (PUCHER & JUHL, 1964, P. 7).....	87
FIGUUR 92 - 3D-PLOT INVLOEDSLIJN DWARSKRACHT IN X-RICHTING $V_{Z-X}$ IN KNOOP 305 VOLGENS BRUTE KRACHT METHODE.....	88
FIGUUR 93 - CONTOURPLOT INVLOEDSLIJN DWARSKRACHT IN X-RICHTING $V_{Z-X}$ IN KNOOP 305 VOLGENS BRUTE KRACHT METHODE.....	88
FIGUUR 94 - 3D-PLOT INVLOEDSLIJN DWARSKRACHT IN Y-RICHTING $V_{Z-Y}$ IN KNOOP 305 VOLGENS BRUTE KRACHT METHODE.....	89
FIGUUR 95 - CONTOURPLOT INVLOEDSLIJN DWARSKRACHT IN Y-RICHTING $V_{Z-Y}$ IN KNOOP 305 VOLGENS BRUTE KRACHT METHODE.....	89
FIGUUR 96 - TYPISCH PATROON CONTOURPLOT INVLOEDSLIJN DWARSKRACHT IN Y-RICHTING $V_y$ (PUCHER & JUHL, 1964, P. 7).....	89
FIGUUR 97 - RECHTHOEKIGE PLAAT, TWEE OVERSTAANDE RANDEN INGEKLEMD, TWEE RANDEN SCHARNIEREND OPGELEGD.....	90
FIGUUR 98 - 3D-PLOT INVLOEDSLIJN INKLEMMINGSMOMENT IN X-RICHTING $M_{Y-X}$ IN KNOOP 15 VOLGENS BRUTE KRACHT METHODE.....	91
FIGUUR 99 – CONTOURPLOT INVLOEDSLIJN INKLEMMINGSMOMENT IN X-RICHTING $M_{Y-X}$ IN KNOOP 15 VOLGENS BRUTE KRACHT METHODE .....	91
FIGUUR 100 - 3D-PLOT INVLOEDSLIJN INKLEMMINGSMOMENT IN Y-RICHTING $M_{X-Y}$ IN KNOOP 15 VOLGENS BRUTE KRACHT METHODE.....	92
FIGUUR 101 – CONTOURPLOT INVLOEDSLIJN INKLEMMINGSMOMENT IN Y-RICHTING $M_{X-Y}$ IN KNOOP 15 VOLGENS BRUTE KRACHT METHODE .....	92
FIGUUR 102 - TYPISCH PATROON INVLOEDSLIJN INKLEMMINGSMOMENT $M_{XX}$ (PUCHER & JUHL, 1964, P. 7) ...	92
FIGUUR 103 - 3D-PLOT INVLOEDSLIJN OPLEGKRACHT IN KNOOP 15 VOLGENS BRUTE KRACHT METHODE.....	93
FIGUUR 104 - CONTOURPLOT INVLOEDSLIJN OPLEGKRACHT IN KNOOP 15 VOLGENS BRUTE KRACHT METHODE .....	93
FIGUUR 105 - TYPISCH PATROON INVLOEDSLIJN OPLEGKRACHT (PUCHER & JUHL, 1964, P. 7) .....	93
FIGUUR 106 - ASSENSTELSEL OPLOSSING BARES' & MASSONNET.....	95
FIGUUR 107 - VOORBEELDPLAAT MET ASSENSTELSEL OPLOSSING BARES' & MASSONNET.....	97
FIGUUR 108 - INVLOEDSLIJN VOOR ZAKKING IN KNOOP 1251, BLAUWE PLOT TOONT RESULTATEN BALKJESMODEL, RODE PLOT TOONT RESULTATEN BARES' & MASSONNET .....	97
FIGUUR 109 - RELATIEVE FOUT INVLOEDSLIJN VOOR ZAKKING IN KNOOP 1251 TEN OPZICHT VAN OPLOSSING BARES' & MASSONNET.....	98
FIGUUR 110 - VOORBEELDPLAAT MET ASSENSTELSEL OPLOSSING BARES' & MASSONNET.....	99
FIGUUR 111 LINKS - INVLOEDSLIJN VOOR BUIGEND MOMENT IN X-RICHTING $M_{Y-X}$ IN KNOOP 809 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE, BLAUWE PLOT TOONT RESULTATEN BALKJESMODEL, RODE PLOT TOONT RESULTATEN BARES' & MASSONNET.....	99

FIGUUR 112 RECHTS - RELATIEVE FOUT INVLOEDSLIJN VOOR BUIGEND MOMENT IN X-RICHTING $M_{Y-X}$ IN KNOOP 809 TEN OPZICHT VAN OPLOSSING BARES' & MASSONNET .....	99
FIGUUR 113 - INVLOEDSLIJN VOOR ZAKKING IN KNOOP 1251 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE MET $N=M=60$ .....	100
FIGUUR 114 LINKS - INVLOEDSLIJN VOOR BUIGEND MOMENT IN Y-RICHTING $M_{X-Y}$ IN KNOOP 809 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE, BLAUWE PLOT TOONT RESULTATEN BALKJESMODEL, RODE PLOT TOONT RESULTATEN BARES' & MASSONNET .....	100
FIGUUR 115 RECHTS - RELATIEVE FOUT INVLOEDSLIJN VOOR BUIGEND MOMENT IN Y-RICHTING $M_{X-Y}$ IN KNOOP 809 TEN OPZICHT VAN OPLOSSING BARES' & MASSONNET .....	100
FIGUUR 116 - VOORBEELDPLAAT MET ASSENSTELSEL OPLOSSING BARES' & MASSONNET .....	101
FIGUUR 117 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT IN X-RICHTING $M_{Y-X}$ IN KNOOP 841 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	101
FIGUUR 118 RECHTS – CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT $M_x$ (PUCHER & JUHL, 1964, FIG. 74) .....	101
FIGUUR 119 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT IN Y-RICHTING $M_{X-Y}$ IN KNOOP 841 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	102
FIGUUR 120 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT $M_x$ (PUCHER & JUHL, 1964, FIG. 74), $90^\circ$ GEDRAID .....	102
FIGUUR 121 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR WRINGEND MOMENT $M_{XY}$ IN KNOOP 841 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	102
FIGUUR 122 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR WRINGEND MOMENT $M_{XY}$ (PUCHER & JUHL, 1964, FIG. 78), $90^\circ$ GEDRAID .....	102
FIGUUR 123 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR DWARSKRACHT IN X-RICHTING $V_x$ KNOOP 841 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 2\pi L_x$ ) .....	103
FIGUUR 124 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR DWARSKRACHT $Q_x$ (PUCHER & JUHL, 1964, FIG. 79) .....	103
FIGUUR 125 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR DWARSKRACHT IN X-RICHTING $V_x$ KNOOP 841 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 2\pi L_x$ ) .....	103
FIGUUR 126 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR DWARSKRACHT $Q_y$ (PUCHER & JUHL, 1964, FIG. 79), $90^\circ$ GEDRAID .....	103
FIGUUR 127 - VOORBEELDPLAAT MET ASSENSTELSEL OPLOSSING BARES' & MASSONNET .....	104
FIGUUR 128 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT IN X-RICHTING $M_{Y-X}$ IN KNOOP 831 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	104
FIGUUR 129 RECHTS – CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT $M_x$ (PUCHER & JUHL, 1964, FIG. 76) .....	104
FIGUUR 130 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT IN Y-RICHTING $M_{X-Y}$ IN KNOOP 831 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	105
FIGUUR 131 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT $M_x$ (PUCHER & JUHL, 1964, FIG. 75) .....	105
FIGUUR 132 - VOORBEELDPLAAT MET ASSENSTELSEL OPLOSSING BARES' & MASSONNET .....	106
FIGUUR 133 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR OPLEGMOMENT MOMENT IN X-RICHTING $M_{Y-X}$ IN KNOOP 861 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	106
FIGUUR 134 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT $M_x$ (PUCHER & JUHL, 1964, FIG. 77) .....	106
FIGUUR 135 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR OPLEGKRACHT IN KNOOP 861 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times L_x\pi$ ) .....	107
FIGUUR 136 RECHTS - - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR OPLEGKRACHT (PUCHER & JUHL, 1964, FIG. 80) .....	107
FIGUUR 137 - VOORBEELDPLAAT MET ASSENSTELSEL OPLOSSING BARES' & MASSONNET .....	108
FIGUUR 138 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT IN X-RICHTING $M_{Y-X}$ IN KNOOP 841 BEPAALD MET DUMMYBELASTING METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	108
FIGUUR 139 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT IN X-RICHTING $M_{Y-X}$ IN KNOOP 841 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	108
FIGUUR 140 – 3D-PLOT VAN VERSCHIL TUSSEN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT IN X-RICHTING $M_{Y-X}$ IN KNOOP 841 BEPAALD MET DUMMYBELASTING METHODE EN MET DE BRUTE KRACHT METHODE. ....	109

FIGUUR 141 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT IN Y-RICHTING $M_{x-y}$ IN KNOOP 841 BEPAALD MET DUMMYBELASTING METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	109
FIGUUR 142 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT IN X-RICHTING $M_{y-x}$ IN KNOOP 841 BEPAALD MET BRUTE KRACHT BELASTING METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	109
FIGUUR 143 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR DWARSKRACHT IN X-RICHTING $V_x$ KNOOP 841 BEPAALD MET DUMMYBELASTING METHODE ( $\times 2\pi L_x$ ) .....	110
FIGUUR 144 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR DWARSKRACHT IN X-RICHTING $V_x$ KNOOP 841 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 2\pi L_x$ ) .....	110
FIGUUR 145 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR DWARSKRACHT IN Y-RICHTING $V_y$ KNOOP 841 BEPAALD MET DUMMYBELASTING METHODE ( $\times 2\pi L_x$ ) .....	110
FIGUUR 146 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR DWARSKRACHT IN Y-RICHTING $V_y$ KNOOP 841 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 2\pi L_x$ ) .....	110
FIGUUR 147 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR WRINGEND MOMENT $M_{xy}$ KNOOP 841 BEPAALD MET DUMMYBELASTING METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	111
FIGUUR 148 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR DWARSKRACHT IN Y-RICHTING $V_y$ KNOOP 841 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	111
FIGUUR 149 - VOORBEELDPLAAT MET ASSENSTELSEL OPLOSSING BAREŠ & MASSONNET .....	112
FIGUUR 150 LINKS- CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT IN X-RICHTING $M_{y-x}$ IN KNOOP 831 BEPAALD MET METHODE DUMMYBELASTING ( $\times 8\pi$ ) .....	112
FIGUUR 151 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT IN X-RICHTING $M_{y-x}$ IN KNOOP 831 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	112
FIGUUR 152 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT IN Y-RICHTING $M_{x-y}$ IN KNOOP 831 BEPAALD MET METHODE DUMMYBELASTING ( $\times 8\pi$ ) .....	113
FIGUUR 153 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT IN Y-RICHTING $M_{x-y}$ IN KNOOP 831 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	113
FIGUUR 154 - VOORBEELDPLAAT MET ASSENSTELSEL OPLOSSING BAREŠ & MASSONNET .....	114
FIGUUR 155 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR OPLEGMOMENT MOMENT IN X-RICHTING $M_{y-x}$ IN KNOOP 861 BEPAALD MET METHODE DUMMYBELASTING ( $\times 8\pi$ ) .....	114
FIGUUR 156 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR OPLEGMOMENT MOMENT IN X-RICHTING $M_{y-x}$ IN KNOOP 861 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	114
FIGUUR 157 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR OPLEGKRACHT IN KNOOP 861 BEPAALD MET METHODE DUMMYBELASTING ( $\times L_x\pi$ ) .....	115
FIGUUR 158 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR OPLEGKRACHT IN KNOOP 861 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times L_x\pi$ ) .....	115
FIGUUR 159 - VOORBEELDPLAAT MET ASSENSTELSEL OPLOSSING BAREŠ & MASSONNET .....	116
FIGUUR 160 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT IN X-RICHTING $M_{y-x}$ IN KNOOP 677 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	116
FIGUUR 161 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT $M_x$ (PUCHER & JUHL, 1964, FIG. 41) .....	116
FIGUUR 162 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT IN Y-RICHTING $M_{x-y}$ IN KNOOP 677 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	117
FIGUUR 163 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT $M_y$ (PUCHER & JUHL, 1964, FIG. 42) .....	117
FIGUUR 164 - VOORBEELDPLAAT MET ASSENSTELSEL OPLOSSING BAREŠ & MASSONNET .....	118
FIGUUR 165 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT IN X-RICHTING $M_{y-x}$ IN KNOOP 613 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	118
FIGUUR 166 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT $M_{xx}$ (PUCHER & JUHL, 1964, FIG. 81) .....	118
FIGUUR 167 LINKS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT IN Y-RICHTING $M_{x-y}$ IN KNOOP 613 BEPAALD MET BRUTE KRACHT METHODE ( $\times 8\pi$ ) .....	119
FIGUUR 168 RECHTS - CONTOURPLOT VAN INVLOEDSLIJN VOOR BUIGMOMENT $M_{yy}$ (PUCHER & JUHL, 1964, FIG. 82) .....	119

## TABELLENLIJST

TABEL 1 - SYMBOLENLIJST .....	8
TABEL 2 - ANALYSE EERDERE BSc-EINDWERKEN, + = SUCCESVOL UITGEVOERD, - = ONSUCCESVOL UITGEVOERD (AARTS, 2016; IMHOLZ, 2016; OOMEN, 2012; VLIET, 2009) .....	11
TABEL 3 - AFLEIDING WRINGEND MOMENT .....	21
TABEL 4 – EIGENSCHAPPEN VOORBEELDPLAAT ASSEMBLAGE STIJFHEIDSMATRIX .....	22
TABEL 5 – OVERZICHT LENGTES EN BREEDTES BALKELEMENTEN .....	23
TABEL 6 - EIGENSCHAPPEN PLAAT VOORBEELD UITVOER BALKJESMODEL.....	30
TABEL 7 – EIGENSCHAPPEN PLAAT TOETSING BASISMODEL .....	45
TABEL 8 – VERGELIJKING BALKJESMODELLEN VOOR INVLOEDSLIJNEN .....	62
TABEL 9 - EIGENSCHAPPEN VOORBEELDPLAAT INVLOEDSLIJNEN VERPLAATSINGEN.....	65
TABEL 10 – EIGENSCHAPPEN VOORBEELDPLAAT INVLOEDSLIJNEN KRACHTSGROOTHEDEN .....	84
TABEL 11 – EIGENSCHAPPEN VOORBEELDPLAAT INVLOEDSLIJNEN KRACHTSGROOTHEDEN .....	90
TABEL 12 – EIGENSCHAPPEN BALKJESMODEL EN MODELLEN UIT LITERATUUR VOOR INVLOEDSLIJNEN.....	94
TABEL 13 – EIGENSCHAPPEN PLAAT INVLOEDSLIJN ZAKKING .....	97
TABEL 14 - EIGENSCHAPPEN PLAAT TOETSING INVLOEDSLIJNEN KRACHTSGROOTHEDEN 1 .....	99
TABEL 15 - EIGENSCHAPPEN PLAAT TOETSING INVLOEDSLIJNEN KRACHTSGROOTHEDEN 2.....	101
TABEL 16 - EIGENSCHAPPEN PLAAT TOETSING INVLOEDSLIJNEN KRACHTSGROOTHEDEN 3.....	104
TABEL 17 - EIGENSCHAPPEN PLAAT TOETSING INVLOEDSLIJNEN KRACHTSGROOTHEDEN 4.....	106
TABEL 18 - EIGENSCHAPPEN PLAAT TOETSING INVLOEDSLIJNEN KRACHTSGROOTHEDEN 5.....	108
TABEL 19 - EIGENSCHAPPEN PLAAT TOETSING INVLOEDSLIJNEN KRACHTSGROOTHEDEN 3.....	112
TABEL 20 - EIGENSCHAPPEN PLAAT TOETSING INVLOEDSLIJNEN KRACHTSGROOTHEDEN 4.....	114
TABEL 21 - EIGENSCHAPPEN PLAAT TOETSING INVLOEDSLIJNEN KRACHTSGROOTHEDEN 6.....	116
TABEL 22 - EIGENSCHAPPEN PLAAT TOETSING INVLOEDSLIJNEN KRACHTSGROOTHEDEN 7.....	118

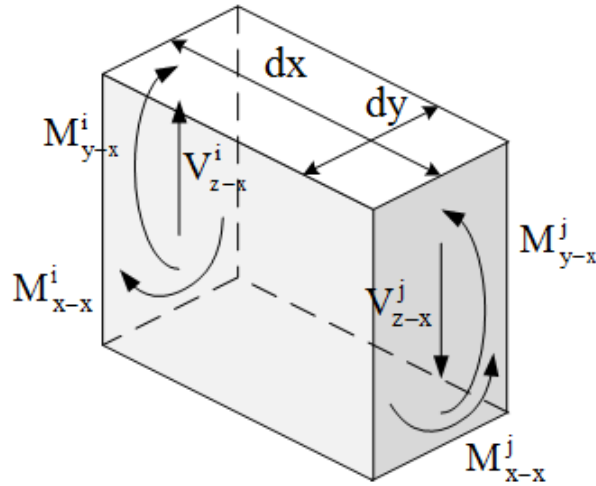
## 2 Symbolenlijst

Tabel 1 - Symbolenlijst

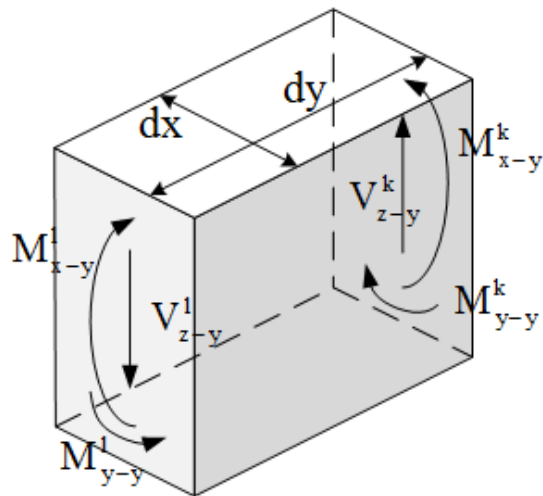
Symbol	Beschrijving	Eenheid
C	Integratieconstante	[-]
D	Integratieconstante	[-]
D	Plaatstijfheid	[Nm]
dx	Lengte balkjes in x-richting breedte balkjes in y-richting	[m]
dy	Lengte balkjes in y-richting Breedte balkjes in x-richting	[m]
E	Elasticiteitsmodulus	[N/m <sup>2</sup> ]
f	Belastingsvector	
F	Dwarskracht op knoop	[N]
G	Torsiestijfheid	[N/m <sup>2</sup> ]
H	dikte plaat	[m]
I	Traagheidsmoment	[m <sup>4</sup> ]
i, j	Nummering knopen in x-richting	[-]
(i), (j)	Nummering balkelementen in x-richting	[-]
I <sub>w</sub>	Torsiestijfheid per eenheid van breedte	[m <sup>4</sup> /m]
I <sub>zz</sub>	Buigstijfheid per eenheid van breedte	[m <sup>4</sup> /m]
K	Stijfheidsmatrix	
k, l	Nummering knopen in y-richting	[-]
(k), (l)	Nummering balkelementen in y-richting	[-]
L <sub>x</sub>	Lengte plaat in x-richting	[m]
L <sub>y</sub>	Lengte plaat in y-richting	[m]
m	Moment op balkelement per eenheid van breedte	[Nm/m]
m	Aantal balkelementen in y-richting	[-]
M	Moment op balkelement	[Nm]
n	Aantal balkelementen in x-richting	[-]
Q	Verdeelde belasting	[N/m <sup>2</sup> ]
r	Oplegreactievector per eenheid van breedte	
R	Oplegreactievector	
T	Moment op knoop	[Nm]
u	Vrijheidsgradenvector	
v	Dwarskracht op balkelement per eenheid van breedte	[N/m]
V	Dwarskracht op balkelement	[N]
w	Zakking in knoop	[m]
κ	Kromming	[m <sup>-1</sup> ]
ν	Poisson's ratio	[-]
φ	Hoekverdraaiing in knoop	[rad]

Voor de snedekrachten gelden de volgende positieve richtingen:

- Buigend moment in de richting zodat trek ontstaat aan de positieve z-zijde van het balkelement en druk aan de negatieve z-zijde van het balkelement
- Dwarskracht op een positief snedevlak in de positieve z-richting en op een negatief snedevlak in de negatieve z-richtingen
- Wringend moment van de y-as naar de z-as volgens het lokale assenstelsel op de positieve x-snede.

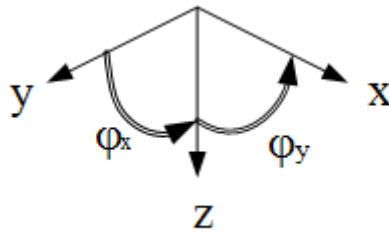


Figuur 2 - Positieve snedekrachten balkje in x-richting met lengte  $dx$  en breedte  $dy$



Figuur 3 - Positieve snedekrachten op balkje in y-richting met lengte  $dy$  en breedte  $dx$

Voor het globale assenstelsel gelden de volgende positieve richtingen:



*Figuur 4 - Positieve richtingen globale assenstelsel*

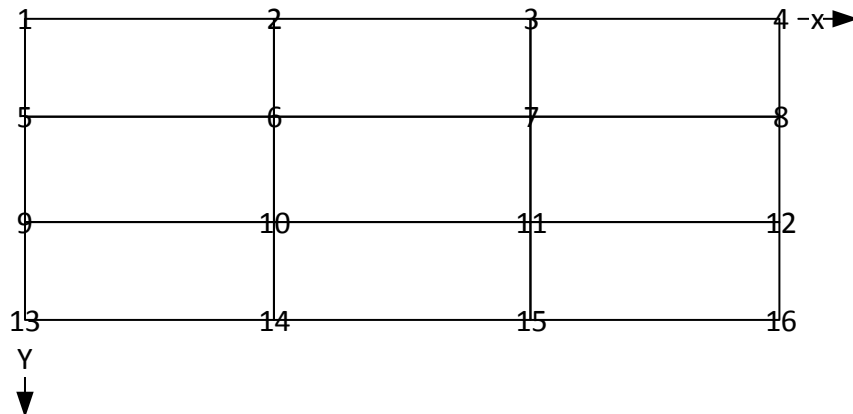
Alle grootheden worden aangegeven met indices:  $\text{grootheid}^{\text{knoop}}$   
werkt in x/y/z-vlak - werkt op balkje in x/y-richting.

De knopen zijn aangegeven met i, j, k en l:

- i is knoop in x-richting, gevolgd door knoop j
- k is knoop in y-richting, gevolgd door knoop l

In het verslag worden de balkelementen op soortgelijke wijze genummerd met (i), (j), (k) en (l).

De knopen zijn als volgt genummerd. In de oorsprong bevindt zich knoop 1. In de positieve x-richting volgt knoop 2, 3, etc. Als het laatste balkelement in x-richting bereikt is gaat de nummering verder op de naastgelegen balk in y-richting:



*Figuur 5 – Voorbeeld nummering knopen voor n = m = 3*

## 2.1 Inleiding

In het vakgebied van mechanica vormen invloedslijnen een tool waarmee gemakkelijk maatgevende krachten, momenten en verplaatsingen kunnen worden gevonden. Deze invloedslijnen zijn al in de 20<sup>ste</sup> eeuw ontwikkeld en vormen onderdeel van de bachelor Civiele Techniek. Echter, deze invloedslijnen zijn alleen toepasbaar op balken (1D). Binnen de civiele sector zijn naast balken, ook platen een veelgebruikte constructievorm. Een voorbeeld hiervan is de afbeelding op het voorblad. Dit is de nieuwste terminal van het vliegveld van Gibraltar waarbij een grote betonnen plaat dienst doet als dak. Voor platen is echter geen equivalente methode beschikbaar als invloedslijnen die makkelijk en snel inzicht geeft in een constructie. Omdat in de bachelor platen geen onderdeel zijn van het curriculum zal een plaat worden gemodelleerd als een aantal verbonden balken.

Dit rapport focust op het ontwikkelen van een ingenieurstool waarmee gemakkelijk invloedslijnen voor platen kunnen worden bepaald. Dit zal worden gedaan in een aantal stappen, waarvan er enkele door eerdere BSc-eindwerken al zijn gezet.

Er is al meer onderzoek gedaan naar de ontwikkeling van deze ingenieurstool. In literatuur wordt de gebruikte methode van het balkjesmodel vaak aangeduid als een 'grillage'-model. In Delft zijn vier studenten in het kader van het BSc-eindwerk hiermee bezig geweest. De ontwikkelingen van deze projecten zijn in onderstaande tabel samengevat. Tevens is het doel van het huidige BSc-eindwerk aangegeven.

Tabel 2 - Analyse eerdere BSc-eindwerken, + = succesvol uitgevoerd, - = onsuccesvol uitgevoerd (Aarts, 2016; Imholz, 2016; Oomen, 2012; Vliet, 2009)

Student	Datum	Methode	Software	Wringing	Controle FEM	Controle analytisch	Invloedslijnen	Controle analytisch
<b>Evert van Vliet</b>	Mei 2009	Krachtenmethode	Maple		+			
<b>Steven Oomen</b>	Juni 2012	Krachtenmethode	Maple	+	+/- (wringing)			
<b>Aukje Aarts</b>	Juni 2016	Verplaatsingenmethode	Maple	+	+ / -(wringing met reductiefactor)	+	+ (alleen voor oplegreacties en zakkingen)	-
<b>Lars Imholz</b>	November 2016	Verplaatsingenmethode	Python	+	+/- (wringing)	+	+ (brute kracht)	-
<b>Doel Tom van Wou-denbergh</b>	Juni 2017	Verplaatsingenmethode	Python	+	+	+	+ (slimme methode)	+



Er zijn op basis van deze analyse een aantal stappen geformuleerd die gemaakt moeten worden om de ingenieurstool te voltooien:

1. Huidige basistool kloppend maken en toetsen op zowel verplaatsingen, snedekrachten en oplegreacties. Toetsing kan gebeuren met FEM-programma's, analytische oplossingen voor een plaatmodel en andere grillage programma's.
2. Tool voor invloedslijnen kloppend maken en toetsen op zowel verplaatsingen, snedekrachten en oplegreacties (keuze voor slim model of brute kracht methode). Toetsing kan gebeuren met analytische oplossingen, FEM-programma's (puntsgewijs) en andere grillage programma's (puntsgewijs).
3. Meer mogelijkheden voor invoerwaarden (oplegreacties, materiaal / geometrie-orthotropie)
4. Ingenieurstool verpakken in een duidelijke en makkelijke interface

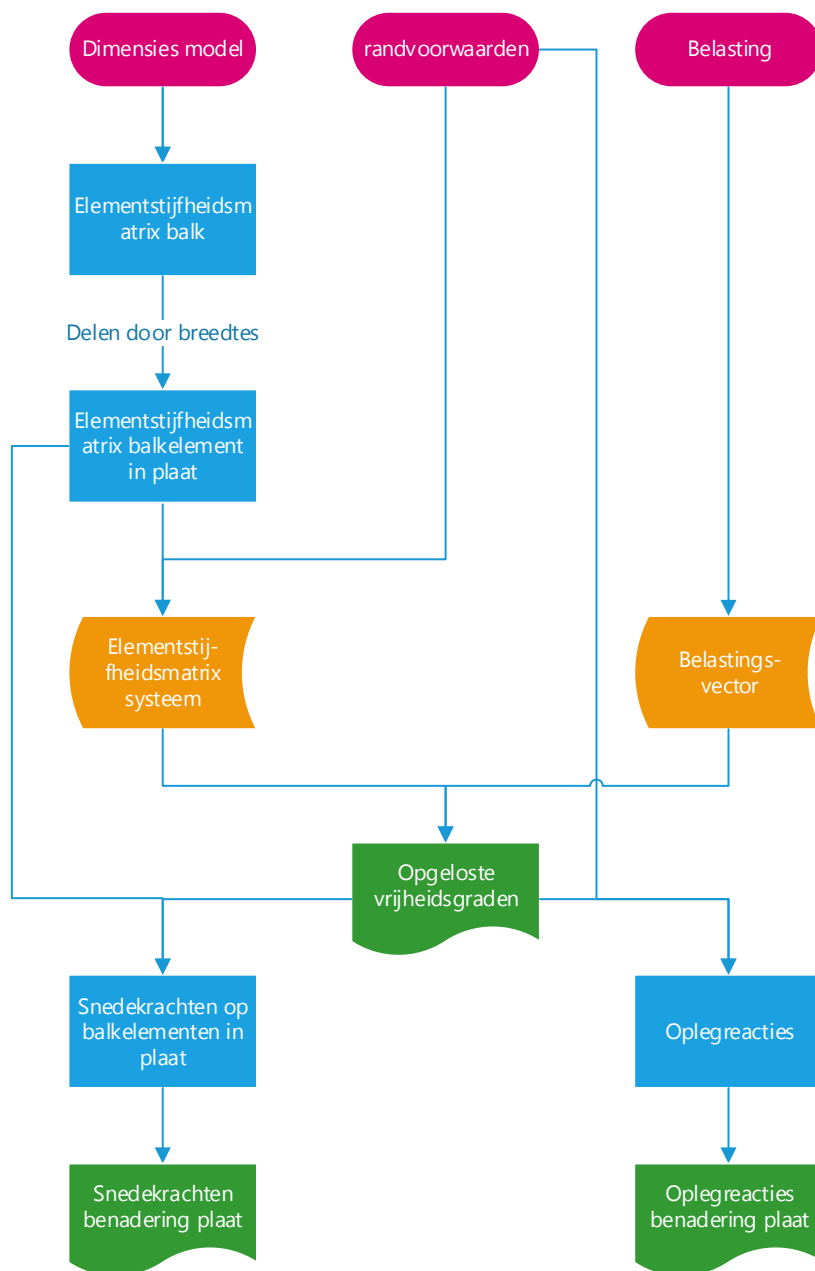
In dit bachelor eindwerk wordt voortgezet op het voltooien van de ingenieurstool voor invloedslijnen voor platen. Hierbij worden niet alle stappen 1 t/m 4 voltooid. Eerst is het huidige basismodel bijgewerkt zodat ook de invloed van wringing goed wordt gemodelleerd en alle snedekrachten op een juiste wijze worden bepaald. Hiervoor is er gekeken naar de theorie die als basis dienst voor het balkjesmodel. Dit onderdeel is afgerond bij het tussenrapport. Na dit rapport is er gestart aan stap 2 om de invloedslijnen te maken en toetsen. Hiervoor zijn eerst de invloedslijnen voor verplaatsingen bepaald. Daarna zijn de invloedslijnen voor snedekrachten en oplegreacties met de brute kracht methode gemaakt, die zijn getoetst aan oplossingen uit de literatuur. Vervolgens is een slimme methode ontwikkeld waarvan de oplossingen gelijk moesten zijn aan die van de brute kracht methode.

Dit rapport is het definitieve verslag van het bachelor eindwerk. In dit verslag zal het basismodel stap-voor-stap worden beschreven in hoofdstuk 3, waarna aan de hand van een voorbeeld de uitvoer kwalitatief wordt beoordeeld en toegelicht. Volgens wordt in hoofdstuk 4 dit basismodel getoetst. Eerst worden de resultaten weergegeven en vervolgens uitgebreid per belastinggeval toegelicht. In hoofdstuk 5 worden de modellen voor invloedslijnen beschreven en met een voorbeeld ook kwalitatief beoordeeld. In hoofdstuk 6 wordt dit model getoetst aan de hand van oplossingen uit de literatuur. In hoofdstuk 7 volgt de conclusie, met in hoofdstuk 8 de discussie en aanbevelingen. In hoofdstuk 9 zijn alle bronnen op een rijtje gezet en tot slot zijn in hoofdstuk 10 de startnotitie en het besprekingsverslag van het tussenrapport bijgevoegd.

### 3 Beschrijving basismodel

In dit hoofdstuk wordt het basismodel beschreven. Met dit model wordt een plaat gemodelleerd als een groot aantal verbonden balkjes in 2 richtingen. Deze manier van modelleren is een versimpelde versie van het modelleren met de eindige-elementen methode. Er worden slechts 3 vrijheidsgraden per knoop uitgerekend ( $w$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ) waarmee de dwarskracht, buigmoment loodrecht op de plaat en wringend moment in de richting van de balkelementen kunnen worden bepaald.

Onderstaande flowchart laat globaal de stappen zien van het basismodel zien. Als invoer zijn de dimensies van de plaat en detaillering van het model nodig, de randvoorwaarden van de plaat en de grootte van de belasting (verdeelde belasting of puntlast op knopen).



Figuur 6 - flowchart basismodel

Door de schematisatie van de plaat als een systeem van balken wordt de oplossing versimpeld. Echter zijn er een paar dingen waar rekening mee moet worden gehouden met deze schematisatie (Hambly, 1991; O'Brien, Keogh, & O'Connor, 2014):

- In een plaat zijn de wringende momenten en hoekverdraaiing  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$  gelijk in twee tegenoverstaande snedes. Echter, in het balkjesmodel is er rond de knopen altijd sprake van een verstoring van de snedekrachten op de dwarsbalken. Alleen bij een fijne mesh worden de momenten en hoekverdraaiingen op tegenoverstaande snedes gelijk aan elkaar. Bij orthotope platen met verschillende stijfheden in twee richtingen kunnen de verschillen zeer groot worden.
- Ook voor de buigende momenten geldt deze beperking. De buigende momenten op tegenoverstaande snedes van een knoop zijn niet per definitie gelijk aan elkaar. Het moment in de knoop wordt bepaald door het gemiddelde te nemen van de twee buigmomenten.
- Het evenwicht in de buigende momenten wordt in de randknopen meer verstoord door de wringende momenten dan in interne knopen omdat er maar één bijdrage is van het wringende moment op de rand.
- De dwarskrachten zijn in twee tegenoverstaande snedes ook niet per definitie gelijk. Hiervoor gelden dezelfde beperkingen als voor de buigende momenten.
- De dwarskracht ten gevolge van het wringend moment niet meegenomen.
- Het buigend moment is alleen afhankelijk van de kromming in lengterichting en niet mede afhankelijk van de kromming in loodrechte richting. Voor verdeelde lasten geeft het model accurate oplossingen, maar in de buurt van puntlasten worden hoge momenten niet goed weergegeven.
- De verdeelde belastingen  $q_x$  en  $q_y$  zijn op 0 gesteld en als puntlasten op de knopen geschematiseerd. Deze versimpeling is alleen juist vanaf 20 balkjes in x- en y-richting.

### 3.1 Bepaling elementstijfheidsmatrix

De elementstijfheidsmatrix wordt bepaald aan de hand van de differentiaalvergelijking voor een balkje lengte in x richting, met breedte dy:

$$EI_{zz-x} \cdot \frac{d^4 w_{z-x}(x)}{dx^4} = q_{z-x} \quad \text{Vergelijking 3-1}$$

De  $q_{z-x}$  wordt gelijk gesteld aan 0. De belasting zal namelijk worden verdeeld als puntlasten op de knopen.

Viermaal integreren van vergelijking 3-1 geeft:

$$w_{z-x}(x) = \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad \text{Vergelijking 3-2}$$

Verder geldt:

$$\varphi_{y-x}(x) = -\frac{dw_{z-x}(x)}{dx} = -\frac{1}{2} C_1 x^2 - C_2 x - C_3 \quad \text{Vergelijking 3-3}$$

$$M_{y-x}(x) = EI_{zz-x} \cdot \kappa_{y-x} = EI_{zz-x} \cdot \frac{d\varphi_{y-x}(x)}{dx} = -EI_{zz-x} (C_1 x + C_2) \quad \text{Vergelijking 3-4}$$

$$V_{z-x}(x) = \frac{dM_{y-x}(x)}{dx} = -EI_{zz-x} C_1 \quad \text{Vergelijking 3-5}$$

Voor de torsie geldt een lineair verband voor de hoekverdraaiing over  $\varphi_x$ :

$$\varphi_{x-x}(x) = D_1 x + D_2 \quad \text{Vergelijking 3-6}$$

$$M_{x-x} = GI_{w-x} \cdot \frac{\partial^2 w_x}{\partial x \partial y} = GI_{w-x} \cdot \frac{d\varphi_{x-x}}{dx} = GI_{w-x} \cdot D_1 \quad \text{Vergelijking 3-7}$$

Het balkje is verbonden aan twee knopen met verplaatsingen en hoekverdraaiingen  $w$ ,  $\varphi_x$  en  $\varphi_y$  voor zowel de knoop aan de positieve zijde j als de negatieve zijde i.

Dit geeft de volgende randvoorwaarden:

$$\begin{aligned} w_{z-x}(0) &= w_{z-x}^i \\ \varphi_{y-x}(0) &= \varphi_{y-x}^i \\ \varphi_{x-x}(0) &= \varphi_{x-x}^i \\ w_{z-x}(dx) &= w_{z-x}^j \\ \varphi_{y-x}(dx) &= \varphi_{y-x}^j \\ \varphi_{x-x}(dx) &= \varphi_{x-x}^j \end{aligned}$$

Deze randvoorwaarden geven de waarden van 4 integratieconstanten. Hiermee kunnen de waarden  $M_{y-x}(0)$ ,  $M_{y-x}(dx)$ ,  $V_{z-x}(0)$ ,  $V_{z-x}(dx)$  en  $M_{x-x}$  bepaald worden door invullen van de randvoorwaarden in vergelijking 3-5 en vergelijking 3-7.

$$V_{z-x}(0) = \frac{6EI_{zz-x}}{dx^3} (dx\phi_{y-x}^i + dx\phi_{y-x}^j - 2w_{z-x}^i + 2w_{z-x}^j)$$

$$V_{z-x}(dx) = \frac{6EI_{zz-x}}{dx^3} (dx\phi_{y-x}^i + dx\phi_{y-x}^j - 2w_{z-x}^i + 2w_{z-x}^j)$$

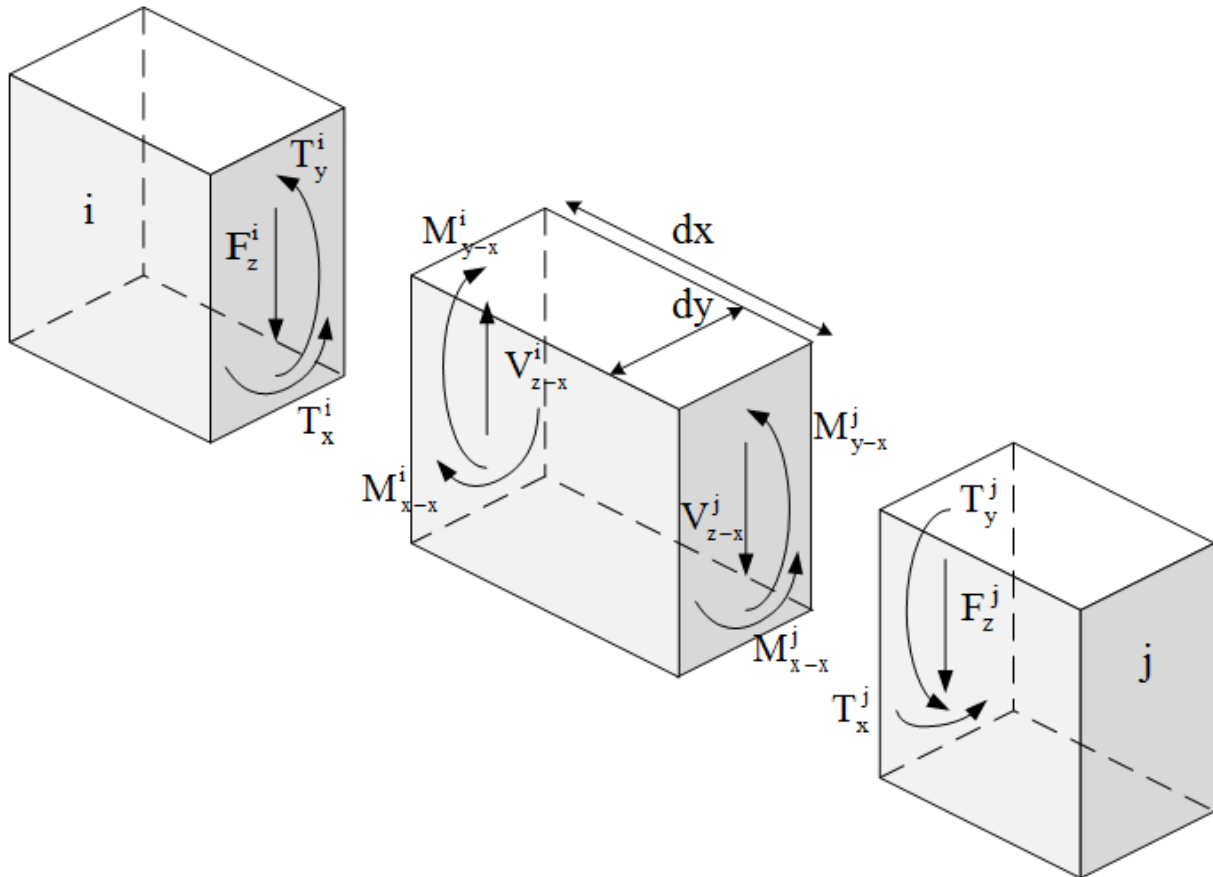
$$M_{y-x}(0) = \frac{2EI_{zz-x}}{dx^2} (-2dx\phi_{y-x}^i - dx\phi_{y-x}^j + 3w_{z-x}^i - 3w_{z-x}^j)$$

$$M_{y-x}(dx) = \frac{2EI_{zz-x}}{dx^2} (dx\phi_{y-x}^i + 2dx\phi_{y-x}^j - 3w_{z-x}^i + 3w_{z-x}^j)$$

$$M_{x-x} = \frac{GI_{w-x}}{dx} (-\phi_{x-x}^i + \phi_{x-x}^j)$$

De krachten op de knoop kunnen vervolgens worden bepaald. Hiervoor moeten de krachten op van twee achtereenvolgende balkjes worden bekeken. De krachten op het knooppje worden beschreven volgens het globale assenstelsel, terwijl de krachten op de balkjes worden beschreven in het lokale assenstelsel.

Onderstaande afbeelding toont een balkje in x-richting tussen knoop i en j.



Figuur 7 - Relatie tussen positieve snedekrachten en positieve globale krachten op twee knopen i en j met een balkelement ertussen.

Dit geeft de volgende waarden voor de krachten op het knoepje:

$$\begin{aligned}
 F_z^i &= -V_{z-x}(0) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} (12w^i - 6dx\phi_y^i - 12w^j - 6dx\phi_y^j) \\
 T_y^i &= -M_{y-x}(0) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} (-6w^i + 4dx\phi_y^i + 6w^j + 2dx\phi_y^j) \\
 T_x^i &= -M_{x-x} = \frac{GI_{w-x}}{dx} (\phi_x^i - \phi_x^j) \\
 F_z^j &= V_{z-x}(dx) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} (-12w^i + 6dx\phi_y^i + 12w^j + 6dx\phi_y^j) \\
 T_y^j &= M_{y-x}(dx) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} (-6w^i + 2dx\phi_y^i + 6w^j + 4dx\phi_y^j) \\
 T_x^j &= M_{x-x} = \frac{GI_{w-x}}{dx} (-\phi_x^i + \phi_x^j)
 \end{aligned}$$

*Vergelijking 3-8*

In matrixvorm is dit geschreven als:

$$\mathbf{K}_{\text{elem-x}} \cdot \begin{bmatrix} w^i \\ \phi_y^i \\ \phi_x^i \\ w^j \\ \phi_y^j \\ \phi_x^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z^i \\ T_y^i \\ T_x^i \\ F_z^j \\ T_y^j \\ T_x^j \end{bmatrix}$$

*Vergelijking 3-9*

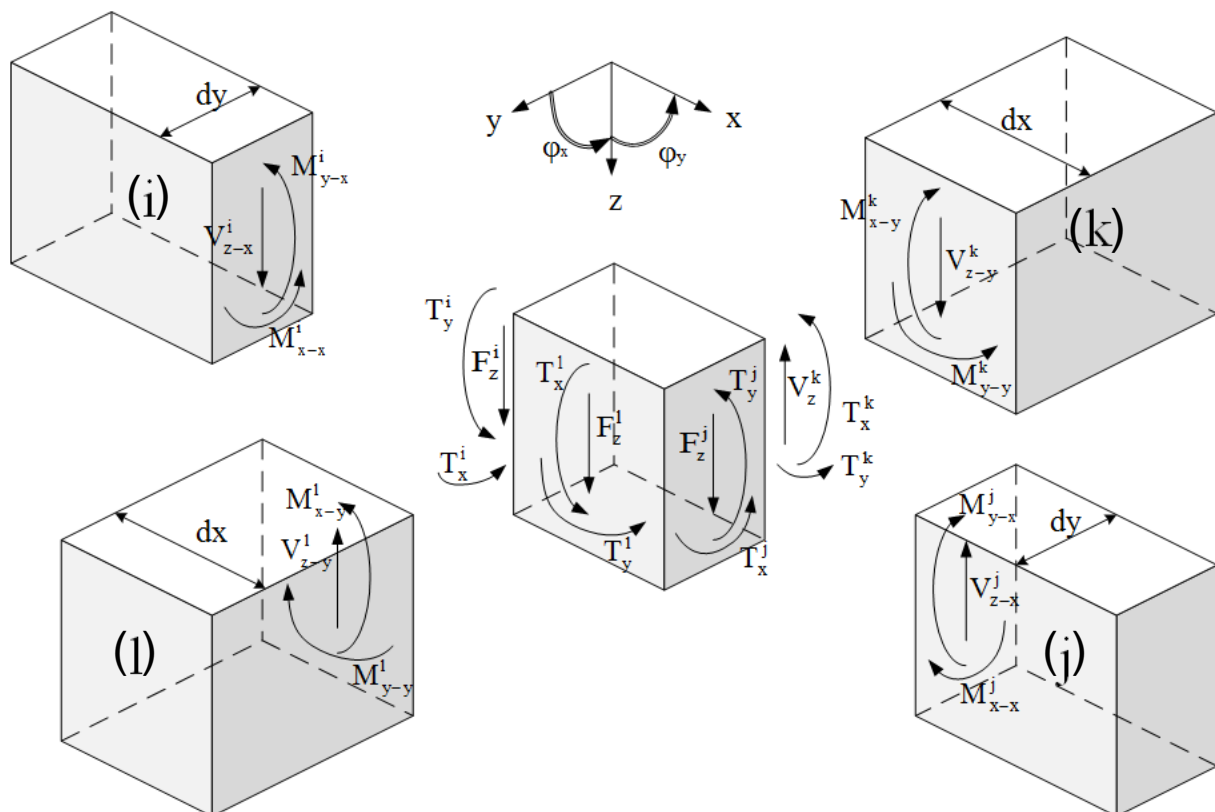
$$\mathbf{K}_{\text{elem-x}} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_{zz-x}}{dx^3} & -\frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & 0 & -\frac{12EI_{zz-x}}{dx^3} & -\frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & 0 \\ -\frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & \frac{4EI_{zz-x}}{dx} & 0 & \frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & \frac{2EI_{zz-x}}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GI_{w-x}}{dx} & 0 & 0 & -\frac{GI_{w-x}}{dx} \\ -\frac{12EI_{zz-x}}{dx^3} & \frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & 0 & \frac{12EI_{zz-x}}{dx^3} & \frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & 0 \\ -\frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & \frac{2EI_{zz-x}}{dx} & 0 & \frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & \frac{4EI_{zz-x}}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{GI_{w-x}}{dx} & 0 & 0 & \frac{GI_{w-x}}{dx} \end{bmatrix}$$

*Vergelijking 3-10*

Dezelfde afleiding kan worden gemaakt voor een balkje in y-richting. Dit geeft de volgende elementstijfheidsmatrix.

$$K_{\text{elem-y}} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_{zz-y}}{dy^3} & 0 & -\frac{6EI_{zz-y}}{dy^2} & -\frac{12EI_{zz-y}}{dy^3} & 0 & -\frac{6EI_{zz-y}}{dy^2} \\ 0 & \frac{GI_{w-y}}{dy} & 0 & 0 & -\frac{GI_{w-y}}{dy} & 0 \\ -\frac{6EI_{zz-y}}{dy^2} & 0 & \frac{4EI_{zz-y}}{dy} & \frac{6EI_{zz-y}}{dy^2} & 0 & \frac{2EI_{zz-y}}{dy} \\ -\frac{12EI_{zz-y}}{dy^3} & 0 & \frac{6EI_{zz-y}}{dy^2} & \frac{12EI_{zz-y}}{dy^3} & 0 & \frac{6EI_{zz-y}}{dy^2} \\ 0 & -\frac{GI_{w-y}}{dy} & 0 & 0 & \frac{GI_{w-y}}{dy} & 0 \\ -\frac{6EI_{zz-y}}{dy^2} & 0 & \frac{2EI_{zz-y}}{dy} & \frac{6EI_{zz-y}}{dy^2} & 0 & \frac{4EI_{zz-y}}{dy} \end{bmatrix} \quad \text{Vergelijking 3-11}$$

Onderstaande afbeelding toont een knoop i met aansluitende balkjes (i), (j), (k) en (l) in zowel x- als y-richting.



Figuur 8 - Relatie tussen positieve snedekrachten en positieve globale krachten in zowel x- als y-richting op knoop i met aansluitende balken (i), (j), (k) en (l)

### 3.1.1 Relatie met plaatmodel

Voor een plaat geldt de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad \text{Vergelijking 3-12}$$

Met:

$$D = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{Ei}{1-\nu^2} \quad \text{Vergelijking 3-13}$$

De relaties afgeleid in vergelijking 3-9 zijn geldig voor een balk. Om het plaatmodel te benaderen is het nodig dat de krachtgrootheden worden uitgedrukt in eenheid van breedte. De krachtsgrootheden worden bepaald door middeling om de knoop.

$$v_x \approx v_{z-x} = \frac{F_z^i + F_z^j}{2dy} = \frac{[N]}{[m]} = \left[ \frac{N}{m} \right] \quad \text{Vergelijking 3-14}$$

$$v_y \approx v_{z-y} = \frac{F_z^k + F_z^l}{2dx} = \frac{[N]}{[m]} = \left[ \frac{N}{m} \right] \quad \text{Vergelijking 3-15}$$

$$m_{xx} \approx m_{y-x} = \frac{T_y^i + T_y^j}{2dy} = \frac{[Nm]}{[m]} = \left[ \frac{Nm}{m} \right] \quad \text{Vergelijking 3-16}$$

$$m_{yy} \approx m_{x-y} = \frac{T_x^k + T_x^l}{2dx} = \frac{[Nm]}{[m]} = \left[ \frac{Nm}{m} \right] \quad \text{Vergelijking 3-17}$$

$$m_{xy} \approx m_{xy} = \frac{T_x^i + T_x^j}{2 \cdot 2dy} + \frac{T_y^k + T_y^l}{2 \cdot 2dx} = \frac{[Nm]}{[m]} = \left[ \frac{Nm}{m} \right] \quad \text{Vergelijking 3-18}$$

De buigende- en torsiestijfheden zijn per eenheid van breedte als volgt gedefinieerd:

$$i_{zz-x} = \frac{I_{zz-x}}{dy} = \frac{\frac{1}{12} dy \cdot h^3}{dy} = \frac{1}{12} h^3 = [m^3] \quad \text{Vergelijking 3-19}$$

$$i_{w-x} = \frac{I_{w,balk-x}}{2dy} = \frac{\frac{1}{3} dy \cdot h^3}{2dy} = \frac{1}{6} h^3 = [m^3] \quad \text{Vergelijking 3-20}$$

Verder geldt:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{Vergelijking 3-21}$$



De factor 2 in vergelijking 3-20 komt voor uit dat het buigend moment in een snede uit een plaat is gedefinieerd als de horizontale schuifkrachten aan boven en onderkant. Voor een balk worden ook de verticale schuifkrachten meegenomen aan de zijranden van de balk. Het balkjesmodel benaderd het plaatmodel het beste als deze verticale schuifkrachten niet worden meegenomen in de oplossing. De wiskundige afleiding voor de torsiestijfheid van een plaat is als volgt (Blaauwendraad, 2010; Hambly, 1991):

$$m_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$m_{xy} = \frac{Ei}{(1-\nu)^2} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$m_{xy} = \frac{Ed^3}{12(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

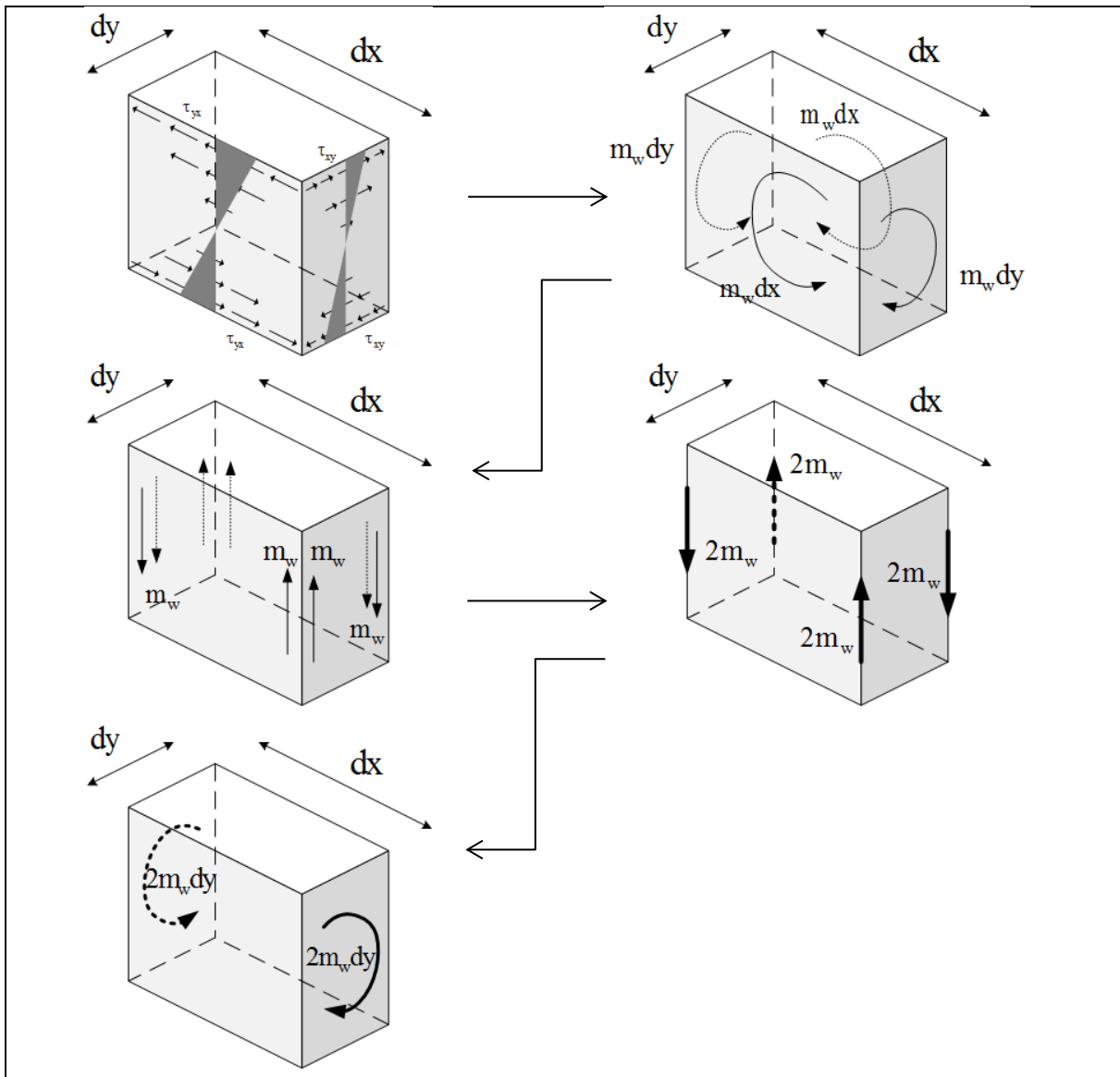
$$m_{xy} = \frac{d^3}{6} \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$m_{xy} = \frac{d^3}{6} G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$m_{xy} = i_w G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

De energie die door het wringend moment wordt opgeslagen moet voor het balkjesmodel goed worden verdeeld. Deze rek-energie zit voor (bij identieke balkjes in x- en y-richting) de helft opgeslagen in de balkjes in x-richtingen en voor andere helft opgeslagen in de balkjes in y-richting. Dit uit zich in de tweemaal factor twee in vergelijking 3-18. In tegenstelling tot de andere krachtsgrootheden waar slechts éénmaal wordt gedeeld door twee om het gemiddelde te bepalen van de krachtsgrootheid op de twee overstaande snedes. De oorsprong van de tweede factor 2 is ook te vinden met onderstaande grafische afleiding:

Tabel 3 - afleiding wringend moment



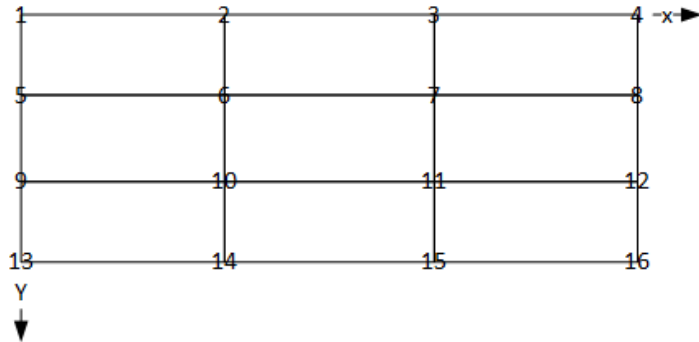
### 3.2 Assembleren globale stijfheidsmatrix

De stijfheidsmatrix van het hele systeem wordt geassembleerd door samenvoegen van de stijfheidsmatrices van de elementen.

Dit zal gedaan worden aan de hand van een voorbeeld van een scharnierend opgelegde plaat.

Tabel 4 – Eigenschappen voorbeeldplaat assemblage stijfheidsmatrix

$n$	3
$m$	3
$L_x$	10 m
$L_y$	4 m



Figuur 9 - Overzicht plaat met genummerde knopen

In deze plaat zijn 16 knopen en 24 balkelementen gedefinieerd. Er zijn dus 24 elementstijfheidsmatrices gedefinieerd voor in totaal  $16 \times 3 = 48$  vrijheidsgraden.

#### 3.2.1 Optelprocedure stijfheidsmatrix

Elke stijfheidsmatrix wordt verdeeld in 4 vlakken, zo geldt voor element 1-2 (Blauwendraad, 2008):

$$\mathbf{K}_{\text{elem-x}} \cdot \begin{bmatrix} w^1 \\ \varphi_y^1 \\ \varphi_x^1 \\ w^2 \\ \varphi_y^2 \\ \varphi_x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z^1 \\ T_y^1 \\ T_x^1 \\ F_z^2 \\ T_y^2 \\ T_x^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\text{elem-x}}^{1-2} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_{zz-x}}{dx^3} & -\frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & 0 & -\frac{12EI_{zz-x}}{dx^3} & -\frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & 0 \\ -\frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & \frac{4EI_{zz-x}}{dx} & 0 & \frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & \frac{2EI_{zz-x}}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GI_{w-x}}{2dx} & 0 & 0 & -\frac{GI_{w-x}}{2dx} \\ -\frac{12EI_{zz-x}}{dx^3} & \frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & 0 & \frac{12EI_{zz-x}}{dx^3} & \frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & 0 \\ -\frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & \frac{2EI_{zz-x}}{dx} & 0 & \frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & \frac{4EI_{zz-x}}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{GI_{w-x}}{2dx} & 0 & 0 & \frac{GI_{w-x}}{2dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1-1}^{1-2} & \mathbf{K}_{1-2}^{1-2} \\ \mathbf{K}_{2-1}^{1-2} & \mathbf{K}_{2-2}^{1-2} \end{bmatrix}$$

De bovenindex geeft het balkelement weer, de onderindex geeft aan op welke knopen de submatrix betrekking heeft en daarmee de coördinaten in de totale stijfheidsmatrix.

De globale matrix volgt vervolgens uit het plaatsen van deze submatrices op de juiste plaats in de totale matrix. Deze matrix is voor een deel hieronder weergegeven:

$$\begin{bmatrix} K_{1-1}^{1-2} + K_{1-1}^{1-5} & K_{1-2}^{1-2} & 0 & 0 & K_{1-5}^{1-5} & 0 & \dots & 0 \\ K_{2-1}^{1-2} & K_{2-2}^{1-2} + K_{2-3}^{2-3} + K_{2-2}^{2-6} & K_{2-3}^{2-3} & 0 & 0 & K_{6-2}^{2-6} & & \\ 0 & K_{3-2}^{2-3} & K_{3-3}^{2-3} + K_{3-4}^{3-4} + K_{3-3}^{3-7} & K_{3-4}^{3-4} & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & K_{4-3}^{3-4} & K_{4-4}^{3-4} + K_{4-4}^{4-8} & 0 & 0 & & \\ K_{5-1}^{1-5} & 0 & 0 & 0 & K_{5-5}^{5-6} + K_{5-5}^{1-5} + K_{5-5}^{5-9} & K_{5-6}^{5-6} & & \\ 0 & K_{6-2}^{2-6} & 0 & 0 & K_{6-5}^{5-6} & K_{6-6}^{5-6} + K_{6-6}^{6-7} + K_{6-6}^{2-6} + K_{6-6}^{6-10} & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & K_{16-16}^{15-16} + K_{16-16}^{12-16} \end{bmatrix}$$

Het proces is gevisualiseerd, deze is [hier](https://www.dropbox.com/s/bjw6gy8xep5adlo/Gecombineerd%20fancier.gif?dl=0) te vinden (https://www.dropbox.com/s/bjw6gy8xep5adlo/Gecombineerd%20fancier.gif?dl=0). In dit filmpje wordt de globale stijfheidsmatrix getoond naast de plaat. Per balkelement wordt aangegeven welke cel van de matrix hiermee correspondeert.

### 3.2.2 Lengtes en breedtes tussenbalken en randbalken

Voor de randbalken en tussenbalken gelden verschillende waarden voor dx en dy:

Tabel 5 – Overzicht lengtes en breedtes balkelementen

		Balkelementen	dx	Dy
Tussenbalken in x-richting		5-6 6-7 7-8 9-10 10-11 11-12	3,3 m	1,3 m
Randbalken in x-richting		1-2 2-3 3-4 13-14 14-15 15-16	3,3 m	0,7 m
Tussenbalken in y-richting		2-6 6-10 10-14 3-7 7-11 11-15	3,3 m	1,3 m
Randbalken in y-richting		1-5 5-9 9-13 4-8 8-12 12-16	1,7 m	1,3 m

### 3.3 Toevoegen belasting

Zoals eerder vermeld is de verdeelde belasting geschematiseerd als puntlasten op de knopen. Elke knoop die niet grenst aan de balk zal daarom de belasting  $q \cdot dx \cdot dy$  dragen. De knopen op de rand dragen de helft van de belasting, dus  $\frac{1}{2} \cdot q \cdot dx \cdot dy$ . De knopen in de hoeken dragen een kwart van de belasting:  $\frac{1}{4} \cdot q \cdot dx \cdot dy$ . Er worden geen momenten aangebracht op de knopen, daarmee zijn  $T_y$  en  $T_x$  gelijk aan 0 voor alle knopen.

### 3.4 Verwerking randvoorwaarden

De randvoorwaarden worden bepaald door vrijheidsgraden te verhinderen voor de desgewenste knopen. Er zijn een aantal mogelijkheden:

- Vrije knoop:  $w$ ,  $\varphi_y$  en  $\varphi_x$  zijn vrij
- Scharnier:  $w$  gelijk aan 0,  $\varphi_y$  en  $\varphi_x$  zijn vrij
- Inklemming buiging:  $w$  en  $\varphi_y$  gelijk aan 0,  $\varphi_x$  is vrij
- Inklemming torsie:  $w$  en  $\varphi_x$  gelijk aan 0,  $\varphi_y$  is vrij
- Volledige inklemming:  $w$ ,  $\varphi_x$  en  $\varphi_y$  gelijk aan 0.

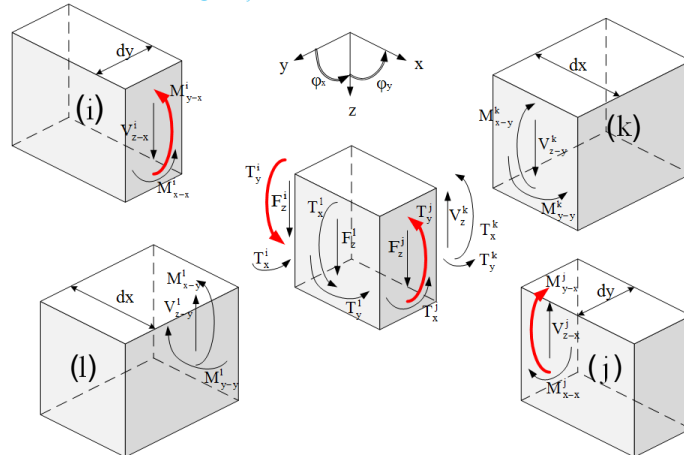
Deze randvoorwaardes worden doorgevoerd door de stijfheidsmatrix aan te passen. Het bijbehorende diagonaalelement wordt gelijk gesteld aan 1 en de horizontale en verticale elementen gelijk aan 0. Ook het bijbehorende element in de belastingvector wordt gelijk gesteld aan 0. Hiermee wordt de vrijheidsgraad expliciet gelijk gesteld aan 0.

### 3.5 Oplossen vrijheidsgraden

Het systeem  $\left[ \mathbf{K}_{\text{stelsel met randvoorwaarden}} \right] \cdot \left[ \mathbf{u} \right] = \left[ \mathbf{f}_{\text{stelsel met randvoorwaarden}} \right]$  kan vervolgens worden opgelost. Dit geeft de waardes van alle vrijheidsgraden.

### 3.6 Bepalen krachtsgrootheden

#### 3.6.1 Buigend moment in x-richting $m_{y-x}$



Figuur 10 - Bepaling  $m_{y-x}$  in gemodelleerde plaat in knoop  $i$  met aansluitende balken  $(i)$ ,  $(j)$ ,  $(k)$  en  $(l)$

Met de bekende verplaatsingen van de knopen kunnen de snedekrachten in het gemodelleerde balkjes worden bepaald. Er wordt gebruik gemaakt van vergelijking 3-8 opgesteld in hoofdstuk 3.1. Voor de buigende momenten op de uiteindes van de balkelementen in x-richting geldt (met  $i-1$ ,  $i$ ,  $i+1$  nummering van knopen en  $(i)$  en  $(j)$  nummering van de balkelementen):

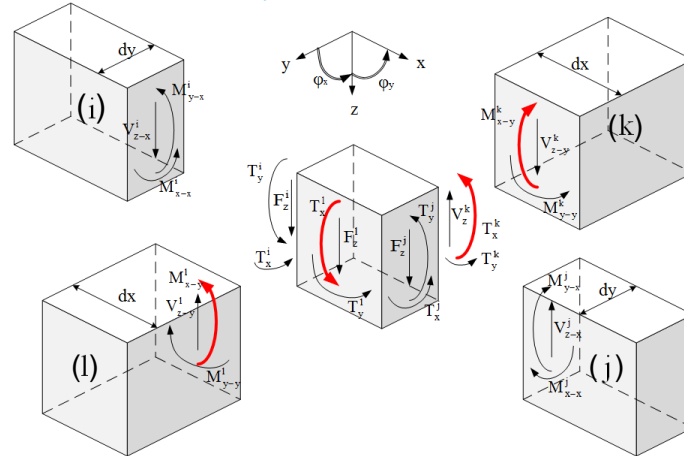
$$T_y^j = -M_{y-x}^{(j)}(0) = \frac{2EI_{zz-x}}{dx^2} \left( -2dx\varphi_{y-x}^i - dx\varphi_{y-x}^{i+1} + 3w_{z-x}^i - 3w_{z-x}^{i+1} \right) \quad \text{Vergelijking 3-22}$$

$$T_y^i = M_{y-x}^{(i)}(dx) = \frac{2EI_{zz-x}}{dx^2} \left( dx\varphi_{y-x}^{i-1} + 2dx\varphi_{y-x}^i - 3w_{z-x}^{i-1} + 3w_{z-x}^i \right)$$

Voor het lokale buigend moment in x-richting ter plaatse van de knoop geldt voor de benadering van een plaat:

$$m_{y-x} = \frac{T_y^i + T_y^j}{2dy} \quad \text{Vergelijking 3-23}$$

### 3.6.2 Buigend moment in y-richting $m_{x-y}$



Figuur 11 - Bepaling  $m_{y-y}$  in gemodelleerde plaat in knoop  $i$  met aansluitende balken  $(i)$ ,  $(j)$ ,  $(k)$  en  $(l)$

Voor de buigende momenten op de uiteindes van de balkelementen in y-richting geldt (met  $k-1$ ,  $k$ ,  $k+1$  nummering van knopen en  $(k)$  en  $(l)$  nummering van de balkelementen):

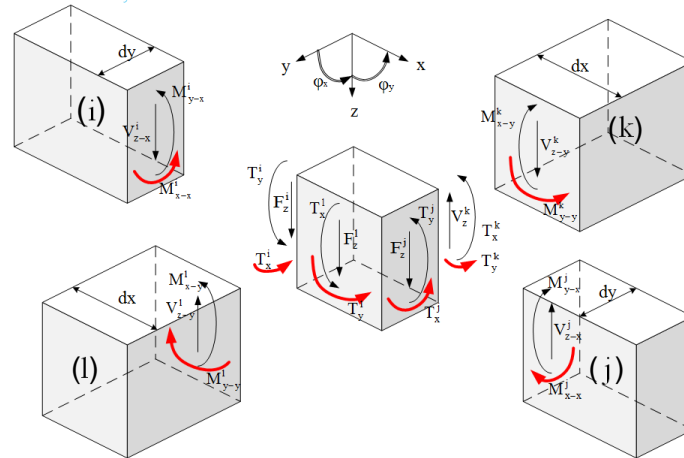
$$T_x^l = -M_{x-y}^{(l)}(0) = \frac{2EI_{zz-y}}{dy^2} (-2dy\varphi_{x-y}^k - dy\varphi_{x-y}^{k+1} + 3w_{z-y}^k - 3w_{z-y}^{k+1}) \quad \text{Vergelijking 3-24}$$

$$T_x^k = M_{x-y}^{(k)}(dy) = \frac{2EI_{zz-y}}{dy^2} (dy\varphi_{x-y}^{k-1} + 2dy\varphi_{x-y}^k - 3w_{z-y}^{k-1} + 3w_{z-y}^k)$$

Voor het lokale buigend moment in y-richting ter plaatse van de knoop geldt voor de benadering van een plaat:

$$m_{x-y} = \frac{T_x^k + T_x^l}{2dx} \quad \text{Vergelijking 3-25}$$

### 3.6.3 Wringend moment $m_{xy}$



Figuur 12 - bepaling  $m_{xy}$  in knoop  $i$  met aansluitende balken  $(i)$ ,  $(j)$ ,  $(k)$  en  $(l)$

Voor de wringende momenten op de uiteindes van de balkelementen geldt (met  $i-1, i, i+1, k-1, k, k+1$  nummering van knopen en  $(i), (j), (k), (l)$  nummering van de balkelementen):

$$T_x^j = -M_{x-x}^{(j)} = \frac{GI_{w-x}}{dx} (-\phi_{x-x}^i + \phi_{x-x}^{i+1}) \quad \text{Vergelijking 3-26}$$

$$T_x^i = M_{x-x}^{(i)} = \frac{GI_{w-x}}{dx} (-\phi_{x-x}^{i-1} + \phi_{x-x}^i)$$

$$T_y^l = -M_{y-y}^{(l)} = \frac{GI_{w-y}}{dy} (-\phi_{y-y}^k + \phi_{y-y}^{k+1})$$

$$T_y^k = M_{y-y}^{(k)} = \frac{GI_{w-y}}{dy} (-\phi_{y-y}^{k-1} + \phi_{y-y}^k)$$

Voor het lokale wringend moment ter plaatse van de knoop geldt voor de benadering van een plaat:

$$m_{xy} = \frac{T_x^i + T_x^j}{4dy} \quad \text{Vergelijking 3-27}$$

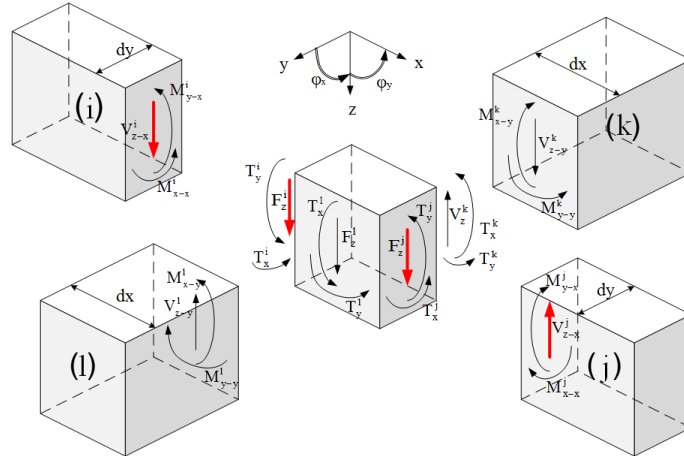
$$m_{yx} = \frac{T_y^k + T_y^l}{4dx} \quad \text{Vergelijking 3-28}$$

In een plaat zouden deze twee wringende momenten gelijk zijn. In het balkenmodel echter niet, maar dragen beide momenten bij aan het totale wringend moment. Om het lokale wringend moment in de knoop te bepalen wordt daarom de som genomen van beide richtingen:

$$m_{xy} \approx m_{xy} + m_{yx} \quad \text{Vergelijking 3-29}$$



### 3.6.4 Dwarskracht in x-richting $V_{z-x}$



Figuur 13 - Bepaling  $V_{z-x}$  in knoop  $i$  met aansluitende balken  $(i)$ ,  $(j)$ ,  $(k)$  en  $(l)$

Voor de dwarskracht op de uiteindes van de balkelementen in x-richting geldt (met  $i-1$ ,  $i$ ,  $i+1$  nummering van knopen en  $(i)$  en  $(j)$  nummering van de balkelementen):

$$F_z^j = -V_{z-x}^{(j)}(0) = \frac{6EI_{zz-x}}{dx^3} (dx\varphi_{y-x}^i + dx\varphi_{y-x}^{i+1} - 2w_{z-x}^i + 2w_{z-x}^{i+1}) \quad \text{Vergelijking 3-30}$$

$$F_z^i = -V_{z-x}^{(i)}(dx) = \frac{6EI_{zz-x}}{dx^3} (dx\varphi_{y-x}^{i-1} + dx\varphi_{y-x}^i - 2w_{z-x}^{i-1} + 2w_{z-x}^i)$$

Omdat de dwarskracht constant is over een balkelement, kan ook gebruik worden gemaakt van een versimpelde berekening. In deze berekend wordt de dwarskracht bepaald door de helling van de momentenlijn, waarbij gebruik gemaakt wordt het al gemiddelde buigmoment:

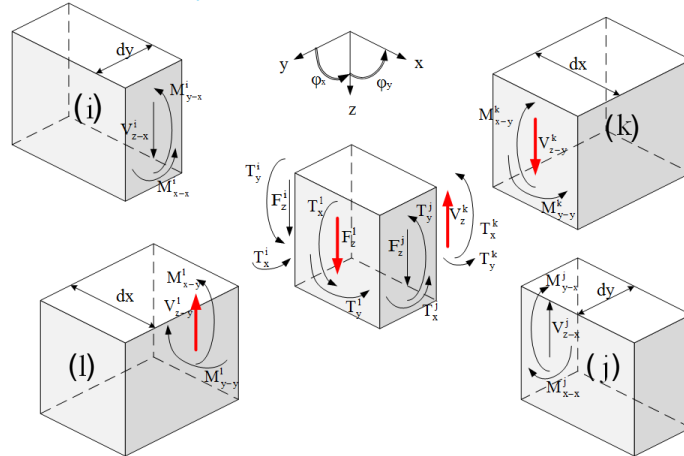
$$F_z^j = V_{z-x}^{(j)}(0) = \frac{M_{y-x}^i - M_{y-x}^{i+1}}{dx} \quad \text{Vergelijking 3-31}$$

$$F_z^i = V_{z-x}^{(i)}(dx) = \frac{M_{y-x}^{i-1} - M_{y-x}^i}{dx}$$

Voor het lokale buigend moment in y-richting ter plaatse van de knoop geldt voor de benadering van een plaat:

$$v_{z-x} = \frac{F_z^i + F_z^j}{2dy} \quad \text{Vergelijking 3-32}$$

### 3.6.5 Dwarskracht in y-richting $V_{z-y}$



Figuur 14 - Bepaling  $V_{z-y}$  in knoop  $i$  met aansluitende balken  $(i)$ ,  $(j)$ ,  $(k)$  en  $(l)$

Voor de dwarskracht op de uiteindes van de balkelementen in  $y$ -richting geldt (met  $k-1$ ,  $k$ ,  $k+1$  nummering van knopen en  $(k)$  en  $(l)$  nummering van de balkelementen):

$$F_z^l = -V_{z-y}^{(l)}(0) = \frac{6EI_{zz-y}}{dy^3} (dy\phi_{x-y}^k + dy\phi_{x-y}^{k+1} - 2w_{z-y}^k + 2w_{z-y}^{k+1}) \quad \text{Vergelijking 3-33}$$

$$F_z^k = V_{z-y}^{(k)}(dy) = \frac{6EI_{zz-y}}{dy^3} (dy\phi_{x-y}^{k-1} + dy\phi_{x-y}^k - 2w_{z-y}^{k-1} + 2w_{z-y}^k)$$

Omdat de dwarskracht constant is over een balkelement, kan ook hier gebruik worden gemaakt van een versimpelde berekening, waarbij gebruik wordt gemaakt van het al gemiddelde buigmoment in de knoop:

$$F_z^l = V_{z-y}^{(l)}(0) = \frac{M_{x-y}^k - M_{x-y}^{k+1}}{dy} \quad \text{Vergelijking 3-34}$$

$$F_z^k = V_{z-y}^{(k)}(dy) = \frac{M_{x-y}^{k-1} - M_{x-y}^k}{dy}$$

Voor het lokale buigend moment in  $y$ -richting ter plaatse van de knoop geldt voor de benadering van een plaat:

$$v_{z-y} = \frac{F_z^k + F_z^l}{2dy} \quad \text{Vergelijking 3-35}$$

### 3.7 Bepalen oplegreacties

De oplegreacties kunnen worden bepaald door de verplaatsingsmatrix te vermenigvuldigen met de originele stijfheidsmatrix:

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{K}] \cdot [\mathbf{U}] - [\mathbf{f}] \quad \text{Vergelijking 3-36}$$

Hiermee worden de oplegkrachten- en momenten bepaald op de knopen die zijn opgelegd.

De resulterende krachten per eenheid van breedte worden gegeven door

$$[\mathbf{r}] = \frac{[\mathbf{R}]}{dx} = \frac{[\mathbf{R}]}{dy}, \text{ voor } dx = dy \quad \text{Vergelijking 3-37}$$

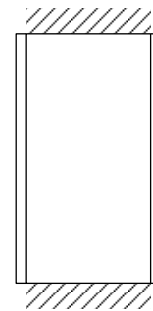
### 3.8 Voorbeeld uitvoer

Dit hoofdstuk toont voorbeelden van de uitvoer uit het basismodel. De resultaten worden kwalitatief beoordeeld.

Dit zal gedaan worden aan de hand van het voorbeeld van een plaat met twee ingeklemde randen en twee vrije randen.

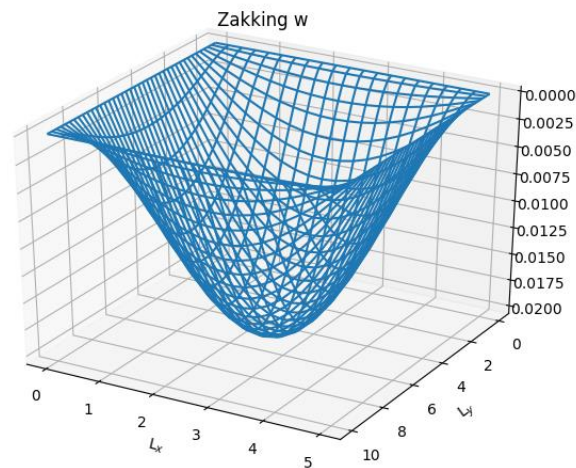
Tabel 6 - Eigenschappen plaat voorbeeld uitvoer  
balkjesmodel

$n$	20
$m$	40
$L_x$	5 m
$L_y$	10 m
$E$	20e6 N/m <sup>2</sup>
$q$	100 N/m <sup>2</sup>
$h$	0.25 m
$\nu$	0 (-)

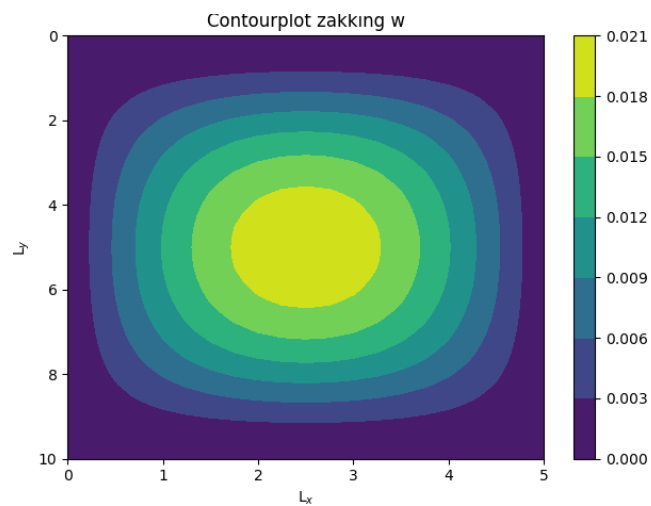


Figuur 15 - rechthoekige plaat, twee overstaande randen ingeklemd, twee randen scharnierend opgelegd

### 3.8.1 Zakking



*Figuur 16 - 3D-plot zakking*

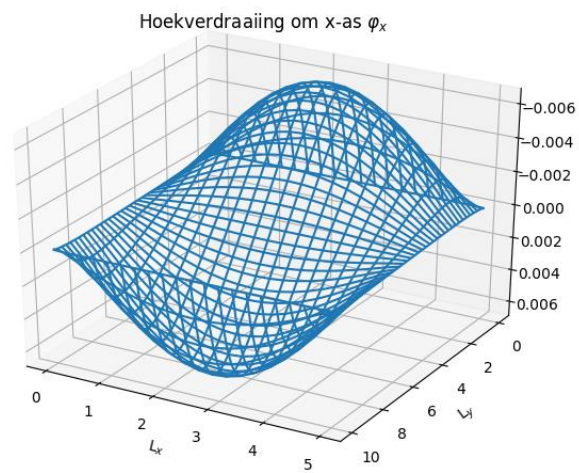


*Figuur 17 - Contourplot zakking*

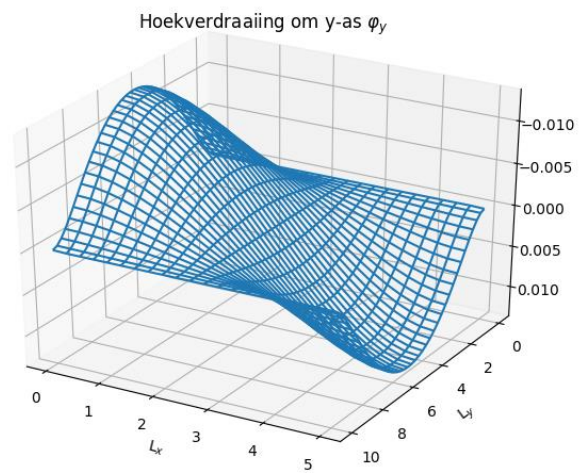
Bovenstaande afbeeldingen tonen de zakkingprofielen. Er is duidelijk te zien dat de zijden op  $L_y=0$  en  $L_y=10$  zijn ingeklemd.

In de 3D-plot is het globale assenstelsel aangehouden, met positieve zakkingen naar beneden.

### 3.8.2 Hoekverdraaiing



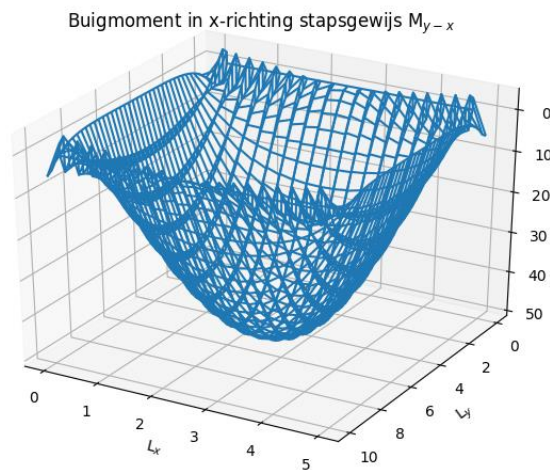
*Figuur 18 - 3D-plot hoekverdraaiing om x-as*



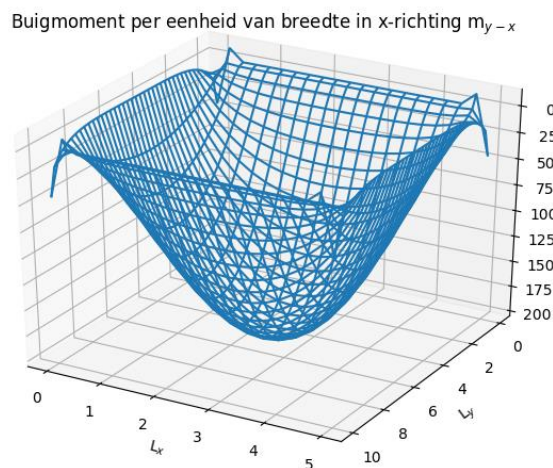
*Figuur 19 - 3D-plot hoekverdraaiing om y-as*

Bovenstaande afbeeldingen tonen de hoekverdraaiingsprofielen.

### 3.8.3 Buigende momenten



Figuur 20 – 3D-plot buigend moment in x-richting stapsgewijs



Figuur 21 - 3D-plot buiging moment per eenheid van breedte in x-richting gemiddeld over knoop

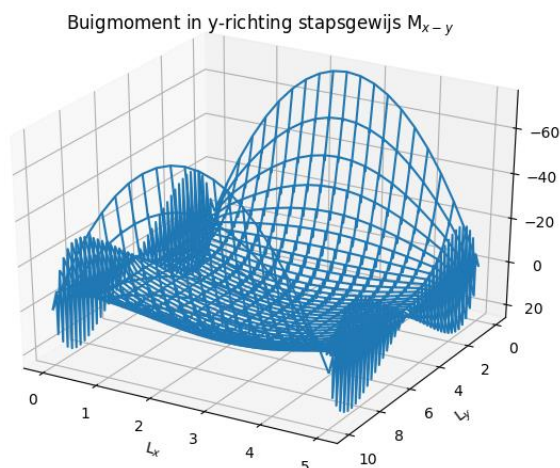
Bovenstaande afbeeldingen tonen de buigende moment in de x-richting. In figuur 20 is een grillig effect te zien omdat de buigende moment aan beide zijden van een knoop niet gelijk zijn.

In de hoeken wordt dit effect vergroot. Op de rand  $L_y=0$  en  $L_y=10$  moet het buigend moment in x-richting gelijk zijn aan 0 omdat de Poisson's ratio gelijk is aan 0 (Blaauwendraad, 2010, p. 91) . Dit is inderdaad zo, op de hoeken na.

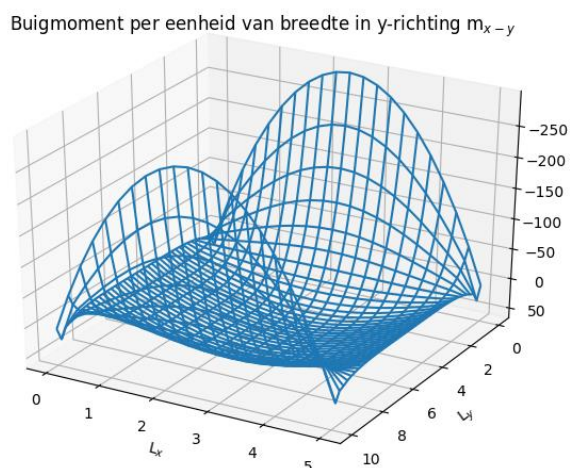
Op de randen  $L_x=0$  en  $L_x = 5$  zou het buigend moment in x-richting gelijk moeten zijn aan 0 omdat de ligger daar scharnierend is opgelegd.. De momenten wijken echter een beetje af. Dit effect wordt toegeschreven aan de aanwezigheid van het wringend moment  $m_{y-y}$  die evenwicht vormt met  $m_{y-x}$ .

In de hoeken worden de onnauwkeurigheden dus groter.

Het tweede figuur toont het buigmoment in x-richting na middeling over de knoop volgens formule vergelijking 3-23. Het grillige effect naast de randen verdwijnt in deze stap, maar de afwijkingen in de hoeken blijven.



*Figuur 22 - 3D-plot buigend moment in y-richting stapsgewijs*



*Figuur 23 - 3D-plot buigend moment per eenheid van breedte in y-richting gemiddeld over knoop*

Bovenstaande afbeeldingen tonen de buigende moment in de y-richting. In figuur 22 is hetzelfde grillig effect te zien als bij het moment in x-richting. Ook hier komt dit doordat het buigende moment aan beide zijden van een knoop niet gelijk zijn.

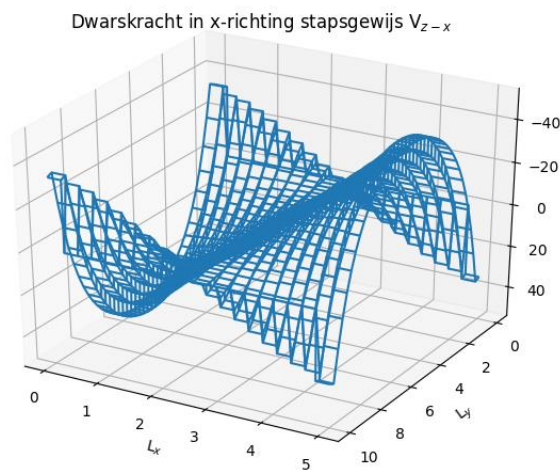
Dit effect wordt op de randen  $L_x=0$  en  $L_x=5$  vergroot. De middeling op de knoop komt daarbij met kleine afwijkingen uit op 0, zoals is voorgeschreven door de randvoorwaarden van scharnierende opleggingen (Blaauwendraad, 2010, p. 93).

De buigende momenten op  $L_y=0$  en  $L_y=10$  zijn daadwerkelijk momenten en gelijk aan de oplegmomenten. Er is hier geen verstoring van het wringend moment omdat deze bij een ingeklemde rand gelijk is aan 0.

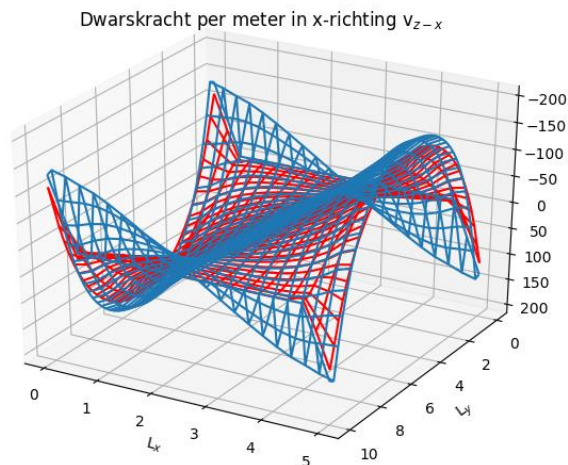
Het tweede figuur toont het buigmoment in y-richting na middeling over de knoop volgens formule vergelijking 3-25. Ook hier verdwijnt het grillige effect naast de randen in deze stap, maar blijven de afwijkingen in de hoeken.



### 3.8.4 Dwarskrachten



Figuur 24 - 3D-plot dwarskracht in x-richting stapsgewijs



Figuur 25 - 3D-plot dwarskracht per eenheid van breedte in x-richting gemiddeld over knoop. De blauwe plot toont de dwarskracht volgens vergelijking 3-30 en de rode plot toont de dwarskracht volgens vergelijking 3-31.

Bovenstaande afbeeldingen tonen de dwarskracht in de x-richting. In figuur 24 is te zien dat de dwarskracht per balkelement in x-richting constant is. Dit is juist omdat de belasting is gemodelleerd als puntlasten op de knopen en niet als verdeelde last over het balkelement. Volgens vergelijking 3-5 is de dwarskracht gelijk aan de afgeleide van het moment naar x. Omdat het moment lineair verloopt is de dwarskracht een constante.

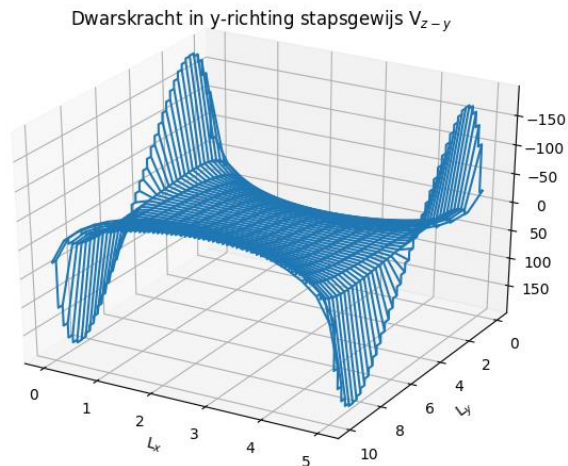
Op de rand  $L_y=0$  en  $L_y=10$  is de dwarskracht gelijk aan 0, wat overeen komt met de randvoorwaarde van de inklemming.

De dwarskrachten op  $L_x=0$  en  $L_x=5$  zijn juist en deze dragen bij aan de oplegreacties.

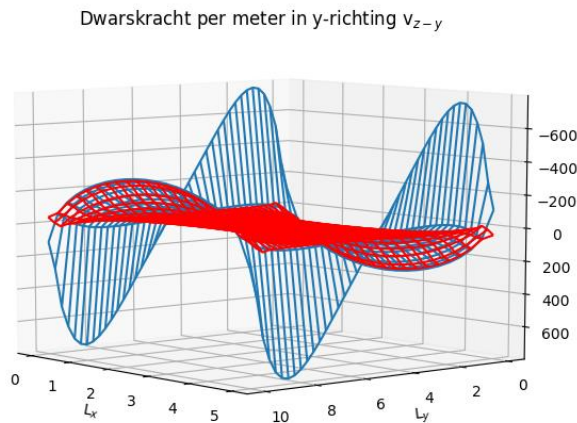
Het tweede figuur toont het buigmoment in x-richting na middeling over de knoop. De blauwe plot geeft de dwarskracht aan volgens vergelijking 3-30. De rode plot geeft de dwarskracht aan volgens vergelijking 3-31. Deze tweede oplossing geeft kleinere waardes, dat is een lo-



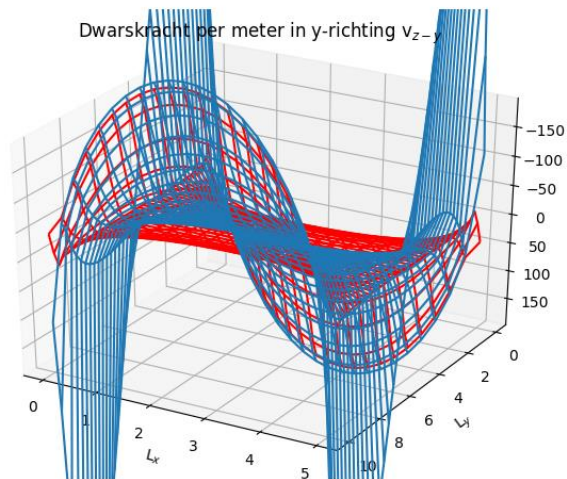
gisch gevolg omdat het grillige effect in de momentenlijn eruit is gefilterd. Het is echter onduidelijk welke oplossing de meest accurate oplossing geeft voor de benadering van het plaatmodel.



Figuur 26 - 3D-plot dwarskracht in y-richting stapsgewijs



Figuur 27 - 3D-plot dwarskracht per eenheid van breedte in y-richting gemiddeld over knoop. De blauwe plot toont de dwarskracht volgens vergelijking 3-30 en de rode plot toont de dwarskracht volgens vergelijking 3-31.



*Figuur 28 - 3D-plot dwarskracht per eenheid van breedte in y-richting gemiddeld over knoop ingezoomd. De blauwe plot toont de dwarskracht volgens vergelijking 3-30 en de rode plot toont de dwarskracht volgens vergelijking 3-31.*

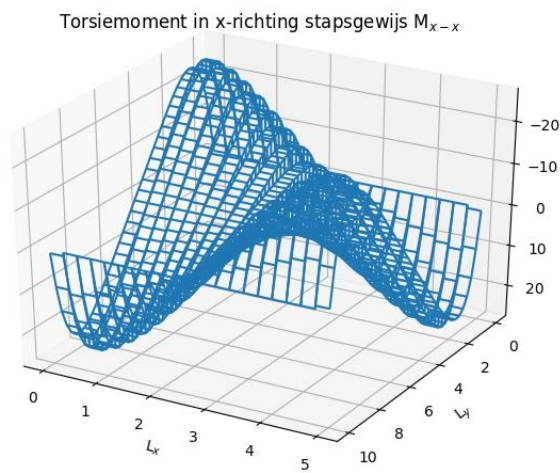
Bovenstaande afbeeldingen tonen de dwarskracht in de y-richting. In figuur 26 is te zien dat de dwarskracht per balkelement in y-richting constant is.

Op de rand  $L_x=0$  en  $L_x=5$  zou de dwarskracht gelijk moeten zijn aan 0, echter ontstaan grote pieken door de aanwezigheid van het wringend moment.

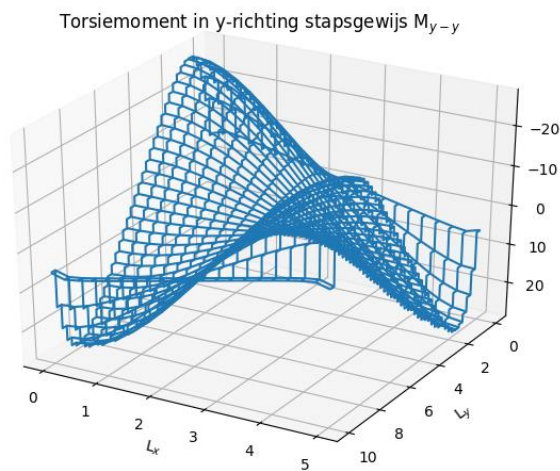
De dwarskrachten op  $L_y=0$  en  $L_y=10$  zijn juist en dragen bij aan de oplegreacties.

Het tweede en derde figuur toont het buigmoment in y-richting na middeling over de knoop. De blauwe plot geeft de dwarskracht aan volgens vergelijking 3-32. De rode plot geeft de dwarskracht aan volgens vergelijking 3-33. De extreem hoge waardes voor de dwarskracht zijn er op de randen  $L_x=0$  en  $L_x=5$  uit gefilterd.

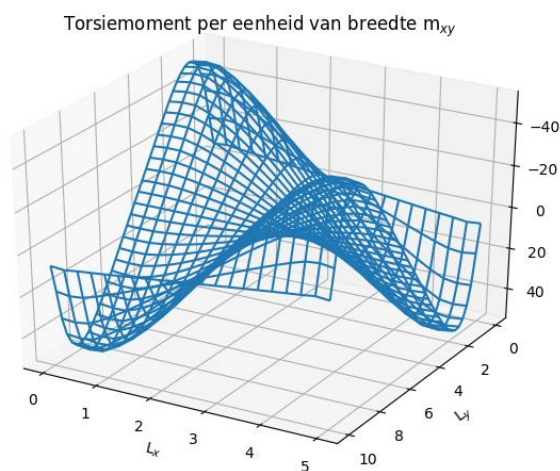
### 3.8.5 Wringende momenten



Figuur 29 - 3D-plot wringend moment in x-richting stapsgewijs



Figuur 30 - 3D-plot wringend moment in y-richting stapsgewijs



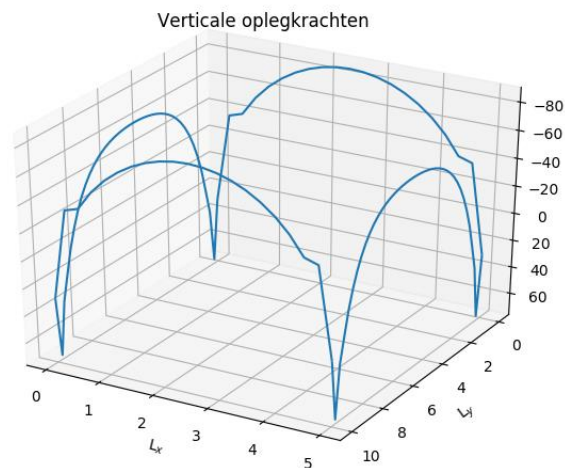
Figuur 31 - 3D-plot wringend moment gemiddeld over knoop

Bovenstaande afbeeldingen tonen de wringende momenten op balkjes in x-richting en y-richting en het wringend moment  $m_{xy}$  zoals die in een plaat zou optreden volgens het model.

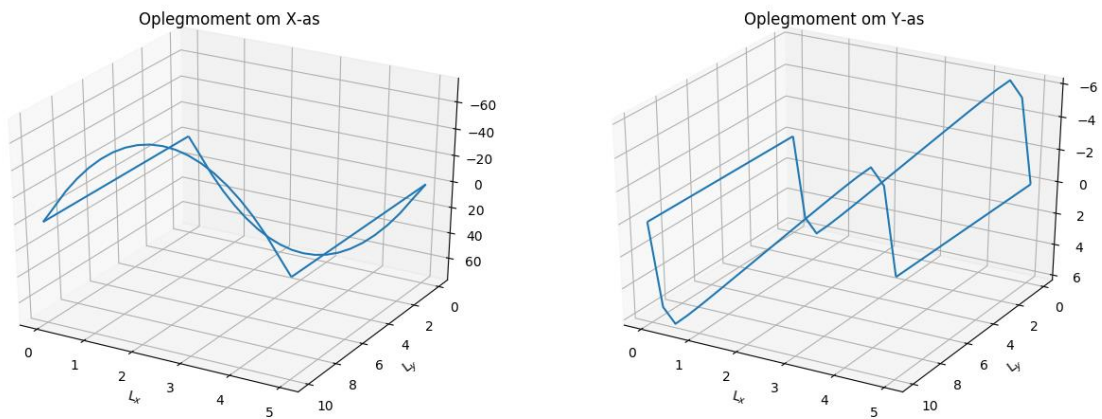
Op de ingeklemde rand  $L_y=0$  en  $L_y=10$  kunnen geen wringende momenten ontstaan. Het model benadert hier wel 0, maar is niet gelijk aan 0. Dit verschil vormt evenwicht met het verschil tussen de twee buigmomenten op overstaande snedes rond een knoop op deze rand.

Op de scharnierend opgelegde rand  $L_x=0$  en  $L_x=5$  kunnen wel wringende momenten ontstaan, dus de oplossing is daar wel juist.

### 3.8.6 Oplegreacties



Figuur 32 - 3D-plot verticale oplegkrachten



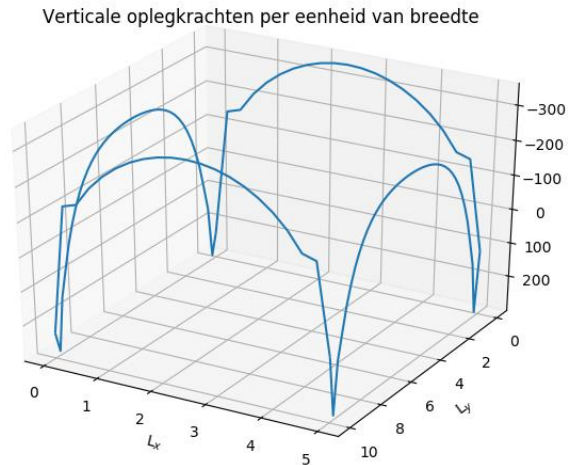
Figuur 33 links - 3D-plot oplegmoment om x-as

Figuur 34 rechts - 3D-plot oplegmoment om y-as

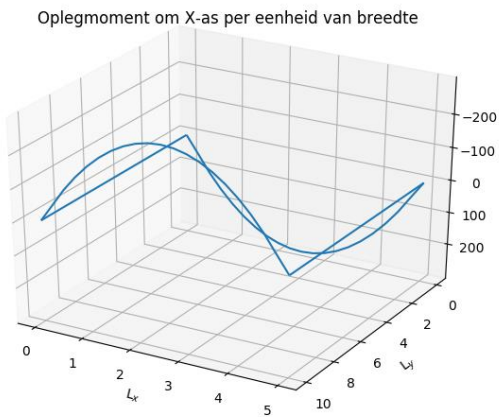
Bovenstaande plots tonen de oplegreacties volgens het globale assenstelsel.

De verticale oplegkrachten laten drukkrachten zien over de hele ligger, op grote trekkrachten op de uiteindes na. Dit komt overeen met het daadwerkelijke gedrag van platen

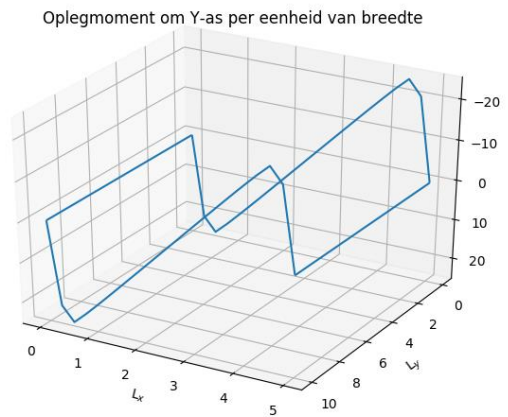
Het oplegmoment om de y-as toont kleine waarden en het verloop is verwaarloosbaar.



*Figuur 35 - 3D-plot verticale oplegkrachten per eenheid van breedte*



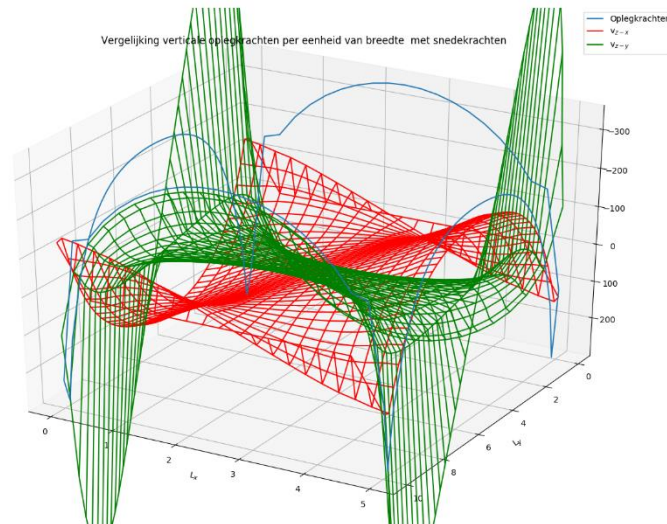
*Figuur 36 links - 3D-plot oplegmoment om de x-as per eenheid van breedte*



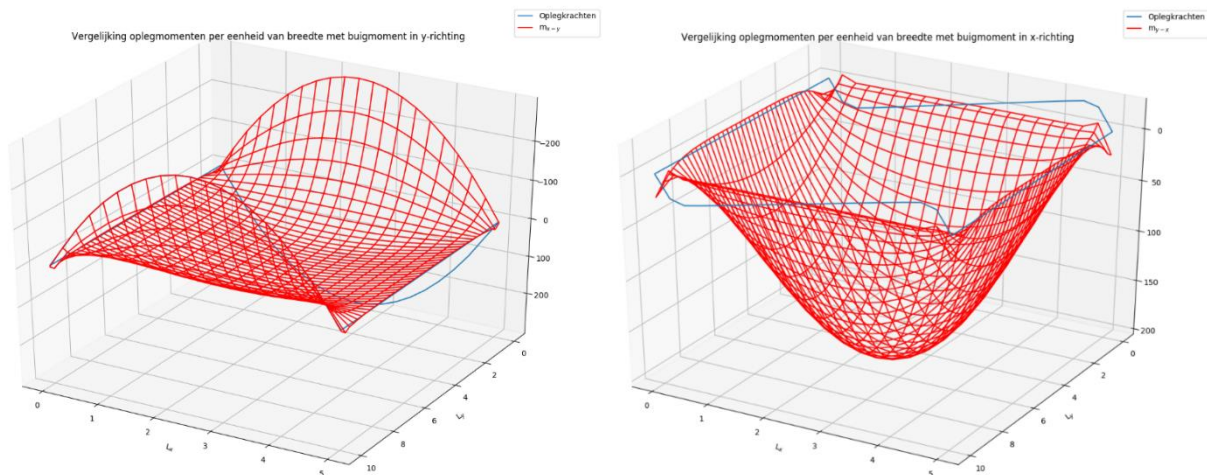
*Figuur 37 rechts - 3D-plot oplegmoment om de y-as per eenheid van breedte*

Bovenstaande plots tonen de oplegreacties per eenheid van breedte. Deze zijn bepaald met vergelijking 3-37. Deze plots kunnen worden vergeleken met de snedekrachten. Dat wordt met onderstaande plots gedaan.





*Figuur 38 - 3D-plot met zowel verticale oplegkrachten per eenheid van breedte als dwarskracht per eenheid van breedte*



*Figuur 39 links - 3D-plot met zowel oplegmomenten per eenheid van breedte als intern buigmoment in y-richting*

*Figuur 40 rechts - 3D-plot met zowel oplegmomenten per eenheid van breedte als intern buigmoment in x-richting*

Bij de vergelijking van oplegreacties en snedekrachten valt ten eerste de tekenwisseling op bij  $L_x=0$  en  $L_y = 0$ . Dit komt omdat de snedekrachten volgens het lokale assenstelsel gedefinieerd zijn en de oplegreacties volgens het globale assenstelsel.

Daarnaast valt in figuur 38 op dat de dwarskrachten niet precies gelijk zijn aan de oplegreacties. Dit komt omdat hier niet de invloed van het wringend moment is meegenomen. Voor de oplegreactie geldt namelijk (Hoogenboom, n.d.):

$$f = v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \qquad \text{Vergelijking 3-38}$$

De grootte van de factor  $\frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$  is niet geëvalueerd in het model.

In figuur 39 valt op dat het moment op de rand  $L_y=10$  precies overeen komt met de waarden van de oplegreacties.

In figuur 40 is hetzelfde effect te zien als in figuur 38. Op de rand  $L_y=0$  en  $L_y=10$  ontstaat een verschil tussen de interne buigmomenten en de oplegmomenten. Dit verschil wordt toegeschreven aan het wringend moment in de rand.



## 4 Toetsing basismodel

Het model is eerder getoetst door Lars. Dezelfde toetsen zijn uitgevoerd met het verbeterde model. De hoofdvraag is of de zakkingen uit het basismodel voor een plaat gemodelleerd als een balkenrooster overeenkomen met de oplossingen vanuit de plaattheorie. Ook zijn de reactiekrachten (dwarskrachten en buigende momenten) voor de oplossing zonder torsie gecontroleerd. Het model van Lars klopte nog niet als de torsie werd meegenomen. Het model is op een aantal punten verbeterd en aangepast.

### 4.1 Resultaat

Het aangepast model voldoet in tegenstelling tot het originele wel. De zakkingen komen na een convergentieproces, op een kleine fout na, overeen met de oplossingen vanuit de plaattheorie voor een Poisson's ratio van 0. Vanaf  $n = m = 20$  is de fout in de zakking kleiner dan 1%. De Poisson's ratio heeft geen invloed op de oplossingen waarin torsie wordt verwaarloosd en daarvoor zullen de oplossingen ook exact overeenkomen met andere modellen.

Het wringend moment voor de oplossingen met torsie is gecontroleerd aan de hand van de plaat van Nadai. De wringend momenten uit het balkjesmodel komen goed overeen met de momenten vanuit de plaattheorie. De krachtgrootheden (op het wringend moment na) zijn door Lars gecontroleerd voor de oplossingen waarbij torsie niet wordt meegenomen. Met het aangepast model zijn deze krachtsgrootheden onveranderd gebleven en voldoet de toetsing nog steeds.

De belangrijkste aanpassingen ten opzichte het model van Lars zijn:

- Reductie van de torsiestijfheid naar  $I_w = \frac{1}{6}bh^3$ , omdat alleen de horizontale componenten van de dwarskracht bijdragen aan het wringend moment.
- De torsie van de randbalken wordt niet verwaarloosd
- Snedekrachten worden bepaald volgens de relaties van een balkelement en gemiddeld over de knoppen om de plaatsnedekrachten te benaderen.
- Het model is alleen te vergelijken met het plaatmodel voor  $\nu = 0$ .
- Implementatie van juiste bepaling van snedekrachten en vertaling naar plaatmodel volgens de vergelijking 3-14 tot vergelijking 3-18.

### 4.2 Beperkte toepassing balkjesmodel

De oplossingen van het model met torsie worden vergeleken met de oplossingen volgens Timoshenko (Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959). Deze oplossingen gelden voor platen met een Poisson's-ratio van 0.3 en zijn gegeven in de vorm:

$$w = \alpha \frac{qa^4}{D} \quad \text{Vergelijking 4-1}$$
$$m = \beta qa^2$$

De invloed van de Poisson's ratio kan voor de zakking nog worden doorgevoerd in de buigstijfheid  $D$ :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{Vergelijking 4-2}$$

In deze vergelijkingen is  $\alpha$  geen functie van  $\nu$ . Voor de momenten is de Poisson's-ratio verwerkt in de factor  $\beta$  en kunnen deze waarden dus niet worden gebruikt ter controle. Voor de zakkingen kan echter met de juiste waarde van  $\alpha$  en  $D$  alsnog de oplossing worden gebruikt.

Er is gekozen voor een beperkte toepassing van het balkjesmodel met een Poisson's ratio van 0 omdat in een plaat de buigende momenten als volgt zijn gegeven (Bareš & Massonnet, 1968):

$$m_{xx} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{Vergelijking 4-3}$$

$$m_{yy} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Echter, in het balkjesmodel geldt:

$$m_{y-x} = -Ei \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{Vergelijking 4-4}$$

$$m_{y-y} = -Ei \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Het balkjesmodel benadert daarmee enkel de plaat met een Poisson's-ratio van 0.

### 4.3 Toets zonder torsie

Het model geeft dezelfde waarden als het originele model van Lars, en voldoet daarmee aan de toetsen die Lars ook heeft uitgevoerd. Voor de toetsen wordt verwezen naar het verslag van Lars (Imholz, 2016).

### 4.4 Toets met torsie

Voor de toetsing van het model met torsie zijn dezelfde belastinggevallen aangehouden als uitgevoerd door Lars.

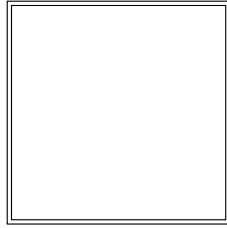
Tabel 7 – Eigenschappen plaat toetsing basismodel

$a = L_x = L_y$	5 m
$E_x$	$20 \times 10^6 \text{ N/m}^2$
$E_y$	$20 \times 10^6 \text{ N/m}^2$
$H$	0.25 m
$q$	100 kN/m <sup>2</sup>
$\nu$	0

Hiermee geldt:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{Eh^3}{12} = \frac{20 \cdot 10^6 \cdot 0.25^3}{12} = 26042 \text{ Nm}$$

#### 4.4.1 Belastinggeval 1a

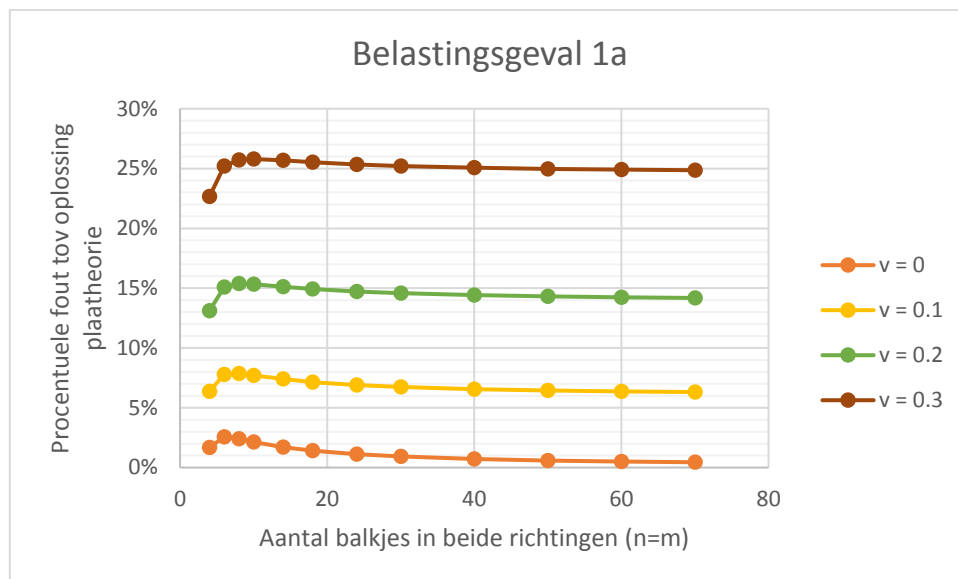


*Figuur 41 - Vierkante plaat, scharnierend opgelegd*

Vierkante plaat, scharnierend opgelegd (Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959, p. 120):

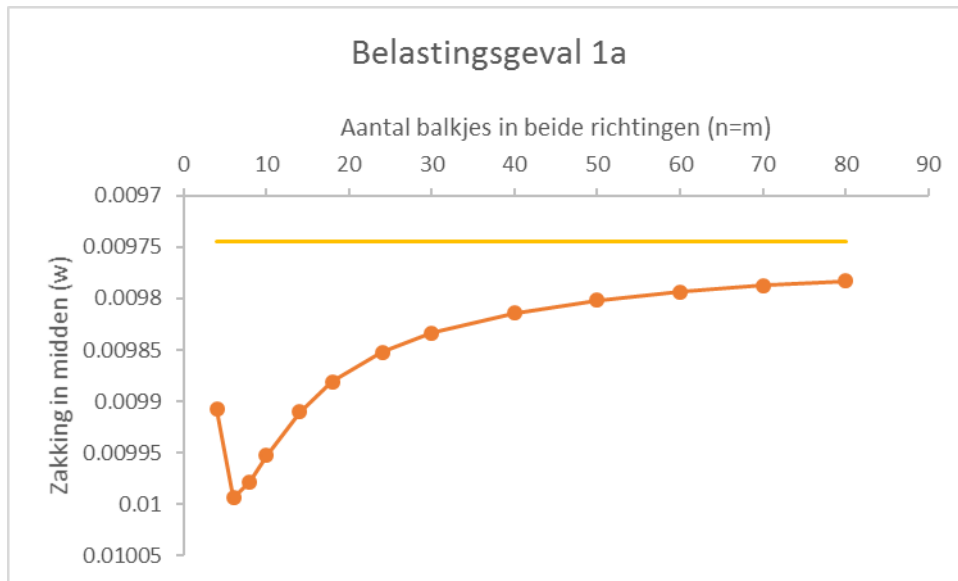
$$w_{\text{midden}} = 0.00406 \frac{q \cdot a^4}{D} = 0.009744\text{m}$$

De beperking  $\nu=0$  is eerder aangenomen. Onderstaand figuur toont dat het model voor  $\nu=0$  inderdaad de plaattheorie benadert. Voor grotere waarden van  $\nu$  wijkt de oplossing van het model sterk af van de oplossing van de plaattheorie.



*Figuur 42 – Procentuele fout bij variabele  $\nu$*

De daadwerkelijk optredende zakking is in onderstaande figuur geplot, samen met de oplossing volgens de plaattheorie.



*Figuur 43- Convergentie zakking van belastingsgeval 1a*

Dit geeft een procentuele fout van +0.397% voor  $n=m=80$ .

#### 4.4.2 Belastinggeval 1b

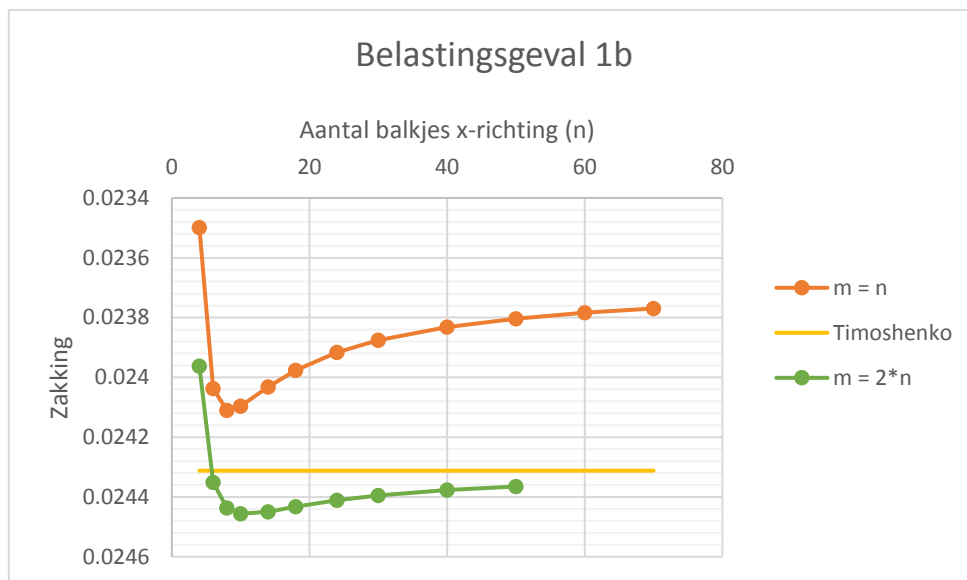


*Figuur 44 - Rechthoekige plaat, scharnierend opgelegd*

Er zijn ook oplossingen gegeven voor een plaat met een bepaalde aspect ratio in het boek van Timoshenko. Daarmee zijn ook rechthoekige platen te toetsen. Hier is dat ook gedaan voor een rechthoekige plaat, die scharnierend is opgelegd, waarvoor geldt:  $L_y = 2 * L_x$

De oplossing volgens de plaattheorie is als volgt (Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959, p. 120):

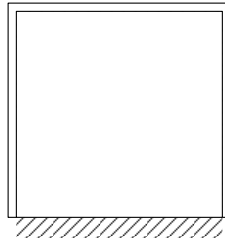
$$w_{\text{midden}} = 0.01013 \frac{q \cdot a^4}{D} = 0.024312m$$



*Figuur 45 - Convergentie van belastingsgeval 1b*

Dit geeft een procentuele fout van -2.229% voor  $n=m=70$  en een procentuele fout van +0.217% voor  $n = m / 2 = 50$ . Blijkbaar komt het model dus alleen goed overeen als de  $dx = dy$ .

#### 4.4.3 Belastinggeval 2

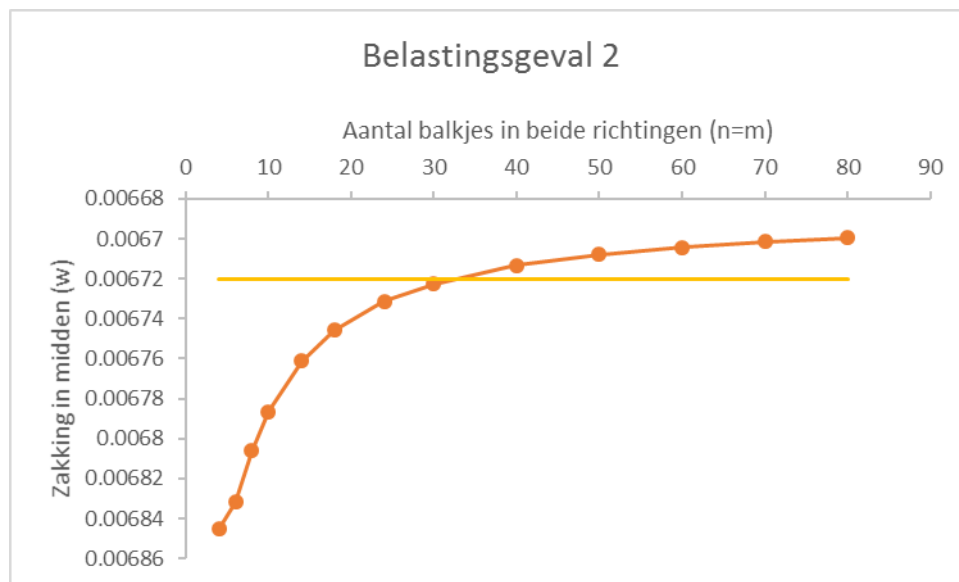


Figuur 46 - Vierkante plaat, één rand ingeklemd, drie randen scharnierend opgelegd

Vierkante plaat, één rand ingeklemd, drie randen scharnierend opgelegd

De oplossing volgens de plaattheorie is als volgt (Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959, p. 194):

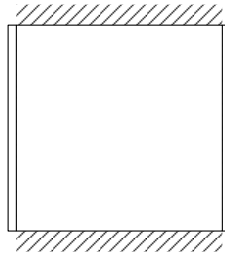
$$w_{\text{midden}} = 0.0028 \frac{q \cdot a^4}{D} = 0.00672 \text{m}$$



Figuur 47 - Convergentie van belastinggeval 2

Dit geeft een procentuele fout van -0.305% voor n=m=80.

#### 4.4.4 Belastinggeval 3a

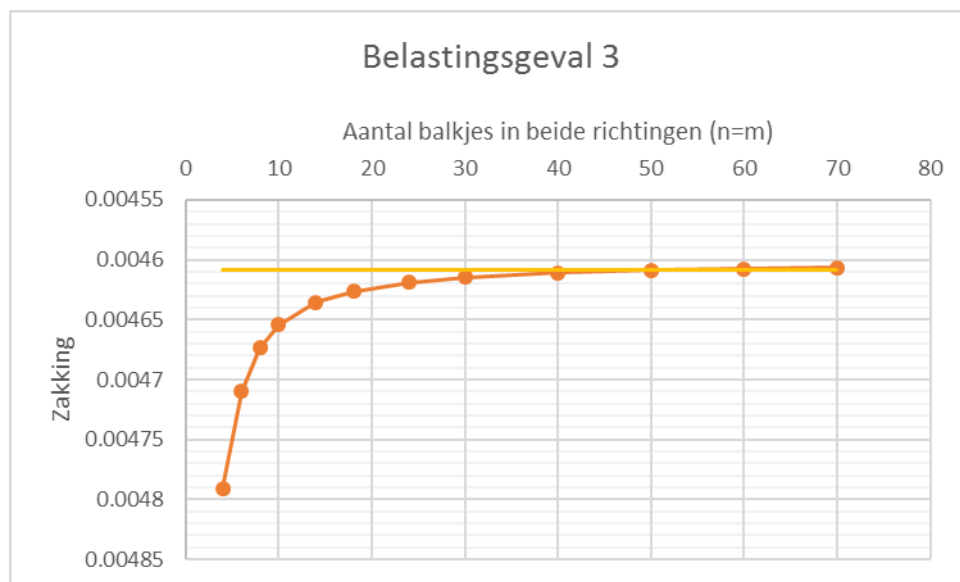


*Figuur 48 - Vierkante plaat, twee overstaande randen ingeklemd, twee randen scharnierend opgelegd*

Vierkante plaat, twee overstaande randen ingeklemd, andere randen scharnierend opgelegd.

De oplossing volgens de plaattheorie is als volgt (Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959, p. 187):

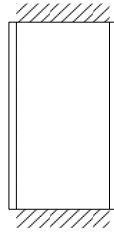
$$w_{\text{midden}} = 0.00192 \frac{q \cdot a^4}{D} = 0.004608 \text{m}$$



*Figuur 49 - Convergentie van belastinggeval 3*

Dit geeft een procentuele fout van -0.033% voor n=m=70.

#### 4.4.5 Belastinggeval 3b

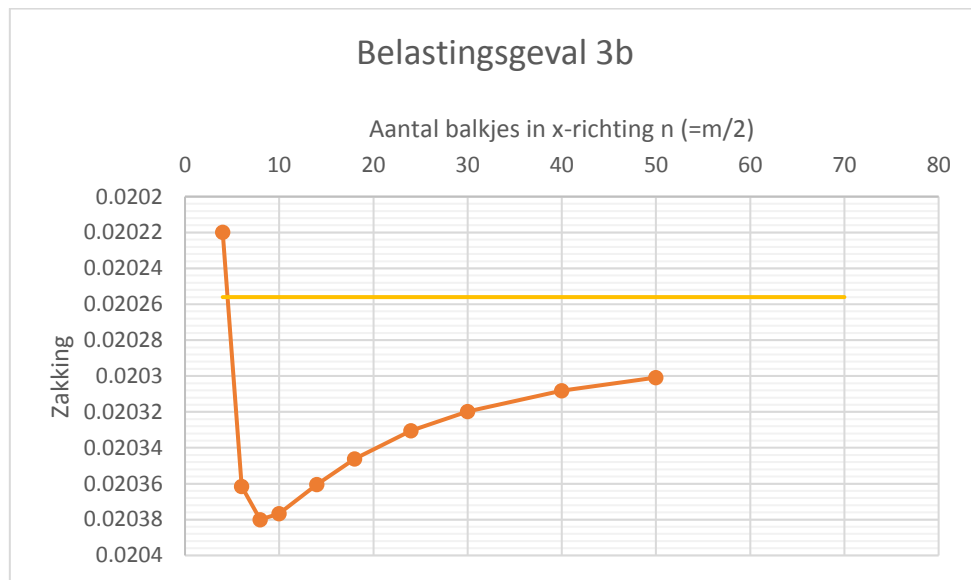


*Figuur 50 – rechthoekige plaat, twee overstaande randen ingeklemd, twee randen scharnierend opgelegd*

Rechthoekige plaat, twee overstaande randen ingeklemd, andere randen scharnierend opgelegd met  $L_y = 2 \cdot L_x$

De oplossing volgens de plaattheorie is als volgt (Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959, p. 187):

$$w_{\text{midden}} = 0.00844 \frac{q \cdot a^4}{D} = 0.020256 \text{ m}$$

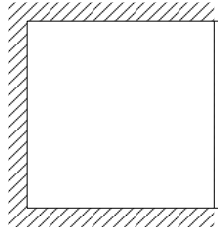


*Figuur 51 - Convergentie van belastinggeval 3*

Dit geeft een procentuele fout van 0.221% voor  $n=m/2=50$ .



#### 4.4.6 Belastinggeval 4

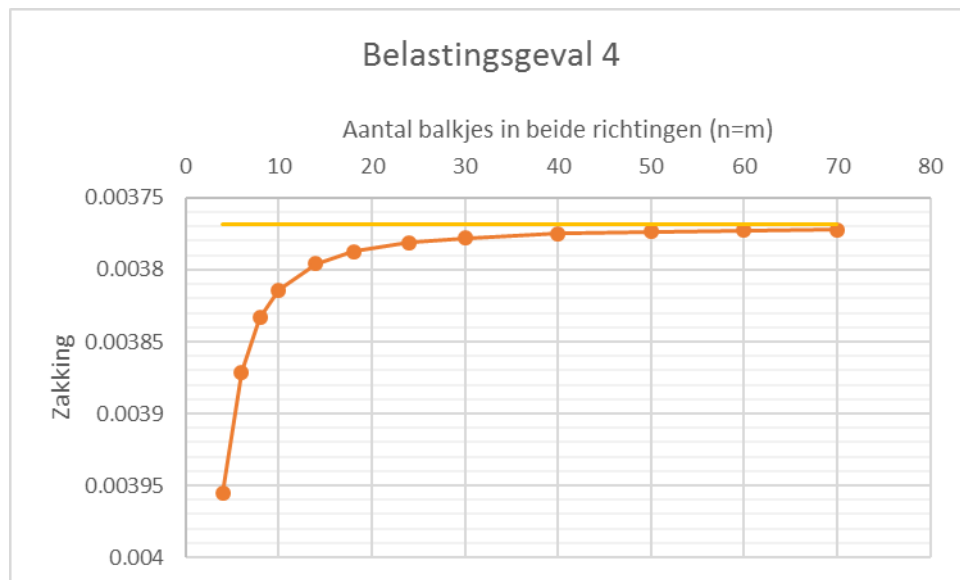


Figuur 52 - Vierkante plaat, drie randen ingeklemd, andere rand scharnierend opgelegd

Vierkante plaat, drie randen ingeklemd, andere rand scharnierend opgelegd.

De oplossing volgens de plaattheorie is als volgt (Imholz, 2016) :

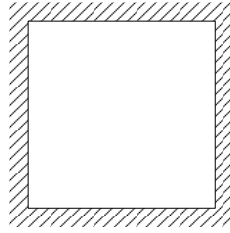
$$w_{\text{midden}} = 0.00157 \frac{q \cdot a^4}{D} = 0.003768 \text{m}$$



Figuur 53 - Convergentie van belastinggeval 4

Dit geeft een procentuele fout van +0.106% voor n=m=70.

#### 4.4.7 Belastinggeval 5

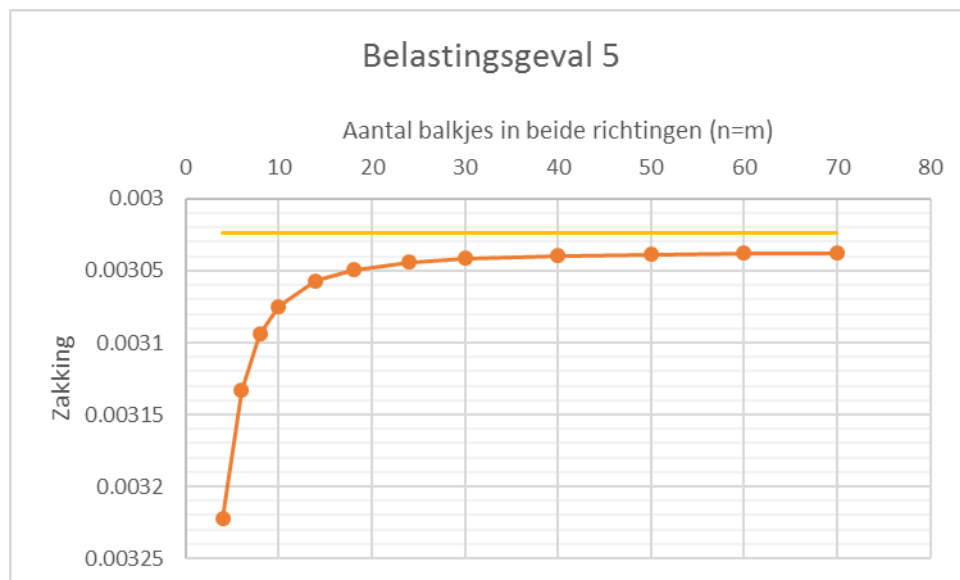


Figuur 54 - Vierkante plaat, alle randen ingeklemd

Vierkante plaat, alle randen ingeklemd.

De oplossing volgens de plaattheorie is als volgt (Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959, p. 202):

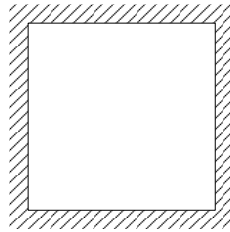
$$w_{\text{midden}} = 0.00126 \frac{q \cdot a^4}{D} = 0.003024 \text{m}$$



Figuur 55 - Convergentie van belastinggeval 5

Dit geeft een procentuele fout van +0.453% voor n=m=70.

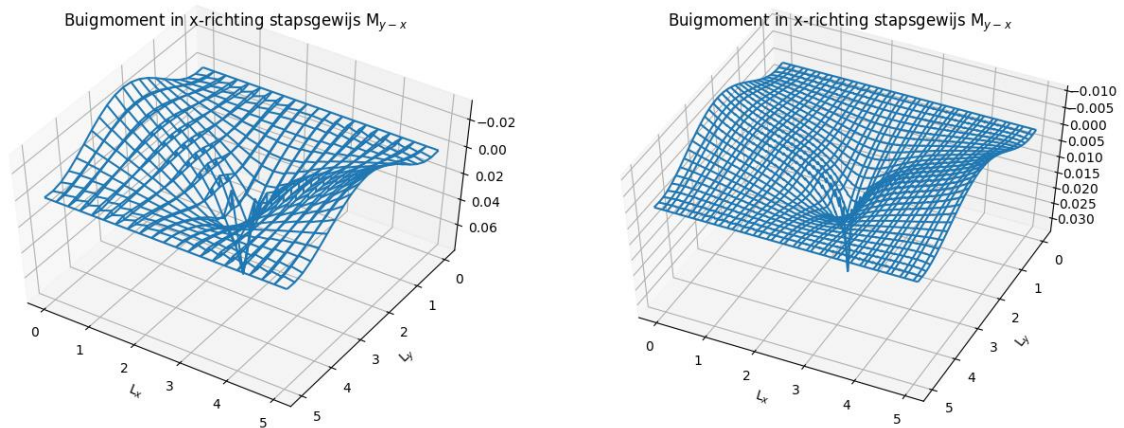
#### 4.4.8 Belastinggeval 6



*Figuur 56 - Vierkante plaat, alle randen ingeklemd, met puntlast in het midden*

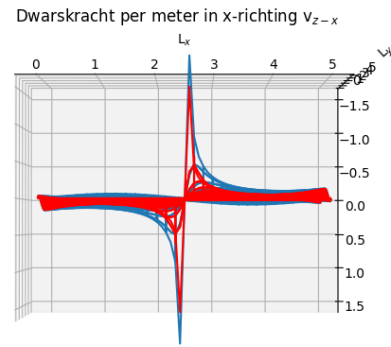
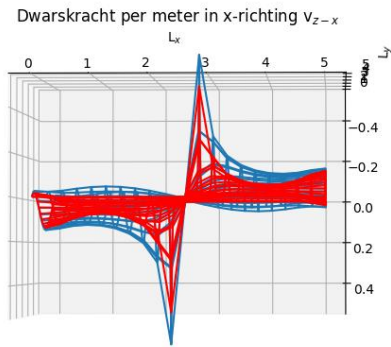
Belastinggeval 6 is in het rapport van Lars gelijk aan belastinggeval 5 (Imholz, 2016). Dit belastinggeval is echter wel interessant om te bekijken wat de effecten zijn van een enkele puntkracht in plaats van de verdeelde kracht. Voor het bepalen van invloedslijnen is er sprake van deze belastingcondities.

Er is kwalitatief gekeken naar hoe de mate van grilligheid rond de belasting afhangt van het aantal balkjes.



*Figuur 57 links – Buigmoment in x-richting op balkelement met puntlast midden plaat met  $n=m=20$*

*Figuur 58 rechts – Buigmoment in x-richting op balkelement met puntlast midden plaat met  $n=m=60$*



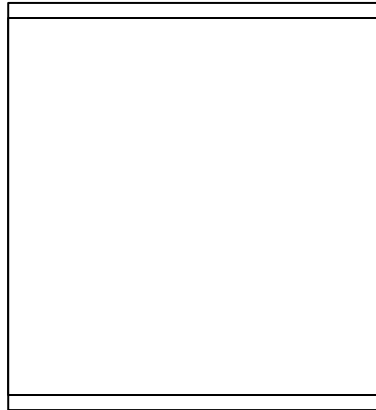
*Figuur 59 links – dwarskracht per meter in x-richting met  $n=m=20$ . De blauwe plot toont de dwarskracht volgens vergelijking 3-30 en de rode plot toont de dwarskracht volgens vergelijking 3-31.*

*Figuur 60 rechts - dwarskracht per meter in x-richting met  $n=m=60$ . De blauwe plot toont de dwarskracht volgens vergelijking 3-30 en de rode plot toont de dwarskracht volgens vergelijking 3-31.*

Wat opvalt is dat de piek rond de dwarskracht groter en smaller wordt voor een hoger aantal balkjes. Daarnaast wordt de grilligheid tussen de oplossing met  $n=m=20$  en  $n=m=60$  kleiner naarmate het aantal balkjes toeneemt. Doordat de grilligheid afneemt, neemt ook het verschil af tussen de oplossing volgens vergelijking 3-30 en vergelijking 3-31.

Direct naast het punt belasting zijn de resultaten dus niet betrouwbaar omdat deze sterk afhankelijk zijn van het aantal balkjes.

#### 4.4.9 Belastinggeval 7a



Figuur 61 - Vierkante plaat, twee randen scharnierend opgelegd, andere randen vrij

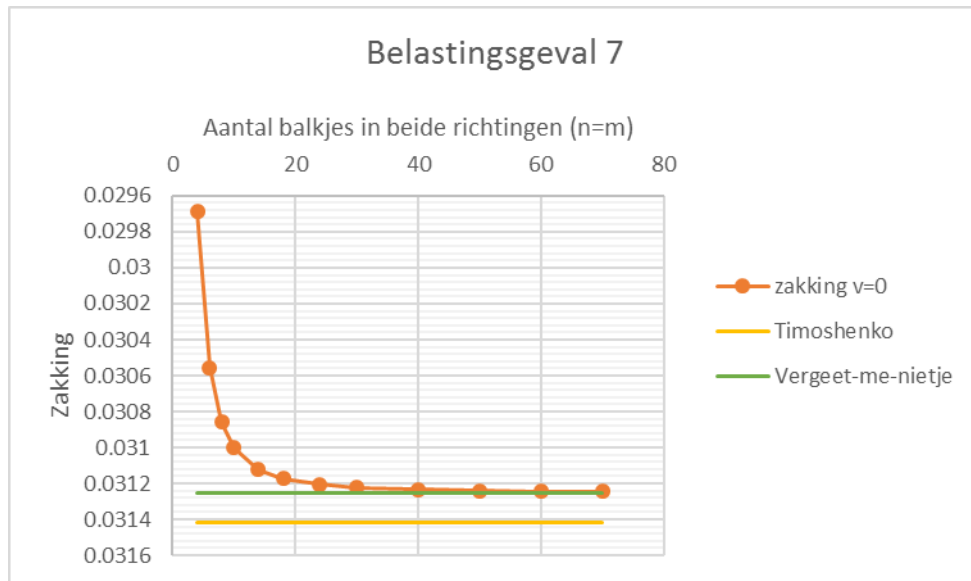
Vierkante plaat, twee overstaande randen scharnierend opgelegd. Andere randen vrij. Doordat  $v=0$  speelt torsie geen rol in dit belastinggeval.

De oplossing volgens de plaattheorie is als volgt (Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959, p. 219):

$$w_{\text{midden}} = 0.001309 \frac{q \cdot a^4}{D} = 0.031416\text{m}$$

Bij dit belastinggeval wordt alle belasting in één richting afgevoerd. Omdat geldt dat  $v=0$  wordt het probleem daarmee versimpeld tot een balkje. Hiervoor geldt een simpel vergeet-me-nietje:

$$w = \frac{5}{384} \frac{QL^4}{EI}$$
$$w = \frac{5}{384} \frac{(q \cdot L_x) \cdot L_y^4}{E \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot L_x \cdot h^2\right)}$$
$$w = \frac{5}{384} \frac{(100 \cdot 5) \cdot 5^4}{(20 \cdot 10^6) \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot 5 \cdot 0.25^3\right)}$$
$$w = 0.03125\text{m}$$



Figuur 62 - Convergentie van belastinggeval 7a

Dit geeft een procentuele fout -0.545% voor n=m=70 met de oplossing van Timoshenko en een fout van slechts -0,016% voor de oplossing vanuit de vergeet-me-nietjes.

#### 4.4.10 Belastinggeval 7b



Figuur 63 - Rechthoekige plaat, twee randen scharnierend opgelegd, andere randen vrij

Vierkante plaat, twee overstaande randen scharnierend opgelegd. Andere randen vrij. Er geldt  $L_y = 2 L_x$

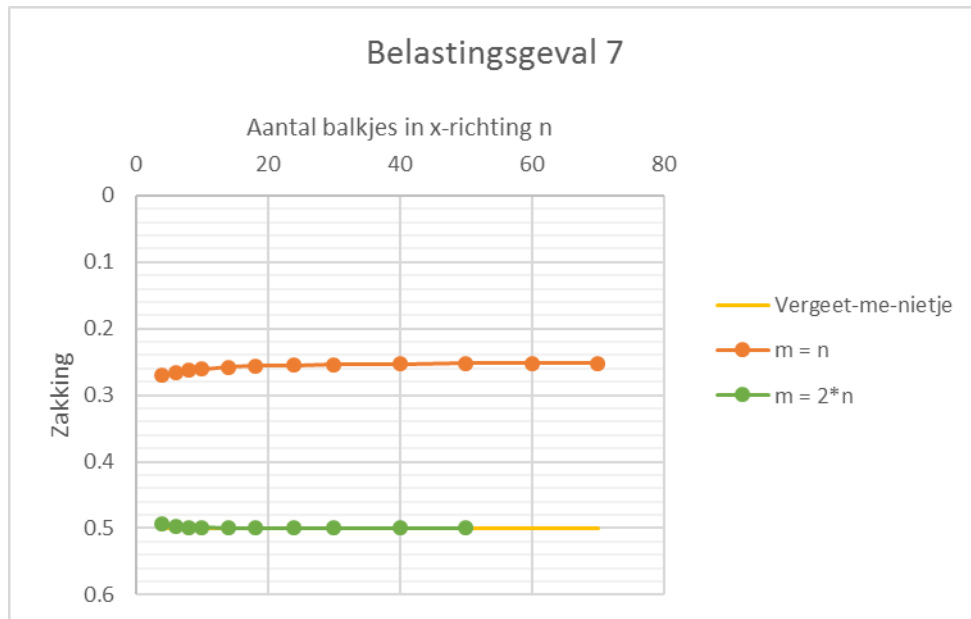
Hier geldt het simpele vergeet-me-nietje:

$$w = \frac{5}{384} \frac{QL^4}{EI}$$

$$w = \frac{5}{384} \frac{(q \cdot L_x) \cdot L_y^4}{E \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot L_x \cdot h^3\right)}$$

$$w = \frac{5}{384} \frac{(100 \cdot 5) \cdot 10^4}{(20 \cdot 10^6) \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot 5 \cdot 0.25^3\right)}$$

$$w = 0.5m$$

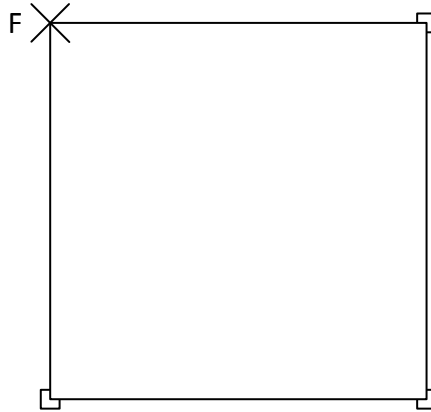


*Figuur 64 -Convergentie van belastingsgeval 7b*

Het valt op dat de resultaten voor  $m=n$  sterk afwijken (een factor 2) van de daadwerkelijke zakking. De reden hiervoor is onbekend. De oplossing voor  $m = 2*n$  geeft een procentuele fout van  $-0.008\%$  voor  $n = m / 2$ . Dat de oplossingen voor  $m=n$  afwijken wijst erop dat de fout niet volledig komt uit een fout in de verwerking van het wringend moment. In dit belastingsgeval is het wringend moment namelijk gelijk aan 0.

## 4.5 Toets plaat van Nadai

De wringend momenten zijn getoetst aan de hand van de plaat van Nadai. Dezelfde invoergegevens zijn gebruikt, echter is er geen verdeelde belasting aangebracht en er is een puntkracht aangebracht in één hoekpunt.



*Figuur 65 - Plaat van Nadai, puntopleggingen op 3 hoeken, belasten met eenheidskracht op andere hoek*

Voor de plaat van Nadai geldt:

$$w = Cxy$$

$$m_{xy} = (1 - \nu)DC$$

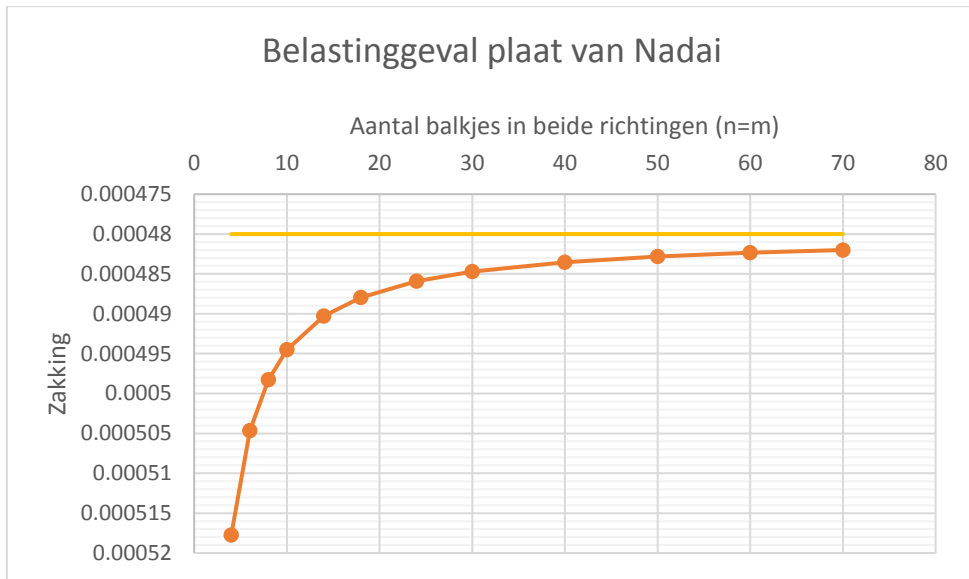
De buigende momenten, en daarmee ook de dwarskrachten zijn constant en gelijk aan 0. Het wringend moment is constant over de plaat en gelijk aan:

$$m_{xy} = \frac{1}{2}F = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

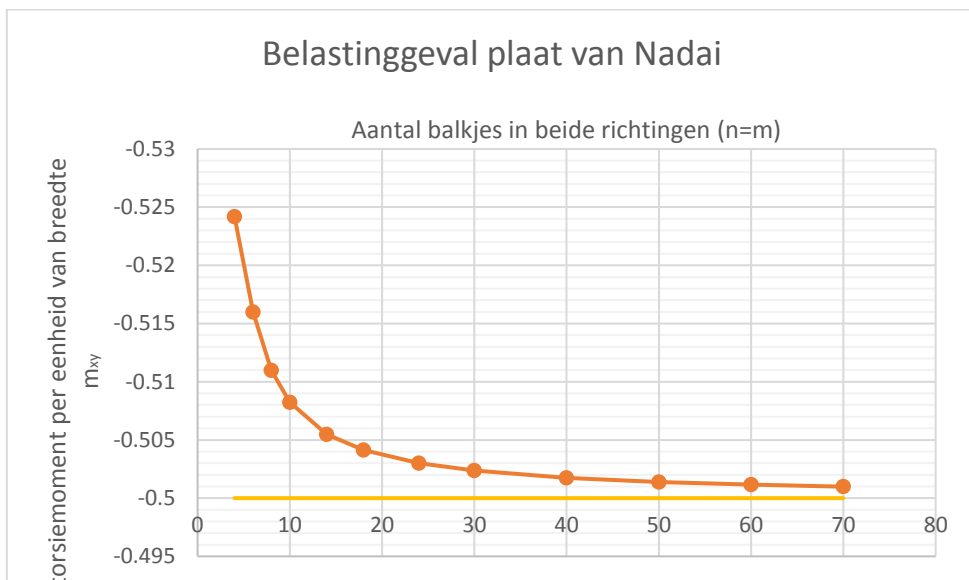
De zakking is maximaal onder de puntlast en gelijk aan:

$$w = \frac{Fl^2}{2D} = \frac{1 \cdot 5^2}{2 \cdot 26042} = 0.00048\text{m}$$





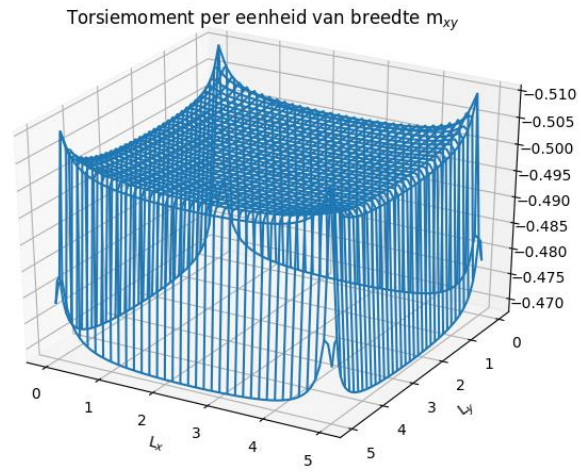
Figuur 66 - Convergentie van zakking bij belastinggeval plaat van Nadai



Figuur 67 - Convergentie wringend moment  $m_{xy}$  bij belastinggeval plaat van Nadai

De zakkingen komen zeer goed overeen met de theorie. De fout in de zakking bij  $n=70$  bedraagt 0.417% en de fout bij het wringend moment bedraagt 0.197%.

Voor het wringend moment dient wel opgemerkt te worden dat deze niet helemaal constant is over de plaat, maar op de randen afwijkt en bolt over de plaat. Dit is in onderstaande afbeelding te zien. De fouten die hierdoor geïntroduceerd worden zijn echter klein.



*Figuur 68 - 3D-plot wringend moment per eenheid van breedte  $m_{xy}$  voor plaat van Nadai*

## 5 Beschrijving model invloedslijnen

Er zijn invloedslijnen bepaald voor verplaatsingen en krachtsgrootheden. Dit is met een drietal modellen gedaan. Onderstaande tabel toont de eigenschappen van elk van deze modellen. De rekenduur is gebaseerd op een model van 40 x 80 balken.

Tabel 8 – Vergelijking balkjesmodellen voor invloedslijnen

Model	Aantal iteraties	Rekenduur één iteratie	Totale rekenduur
Invloedslijnen verplaatsingen	1	30 s	30 s
Invloedslijnen krachtsgrootheden brute kracht	$(n+1) \times (m+1)$	30 s	1 uur
Invloedslijnen krachtsgrootheden dummybelasting	2 (buigende momenten en dwarskrachten) 4 (wringend momenten)	30 s	30 s – 2 min.
Invloedslijnen oplegreacties	1	30 s	30 s

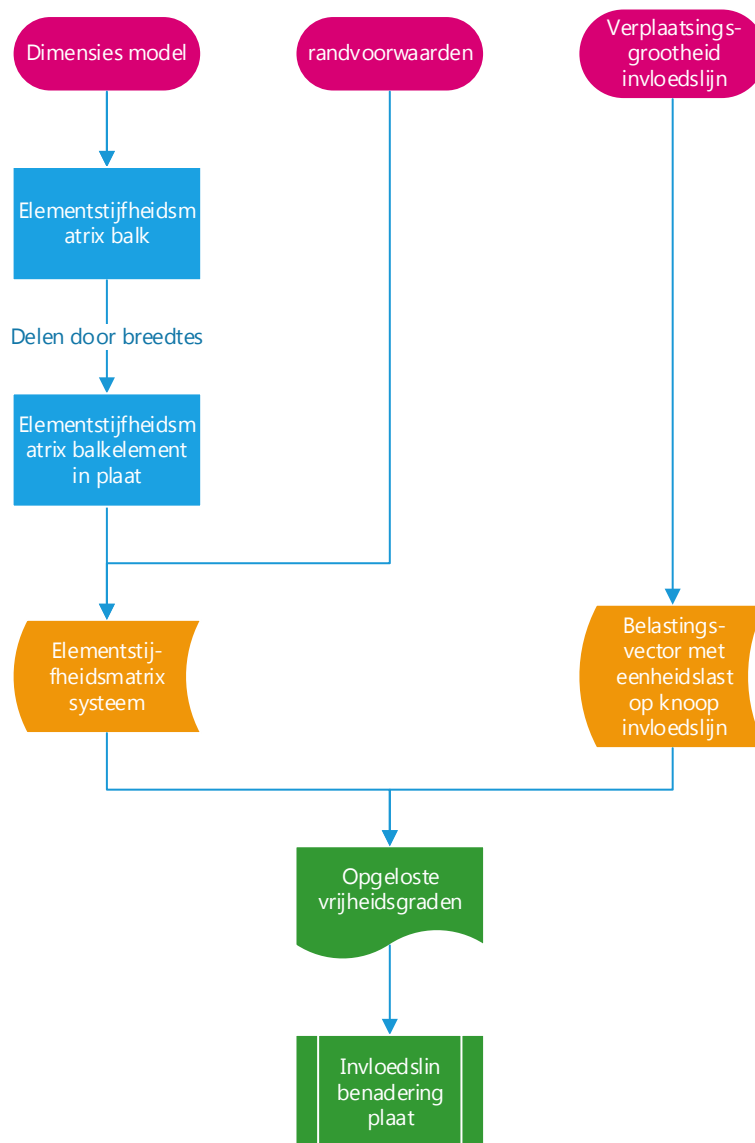
Het model invloedslijnen krachtsgrootheden brute kracht zou op dezelfde uitkomsten uit moeten komen als het model invloedslijnen krachtsgrootheden dummybelasting. Echter, heeft de brute kracht methode meer tijd nodig.

## 5.1 Invloedslijnen verplaatsingen

De invloedslijnen voor verplaatsingen zijn gemakkelijk te bepalen. Door de wederkerigheid van Maxwell geeft de zakkingslijn de invloedslijn van een zakking of hoekverdraaiing:

- Zakkingen
  - Plaats eenheidslast in beschouwde punt
  - Zakkingslijn is invloedslijn
- Hoekverdraaiingen
  - Plaats eenheidskoppel in beschouwde punt
  - Zakkingslijn is invloedslijn

Dit is in het huidige model gemakkelijk te implementeren door een eenheidslast of eenheidskoppel op de beschouwde knoop te plaatsen. Dit is een aanpassing van de belastingvector  $f$ . Door het basismodel eenmaal te laten lopen wordt de zakkingslijn en daarmee de invloedslijn bepaald.



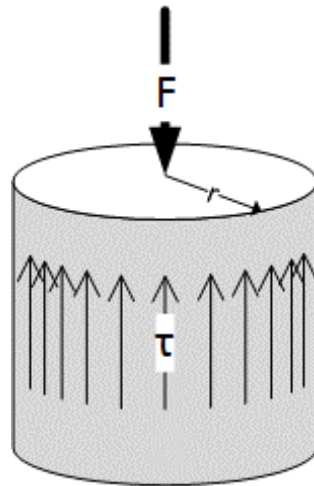
Figuur 69 - flowchart model invloedslijnen verplaatsingen

## 5.2 Interpretatie invloedslijnen

De invloedslijnen die voor platen zijn gegenereerd dienen op een andere manier geïnterpreteerd te worden dan de invloedslijnen voor balkjes. Bij invloedslijnen voor balken worden de resultaten niet beïnvloedt door het aantal elementen, bij platen is dit echter wel het geval.

De eenheidssprong in de zakkingen hoekverdraaiing is niet direct terug te zien in de resultaten. Rond het punt waarvan de invloedslijn is bepaald domineert een grote piek, waardoor de eenheidssprong niet zichtbaar is.

De piek in de oplossing ontstaat omdat in een plaat de snedekrachten oneindig groot worden wanneer een kleine snede wordt genomen. Dit is terug te zien in onderstaand afleiding voor een plaat, waarin een cirkeluitsnede wordt belast door een puntlast. Evenwicht wordt gevormd door de schuifkracht op de buitenomtrek.



*Figuur 70 – Cirkeluitsnede met straal  $r$  in plaat belasting met puntlast  $F$  en schuifkracht  $\tau$  op snedevlak met dikte  $h$*

Voor het verticaal evenwicht geldt:

$$F = h \cdot 2\pi r \cdot \tau \quad \text{Vergelijking 5-1}$$

In deze vergelijking geldt dat als  $r \rightarrow 0$ ,  $\tau \rightarrow \infty$ . Ditzelfde effect ontstaat in het balkjesmodel, wat de pieken rond verklaard in het punt waarvoor de invloedslijn bepaald is. De dwarskracht wordt rond dit punt explosief groter, dit beïnvloedt ook de resultaten voor de buigende momenten. De piek kan worden vermeden als in plaats van een puntlast op één punt, deze last wordt verdeeld over een groter oppervlakte.

Bovenstaande evenwicht geldt voor een plaat, echter treedt bij een balkjesmodel eenzelfde effect op, met een gelijk resultaat (Hambly, 1991, p. 63; O'Brien et al., 2014, p. 166).

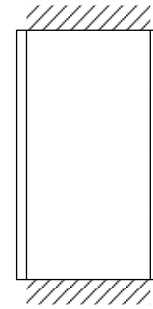
### 5.3 Voorbeeld uitvoer invloedslijnen verplaatsingen

Dit hoofdstuk toont voorbeelden van de uitvoer uit het basismodel. De resultaten worden kwalitatief beoordeeld.

Dit zal gedaan worden aan de hand van het voorbeeld van een plaat met twee ingeklemde randen en twee vrije randen. De invloedslijn wordt bepaald voor knoop 305. Deze knoop heeft coördinaten (2.5 , 3.5), dit punt is in de resultaten aangegeven met een rood kruisje.

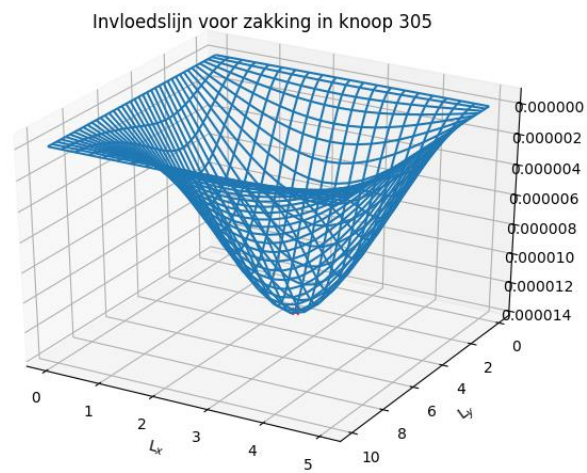
Tabel 9 - Eigenschappen voorbeeldplaat invloedslijnen verplaatsingen

$n$	20
$m$	40
$L_x$	5 m
$L_y$	10 m
$E$	20e6 N/m <sup>2</sup>
$q$	100 N/m <sup>2</sup>
$h$	0.25 m
$\nu$	0 (-)
Knoop	305
Knoop (x,y)	(2.5 , 3.5)

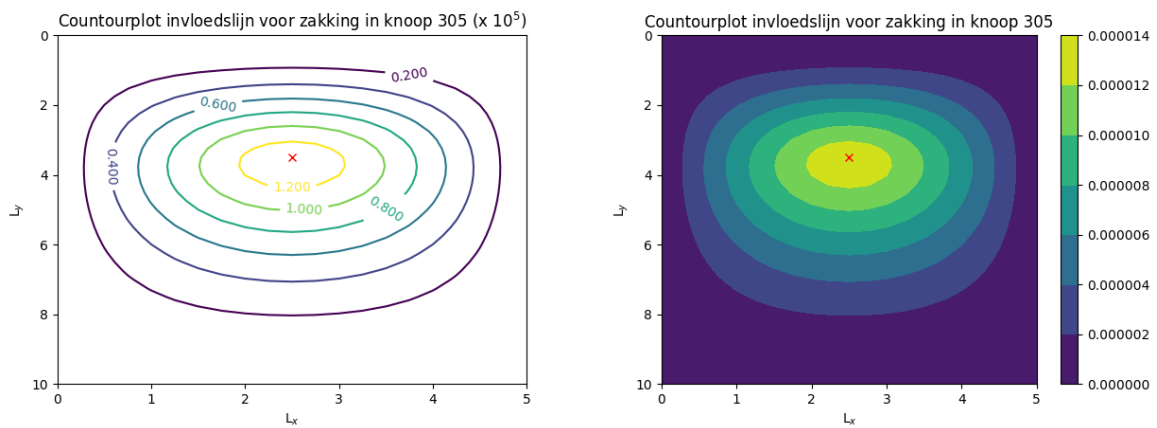


Figuur 71 - rechthoekige plaat, twee overstaande randen ingeklemd, twee randen scharnierend opgelegd

### 5.3.1 Invloedslijn zakking



Figuur 72 - 3D plot invloedslijn voor zakking

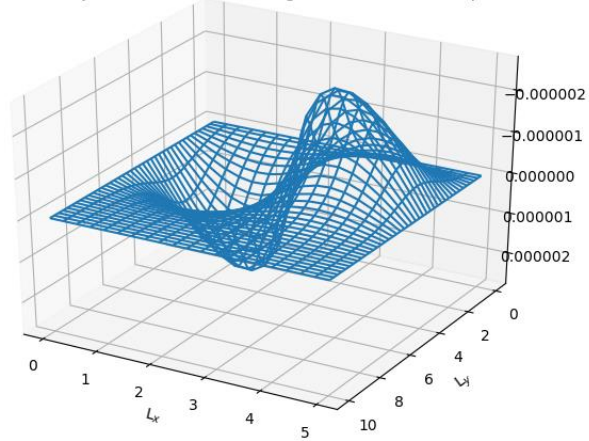


Figuur 73 - Contourplot invloedslijn voor zakking

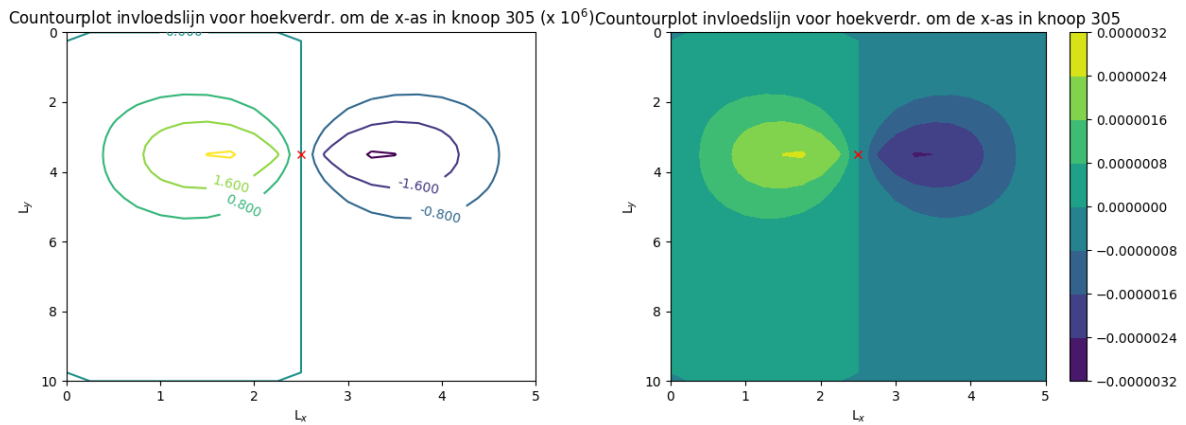
Bovenstaande afbeeldingen tonen de invloedslijnen voor zakking. De resultaten volgen het verwachte patroon.

### 5.3.2 Hoekverdraaiing om de x-as

Invloedslijn voor Hoekverdraaiing om de x-as in knoop 305



Figuur 74 - 3D plot invloedslijn voor hoekverdraaiing om de x-as



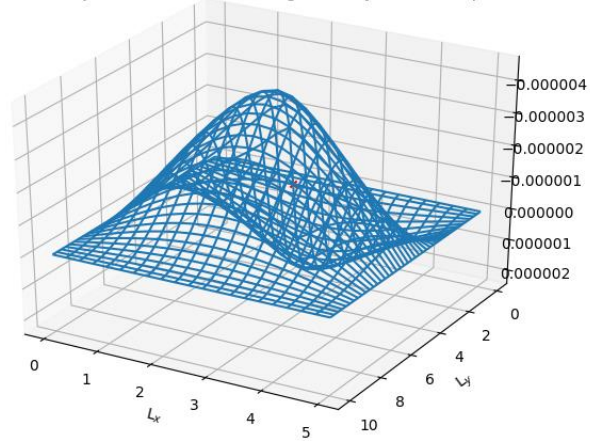
Figuur 75 - Contourplot invloedslijn voor hoekverdraaiing om de x-as

Bovenstaande afbeeldingen tonen de invloedslijnen voor hoekverdraaiing om de x-as. De resultaten volgen het verwachte patroon.

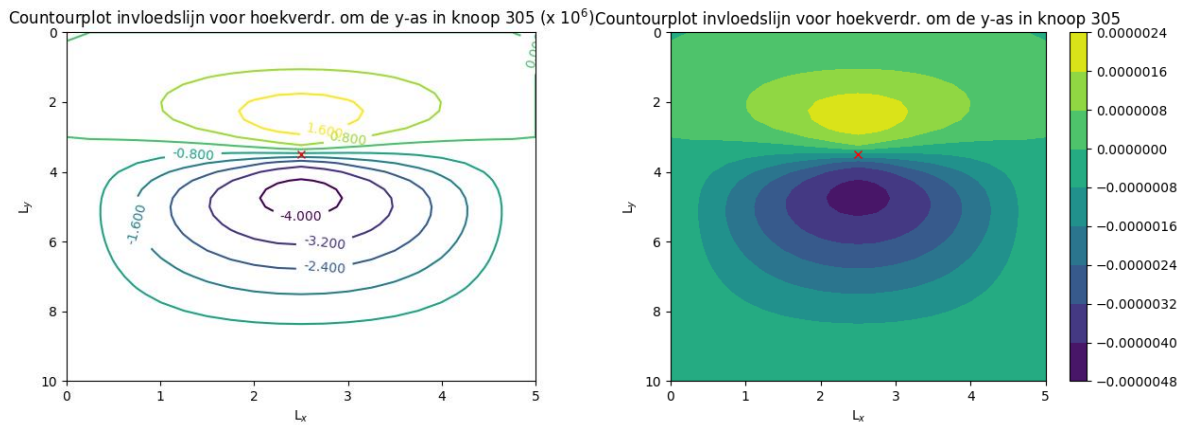


### 5.3.3 Hoekverdraaiing om de y-as

Invloedslijn voor Hoekverdraaiing om de y-as in knoop 305



Figuur 76 - 3D plot invloedslijn voor hoekverdraaiing om de y-as



Figuur 77 - contourplot invloedslijn voor hoekverdraaiing om de y-as

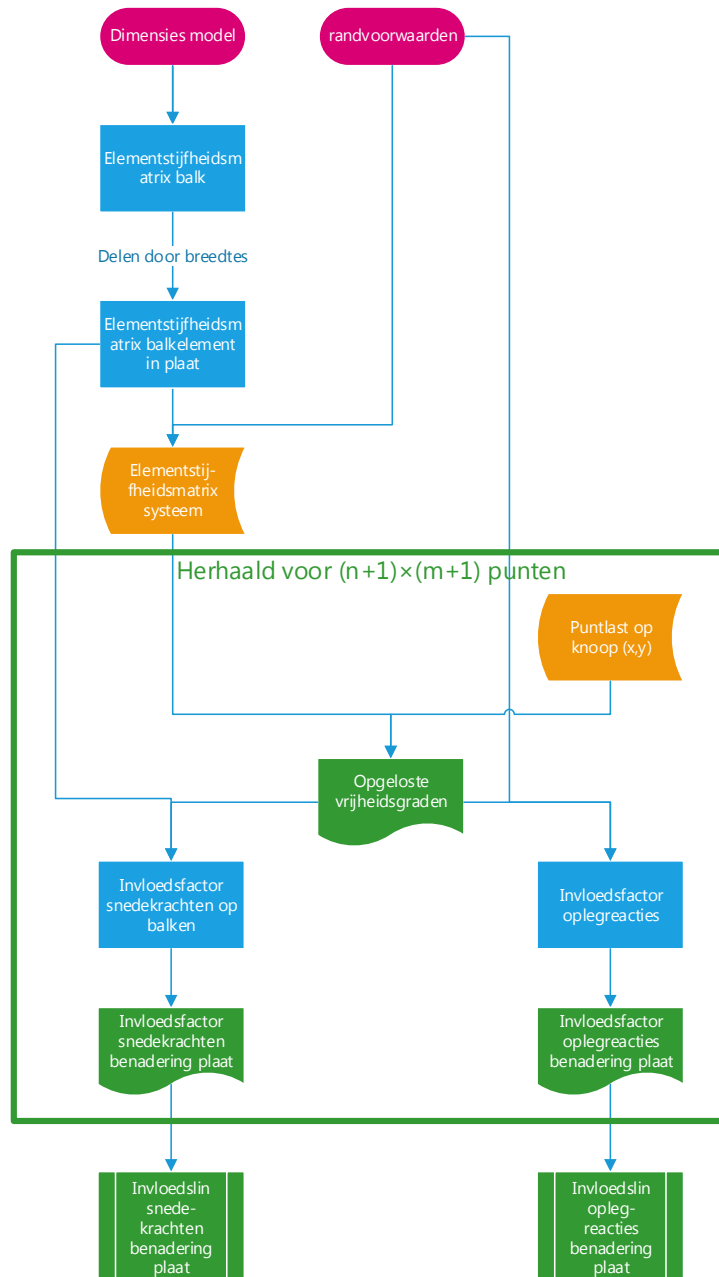
Bovenstaande afbeeldingen tonen de invloedslijnen voor hoekverdraaiing om de y-as. De resultaten volgen het verwachte patroon.

## 5.4 Invloedslijnen krachtsgrootheden - brute kracht

Met de brute kracht methode wordt er een eenheidskracht op een knoop gezet. Het basismodel geeft daarmee de waarde van de snedekracht waarvoor de invloedslijn moet worden bepaald. Bij de brute kracht methode wordt daarmee de verplaatsingsmatrix en de relevante snedekrachten even vaak uitgerekend als dat er knopen zijn. Dit proces kost veel tijd.

Met dezelfde toepassing geeft het basismodel ook de oplegreacties, waarmee de invloedslijn voor de oplegreacties kan worden bepaald.

Onderstaande flowchart laat globaal de stappen zien van het basismodel zien. De stappen in het blok worden herhaald voor alle knopen in de plaat.



Figuur 78 – Flowchart model invloedslijnen brute kracht

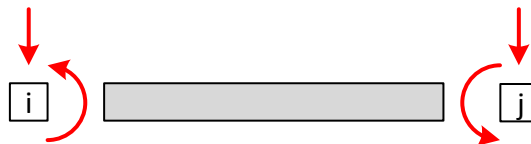
## 5.5 Invloedslijnen krachtsgrootheden – snelle route

Uitgangspunt van de snelle route tot een invloedslijn is dat er een virtuele eenheidsverplaatsing wordt aangebracht, waardoor de krachtsgrootheid waarvoor de invloedslijn moet worden bepaald negatieve arbeid verricht. Deze methode staat bij balken bekend als de methode van Müller-Breslau (Welleman, 2016).

Voor de bepaling van de invloedslijnen voor krachtsgrootheden moet dus een verplaatsingsgrootheid worden vrijgemaakt. Dit zal moeten gebeuren op het elementniveau. Hiermee wordt één krachtsgrootheid rondom een knoop bekeken, dus de verbindende dwarskracht tussen de knoop en één aansluitende balk. Op een uiteinde van een balkelement wordt de zakking, hoekverdraaiing om de x-as of hoekverdraaiing om de y-as vrijgemaakt. Dit zal per vrijheidsgraad worden afgeleid. Deze vrijheidsgraad kan op 2 manieren worden vrijgemaakt: met een dummybelasting of met een extra tussenknoop. Voor beide methodes geldt als uitgangspunt de volgende voorwaarde voor het vrijmaken van de zakking welke wordt ingevuld in de elementstijfheidsmatrix:

$$w_{z-x}(dx) = w^j - 1 \quad \text{Vergelijking 5-2}$$

Bij de methode van dummybelasting wordt de factor 1 naar de belastingkant van de de elementstijfheidsmatrix gehaald. Dit zorgt voor een dummy belasting op de knopen die zo groot is, dat dat de eenheidsverplaatsing wordt geforceerd.



Figuur 79 – Methode dummybelasting met aangebracht dummy krachten en momenten op knopen i en j

Bij de methode van een extra knoop wordt de elementstijfheidsmatrix geschreven in termen van de nieuwe knoop  $w_{z-x}(dx)$ , met de extra voorwaarde in de vorm van vergelijking 5-2.

Deze knoop bevindt zich vlak naast de originele knoop. Alle verplaatsingen zijn voor deze knopen gelijk, behalve de verplaatsingen waarvoor de eenheidsverplaatsing is aangebracht.



Figuur 80 - Methode extra knoop met introductie extra knoop j en eenheidsverplaatsing  $\delta w$  knopen i en j

Beide methodes zijn voor het bepalen van de invloedslijn voor dwarskracht uitgewerkt. Beide methodes geven dezelfde resultaten, echter is gekozen voor het gebruik van de methode dummybelasting omdat deze makkelijker te implementeren is in het basismodel. Deze methode is voor de dwarskracht in x-richting volledig uitgewerkt en voor de andere krachtsgrootheden verkort weergeven in de volgende hoofdstukken.

Met de twee genoemde methodes kan de invloedslijn worden gemaakt van het balkjesmodel. Voor de invloedslijn van een plaat wordt een soortgelijke exercitie gedaan als bij de het basismodel. Het proces wordt herhaald voor het uiteinde van de opvolgende balk. Middeling van beide zakkingsvelden geeft de gezochte invloedslijn voor een plaat. Ook worden de krachtsgrootheden verdeeld over de breedte van het balkje. Er wordt op dezelfde manier gemiddelde als de krachtsgrootheden werden gemiddeld in het basismodel, zie hoofdstuk 3.1.1. Voor de dwarskrachten en buigende momenten moeten de methodes daarmee tweemaal worden herhaald, voor het wringend moment moet deze viermaal worden herhaald. Hieronder is de vergelijking van deze middeling voor het basismodel en het model voor de invloedslijnen getoond.

Middeling momentenlijn

$$m_{y-x} = \frac{T_y^i + T_y^j}{2dy}$$

Middeling invloedslijn

$$m_{y-x}^{invl} = \frac{w_z^- + w_z^+}{2dy}$$

### 5.5.1 Invloedslijn dwarskracht

Voor de bepaling van de invloedslijn voor dwarskrachten zal de zakking moeten worden vrijgemaakt. Hiervoor wordt direct naast de knoop een eenheidsverplaatsing geïntroduceerd.

De eenheidsverplaatsing die wordt aangebracht is als volgt gedefinieerd:

$$\delta w = 1 \quad \text{Vergelijking 5-3}$$

Er wordt negatieve arbeid verricht als geldt:

$$w^j = w_{z-x}^{j-}(dx) + \delta w \quad \text{Vergelijking 5-4}$$

De zakking direct links van de knoop is dan dus gelijk aan:

$$w_{z-x}^{j-}(dx) = w^j - 1 \quad \text{Vergelijking 5-5}$$

Voor het element i voor de knoop geldt dan:

$$\begin{aligned} w_{z-x}(0) &= w^i & \text{Vergelijking 5-6} \\ \varphi_{y-x}(0) &= \varphi_y^i \\ \varphi_{x-x}(0) &= \varphi_x^i \\ w_{z-x}(dx) &= w^j - 1 \\ \varphi_{y-x}(dx) &= \varphi_y^j \\ \varphi_{x-x}(dx) &= \varphi_x^j \end{aligned}$$

Bij de methode dummybelasting worden deze waarden ingevuld in de vergelijkingen voor de elementstijfheidsmatrix:

$$\begin{aligned}
 F_z^i &= -V_{z-x}(0) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} (12w^i - 6dx\phi_y^i - 12(w^j - 1) - 6dx\phi_y^j) & \text{Vergelijking 5-7} \\
 T_y^i &= -M_{y-x}(0) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} (-6w^i + 4dx\phi_y^i + 6(w^j - 1) + 2dx\phi_y^j) \\
 T_x^i &= -M_{x-x} = \frac{GI_{w-x}}{dx} (\phi_x^i - \phi_x^j) \\
 F_z^j &= V_{z-x}(dx) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} (-12w^i + 6dx\phi_y^i + 12(w^j - 1) + 6dx\phi_y^j) \\
 T_y^j &= M_{y-x}(dx) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} (-6w^i + 2dx\phi_y^i + 6(w^j - 1) + 4dx\phi_y^j) \\
 T_x^j &= M_{x-x} = \frac{GI_{w-x}}{dx} (-\phi_x^i + \phi_x^j)
 \end{aligned}$$

Dit wordt geschreven in termen van de originele stijfheidstermen en een aparte factor

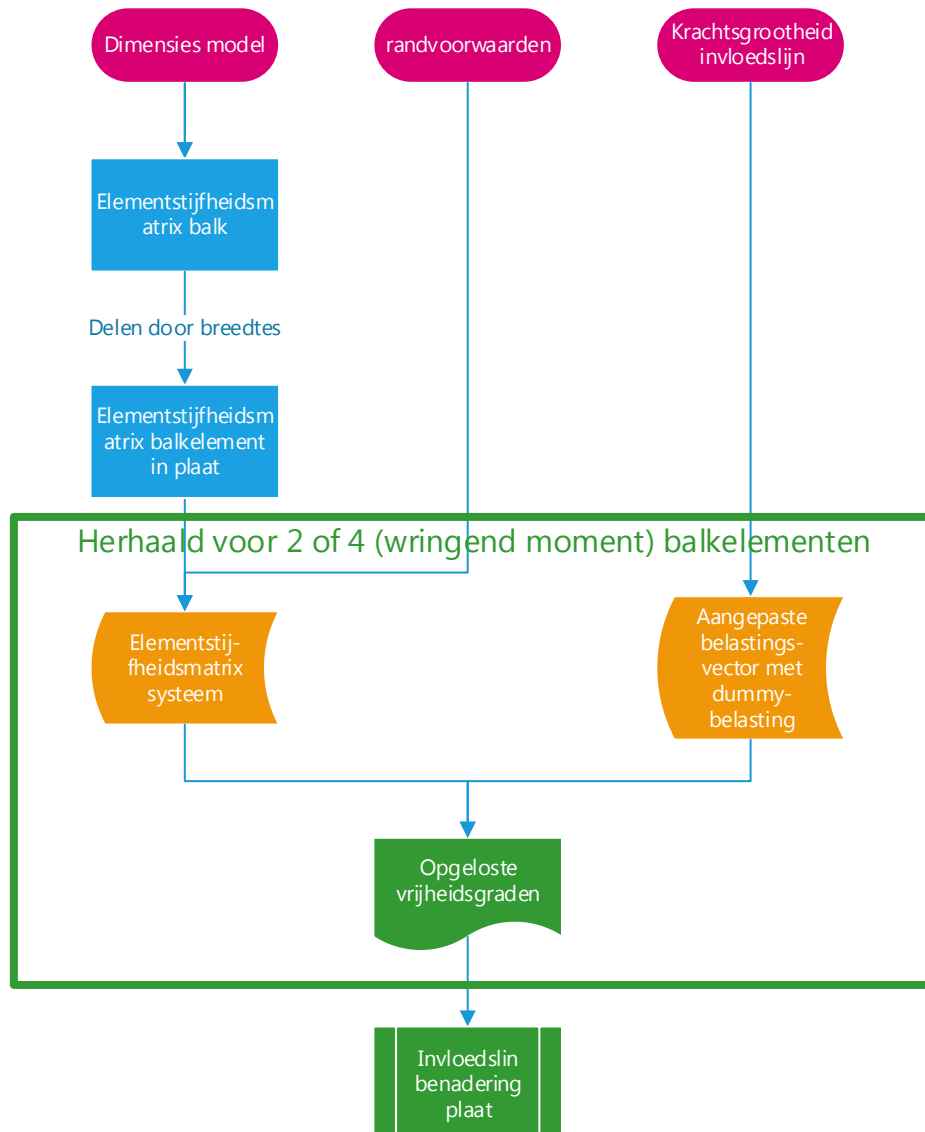
$$\begin{aligned}
 F_z^i &= -V_{z-x}(0) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} (12w^i - 6dx\phi_y^i - 12w^j - 6dx\phi_y^j) + 12 \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} & \text{Vergelijking 5-8} \\
 T_y^i &= -M_{y-x}(0) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} (-6w^i + 4dx\phi_y^i + 6w^j + 2dx\phi_y^j) - 6 \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} \\
 T_x^i &= -M_{x-x} = \frac{GI_{w-x}}{dx} (\phi_x^i - \phi_x^j) \\
 F_z^j &= V_{z-x}(dx) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} (-12w^i + 6dx\phi_y^i + 12w^j + 6dx\phi_y^j) - 12 \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} \\
 T_y^j &= M_{y-x}(dx) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} (-6w^i + 2dx\phi_y^i + 6w^j + 4dx\phi_y^j) - 6 \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} \\
 T_x^j &= M_{x-x} = \frac{GI_{w-x}}{dx} (-\phi_x^i + \phi_x^j)
 \end{aligned}$$

In matrixvorm is dit geschreven als:

$$\mathbf{K}_{\text{elem-x}} \cdot \begin{bmatrix} w^i \\ \phi_y^i \\ \phi_x^i \\ w^j \\ \phi_y^j \\ \phi_x^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z^i \\ T_y^i \\ T_x^i \\ F_z^j \\ T_y^j \\ T_x^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} \\ 6 \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} \\ 0 \\ 12 \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} \\ 6 \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Vergelijking 5-9}$$

Met  $\mathbf{K}_{\text{elem-x}}$  de al bekende stijfheidsmatrix.

Onderstaande flowchart laat globaal de stappen zien van het model voor invloedslijnen aan de hand van de methode dummybelasting.



*Figuur 81 – flowchart model invloedslijnen methode dummybelasting*

Bij de methode extra knoop worden de vergelijkingen voor de elementstijfheid geschreven in termen van een extra knoop.

Dit geeft:

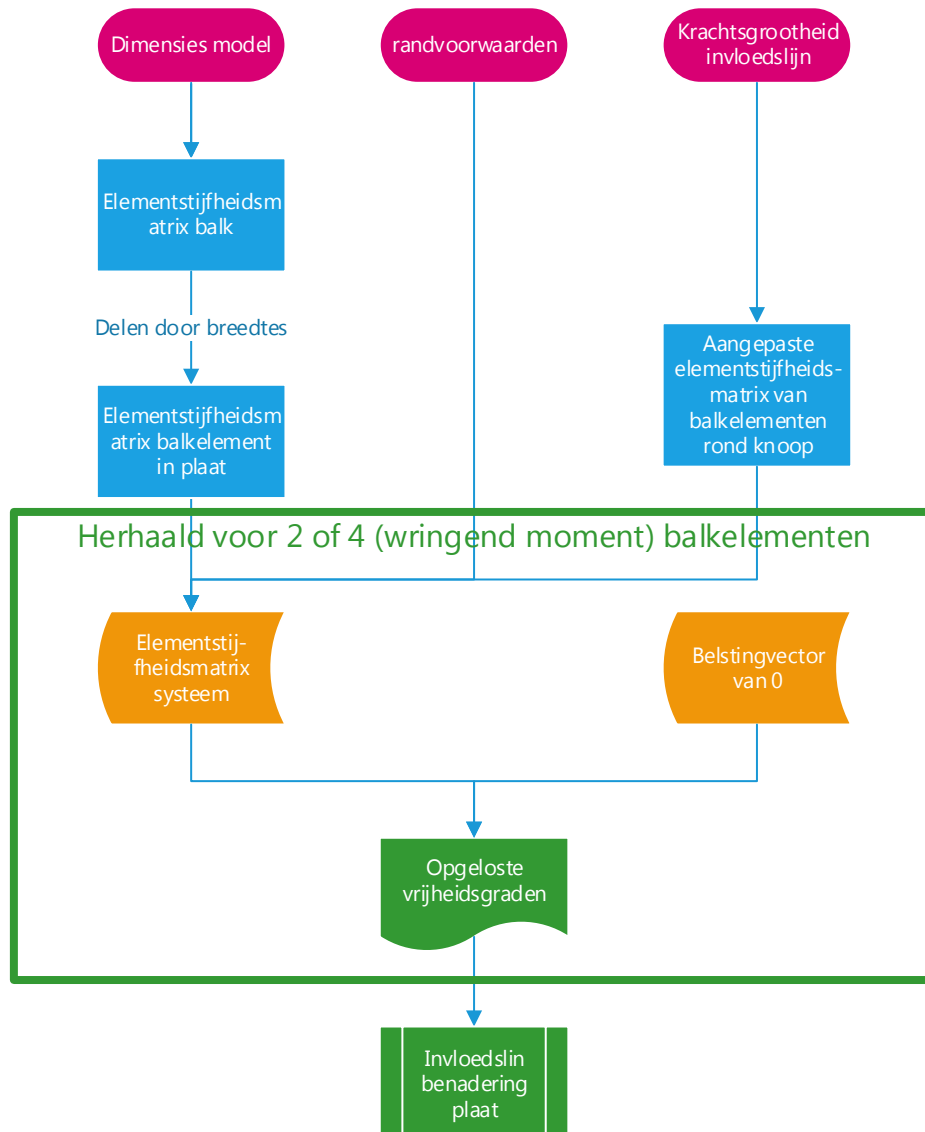
$$\begin{aligned}
 F_z^i &= -V_{z-x}(0) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} (12w^i - 6dx\phi_y^i - 12w_{z-x}^{j-}(dx) - 6dx\phi_y^j) && \text{Vergelijking 5-10} \\
 T_y^i &= -M_{y-x}(0) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} (-6w^i + 4dx\phi_y^i + 6w_{z-x}^{j-}(dx) + 2dx\phi_y^j) \\
 T_x^i &= -M_{x-x} = \frac{GI_{w-x}}{dx} (\phi_x^i - \phi_x^j) \\
 F_z^j &= V_{z-x}(dx) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} (-12w^i + 6dx\phi_y^i + 12w_{z-x}^{j-}(dx) + 6dx\phi_y^j) \\
 T_y^j &= M_{y-x}(dx) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} (-6w^i + 2dx\phi_y^i + 6w_{z-x}^{j-}(dx) + 4dx\phi_y^j) \\
 T_x^j &= M_{x-x} = \frac{GI_{w-x}}{dx} (-\phi_x^i + \phi_x^j) \\
 w^j - w_{z-x}^{j-}(dx) &= 1
 \end{aligned}$$

In matrixvorm is dit geschreven als:

Vergelijking 5-11

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c}
 \frac{12EI_{zz-x}}{dx^3} & -\frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & 0 & 0 & -\frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & 0 & -\frac{12EI_{zz-x}}{dx^3} \\
 -\frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & \frac{4EI_{zz-x}}{dx} & 0 & 0 & \frac{2EI_{zz-x}}{dx} & 0 & \frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} \\
 0 & 0 & \frac{GI_{w-x}}{dx} & 0 & 0 & -\frac{GI_{w-x}}{dx} & 0 \\
 -\frac{12EI_{zz-x}}{dx^3} & \frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & 0 & 0 & \frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & 0 & \frac{12EI_{zz-x}}{dx^3} \\
 -\frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} & \frac{2EI_{zz-x}}{dx} & 0 & 0 & \frac{4EI_{zz-x}}{dx} & 0 & \frac{6EI_{zz-x}}{dx^2} \\
 0 & 0 & -\frac{GI_{w-x}}{dx} & 0 & 0 & \frac{GI_{w-x}}{dx} & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1
 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} w^i \\ \phi_y^i \\ \phi_x^i \\ w^j \\ \phi_y^j \\ \phi_x^j \\ \hline w_{z-x}^{j-}(dx) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z^i \\ T_y^i \\ T_x^i \\ F_z^j \\ T_y^j \\ T_x^j \\ \hline 1 \end{bmatrix}$$

Onderstaande flowchart laat globaal de stappen zien van het model voor invloedslijnen aan de hand van de methode dummybelasting.



*Figuur 82 - flowchart model voor invloedslijnen volgens methode extra knoop*

Omdat de methode dummy kracht makkelijker te implementeren is, is voor toepassing van deze methode gekozen.



Voor het element direct na de knoop geldt dat er negatieve arbeid wordt verricht als geldt:

$$w^j = w_{z-x}^{j+}(dx) - \delta w \quad \text{Vergelijking 5-12}$$

De zakking direct rechts van de knoop is dan dus gelijk aan:

$$w_{z-x}^{j+}(dx) = w^i + 1 \quad \text{Vergelijking 5-13}$$

Voor het element i voor de knoop geldt dan:

$$\begin{aligned} w_{z-x}(0) &= w^i + 1 & \text{Vergelijking 5-14} \\ \varphi_{y-x}(0) &= \varphi_y^i \\ \varphi_{x-x}(0) &= \varphi_x^i \\ w_{z-x}(dx) &= w^j \\ \varphi_{y-x}(dx) &= \varphi_y^j \\ \varphi_{x-x}(dx) &= \varphi_x^j \end{aligned}$$

Dit geeft:

$$\begin{aligned} F_z^i &= -V_{z-x}(0) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} (12(w^i + 1) - 6dx\varphi_y^i - 12w^j - 6dx\varphi_y^j) & \text{Vergelijking 5-15} \\ T_y^i &= -M_{y-x}(0) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} (-6(w^i + 1) + 4dx\varphi_y^i + 6w^j + 2dx\varphi_y^j) \\ T_x^i &= -M_{x-x} = \frac{GI_{w-x}}{dx} (\varphi_x^i - \varphi_x^j) \\ F_z^j &= V_{z-x}(dx) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} (-12(w^i + 1) + 6dx\varphi_y^i + 12w^j + 6dx\varphi_y^j) \\ T_y^j &= M_{y-x}(dx) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} (-6(w^i + 1) + 2dx\varphi_y^i + 6w^j + 4dx\varphi_y^j) \\ T_x^j &= M_{x-x} = \frac{GI_{w-x}}{dx} (-\varphi_x^i + \varphi_x^j) \end{aligned}$$

Dit wordt geschreven in termen van de originele stijfheidstermen en een aparte factor

$$\begin{aligned} F_z^i &= -V_{z-x}(0) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} (12w^i - 6dx\varphi_y^i - 12w^j - 6dx\varphi_y^j) + 12 \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} & \text{Vergelijking 5-16} \\ T_y^i &= -M_{y-x}(0) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} (-6w^i + 4dx\varphi_y^i + 6w^j + 2dx\varphi_y^j) - 6 \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} \\ T_x^i &= -M_{x-x} = \frac{GI_{w-x}}{dx} (\varphi_x^i - \varphi_x^j) \\ F_z^j &= V_{z-x}(dx) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} (-12w^i + 6dx\varphi_y^i + 12w^j + 6dx\varphi_y^j) - 12 \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} \\ T_y^j &= M_{y-x}(dx) = \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} (-6w^i + 2dx\varphi_y^i + 6w^j + 4dx\varphi_y^j) - 6 \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} \\ T_x^j &= M_{x-x} = \frac{GI_{w-x}}{dx} (-\varphi_x^i + \varphi_x^j) \end{aligned}$$

In matrixvorm is dit geschreven als:

$$\mathbf{K}_{\text{elem-x}} \cdot \begin{bmatrix} w^i \\ \varphi_y^i \\ \varphi_x^i \\ w^j \\ \varphi_y^j \\ \varphi_x^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z^i \\ T_y^i \\ T_x^i \\ F_z^j \\ T_y^j \\ T_x^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} \\ 6 \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} \\ 0 \\ 12 \frac{EI_{zz-x}}{dx^3} \\ 6 \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Vergelijking 5-17}$$

Met  $K_{\text{elem-x}}$  de al bekende stijfheidsmatrix. Oplossen van deze vergelijking geeft het zakkingsveld  $w_z^+$

De invloedslijn wordt gegeven door het gemiddelde van de zakkingsvelden:

$$v_{z-x}^{\text{invl}} = \frac{w_z^- + w_z^+}{2dy} \quad \text{Vergelijking 5-18}$$

Voor de elementen in y-richtingen moet de volgende matrixvergelijkingen worden opgelost.

Een aangepaste belastingvector voor de elementen voor en na de beschouwde knoop. Voor het element voor de knoop geldt:

$$\mathbf{K}_{\text{elem-y}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w}^k \\ \varphi_y^k \\ \varphi_x^k \\ \mathbf{w}^l \\ \varphi_y^l \\ \varphi_x^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_z^k \\ \mathbf{T}_y^k \\ \mathbf{T}_x^k \\ \mathbf{F}_z^l \\ \mathbf{T}_y^l \\ \mathbf{T}_x^l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \frac{EI_{zz-y}}{dy^3} \\ 0 \\ 6 \frac{EI_{zz-y}}{dy^2} \\ 12 \frac{EI_{zz-y}}{dy^3} \\ 0 \\ 6 \frac{EI_{zz-y}}{dy^2} \end{bmatrix} \quad \text{Vergelijking 5-19}$$

Voor het element na de knoop geldt:

$$\mathbf{K}_{\text{elem-y}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w}^k \\ \varphi_y^k \\ \varphi_x^k \\ \mathbf{w}^l \\ \varphi_y^l \\ \varphi_x^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_z^k \\ \mathbf{T}_y^k \\ \mathbf{T}_x^k \\ \mathbf{F}_z^l \\ \mathbf{T}_y^l \\ \mathbf{T}_x^l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \frac{EI_{zz-y}}{dy^3} \\ 0 \\ 6 \frac{EI_{zz-y}}{dy^2} \\ 12 \frac{EI_{zz-y}}{dy^3} \\ 0 \\ 6 \frac{EI_{zz-y}}{dy^2} \end{bmatrix} \quad \text{Vergelijking 5-20}$$

Deze elementstijfheidsmatrices worden geassembleerd in de systeemmatrix, waarna de volgende vergelijking kan worden opgelost:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{systeem}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{aangepast}} \end{bmatrix} \quad \text{Vergelijking 5-21}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{systeem}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{aangepast}} \end{bmatrix}$$

Waaruit volgt:

$$\mathbf{v}_{z-y}^{\text{invl}} = \frac{\mathbf{w}_z^- + \mathbf{w}_z^+}{2dx} \quad \text{Vergelijking 5-22}$$

### 5.5.2 Invloedslijn buigend moment

Met een soortgelijke afleiding als voor de dwarskracht, volgt voor het buigend moment de volgende vergelijkingen. Voor het balkelement voor de knoop:

$$\mathbf{K}_{\text{elem-x}} \cdot \begin{bmatrix} w^i \\ \varphi_y^i \\ \varphi_x^i \\ w^j \\ \varphi_y^j \\ \varphi_x^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z^i \\ T_y^i \\ T_x^i \\ F_z^j \\ T_y^j \\ T_x^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} \\ 2 \frac{EI_{zz-x}}{dx} \\ 0 \\ 6 \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} \\ 4 \frac{EI_{zz-x}}{dx} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Vergelijking 5-23}$$

Voor het element na de knoop geldt:

$$\mathbf{K}_{\text{elem-x}} \cdot \begin{bmatrix} w^i \\ \varphi_y^i \\ \varphi_x^i \\ w^j \\ \varphi_y^j \\ \varphi_x^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z^i \\ T_y^i \\ T_x^i \\ F_z^j \\ T_y^j \\ T_x^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} \\ -4 \frac{EI_{zz-x}}{dx} \\ 0 \\ -6 \frac{EI_{zz-x}}{dx^2} \\ -2 \frac{EI_{zz-x}}{dx} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Vergelijking 5-24}$$

Deze elementstijfheidsmatrices worden geassembleerd in de systeemmatrix, waarna de volgende vergelijking kan worden opgelost:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{systeem}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{aangepast}} \end{bmatrix} \quad \text{Vergelijking 5-25}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{systeem}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{aangepast}} \end{bmatrix}$$

Waaruit volgt:

$$m_{y-x}^{invl} = \frac{w_z^- + w_z^+}{2dy} \quad \text{Vergelijking 5-26}$$

Voor de elementen in y-richtingen moet de volgende matrixvergelijkingen worden opgelost.  
 Voor het element voor de knoop geldt:

$$\mathbf{K}_{\text{elem-y}} \cdot \begin{bmatrix} w^k \\ \phi_y^k \\ \phi_x^k \\ w^l \\ \phi_y^l \\ \phi_x^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z^k \\ T_y^k \\ T_x^k \\ F_z^l \\ T_y^l \\ T_x^l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \frac{EI_{zz-y}}{dy^2} \\ 0 \\ 2 \frac{EI_{zz-y}}{dy} \\ 6 \frac{EI_{zz-y}}{dy^2} \\ 0 \\ 4 \frac{EI_{zz-y}}{dy} \end{bmatrix} \quad \text{Vergelijking 5-27}$$

Voor het element na de knoop geldt:

$$\mathbf{K}_{\text{elem-y}} \cdot \begin{bmatrix} w^k \\ \phi_y^k \\ \phi_x^k \\ w^l \\ \phi_y^l \\ \phi_x^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z^k \\ T_y^k \\ T_x^k \\ F_z^l \\ T_y^l \\ T_x^l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \frac{EI_{zz-y}}{dy^2} \\ 0 \\ -4 \frac{EI_{zz-y}}{dy} \\ -6 \frac{EI_{zz-y}}{dy^2} \\ 0 \\ -2 \frac{EI_{zz-y}}{dy} \end{bmatrix} \quad \text{Vergelijking 5-28}$$

Deze elementstijfheidsmatrices worden geassembleerd in de systeemmatrix, waarna de volgende vergelijking kan worden opgelost:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{systeem}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{aangepast}} \end{bmatrix} \quad \text{Vergelijking 5-29}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{systeem}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{aangepast}} \end{bmatrix}$$

Waaruit volgt:

$$\mathbf{m}_{x-y}^{\text{invl}} = \frac{w_z^- + w_z^+}{2dx} \quad \text{Vergelijking 5-30}$$

### 5.5.3 Invloedslijn wringend moment

Voor de bepaling van de invloedslijn voor wringend momenten zal de hoekverdraaiing om de x-as moeten worden vrijgemaakt voor de balkjes in x-richting en voor de balkjes in y-richting de hoekverdraaiing om de y-as. Dit geeft voor de balkjes in x-richting, voor de knoop:

$$\mathbf{K}_{\text{elem-x}} \cdot \begin{bmatrix} w^i \\ \phi_y^i \\ \phi_x^i \\ w^j \\ \phi_y^j \\ \phi_x^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z^i \\ T_y^i \\ T_x^i \\ F_z^j \\ T_y^j \\ T_x^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{GI_{w-x}}{dx} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{GI_{w-x}}{dx} \end{bmatrix} \quad \text{Vergelijking 5-31}$$

En voor het element na de knoop geldt:

$$\mathbf{K}_{\text{elem-x}} \cdot \begin{bmatrix} w^i \\ \phi_y^i \\ \phi_x^i \\ w^j \\ \phi_y^j \\ \phi_x^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z^i \\ T_y^i \\ T_x^i \\ F_z^j \\ T_y^j \\ T_x^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{GI_{w-x}}{dx} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{GI_{w-x}}{dx} \end{bmatrix} \quad \text{Vergelijking 5-32}$$

Voor de balkelementen in y-richting gelden de volgende aangepaste belastingvectoren.

$$\mathbf{K}_{\text{elem-y}} \cdot \begin{bmatrix} w^k \\ \phi_y^k \\ \phi_x^k \\ w^l \\ \phi_y^l \\ \phi_x^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z^k \\ T_y^k \\ T_x^k \\ F_z^l \\ T_y^l \\ T_x^l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{GI_{w-y}}{dy} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{GI_{w-y}}{dy} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Vergelijking 5-33}$$

Voor het element na de knoop geldt:

$$\text{Vergelijking 5-34}$$

$$\mathbf{K}_{\text{elem-y}} \cdot \begin{bmatrix} w^k \\ \varphi_y^k \\ \varphi_x^k \\ w^l \\ \varphi_y^l \\ \varphi_x^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_z^k \\ T_y^k \\ T_x^k \\ F_z^l \\ T_y^l \\ T_x^l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{GI_{w-y}}{dy} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{GI_{w-y}}{dy} \\ 0 \end{bmatrix}$$

De invloedslijn wordt vervolgens gegeven door de som van de gemiddelde van de zakkingslijnen in x- en y-richting, deze volgt uit de volgende vergelijking:

$$m_{xy}^{invl} = \frac{w_x^- + w_x^+}{4dy} + \frac{w_y^- + w_y^+}{4dx}$$

*Vergelijking 5-35*

### 5.5.4 Invloedslijn oplegreacties

Om de invloedslijn van de oplegreacties te bepalen moet er net als bij de snedekrachten een virtuele eenheidsverplaatsing worden aangebracht, waardoor de oplegreactie waarvoor de invloedslijn moet worden bepaald negatieve arbeid verricht. In tegenstelling tot de snedekrachten werkt de kracht enkel op de knoop, waarmee de rekenprocedure versimpelt. De eenheidsverplaatsing wordt direct op de knoop geplaatst. Er geldt dan:

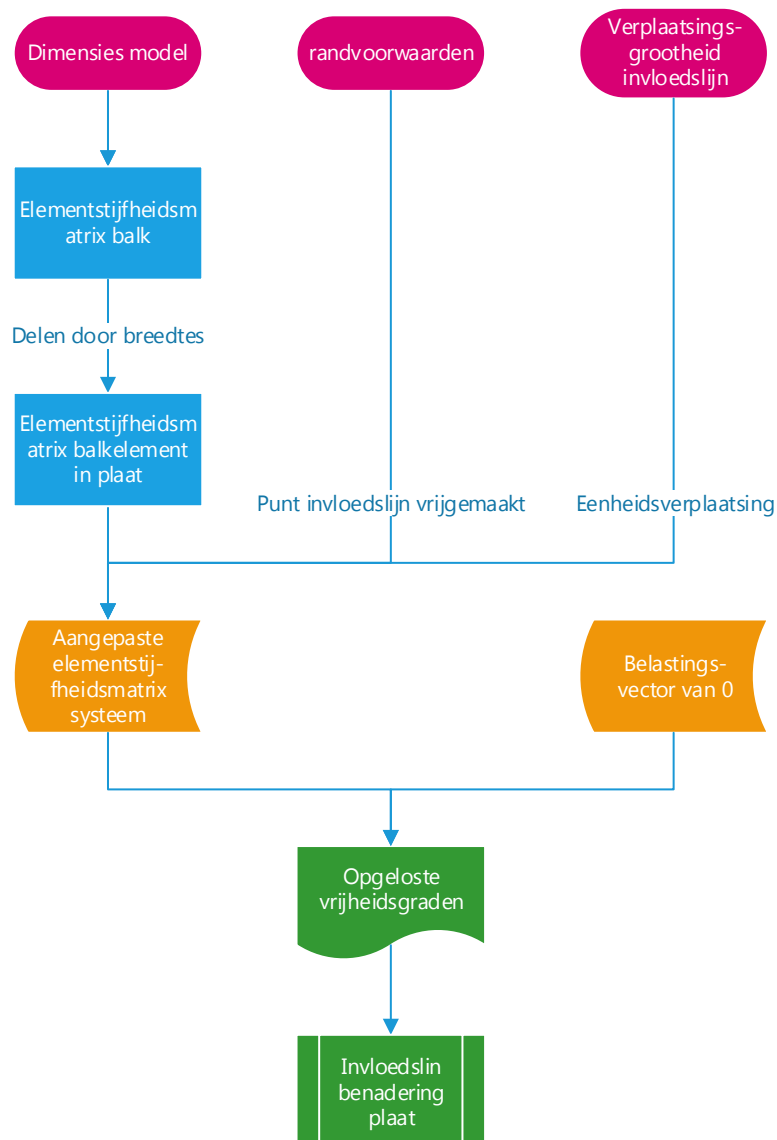
$$w_z^i = -1$$

$$\varphi_y^i = -1$$

$$\varphi_x^i = -1$$

Vergelijking 5-36

Onderstaande flowchart laat globaal de stappen zien van het model voor invloedslijnen van oplegreacties:



Figuur 83 - flowchart model invloedslijnen voor oplegreacties



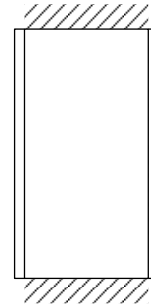
## 5.6 Voorbeeld uitvoer invloedslijnen krachtsgrootheden

Dit hoofdstuk toont voorbeelden van de uitvoer. De plaatjes zijn gemaakt met het brute-kracht model, maar komen overeen met het model met een dummybelasting. Dat de resultaten van deze methodes volledig overeen komen zal in hoofdstuk 6.4.3 worden aangetoond. De resultaten worden kwalitatief beoordeeld.

Dit zal gedaan worden aan de hand van het voorbeeld van een plaat met twee ingeklemde randen en twee vrije randen. De invloedslijn wordt bepaald voor knoop 305, dit punt is in de resultaten aangegeven met een rood kruisje.

Tabel 10 – Eigenschappen voorbeeldplaat invloedslijnen krachtsgrootheden

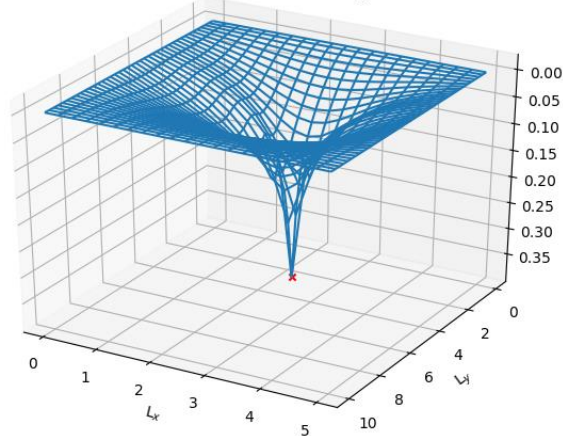
$n$	20
$m$	40
$L_x$	5 m
$L_y$	10 m
$E$	$20e6 \text{ N/m}^2$
$q$	$100 \text{ N/m}^2$
$h$	0.25 m
$\nu$	0 (-)
Knoop	305
Knoop (x,y)	(2.5, 3.5)



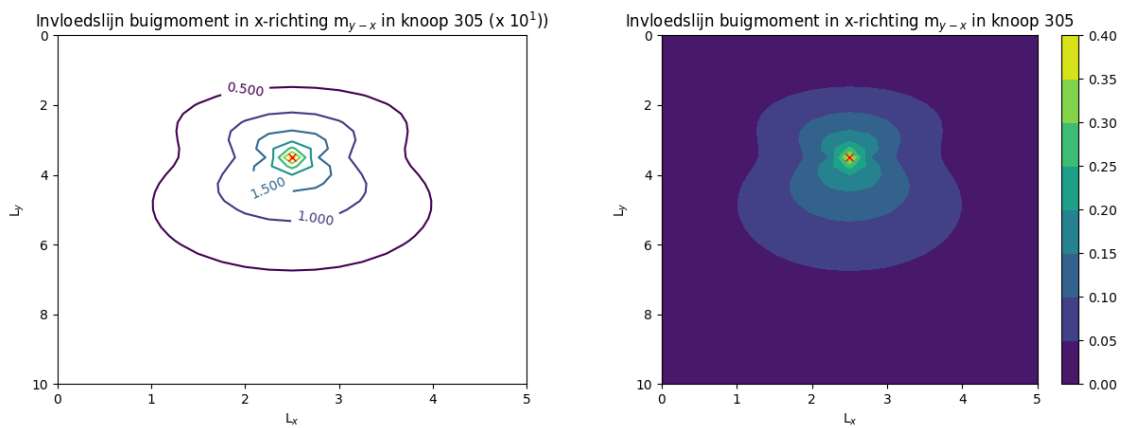
Figuur 84 - rechthoekige plaat, twee overstaande randen ingeklemd, twee randen scharnierend opgelegd

## 5.6.1 Invloedslijn buigmoment in x-richting

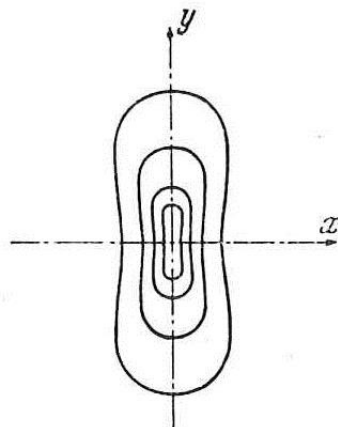
Invloedslijn buigmoment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 305



Figuur 85 - 3D-plot invloedslijn buigmoment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 305 volgens brute kracht methode



Figuur 86 - contourplot invloedslijn buigmoment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 305 volgens brute kracht methode

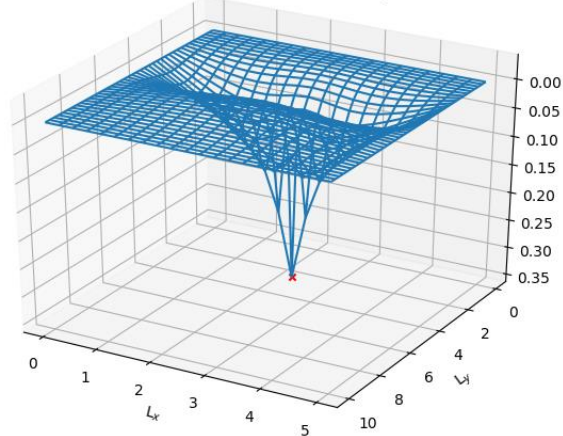


Figuur 87 - Typisch patroon contourplot invloedslijn buigmoment  $m_x$  (Pucher & Juhl, 1964, p. 7)

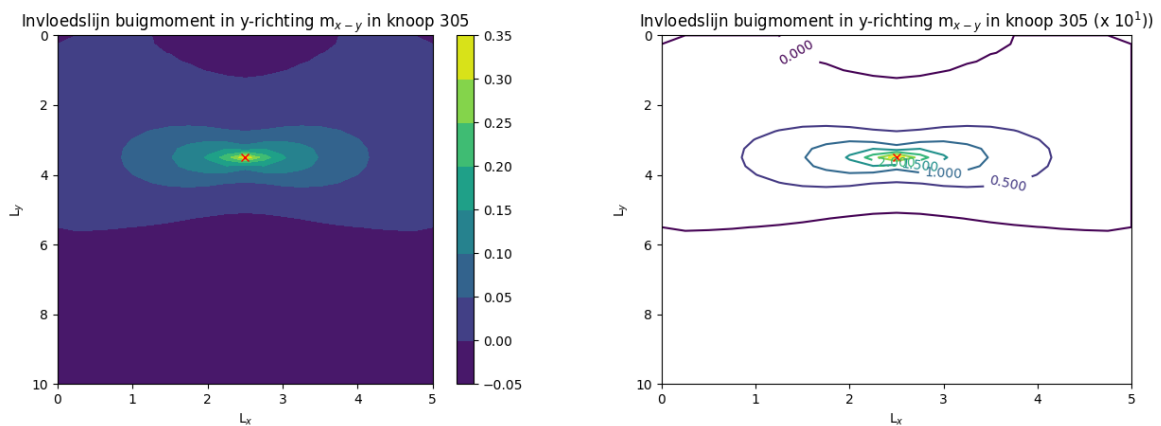
Opvallend is de piek op de plaat van de beschouwde knoop. De vorm komt wel overeen met de typische vorm van een invloedslijn uit de literatuur.

## 5.6.2 Invloedslijn buigmoment in y-richting

Invloedslijn buigmoment in y-richting  $m_{x-y}$  in knoop 305



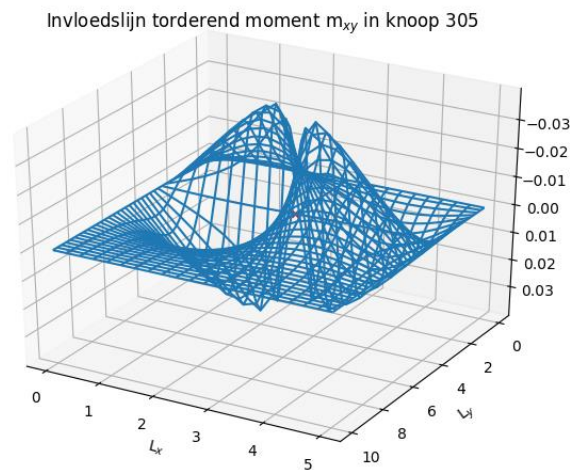
Figuur 88 - 3D-plot invloedslijn buigmoment in y-richting  $m_{x-y}$  in knoop 305 volgens brute kracht methode



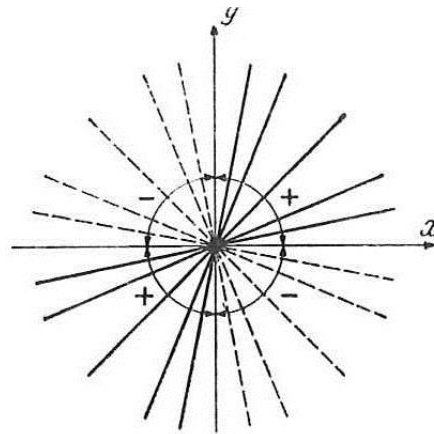
Figuur 89 - contourplot invloedslijn buigmoment in y-richting  $m_{x-y}$  in knoop 305 volgens brute kracht methode

Ook hier is duidelijk een piek te zien. Daarnaast wordt het buigmoment ook negatief rond  $L_y=8\text{m}$ . Er is sprake van 'opbolling'. Ook deze plot komt overeen met de plot voor  $m_x$  uit de literatuur, maar dan  $90^\circ$  gedraaid.

### 5.6.3 Invloedslijn wringend moment



Figuur 90 - 3D-plot invloedslijn wringend moment  $m_{xy}$  in knoop 305 volgens brute kracht methode

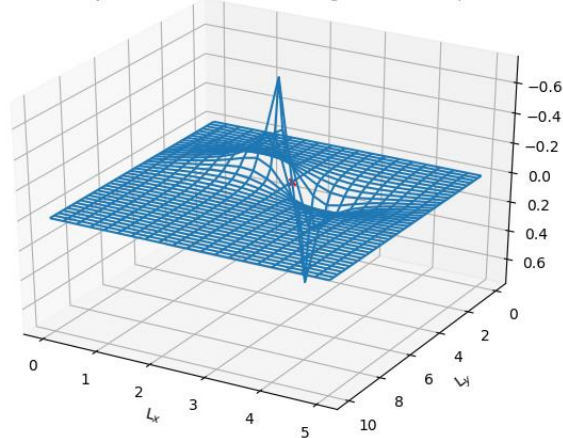


Figuur 91 - Typisch patroon contourplot invloedslijn wringend moment  $m_{xy}$  (Pucher & Juhl, 1964, p. 7)

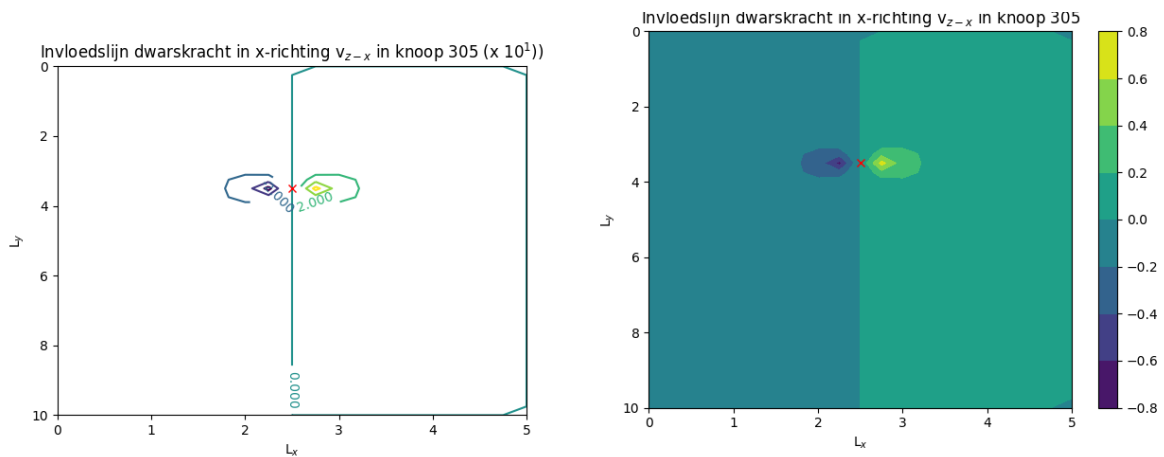
Waar de buigende momenten juist een piek lieten zien op de beschouwde knoop, laat de plot van de invloedslijnen juist een nulpunt zien op de beschouwde knoop. Er ontstaan zowel negatieve als positieve pieken diagonaal naast de beschouwde knoop. De resultaten komen ook overeen met de typische invloedslijnen zoals die in de literatuur worden beschreven.

## 5.6.4 Invloedslijn dwarskracht in x-richting

Invloedslijn dwarskracht in x-richting  $v_{z-x}$  in knoop 305



Figuur 92 - 3D-plot invloedslijn dwarskracht in x-richting  $v_{z-x}$  in knoop 305 volgens brute kracht methode

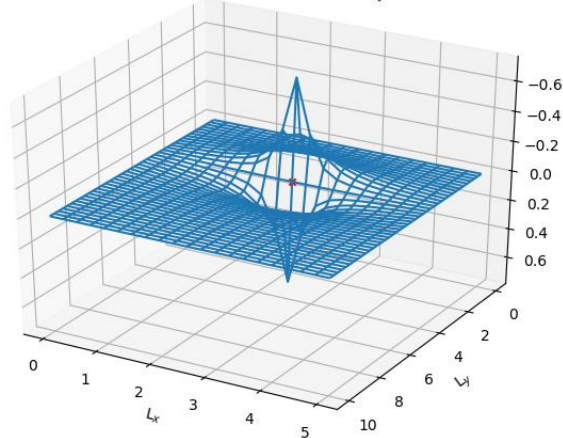


Figuur 93 - Contourplot invloedslijn dwarskracht in x-richting  $v_{z-x}$  in knoop 305 volgens brute kracht methode

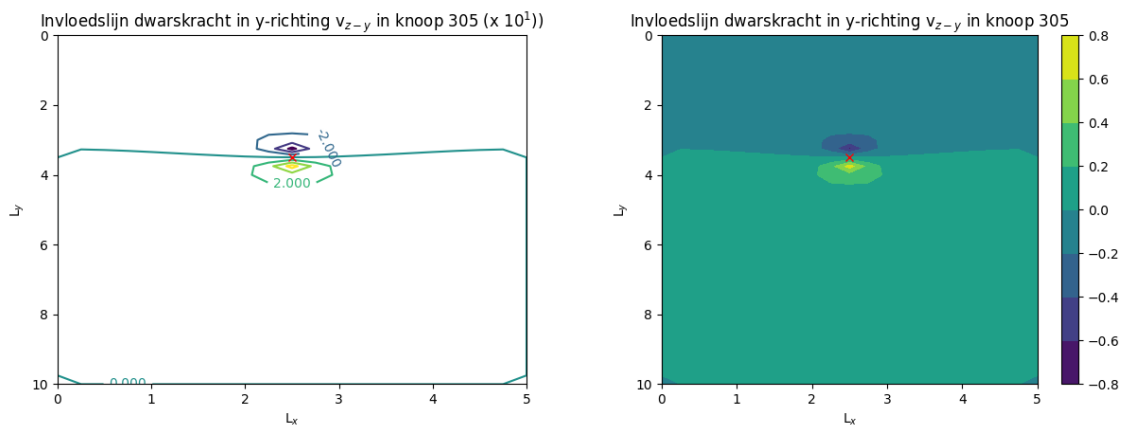
De oplossing toont een sprong zoals ook in de invloedslijnen voor balken te zien is. Ook is te zien dat alleen belastingen in de x-richting van knoop 305 een grote invloed hebben op de dwarskracht in x-richting in de knoop.

## 5.6.5 Invloedslijn dwarskracht in y-richting

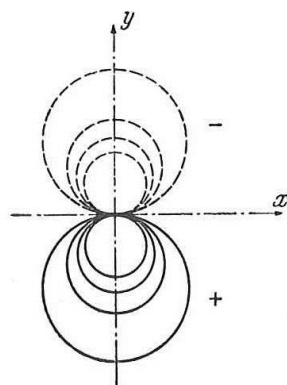
Invloedslijn dwarskracht in y-richting  $v_{z-y}$  in knoop 305



Figuur 94 - 3D-plot invloedslijn dwarskracht in y-richting  $v_{z-y}$  in knoop 305 volgens brute kracht methode



Figuur 95 - Contourplot invloedslijn dwarskracht in y-richting  $v_{z-y}$  in knoop 305 volgens brute kracht methode



Figuur 96 - Typisch patroon contourplot invloedslijn dwarskracht in y-richting  $v_y$  (Pucher & Juhl, 1964, p. 7)

Ook deze oplossing toont een sprong zoals ook in de invloedslijnen voor balken te zien is. Ook is te zien dat alleen belastingen in de y-richting van knoop 305 een grote invloed hebben op de dwarskracht in y-richting in de knoop. Ook deze plot komt overeen met de plot voor  $v_y$  uit de literatuur.

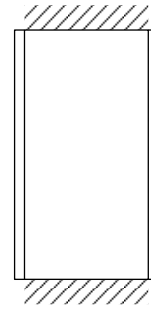
### 5.6.6 Invloedslijn inklemmingsmoment

Voor de oplegreacties worden de resultaten bekeken voor een punt aan de rand van de plaat.

Tabel 11 – Eigenschappen voorbeeldplaat invloedslijnen krachsgrootheden

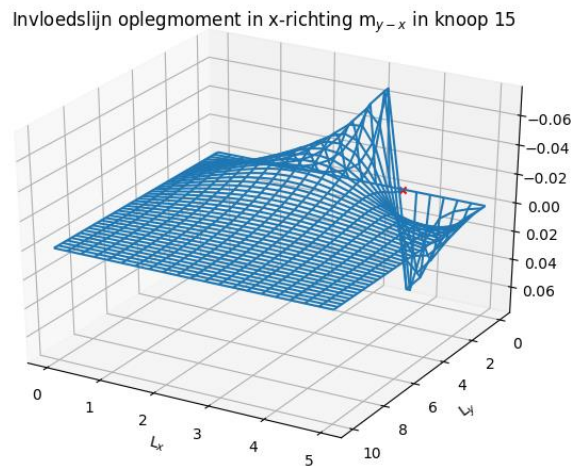
$n$	20
$m$	40
$L_x$	5 m
$L_y$	10 m
$E$	20e6 N/m <sup>2</sup>
$q$	100 N/m <sup>2</sup>
$h$	0.25 m
$\nu$	0 (-)
Knoop	315
Knoop (x,y)	(3.5, 0)

...

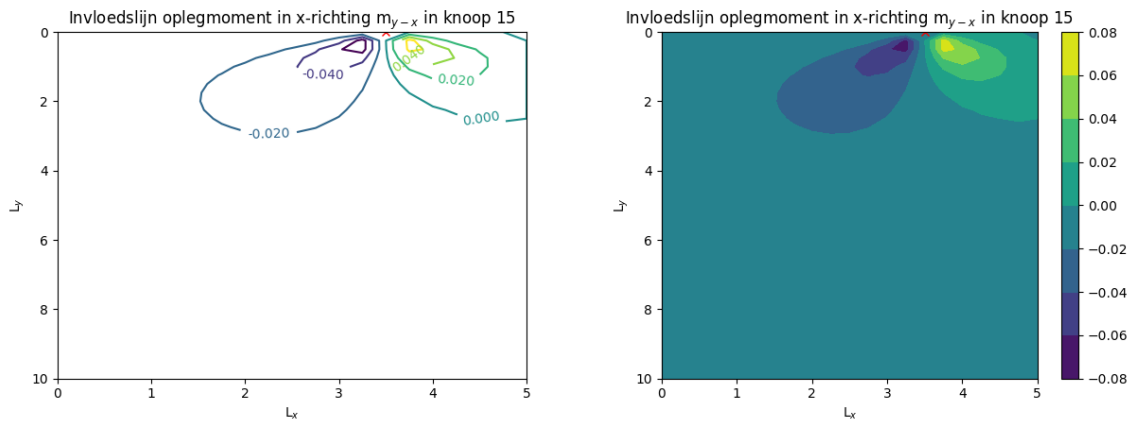


Figuur 97 - rechthoekige plaat, twee overstaande randen ingeklemd, twee randen scharnierend opgelegd

### 5.6.6.1 Inklemmingsmoment in x-richting



Figuur 98 - 3D-plot invloedslin inklemmingsmoment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 15 volgens brute kracht methode

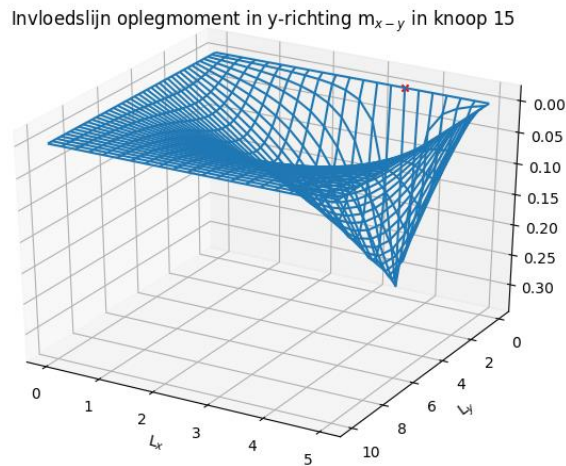


Figuur 99 – Contourplot invloedslin inklemmingsmoment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 15 volgens brute kracht methode

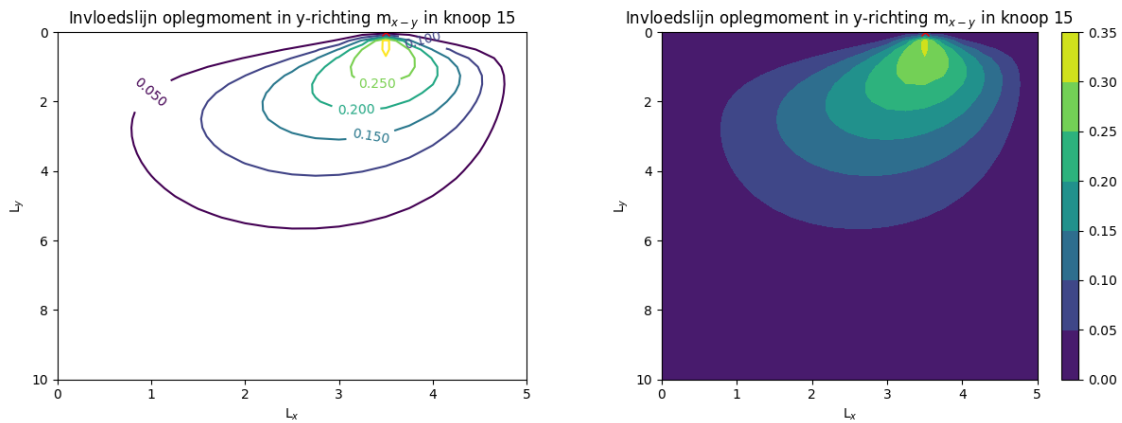
Het inklemmingsmoment in x-richting zou op de rand gelijk moeten zijn aan 0. Maar in hoofdstuk 3.8.6 was al opgemerkt dat het plaatmodel op deze rand kleine waarden geeft. Hoewel het model dus wel waarden geeft, moet er rekening worden gehouden met de interpretaties van een plaat. Daarmee kan direct worden bepaald dat het inklemmingsmoment dwars op de inklemming gelijk is aan 0 voor een plaat met een Poisson's ratio van 0. De waarden die in deze plots zijn weergegeven zijn klein vergeleken met de andere krachsgrootheden en kunnen voor een plaat dus worden verwaarloosd.



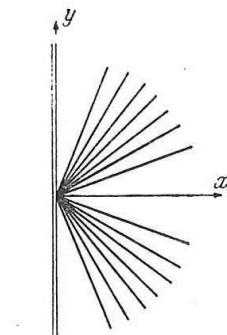
### 5.6.6.2 Inklemmingsmoment in y-richting



Figuur 100 - 3D-plot invloedslijn inklemmingsmoment in y-richting  $m_{x-y}$  in knoop 15 volgens brute kracht methode



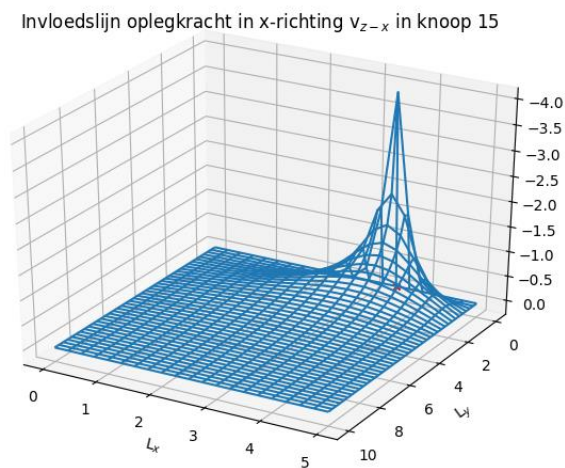
Figuur 101 – Contourplot invloedslijn inklemmingsmoment in y-richting  $m_{x-y}$  in knoop 15 volgens brute kracht methode



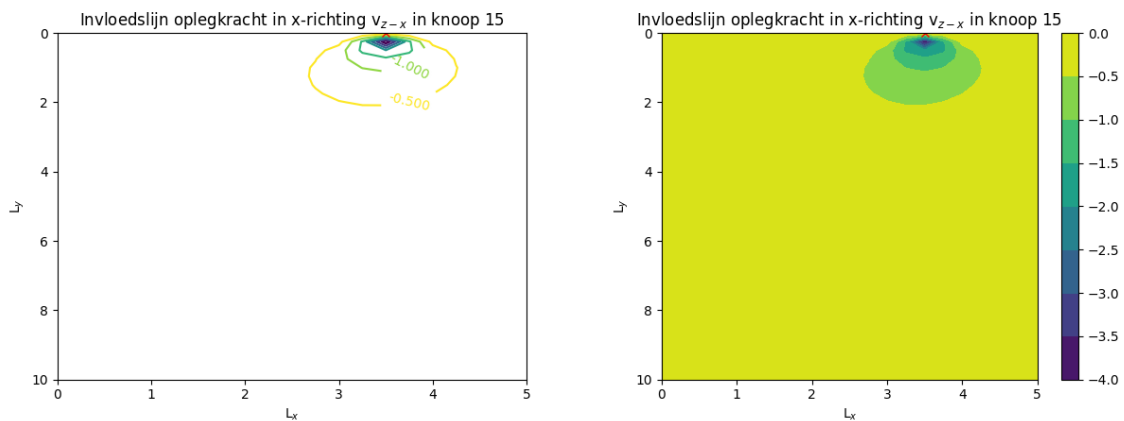
Figuur 102 - Typisch patroon invloedslijn inklemmingsmoment  $m_{xx}$  (Pucher & Juhl, 1964, p. 7)

Het inklemmingsmoment in x-richting klopt in tegenstelling tot het inklemmingsmoment in y-richting wel. Het patroon klopt met wat er in de literatuur wordt gevonden en er is hier geen sprake van verstoringen door de manier van modellering.

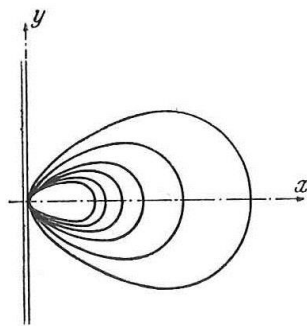
## 5.6.7 Invloedslijn oplegkracht



Figuur 103 - 3D-plot invloedslijn oplegkracht in knoop 15 volgens brute kracht methode



Figuur 104 - Contourplot invloedslijn oplegkracht in knoop 15 volgens brute kracht methode



Figuur 105 - Typisch patroon invloedslijn oplegkracht (Pucher & Juhl, 1964, p. 7)

De invloedslijn voor de oplegkracht geeft een geldig patroon weer. De sprong op de rand is gelijk aan  $\frac{1}{dy}$ , niet gelijk aan 1 zoals voor balken geldt.

## 6 Toetsing model invloedslijnen

De vier balkjesmodellen van invloedslijnen worden getoetst aan de hand van twee andere modellen waarmee invloedslijnen kunnen worden bepaald. De eigenschappen van de balkjesmodellen en deze modellen uit de literatuur zijn in onderstaande schema weergegeven.

*Tabel 12 – Eigenschappen balkjesmodel en modellen uit literatuur voor invloedslijnen.*

<b>Model</b>	<b>Grootheden invloedslijnen</b>	<b>Vorm uitkomst</b>
Balkjesmodel invloedslijnen verplaatsingen	Zakking Hoekverdraaiingen	Matrix tot 80×80
Balkjesmodel invloedslijnen krachtsgrootheden brute kracht	Buigende momenten Wringend momenten Dwarskrachten Oplegreacties	Matrix tot 40×40
Balkjesmodel invloedslijnen krachtsgrootheden dummy-belasting	Buigende momenten Wringend momenten Dwarskrachten	Matrix tot 80×80
Balkjesmodel invloedslijnen oplegreacties	Oplegreacties	Matrix tot 80×80
Bareš & Massonnet benaderingsformules	Zakking Buigende momenten	Matrix 9×9
Pucher	Buigende momenten Wringend momenten Dwarskrachten Oplegreacties	Contourplot

## 6.1 Bareš & Massonnet

De oplossingen van Bareš & Massonnet volgen uit een oplossingen met een goniometrische benadering van het plaatmodel.

De volgende vergelijkingen zijn opgesteld voor de invloedsvlakken (Bareš & Massonnet, 1968, p. 162). Voor doorbuiging geldt:

$$w(x, y) = \frac{2L_x^3}{L_y E I_x \pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} K_{m(y)} \frac{1}{m^4} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_p}{L_x}\right) \quad \text{Vergelijking 6-1}$$

Buigend moment  $m_{xx}$ :

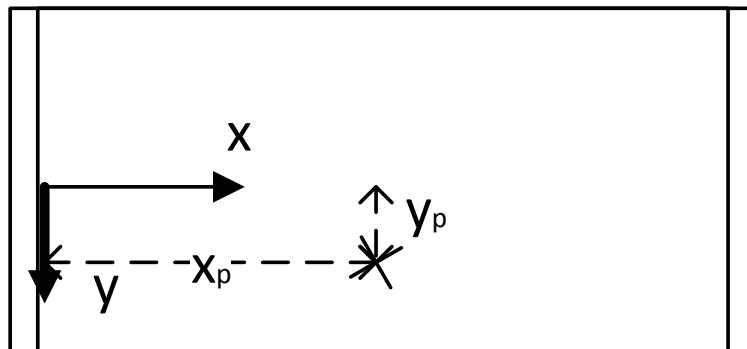
$$m_{xx}(x, y) = \frac{2L_x}{L_y \pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} K_{m(y)} \frac{1}{m^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_p}{L_x}\right) \quad \text{Vergelijking 6-2}$$

Buigend moment  $m_{yy}$ :

$$m_{yy}(x, y) = \frac{L_y}{L_x} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{m(y)} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{m\pi x_p}{L_x}\right) \quad \text{Vergelijking 6-3}$$

Waarbij voor  $m$  minimaal 3 termen mee moeten worden meegenomen.

Hiervoor geldt het volgende assenstelsel:



Figuur 106 - Assenstelsel oplossing Bareš & Massonnet

Er zijn interpolatie-formules opgesteld door Sattler voor de waarden van K (Sattler, 1955).

$$K_{\alpha} = K_0 + (K_1 - K_0)\alpha^{0.05} \quad (0 < \theta \leq 0.1) \quad \text{Vergelijking 6-4}$$

$$K_{\alpha} = K_0 + (K_1 - K_0)\alpha^{\left(1 - e^{-\frac{0.065 - \theta}{0.663}}\right)} \quad (0.1 < \theta \leq 1.0)$$

$$K_{\alpha} = K_0 + (K_1 - K_0)\sqrt{\alpha} \quad (\theta > 1.0)$$

De waarden van K kunnen worden opgezocht in tabellen. Hierbij wordt gebruikt gemaakt van het volgende theoreem (Bareš & Massonnet, 1968, p. 331):

*“The effect of the m-th term  $p_m \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$  of the series for a given loading  $p(x)$  upon a system whose lateral stiffness is  $\theta$  is equivalent to the effect of the first term  $p_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$  of the same series upon a system with lateral stiffness  $m\theta$ .”*

Met dit theorema kunnen gemakkelijk waarden worden gevonden door de berekening te herhalen voor veelvouden van  $\theta$ .

Met deze tabellen zijn succesvol de invloedslijnen voor zakking en buigende momenten in hoofdrichting bepaald. Soortgelijke benaderingsformules voor de buigende momenten in dwarsrichting geven waarden met een grotere foutmarges. Voor de andere krachtsgrootheden zijn geen benaderingsformules beschikbaar.

## 6.2 Pucher

Door Pucher zijn een groot aantal voorbeelden gegeven van invloedsvlakken in de vorm van contourplotten (Pucher & Juhl, 1964, p. 7).

De oplossingen van Pucher berusten op een aantal aannames:

- De plaat heeft een constante dikte, welke klein is vergeleken met de andere dimensies
- De plaat is van een homogeen en isotroop materiaal dat voldoet aan de wet van Hooke.
- Er is sprake van kleine verplaatsingen vergeleken met dikte.
- Poisson's ratio is gelijk aan 0

Al deze aannames zijn ook geldig voor het huidige balkjesmodel.

Deze methode geeft voor de buigende momenten en dwarskrachten tot in oneindig oplopende waarden voor de invloedslijnen. Eenzelfde effect is zichtbaar in de invloedslijnen opgesteld vanuit het balkjesmodel.

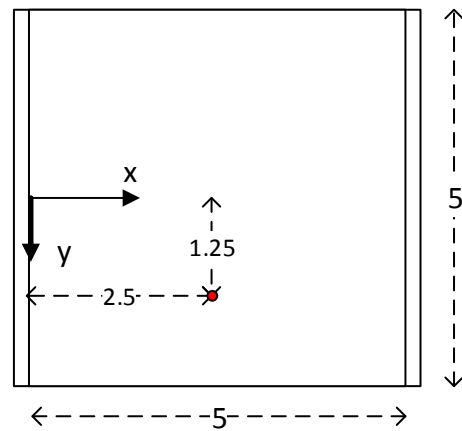
De fouten in de invloedsvlakken van Pucher zitten tussen de 0% en 4.3% vergeleken met andere oplossingen.

### 6.3 Toetsing invloedslijn zakking

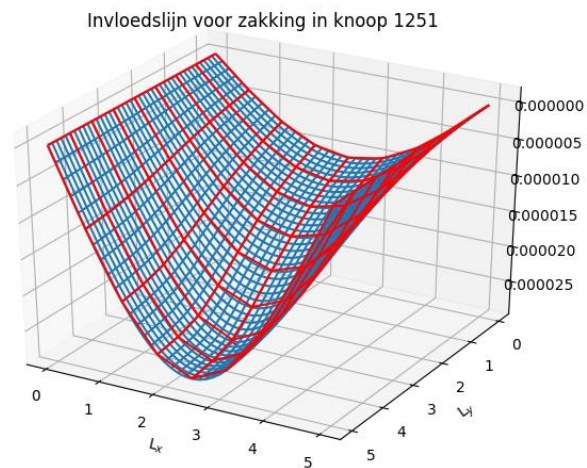
De toetsing van de invloedslijn voor zakking zal gedaan worden aan de hand van een rechthoekige plaat.

Tabel 13 – Eigenschappen plaat invloedslijn zakking

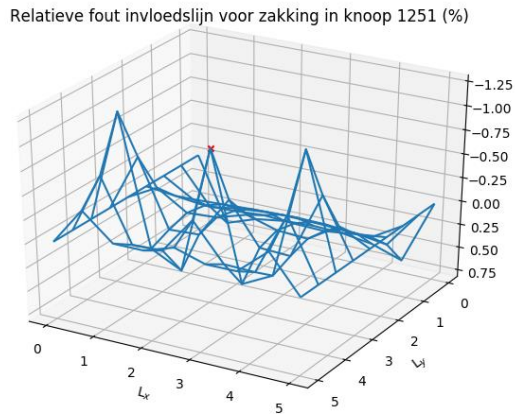
$n$	40
$m$	40
$L_x$	5 m
$L_y$	5 m
$E$	20e6 N/m <sup>2</sup>
$q$	0 N/m <sup>2</sup>
$h$	0.25 m
$\nu$	0 (-)
Knoop	1251



Figuur 107 - Voorbeeldplaat met assenstelsel oplossing Bareš & Massonnet



Figuur 108 - Invloedslijn voor zakking in knoop 1251, blauwe plot toont resultaten balkjesmodel, rode plot toont resultaten Bareš & Massonnet



*Figuur 109 - Relatieve fout invloedslijn voor zakking in knoop 1251 ten opzicht van oplossing Bareš & Massonnet*

Zoals te zien is in de resultaten komen de resultaten keurig overeen, de grootste fout is - 1.18%. Daarmee is de juistheid van deze methode aangetoond. De resultaten voor hoekverdraaiing zijn niet gecontroleerd, omdat deze oplossing niet zijn gegeven door Bareš & Massonnet. De methode is echter gelijk aan die van zakking dus er wordt vanuit gegaan dat ook de invloedslijnen voor hoekverdraaiingen juist zijn.

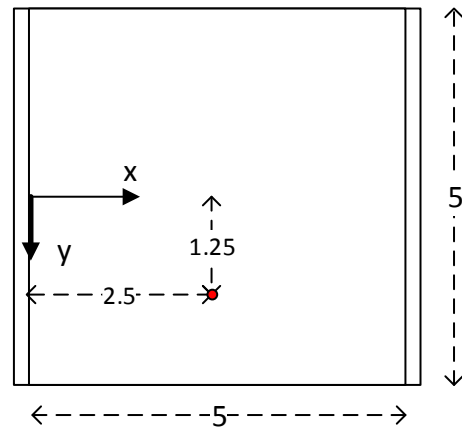
## 6.4 Toetsing invloedslijn krachtsgrootheden

De toets van de invloedslijnen voor krachtsgrootheden zal aan de hand van vijf toetsen worden gedaan.

### 6.4.1 Toets 1

Tabel 14 - Eigenschappen plaat toetsing invloedslijnen krachtsgrootheden 1

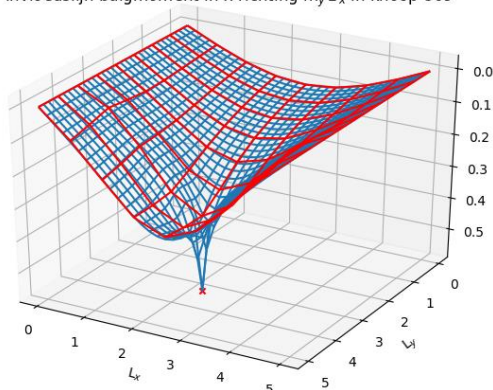
$n$	32
$m$	32
$L_x$	5 m
$L_y$	5 m
$E$	20e6 N/m <sup>2</sup>
$q$	0 N/m <sup>2</sup>
$h$	0.25 m
$\nu$	0 (-)
Knoop	809
Knoop (x,y)	(2.5, 3.75)



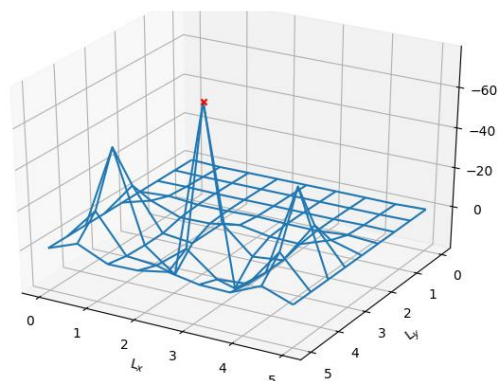
Figuur 110 - Voorbeeldplaat met assenstelsel oplossing Bareš & Massonnet

De invloedslijn vanuit het balkjesmodel zal worden vergeleken met de formules van Bareš & Massonnet in tabellenvorm.

Invloedslijn buigmoment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 809



Relatieve fout buigend moment in x-richting in knoop 809



Figuur 111 links - Invloedslijn voor buigend moment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 809 bepaald met brute kracht methode, blauwe plot toont resultaten balkjesmodel, rode plot toont resultaten Bareš & Massonnet

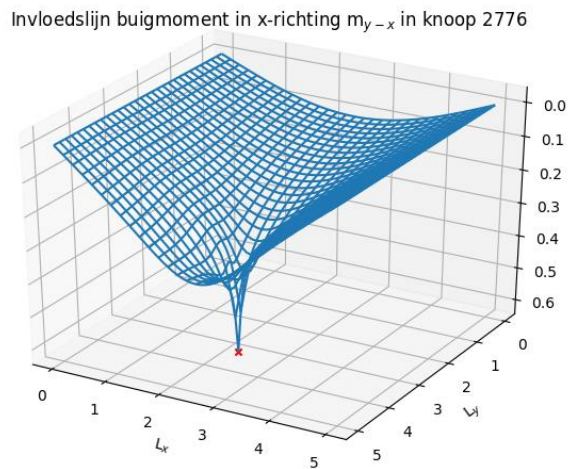
Figuur 112 rechts - Relatieve fout invloedslijn voor buigend moment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 809 ten opzicht van oplossing Bareš & Massonnet

In de plot is te zien dat de resultaten redelijk goed overeen komen (onder de 1% voor het grootste deel van de plaat. Echter, rond het punt van belasting toont de invloedslijn een piek en de resultaten rond dit punt wijken meer af van de oplossing van Bareš & Massonnet dan in de rest van de plaat, zoals voorspeld in hoofdstuk 5.2. Een oplossing is het (lokaal) verfijnen van de mesh, echter zal de piek blijven maar spits en smaller worden (Hambly, 1991, p. 63; O'Brien et al., 2014, p. 166).

Onderstaande plot toont de invloedslijn van het buigmoment met  $n=m=60$ . Dit model had 14 uur nodig om uit te rekenen met de brute kracht methode. De piek op de plaats van de kracht blijft aanwezig en is zelfs toegenomen. Blijkbaar neemt deze piek toe tot in oneindig, zoals

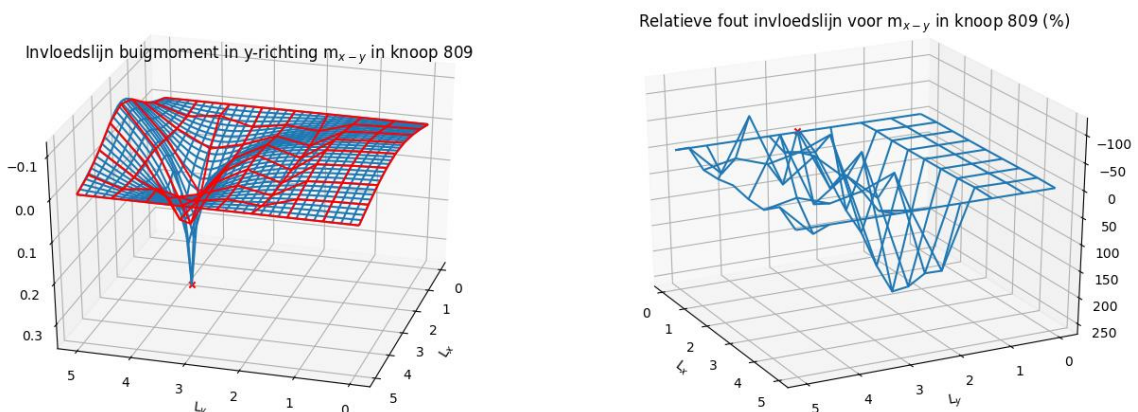


ook de resultaten van Pucher naar oneindig divergeren. De resultaten zijn wel gladder in de plaat.



*Figuur 113 - Invloedslijn voor zakking in knoop 1251 bepaald met brute kracht methode met  $n=m=60$*

Ook in y-richting zijn er oplossingen gegeven door Bareš & Massonnet. Echter, de fout in de benaderingsformules is groter dan de fout bij de oplossingen in x-richting.



*Figuur 114 links - Invloedslijn voor buigend moment in y-richting  $m_{x-y}$  in knoop 809 bepaald met brute kracht methode, blauwe plot toont resultaten balkjesmodel, rode plot toont resultaten Bareš & Massonnet*

*Figuur 115 rechts - Relatieve fout invloedslijn voor buigend moment in y-richting  $m_{x-y}$  in knoop 809 ten opzicht van oplossing Bareš & Massonnet*

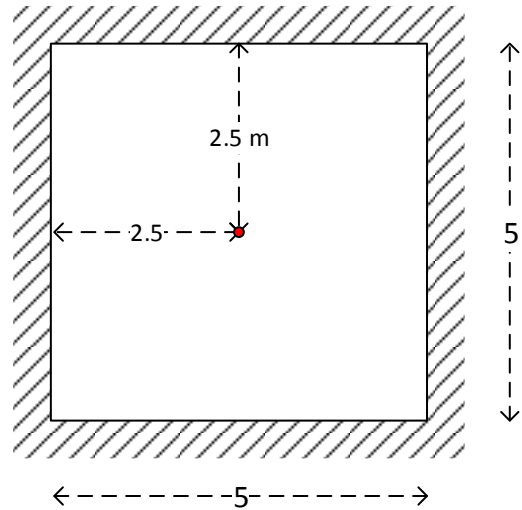
Zoals in de linker plot te zien is komen de resultaten redelijk goed overeen. De relatieve fouten liggen voor deel rond de 0.5%. Echter, er zijn ook grote pieken te onderscheiden met pieken tot 224 %. In de plot van fouten zijn de fouten voor de punten (0.625,3.75), (4.375,3.75) en (2.5,4.375) zijn de fouten niet geplot omdat deze fouten zeer groot zijn >500%. Deze fouten zijn echter zou groot omdat de oplossing van Bareš & Massonnet op deze punten bijna gelijk is aan 0.

De andere krachtsgrootheden zijn niet getoetst met de oplossingen van Bareš & Massonnet omdat er geen benaderingsformules zijn opgesteld zoals die wel voor de zakking en het buigend moment zijn opgesteld.

## 6.4.2 Toets 2

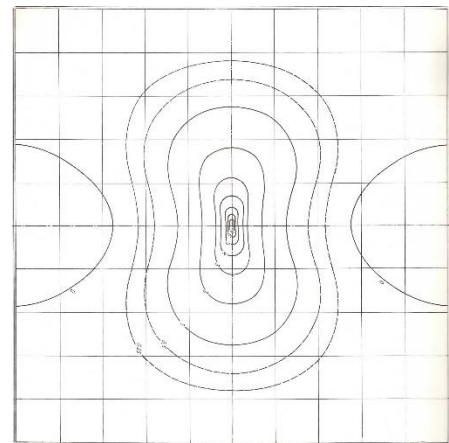
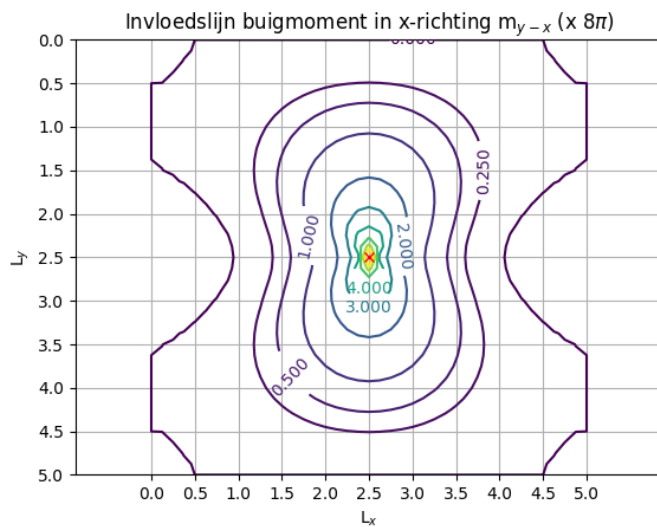
Tabel 15 - Eigenschappen plaat toetsing invloedslijnen krachtsgrootheden 2

$n$	40
$m$	40
$L_x$	5 m
$L_y$	5 m
$E$	20e6 N/m <sup>2</sup>
$q$	0 N/m <sup>2</sup>
$h$	0.25 m
$\nu$	0 (-)
Knoop	841
Knoop x,y	(2.5, 2.5)



Figuur 116 - Voorbeeldplaat met assenstelsel oplossing Bareš & Massonnet

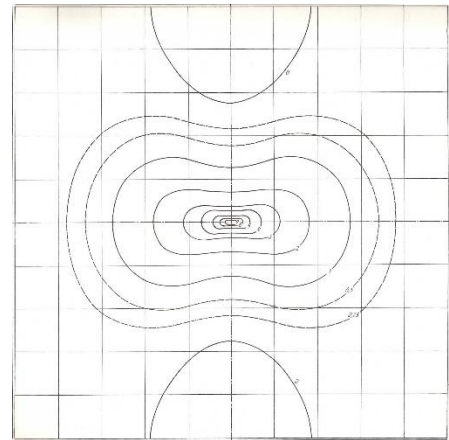
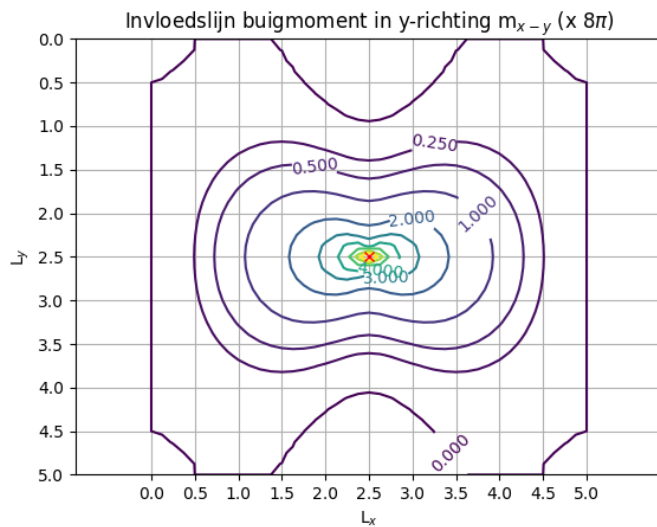
De invloedslijnen vanuit het balkjesmodel zullen worden vergeleken met de oplossing volgens Pucher (Pucher & Juhl, 1964, fig. 74,78,79) (Pucher & Juhl, 1964, fig. 75,76).



Figuur 117 links - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 841 bepaald met brute kracht methode ( $\times 8\pi$ )

Figuur 118 rechts - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment  $m_x$  (Pucher & Juhl, 1964, fig. 74)

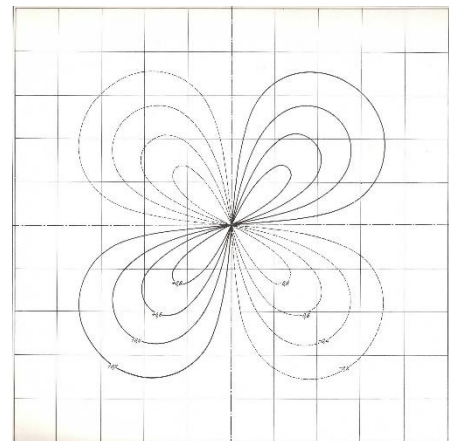
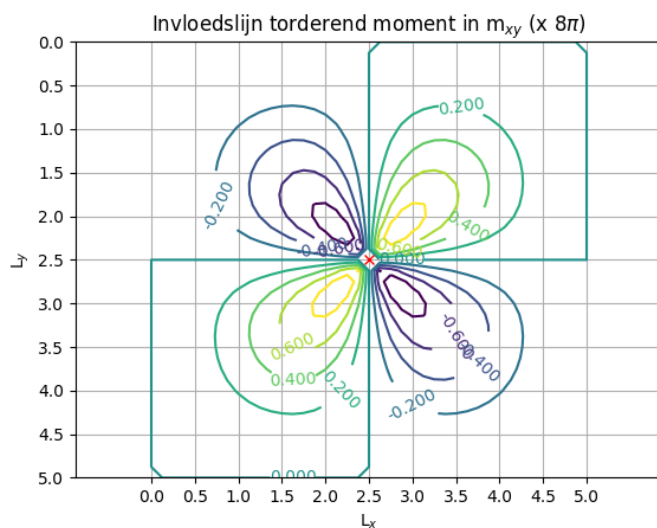
Deze twee plots komen zeer goed overeen. De contourlijnen zijn een slechts een klein beetje verschoven.



Figuur 119 links - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment in  $y$ -richting  $m_{x-y}$  in knoop 841 bepaald met brute kracht methode ( $\times 8\pi$ )

Figuur 120 rechts - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment  $m_x$  (Pucher & Juhl, 1964, fig. 74),  $90^\circ$  gedraaid

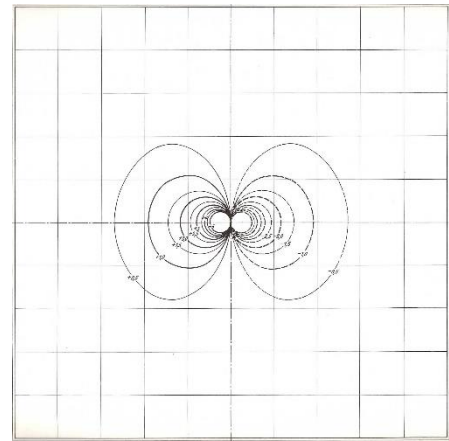
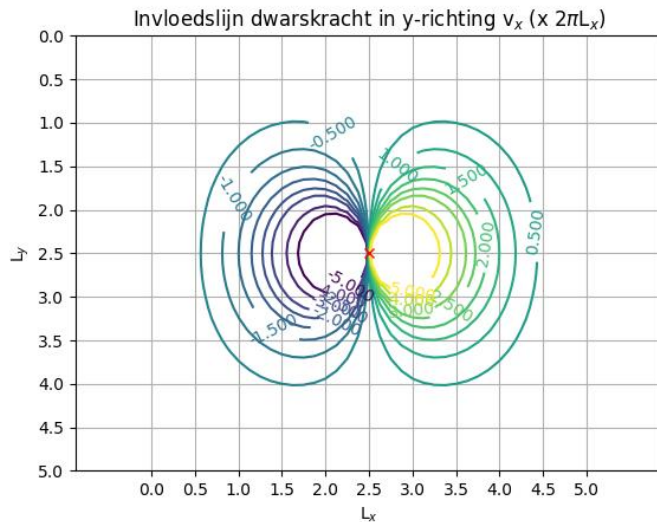
Ook deze twee plots komen zeer goed overeen. De contourlijnen zijn een slechts een klein beetje verschoven. Omdat dit een puur symmetrisch probleem is, is de oplossing  $90^\circ$  gedraaid ten opzichte van de oplossing in de  $x$ -richting.



Figuur 121 links - Contourplot van invloedslijn voor wringend moment  $m_{xy}$  in knoop 841 bepaald met brute kracht methode ( $\times 8\pi$ )

Figuur 122 rechts - Contourplot van invloedslijn voor wringend moment  $m_{xy}$  (Pucher & Juhl, 1964, fig. 78),  $90^\circ$  gedraaid

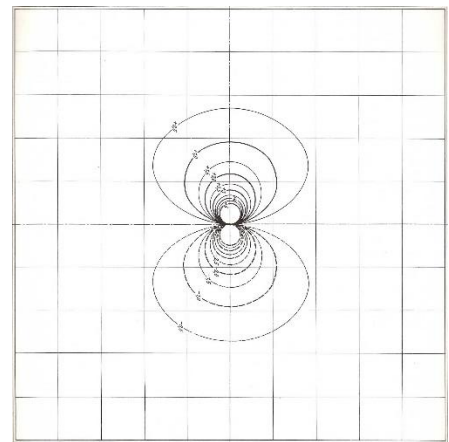
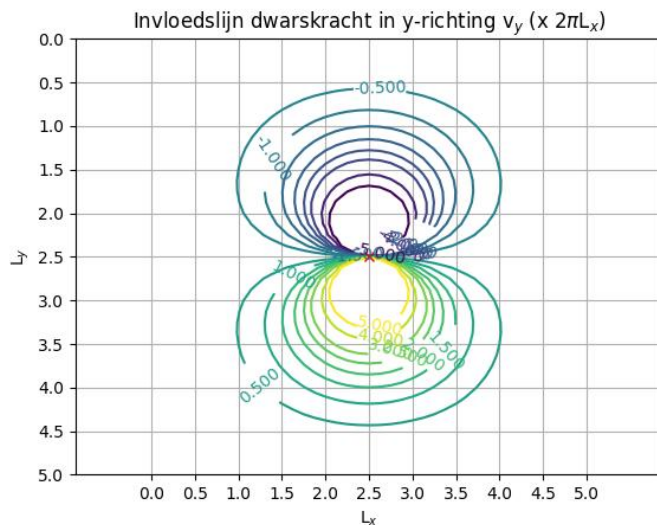
Het wringend moment komt bijna perfect overeen. Er zijn nauwelijks verschillen te zien tussen de contourlijnen.



Figuur 123 links - Contourplot van invloedslijn voor dwarskracht in x-richting  $v_x$  knoop 841 bepaald met brute kracht methode ( $\times 2\pi L_x$ )

Figuur 124 rechts - Contourplot van invloedslijn voor dwarskracht  $q_x$  (Pucher & Juhl, 1964, fig. 79)

De oplossing voor de dwarskracht komt niet overeen met de oplossing van Pucher. Hoewel het patroon overeenkomstig zijn de verschillen een factor 4.



Figuur 125 links - Contourplot van invloedslijn voor dwarskracht in x-richting  $v_x$  knoop 841 bepaald met brute kracht methode ( $\times 2\pi L_x$ )

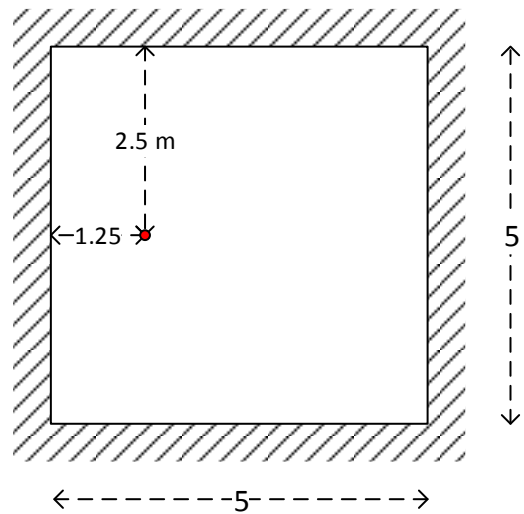
Figuur 126 rechts - Contourplot van invloedslijn voor dwarskracht  $q_y$  (Pucher & Juhl, 1964, fig. 79),  $90^\circ$  gedraaid

Ook de oplossing voor de dwarskracht in de andere richting komt niet overeen met de oplossing van Pucher. De verschillen zijn hier gelijk aan de oplossing in x-richting.

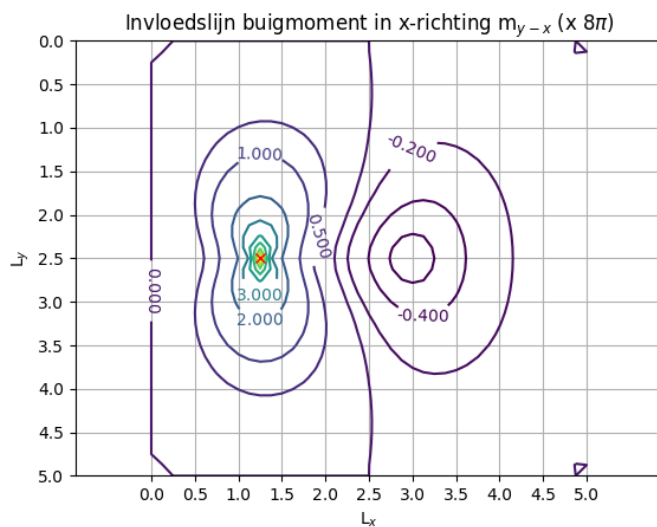
De toets zal nogmaals worden uitgevoerd voor een andere knoop.

Tabel 16 - Eigenschappen plaat toetsing invloedslin-  
nen krachsgrootheden 3

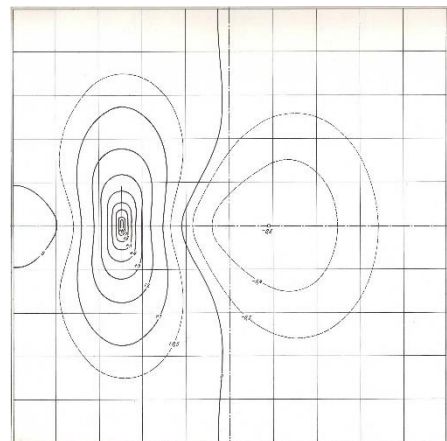
$n$	40
$m$	40
$L_x$	5 m
$L_y$	5 m
$E$	20e6 N/m <sup>2</sup>
$q$	0 N/m <sup>2</sup>
$h$	0.25 m
$\nu$	0 (-)
Knoop	831
Knoop $x,y$	(1.25 , 2.5)



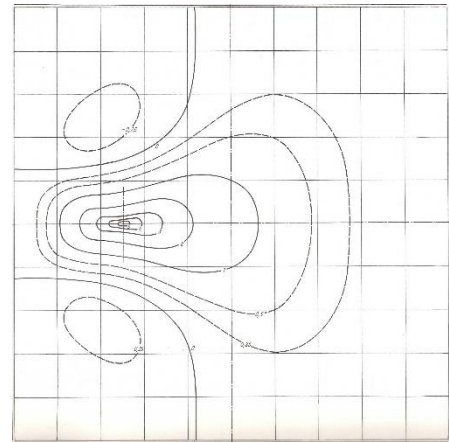
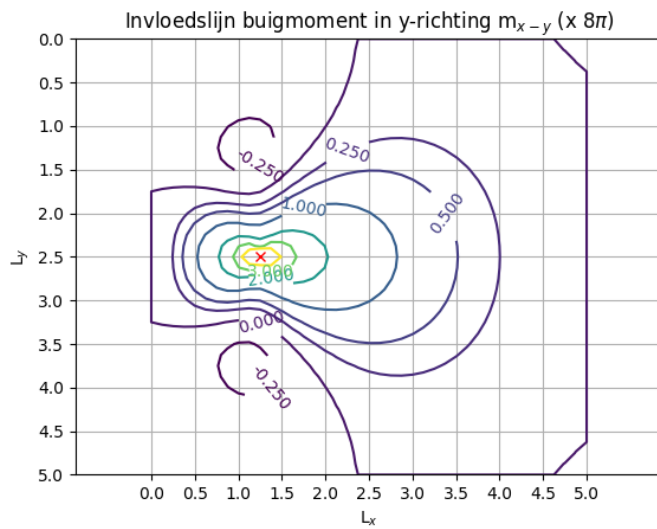
Figuur 127 - Voorbeeldplaat met assenstelsel oplos-  
sing Bareš & Massonnet



Figuur 128 links - Contourplot van invloedslin voor buigmoment in  $x$ -richting  $m_{y-x}$  in knoop 831 bepaald met brute kracht methode ( $\times 8\pi$ )



Figuur 129 rechts – Contourplot van invloedslin voor buigmoment  $m_x$  (Pucher & Juhl, 1964, fig. 76)



Figuur 130 links - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment in y-richting  $m_{x-y}$  in knoop 831 bepaald met brute kracht methode ( $\times 8\pi$ )

Figuur 131 rechts - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment  $m_x$  (Pucher & Juhl, 1964, fig. 75)

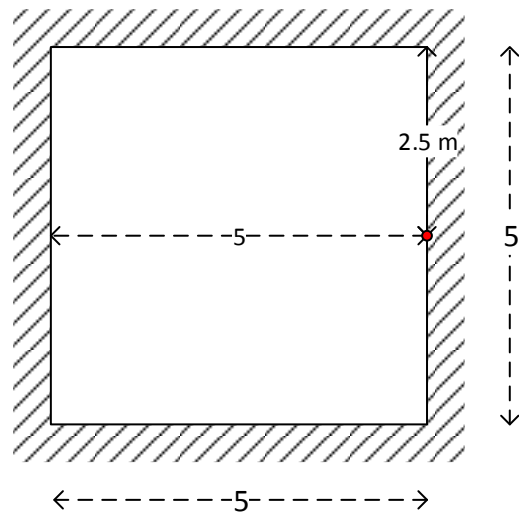
Deze oplossingen komen redelijk goed overeen met de oplossing van Pucher.



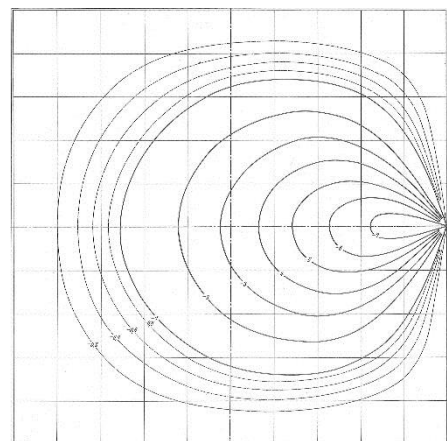
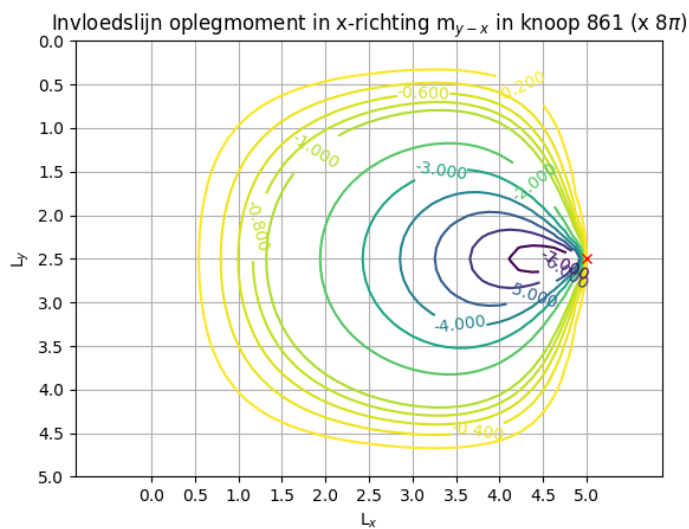
De toets zal nogmaals worden uitgevoerd voor een knoop op de rand. Hiermee worden de invloedslijnen voor het inklemmingsmoment en het de oplegkracht bepaald.

Tabel 17 - Eigenschappen plaat toetsing invloedslijnen krachsgrootheden 4

$n$	40
$m$	40
$L_x$	5 m
$L_y$	5 m
$E$	20e6 N/m <sup>2</sup>
$q$	0 N/m <sup>2</sup>
$h$	0.25 m
$\nu$	0 (-)
Knoop	861
Knoop $x,y$	(5 , 2.5)

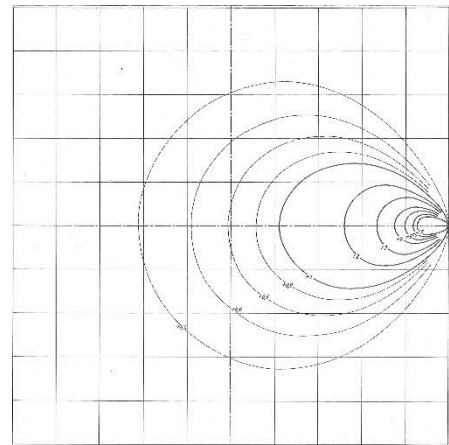
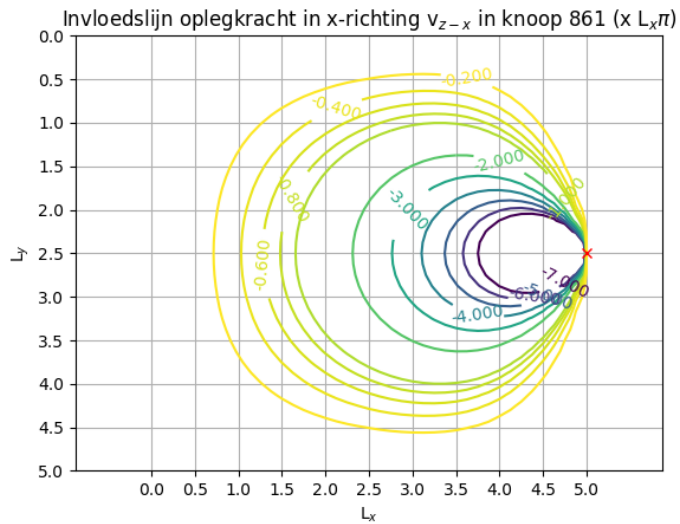


Figuur 132 - Voorbeeldplaat met assenstelsel oplossing Bareš & Massonnet



Figuur 133 links - Contourplot van invloedslijn voor oplegmoment moment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 861 bepaald met brute kracht methode ( $\times 8\pi$ )

Figuur 134 rechts - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment  $m_x$  (Pucher & Juhl, 1964, fig. 77)



Figuur 135 links - Contourplot van invloedslijn voor oplegkracht in knoop 861 bepaald met brute kracht methode ( $\times L_x\pi$ )

Figuur 136 rechts - - Contourplot van invloedslijn voor oplegkracht (Pucher & Juhl, 1964, fig. 80)

De oplegreacties van de momenten komen zeer goed overeen, echter de oplegkrachten wijken een factor 2 af van de oplossingen van Pucher.

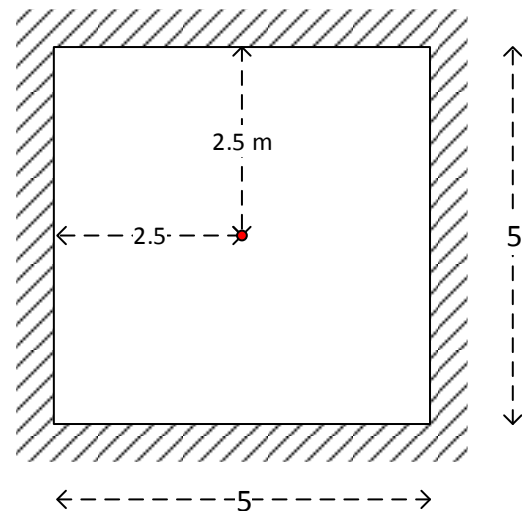


### 6.4.3 Toets 3

De resultaten van de andere toetsen zijn bepaald met de brute kracht methode. De methode met een dummybelasting heeft echter de voorkeur omdat de rekentijd drastisch wordt verminderd. De eerder getoonde resultaten komen precies overeen met de resultaten van de methode met een dummybelasting. Hieronder zijn de resultaten van toets 2 vergeleken met de resultaten als deze zou worden uitgevoerd met de methode met een dummybelasting.

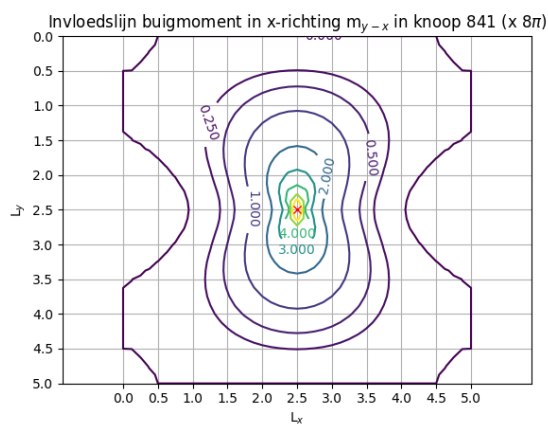
Tabel 18 - Eigenschappen plaat toetsing invloedslijnen krachsgrootheden 5

$n$	40
$m$	40
$L_x$	5 m
$L_y$	5 m
$E$	$20 \times 10^6 \text{ N/m}^2$
$q$	$0 \text{ N/m}^2$
$h$	0.25 m
$\nu$	0 (-)
Knoop	841
Knoop $x,y$	(2.5, 2.5)

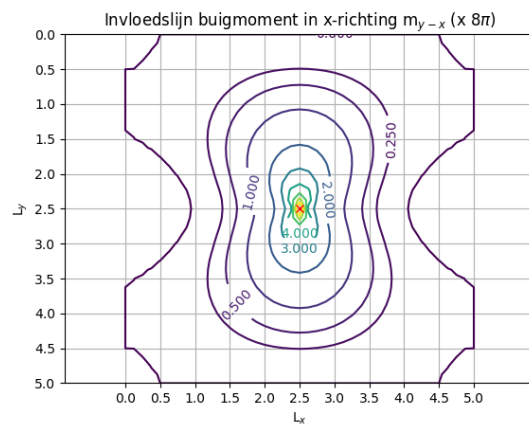


Figuur 137 - Voorbeeldplaat met assenstelsel oplossing Bareš & Massonnet

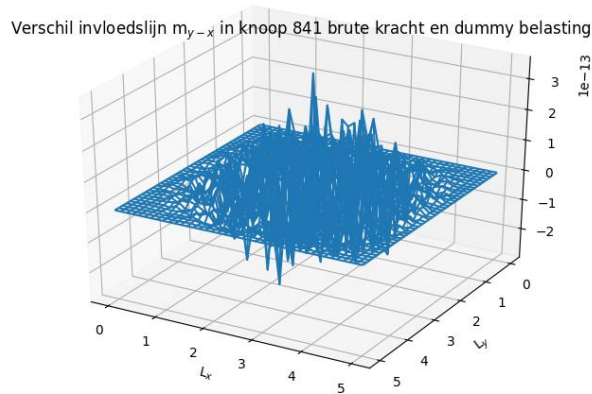
Met de aangepaste belastingvector worden dezelfde invloedslijnen gevonden als met de brute kracht methode:



Figuur 138 links - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 841 bepaald met dummybelasting methode ( $\times 8\pi$ )

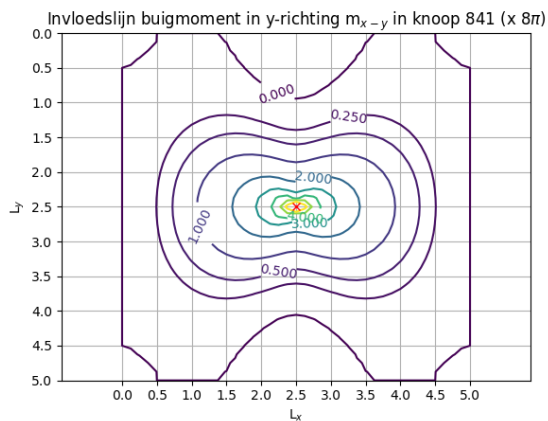


Figuur 139 rechts - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 841 bepaald met brute kracht methode ( $\times 8\pi$ )

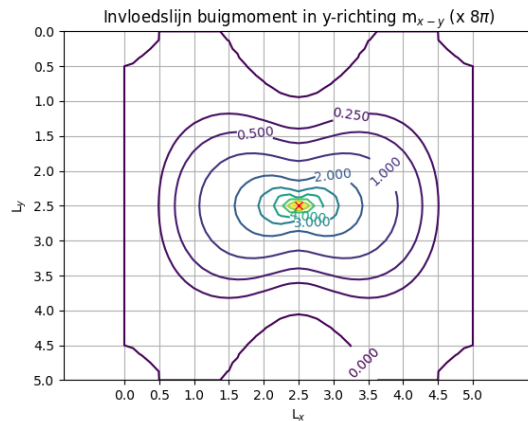


Figuur 140 – 3D-plot van verschil tussen invloedslijn voor buigmoment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 841 bepaald met dummybelasting methode en met de brute kracht methode.

Het verschil tussen de twee methodes is verwaarloosbaar en komt voort uit numerieke fouten in het model. De grootste verschil is  $3.57 \times 10^{-13}$ .

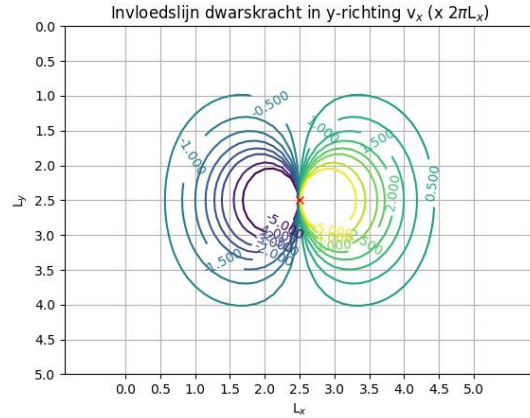
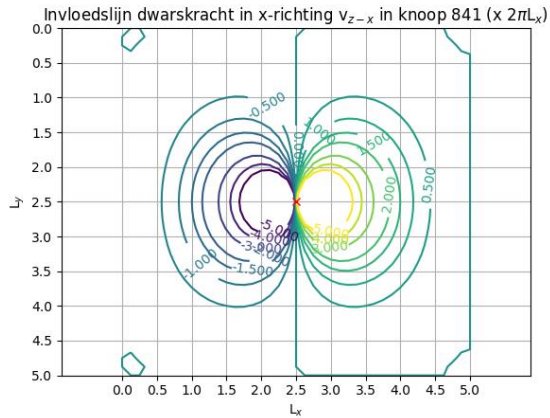


Figuur 141 links - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment in y-richting  $m_{x-y}$  in knoop 841 bepaald met dummybelasting methode ( $\times 8\pi$ )



Figuur 142 rechts - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 841 bepaald met brute kracht belasting methode ( $\times 8\pi$ )

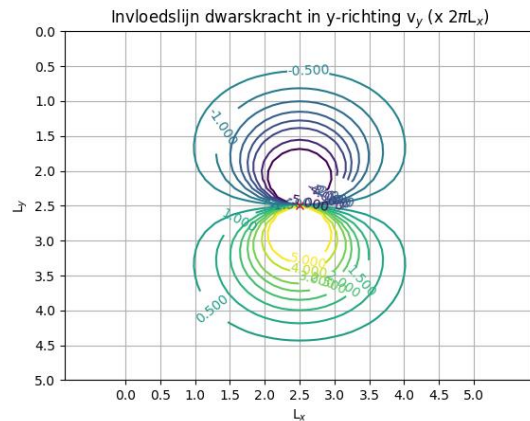
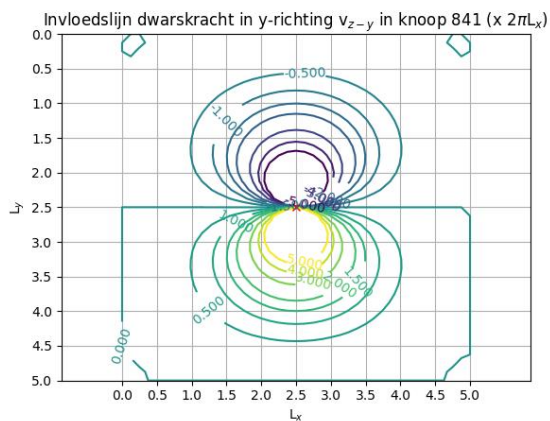
Het verschil tussen de twee methodes is wederom verwaarloosbaar. Het verschil geeft een plot soortgelijk aan figuur 140 en een maximaal verschil van  $7.50 \times 10^{-13}$ .



*Figuur 143 links - Contourplot van invloedslijn voor dwarskracht in x-richting  $v_x$  knoop 841 bepaald met dummybelasting methode ( $\times 2\pi L_x$ )*

*Figuur 144 rechts - Contourplot van invloedslijn voor dwarskracht in x-richting  $v_x$  knoop 841 bepaald met brute kracht methode ( $\times 2\pi L_x$ )*

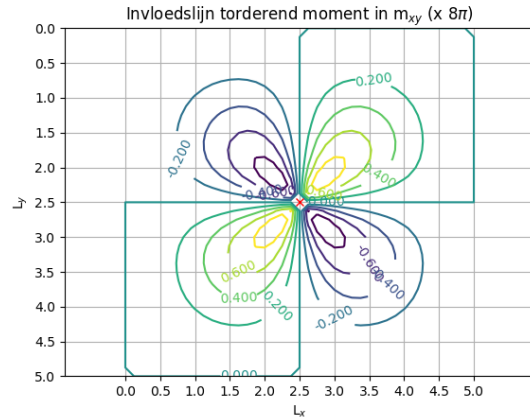
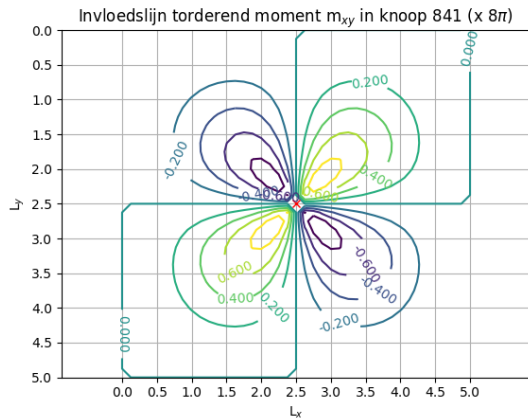
Het maximale verschil tussen de twee figuren is  $2.18 \times 10^{-11}$ .



*Figuur 145 links - Contourplot van invloedslijn voor dwarskracht in y-richting  $v_y$  knoop 841 bepaald met dummybelasting methode ( $\times 2\pi L_x$ )*

*Figuur 146 rechts - Contourplot van invloedslijn voor dwarskracht in y-richting  $v_y$  knoop 841 bepaald met brute kracht methode ( $\times 2\pi L_x$ )*

Het maximale verschil tussen de twee figuren is  $2.21 \times 10^{-11}$ .



*Figuur 147 links - Contourplot van invloedslijn voor wringend moment  $m_{xy}$  knoop 841 bepaald met dummybelasting methode ( $\times 8\pi$ )*

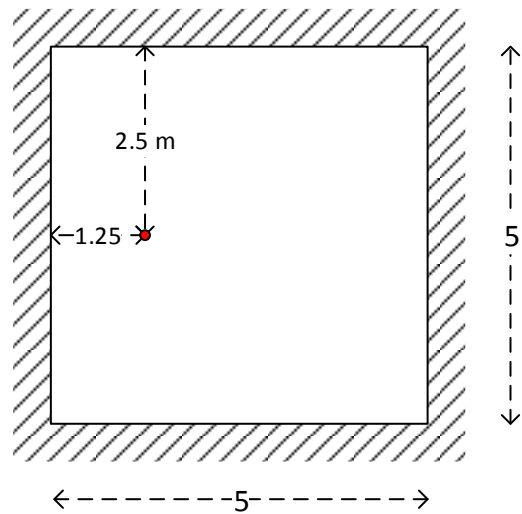
*Figuur 148 rechts - Contourplot van invloedslijn voor dwarskracht in  $y$ -richting  $v_y$  knoop 841 bepaald met brute kracht methode ( $\times 8\pi$ )*

Het maximale verschil tussen de twee figuren is  $2.12 \times 10^{13}$ .

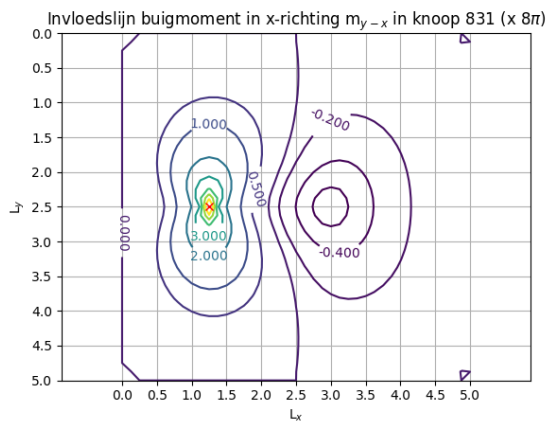
De toets zal nogmaals worden uitgevoerd voor een andere knoop.

Tabel 19 - Eigenschappen plaat toetsing invloedslijnen krachsgrootheden 3

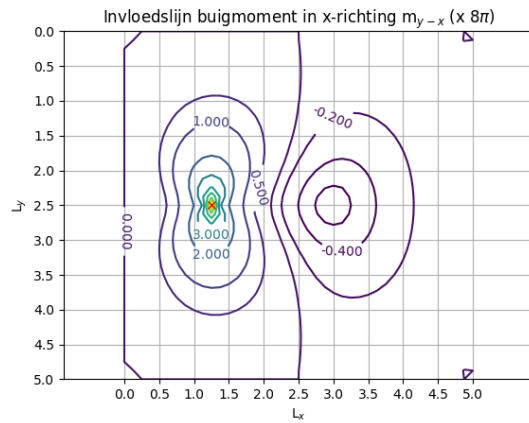
$n$	40
$m$	40
$L_x$	5 m
$L_y$	5 m
$E$	$20 \times 10^6 \text{ N/m}^2$
$q$	$0 \text{ N/m}^2$
$h$	0.25 m
$\nu$	0 (-)
Knoop	831
Knoop $x, y$	(1.25, 2.5)



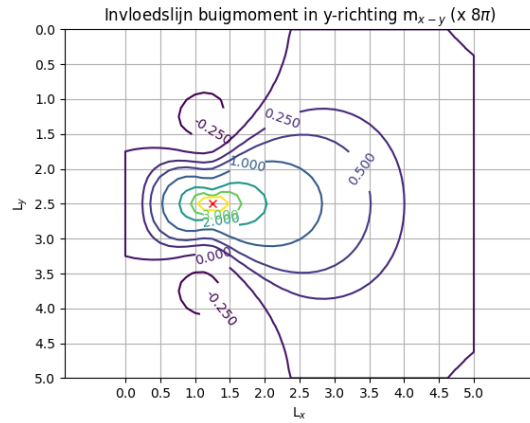
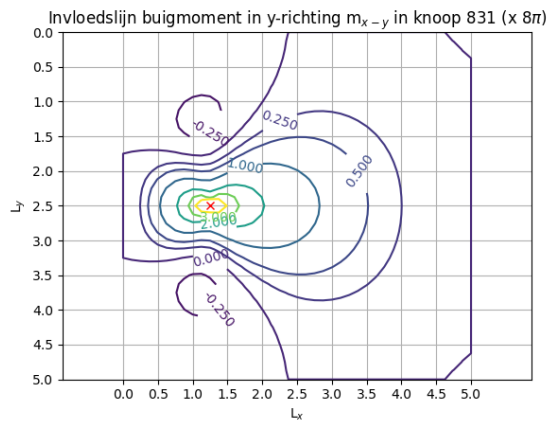
Figuur 149 - Voorbeeldplaat met assenstelsel oplossing Bares & Massonnet



Figuur 150 links - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 831 bepaald met methode dummybelasting ( $\times 8\pi$ )



Figuur 151 rechts - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 831 bepaald met brute kracht methode ( $\times 8\pi$ )



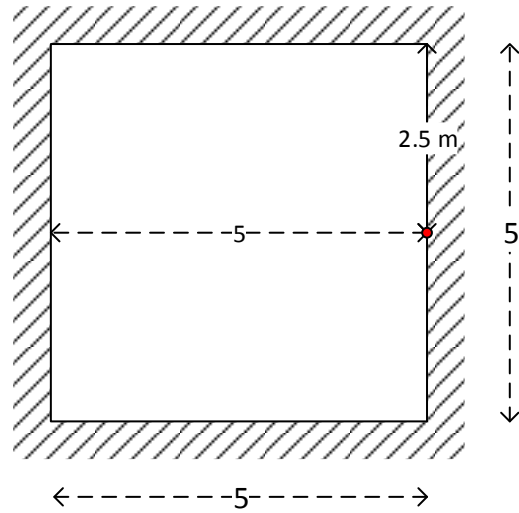
*Figuur 152 links - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment in y-richting  $m_{x-y}$  in knoop 831 bepaald met methode dummybelasting ( $\times 8\pi$ )*

*Figuur 153 rechts - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment in y-richting  $m_{x-y}$  in knoop 831 bepaald met brute kracht methode ( $\times 8\pi$ )*

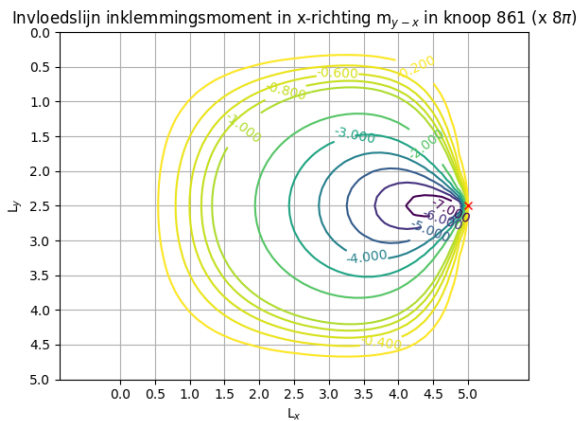
De toets zal nogmaals worden uitgevoerd voor een knoop op de rand. Hiermee worden de invloedslijnen voor het inklemmingsmoment en het de oplegkracht bepaald.

Tabel 20 - Eigenschappen plaat toetsing invloedslijnen krachtsgrootheden 4

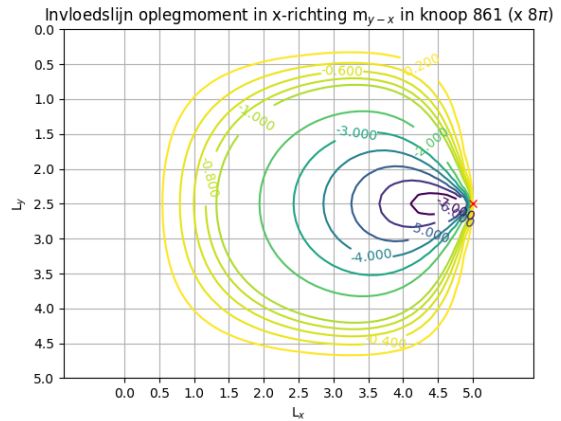
$n$	40
$m$	40
$L_x$	5 m
$L_y$	5 m
$E$	20e6 N/m <sup>2</sup>
$q$	0 N/m <sup>2</sup>
$h$	0.25 m
$\nu$	0 (-)
Knoop	861
Knoop $x,y$	(5 , 2.5)



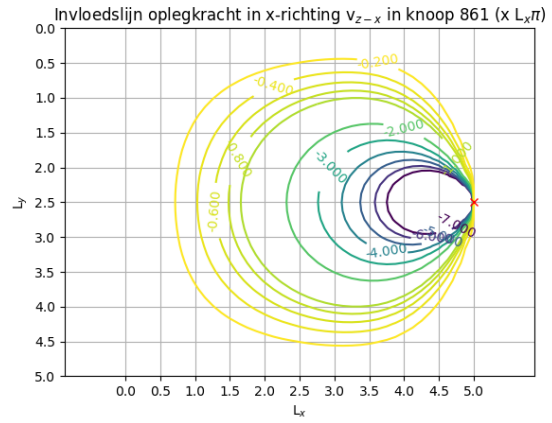
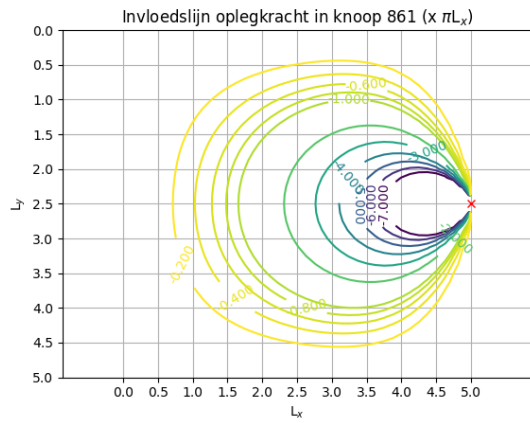
Figuur 154 - Voorbeeldplaat met assenstelsel oplossing Bareš & Massonnet



Figuur 155 links - Contourplot van invloedslijn voor oplegmoment moment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 861 bepaald met methode dummybelasting ( $\times 8\pi$ )



Figuur 156 rechts - Contourplot van invloedslijn voor oplegmoment moment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 861 bepaald met brute kracht methode ( $\times 8\pi$ )



Figuur 157 links - Contourplot van invloedslin voor oplegkracht in knoop 861 bepaald met methode dummybelasting ( $\times L_x\pi$ )

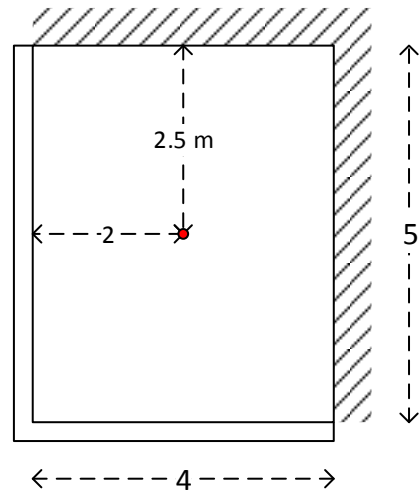
Figuur 158 rechts - Contourplot van invloedslin voor oplegkracht in knoop 861 bepaald met brute kracht methode ( $\times L_x\pi$ )



## 6.4.4 Toets 4

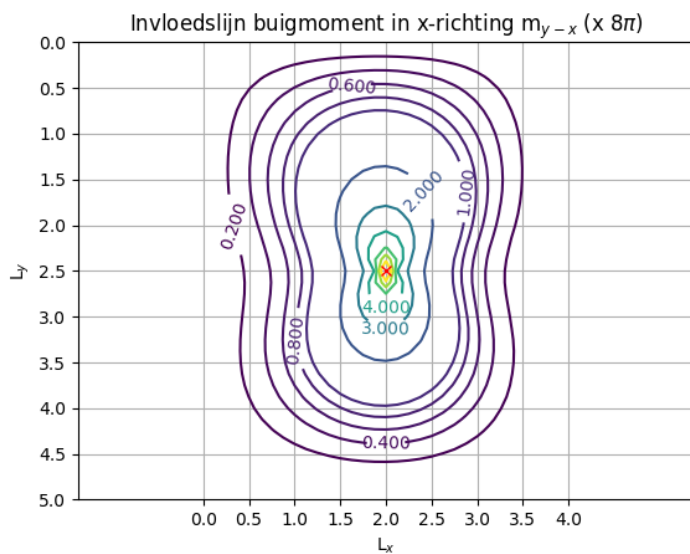
Tabel 21 - Eigenschappen plaat toetsing invloedslin-  
nen krachtsgrootheden 6

$n$	32
$m$	40
$L_x$	4 m
$L_y$	5 m
$E$	$20e6 \text{ N/m}^2$
$q$	$0 \text{ N/m}^2$
$h$	0.25 m
$\nu$	0 (-)
Knoop	677
Knoop $x,y$	(2, 2.5)

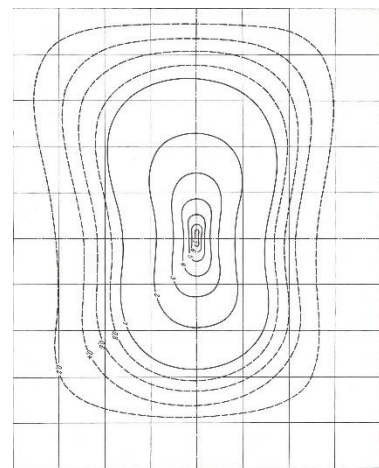


Figuur 159 - Voorbeeldplaat met assenstelsel oplos-  
sing Bareš & Massonnet

De invloedslin vanuit het balkjesmodel is vergeleken met de oplossing volgens Pucher (Pucher & Juhl, 1964, fig. 41,42).

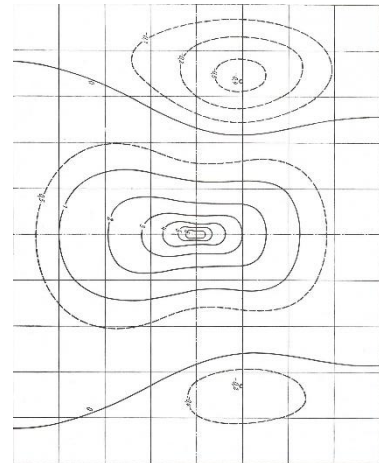
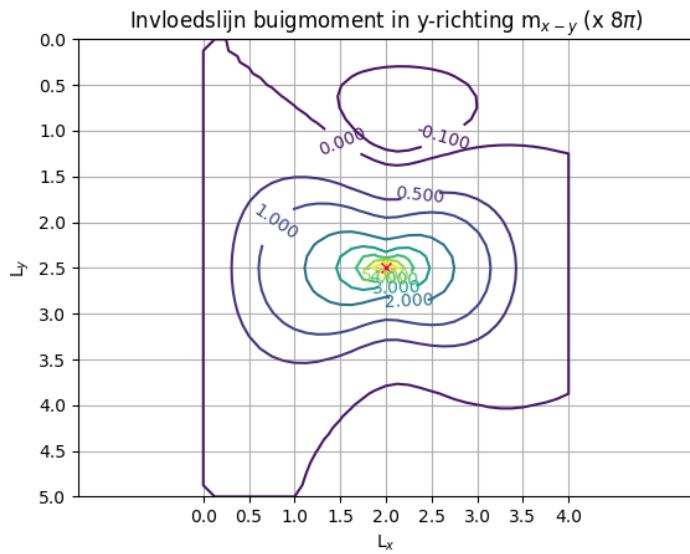


Figuur 160 links - Contourplot van invloedslin voor buigmoment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 677 bepaald met brute kracht methode ( $\times 8\pi$ )



Figuur 161 rechts - Contourplot van invloedslin voor buigmoment  $m_x$  (Pucher & Juhl, 1964, fig. 41)

Deze twee plots komen zeer goed overeen. De contourlijnen zijn een slechts een klein beetje verschoven.



Figuur 162 links - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment in y-richting  $m_{x-y}$  in knoop 677 bepaald met brute kracht methode ( $\times 8\pi$ )

Figuur 163 rechts - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment  $m_y$  (Pucher & Juhl, 1964, fig. 42)

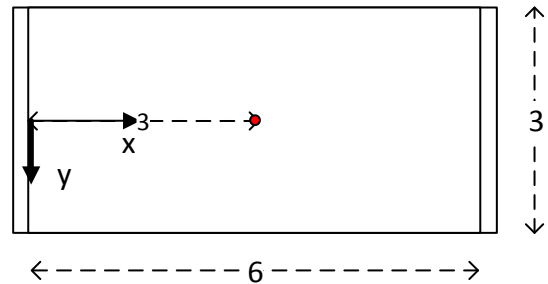
Deze twee plots komen redelijk goed overeen. De 'opbolling' is minder groot in de oplossing van het balkjesmodel.

### 6.4.5 Toets 5

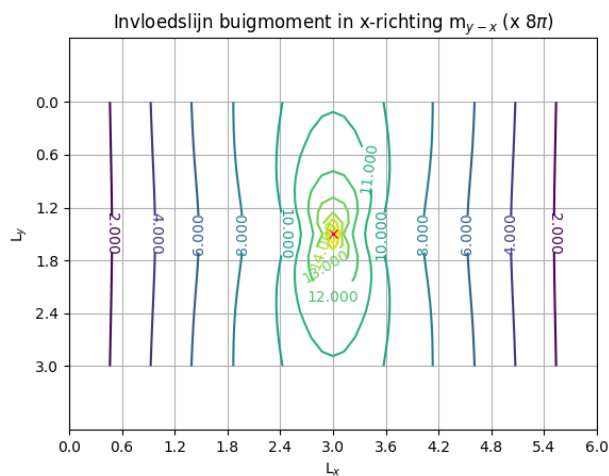
De invloedslijn vanuit het balkjesmodel is vergeleken met zowel de oplossing van Bareš & Massonnet (Bareš & Massonnet, 1968) en de oplossing volgens Pucher (Pucher & Juhl, 1964, fig. 81,82).

Tabel 22 - Eigenschappen plaat toetsing invloedslijnen krachsgrootheden 7

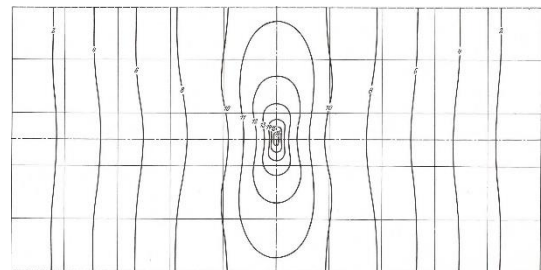
$n$	48
$m$	24
$L_x$	6 m
$L_y$	3 m
$E$	20e6 N/m <sup>2</sup>
$q$	0 N/m <sup>2</sup>
$h$	0.25 m
$\nu$	0 (-)
Knoop	613
Knoop (x,y)	(3.0, 1.5)



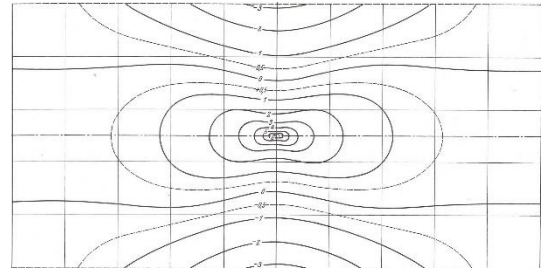
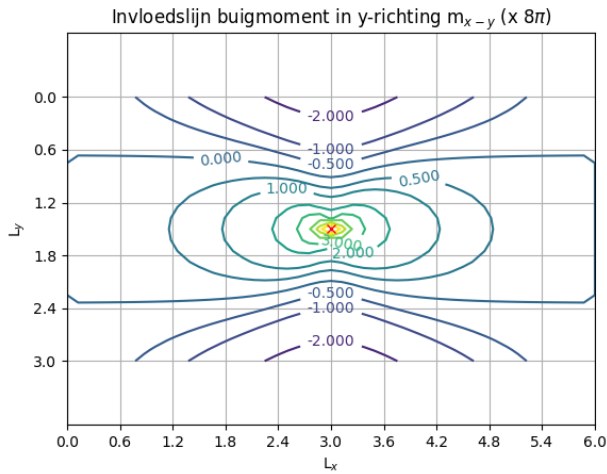
Figuur 164 - Voorbeeldplaat met assenstelsel oplossing Bareš & Massonnet



Figuur 165 links - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 613 bepaald met brute kracht methode ( $\times 8\pi$ )



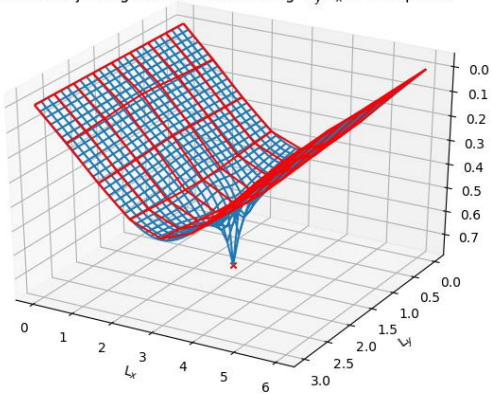
Figuur 166 rechts - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment  $m_{xx}$  (Pucher & Juhl, 1964, fig. 81)



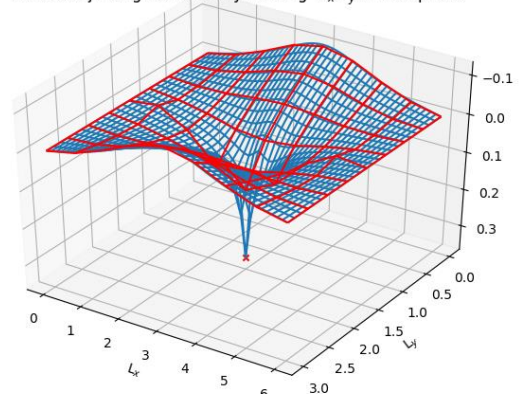
Figuur 167 links - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment in y-richting  $m_{x-y}$  in knoop 613 bepaald met brute kracht methode ( $\times 8\pi$ )

Figuur 168 rechts - Contourplot van invloedslijn voor buigmoment  $m_{yy}$  (Pucher & Juhl, 1964, fig. 82)

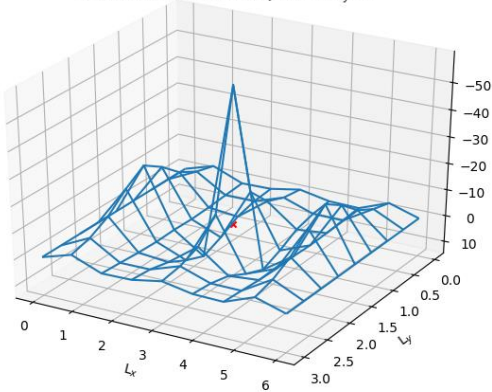
Invloedslijn buigmoment in x-richting  $m_{y-x}$  in knoop 613



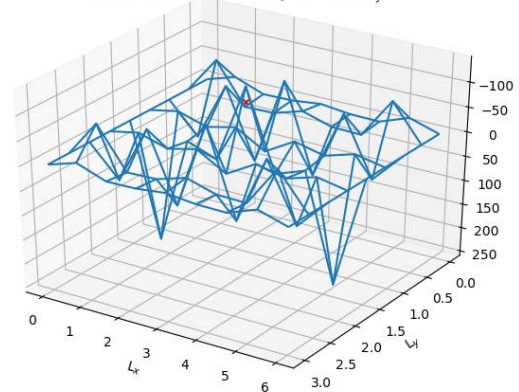
Invloedslijn buigmoment in y-richting  $m_{x-y}$  in knoop 613



Relatieve fout invloedslijn voor  $m_{y-x}$



Relatieve fout invloedslijn voor  $m_{x-y}$



$M_{y-x}$  fout rond 1,2 % ,met bij de pieken uitschieters naar 20% en 57%. Voor  $m_{x-y}$  fout 3 – 10% met pieken op 125 en 233 % (kleine waarden en benaderingsformule is minder precies)

## 7 Conclusie

In dit onderzoek is gewerkt aan een ingenieurstool voor het bepalen van invloedslijnen voor platen. Daarvoor is het basismodel voor modellering van een plaat als een balkjesmodel afgemaakt en een viertal modellen gemaakt waarmee de invloedslijnen voor deze platen kunnen worden bepaald.

Op basis van toetsing aan de hand van vergelijking met het model DIMOD, FEM-resultaten uit FEMDEM, oplossingen vanuit de plaattheorie (waaronder de plaat van Nadai) en vergeet-me-nietjes is gebleken dat het basismodel de zakkings, snedekrachten en oplegreacties goed uitrekent. Op de randen van het model ontstaan door de wijze van modellering kleine fouten bij de bepaling van de buigende momenten en dwarskrachten. Deze resultaten moeten daarom met een foutmarge worden geïnterpreteerd. De oplegreacties komen om dezelfde reden niet helemaal overeen met de werkelijkheid. Het model is door de wijze van modellering alleen te vergelijken met platen met een Poisson's ratio van 0. Als de Poisson's ratio toeneemt neemt de fout ook sterk toe.

Voor de tool voor invloedslijnen zijn vier verschillende modellen gemaakt, waarmee alle verschillende soorten invloedslijnen kunnen worden bepaald. Er is een model gemaakt voor invloedslijnen van verplaatsingen, voor oplegreacties en twee voor snedekrachten. Voor de snedekrachten is een model gemaakt volgens de brute kracht methode en een model waarbij gebruik wordt gemaakt van het principe van Müller-Breslau. Beide modellen komen tot dezelfde oplossingen, de tweede is daarnaast ook snel genoeg om als hulpmiddel te werken. Alle modellen zijn getoetst aan de hand van oplossingen van Bareš & Massonnet en Pucher. De modellen blijkt te kloppen voor alle verplaatsingen, oplegreacties en snedekrachten behalve de invloedslijnen voor dwarskracht en oplegkracht. Bij deze laatste twee is het patroon juist, maar verschillen de oplossingen een factor twee tot vier met de oplossingen van Pucher.

Met dit onderzoek is daarmee een breed inzetbare en snelle ingenieurstool gemaakt waarmee het gedrag van platen wordt benaderd en invloedslijnen kunnen worden bepaald. Op deze manier kunnen ingenieurs snel en makkelijk inzicht krijgen in de maatgevende belastingen en verplaatsingen voor platen.

## 8 Discussie

De resultaten komen grotendeels goed overeen met resultaten uit de literatuur, echter zijn er een aantal punten waarop het model beperkingen heeft.

### 8.1 Basismodel plaat als balkjesmodel

Door de modellering volgens het balkjesmodel ontstaat er een grillig effect in de resultaten. Dit effect geeft middenin het plaatveld weinig problemen, maar op de randen van een plaat zorgt dit effect voor fouten. Een vraag die nog deels onbeantwoord is gebleven is hoe het aantal balkjes in x- en y-richting invloed heeft op de mate van grilligheid van de momentenlijn en de dwarskrachtenlijn. Met name de dwarskracht is sterk afhankelijk van de grilligheid. Dit effect is kort kwalitatief bekeken, maar de fouten zijn kwantitatief niet beoordeeld. Er kan worden gekeken naar hoe dit effect zich ontwikkelt bij toenemend aantal balkjes. Er wordt verwacht dat de grilligheid en daarmee de relatieve fout afneemt, zoals ook in de literatuur wordt aangegeven.

Er zijn twee methodes voorgesteld om de dwarskracht te bepalen, welke bij belastinggevallen zonder torsie op dezelfde oplossing uitkomen, maar voor belastinggevallen met torsie afwijken van elkaar. Er is niet getoetst welke methode de beste oplossing geeft. De oplossingen zullen moeten worden vergeleken met een plaatmodel om te kijken welke methode het dichtst bij de oplossingen van de plaat komt.

Het basismodel voor de plaat kan nog in meer verschillende situaties worden getoetst. Voor het model zonder wringing zijn alle krachtsgrootheden getoetst, maar deze toets is niet herhaald voor het model met wringing. De oplossingen die getoetst zijn kloppen, maar er is niet getoetst aan de hand van een standaard benchmark omdat een dergelijke benchmark onbekend is.

De laatste vraag die nog open staat voor het basismodel is waarom de resultaten niet kloppen als  $dx \neq dy$ . Dit is een makkelijk te vermijden probleem, door het aantal balkjes in een richting af te laten hangen van de lengte van de rand. Het is echter onduidelijk waar deze fout vandaan komt. De fout zou kunnen zitten in een typefout in het model waarbij dx en dy zijn verwisselend. De fout zit in ieder geval niet (volledig) in de verwerking van het wringend moment, omdat de fout sterk aanwezig was bij een model waarin het wringend moment gelijk is aan 0. De manier van modellering van het wringend moment zou ook een deel van de fout kunnen zijn, omdat er vanuit is gegaan dat de rek-energie voor de helft wordt gedragen door balkjes in x-richting en voor de andere helft door balkjes in y-richting. Als een balkje in één richting groter is, kan deze richting ook meer rek-energie opnemen.

### 8.2 Modellen voor invloedslijnen

De beperkingen van het basismodel gelden ook voor de modellen voor invloedslijnen. Daarmee zijn deze modellen ook alleen geldig voor een Poisson's ratio van 0, moeten de balkjes dezelfde lengte hebben in x- en y-richting en zijn de resultaten voor oplegkrachten en dwarskrachten op de randen minder betrouwbaar dan andere waardes.

De resultaten voor de invloedslijnen komen redelijk goed overeen met die uit de literatuur, behalve voor de dwarskracht en oplegkrachten. Het is onduidelijk waar deze fout vandaan komt, maar zou te maken kunnen hebben met het grillige effect dat in het balkjesmodel ontstaat.

Daarnaast is het nog onduidelijk hoe de resultaten van de invloedslijnen moeten worden geïnterpreteerd rond het punt waarvan de invloedslijn wordt bepaald. Voor de dwarskrachten en buigende momenten geeft het model namelijk grote pieken, die ook in de oplossingen van Pucher te vinden zijn. Echter zijn deze pieken niet te vinden in de resultaten van Bareš &



Massonnet. Daarnaast is er bij invloedslijnen van balken rond het punt waarvan de invloedslijn ook sprake van een discontinuïteit, namelijk een sprong van 1 voor dwarskracht en knik van 1 bij hoekverdraaiing. Deze sprong is echter niet meer gelijk aan 1 in de resultaten voor platen omdat deze verplaatsing betrekking heeft op een snedekracht van een balkelement, niet op de snedekracht van een plaat.

### 8.3 Aanbevelingen

Het basismodel is nu af en alle snedekrachten, oplegreacties en verplaatsingen zijn getoetst. In vervolgonderzoek zou nog beter gekeken kunnen worden hoe de vertaling van het balkjesmodel naar het plaatmodel juist is. De modellen geven identieke waarden in het veld, maar op de randen wijkt het af. Dit zou kunnen komen doordat in het balkjesmodel alleen de horizontale schuifkrachten zijn meegenomen voor het wringend moment. In een plaat is aan de randen echter ook een verticale component aanwezig. Ook zou er beter gekeken kunnen worden naar hoe het grillige effect in het balkjesmodel afhangt van het aantal balkjes en de mechanische eigenschappen van de balkjes. Verkleining van dit effect vergroot de betrouwbaarheid van de resultaten.

Voor het model zelf kan er nog gekeken worden naar de afhankelijkheid van de breedte van de balkjes in x- en y-richting. De oplossingen van een balkjesmodel zouden onafhankelijk moeten zijn van de verhouding van breedtes  $dx$  en  $dy$ . Deze fout zal waarschijnlijk komen door een verkeerde toewijzing van  $dx$  of  $dy$  in het script, maar de verdeling van rek-energie veroorzaakt door het wringend moment kan ook een bijdrage leveren. Er wordt daarom aanbevolen eerst te zoeken naar de verwijzingsfout in het model, en daarna te kijken of de verdeling van rek-energie een significante bijdrage levert.

Het aantal balkjes heeft in het model voor invloedslijnen van snedekrachten ook invloed op de resultaten. De piek die ontstaat bij de dwarskrachten en buigende momenten wordt groter naarmate het aantal balkjes kleiner wordt. De grootte van de puntlast blijft namelijk gelijk, terwijl de balkjes steeds smaller en korter worden. Dit probleem zou aangepakt kunnen worden door voor de puntlast een invloedgebied te bepalen, die constant blijft bij het aanpassen van het aantal balkjes. Bij een toename van het aantal balkjes wordt de last dan verdeeld over een groter aantal knopen. Voor de brute kracht methode is deze projectie gemakkelijk te implementeren, echter voor de dummybelasting methode zal moeten worden gekeken hoe de eenheidsverplaatsing in deze situatie is gedefinieerd.

Voor vervolgonderzoek wordt geadviseerd de interpretatie van de invloedslijnen van platen beter te bekijken. Er moet worden gekeken naar hoe veel de piek in de oplossingen invloed heeft op de oplossingen in de rest van het veld. Daarnaast zal onderzocht moeten worden in hoeverre de piek ook daadwerkelijk optreedt in de werkelijkheid. In de werkelijkheid is er nooit sprake van een puntlast, maar wordt deze altijd verspreid over een oppervlakte.

Ook zal de fout in de dwarskracht in het model voor invloedslijnen uitgezocht moeten worden. In het basismodel is de dwarskracht zonder torsie succesvol getoetst. Het is onduidelijk waarom deze waarden in de modellen voor invloedslijnen niet meer kloppen met de oplossingen uit de literatuur.

Daarnaast kan het model beter worden verpakt in een programma met een gebruiksvriendelijke interface. Nu werkt het model in een python script. Als hier een duidelijke interface aan kan worden toegevoegd is het model beter te gebruiken voor studenten en/of ingenieurs in de dagelijkse praktijk. Als er wordt toegewerkt naar een product dat veel wordt gebruikt zal er ook gekeken moeten worden naar uitbreiding van de toepassingen van het model. Het model heeft nog meer mogelijkheden dan in dit onderzoek zijn gebruikt. Er zijn bijvoorbeeld meer mogelijkheden voor opleggingen of anisotrope platen.

## 9 Bronvermelding

- Aarts, A. (2016). *Modelling invloedslijnen platen*. TU Delft.
- Bareš, R., & Massonnet, C. E. (1968). *Analysis of beam grids and orthotropic plates by the Guyon-Massonnet-Bareš method*. Prague, SNTL. London: Lockwood.
- Blaauwendraad, J. (2008). *Eindige-elementenmethode voor staafconstructies*. Delft: VSSD.
- Blaauwendraad, J. (2010). *Plates and FEM* (Vol. 171). Dordrecht: Springer Netherlands.  
<http://doi.org/10.1007/978-90-481-3596-7>
- Grillage Analogy Method. (2016). Retrieved May 1, 2017, from  
<https://www.ukessays.com/essays/engineering/grillage-analogy-method.php>
- Hambly, E. C. (1991). *Bridge deck behaviour* (2nd ed.). London: E & FN SPON.
- Hołowaty, J. (2015). Numerical Approach for the Live Load Distribution in Road Bridges. *Computer Technology and Application*, 6, 101–106. <http://doi.org/10.17265/1934-7332/2015.02.007>
- Hoogenboom, P. C. J. (n.d.). *Boundary conditions for thin plates*. Delft.
- Imholz, L. (2016). *Invloedslijnen voor platen*. TU Delft.
- O'Brien, E. J., Keogh, D. L., & O'Connor, A. J. (2014). *Bridge deck analysis*.
- Oomen, S. (2012). *Vlakke plaatvloer modellering*. TU Delft.
- Pucher, A., & Juhl, H. (1964). *Einflussfelder elastischer platten. - influence surfaces of elastic plates. TT - (3. Aufl.)*. Wien: Springer.
- Rinaldi, M. (2013). Gilbratar Airport By 3Dreid and BBlur Architecture. Retrieved June 13, 2017, from  
<http://aasarchitecture.com/2013/01/gibraltar-airport-by-3dreid-and-bblur-architecture.html>
- Sattler, K. (1955). Betrachtungen zum Berechnungsverfahren von Guyon-Massonnet für freiaufliegende Trägerroste und Erweiterung dieses Verfahrens auf beliebige Systeme. *Bauingenieur*, 30(3).
- Timoshenko, S., & Woinowsky-Krieger, S. (1959). Theory of plates and shells. Retrieved from  
<https://trid.trb.org/view.aspx?id=102979>
- Vliet, E. van. (2009). *Discrete modellering van plaatwerking*. TU Delft.
- Welleman, J. W. (2016). *Work, energy methods & influence lines*. Zoetermeer: Bouwen met Staal.



## 10 Bijlages

### 10.1 Startnotitie

#### **Planning:**

<b>Week</b>	<b>Data</b>	<b>Activiteit</b>	<b>Belangrijke data</b>
1	24/4 – 28/4	Schrijven startnotitie	27 april koningsdag
2	1/5 – 5/5		1 mei startnotitie 5 mei Bevrijdingsdag
3	8/5 – 12/5		
4	15/5 – 19/5	Schrijven tussenrapport	19 mei tussenrapport 17 mei t/m 30 mei, vakantie J.W. Welleman
5	22/5 – 26/5	Schrijven besprekingsverslag	25 mei en 26 mei Hemelvaartsdag 17 mei t/m 30 mei, vakantie J.W. Welleman
6	29/5 – 2/6		17 mei t/m 30 mei, vakantie J.W. Welleman
7	5/6 – 9/6	Schrijven concept-eindrapport	5 juni Tweede Pinksterdag
8	12/6 – 16/6	Schrijven eindrapport en zelf-evaluatie	12 juni concept-eindrapport
9	19/6 – 23/6	Maken eindpresentatie	19 juni eindrapport en zelfevaluatie
10	26/6 – 30/6	Geven eindpresentatie	26 en 27 juni presentatie
11	3/7 – 7/7	-	3 juli Evt. aanvulling

#### **Doel:**

Een ingenieurstool waarmee gemakkelijk invloedslijnen kunnen worden bepaald voor platen.

#### **Huidige stand:**

Vier studenten zijn in hun bachelor-eindwerk bezig geweest met de modellering van platen. Hiermee zijn al veel resultaten geboekt.

#### **Analyse eerdere bachelor eindwerken**

+ = succesvol uitgevoerd

- = onsuccesvol uitgevoerd

<b>Stu- dent</b>	<b>Datum</b>	<b>Methode</b>	<b>Soft- ware</b>	<b>Wrin- ging</b>	<b>Controle FEM</b>	<b>Con- trole analy- tisch</b>	<b>Invloed- lijnen</b>	<b>Con- trole analy- tisch</b>
<b>Evert van Vliet</b>	Mei 2009	Krachten- methode	Maple		+			
<b>Steven Oomen</b>	Juni 2012	Krachten- methode	Maple	+	+/- (wrin- ging)			
<b>Aukje Aarts</b>	Juni 2016	Ver- plaatsin- genme- thode	Maple	+	+ / -(wrin- ging met reductie- factor)	+	+ (alleen voor op- legreac- ties en	-

							zakkin- gen)	
<b>Lars Imholz</b>	November 2016	Verplaatsingenmethode	Python	+	+/- (wringing)	+	+	-

Nog niet meegenomen:

- Dwarscontractie, kan meestal worden verwaarloosd, maar kan in sommige gevallen t belangrijk zijn (Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959)
- Meerdere vormen van oplegging (op lijn of punten)
- Orthotropie

Er is een ingenieurstool waarmee een plaat kan worden beschreven aan de hand van een balkjesmodel (grillage methode). Als de wringing wordt verwaarloosd werkt dit model zeer goed en komt het overeen met resultaten uit FEM-analyses en analytische oplossing (Timoshenko). Als de wringing wordt meegenomen komen resultaten echter niet meer overeen. Voor de invloedslijnen zijn wel tools ontwikkeld, maar nog slechts beperkt getoetst aan analytische oplossingen (Guyon-Massonnet). Echter, als het basismodel met wringing nog niet voldoet, zal de invloedslijn voor een plaat waarbij wringing wordt meegenomen ook niet voldoen.

De oplosmethode waarvan gebruikt wordt gemaakt heet de grillage methode ("Grillage Analogy Method," 2016; Hołowaty, 2015; O'Brien et al., 2014). Deze methode wordt vaak toegepast en is de simpele vorm van een FEM-analyse. Er zijn een aantal vuistregels vastgesteld om deze analyse succesvol toe te passen.

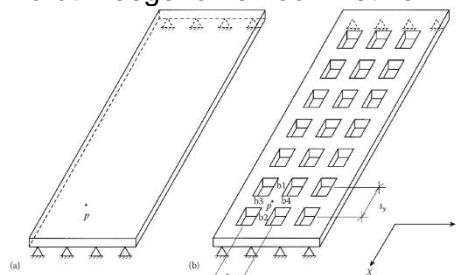


Figure 5.13 Grillage idealisation of a slab: (a) original slab; (b) corresponding grillage mesh.

### **Stappen nog benodigd voor voltooiën ingenieurstool**

1. Huidige basistool kloppend maken en toetsen op zowel verplaatsingen, snedekrachten en oplegreacties. Toetsing kan gebeuren met FEM-programma's, analytische oplossingen voor een plaatmodel en andere grillage programma's.
2. Tool voor invloedslijnen kloppend maken en toetsen voor zowel verplaatsingen, snedekrachten en oplegreacties (keuze voor slim model of brute kracht methode). Toetsing kan gebeuren met analytische oplossingen, FEM-programma's (puntsgewijs) en andere grillage programma's (puntsgewijs).
3. Meer mogelijkheden voor invoerwaarden (oplegreacties, (materiaal / geometrie-) orthotropie)
4. Ingenieurstool verpakken in een duidelijke en makkelijke interface

### **Insteeek mijn bachelor eindwerk**

Ik wil met mijn bachelor eindwerk verder stappen zetten richtingen het voltooiën van de ingenieurstool voor invloedslijnen voor platen. Ik verwacht niet de stappen 1 t/m 4 kunnen maken zoals hiervoor beschreven. Ik wil me eerst richten op het huidige model en dit aanpassen zodat wringing goed wordt gemodelleerd. Dit onderdeel wil ik afhebben voor het tussenrapport. Als deze stap is gezet wil ik met stap 2 de invloedslijnen maken en toetsen. Mocht ik nog tijd over hebben kan ik verder gaan met stappen 3 en 4.

### **Analyse model Larz Imholz:**

Het model van Lars bestaan uit een aantal stappen. De stappen zijn hieronder weergegeven met een korte toelichting en opmerkingen.

1. Vaststellen inputwaarden

a. Geometrie en materiaaleigenschappen

Er wordt gebruik gemaakt van vaste waarde EI.

Er wordt geen onderscheid geometrie in x en y-richting

$$I_s I_w = 1/3 b d^3 \text{ (alleen voor platen)}. \text{ Ipv } I_w = b d^3 \left( \frac{1}{3} - 0.21 \frac{d}{b} \left( 1 - \frac{d^4}{12a^4} \right) \right) \text{ of } b$$

$$d^3/6$$

b. Randvoorwaarden

Rand is scharnier, inklemmingX, inklemmingY of scharnier.

Andere opleggingen zijn niet mogelijk

Rand 1 (y=0)

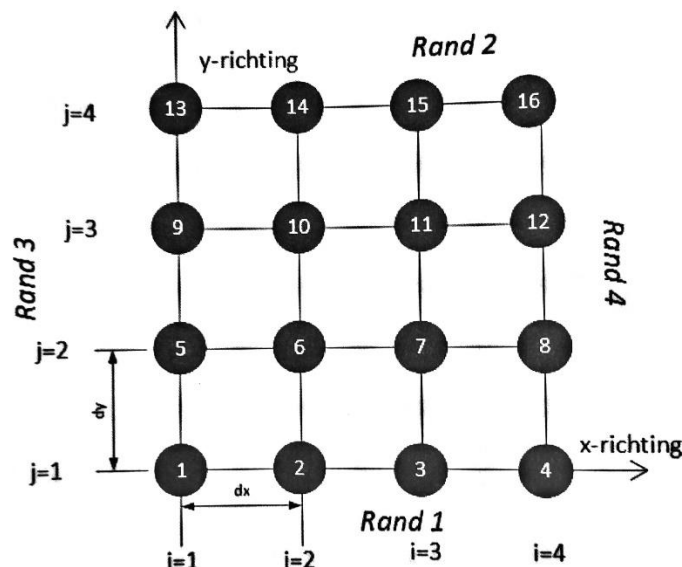
Rand 2 (y=L)

Rand 3 (x=0)

Rand 4 (x=L)

c. Aantal elementen

n elementen in x richting, m elementen in y richting



Figuur 3. Overzicht model inclusief knoopnummers bij n=3 en m=3

2. Bepalen vrijheidsgraden per knoop

Voor elke knoop wordt bepaald of de zakking en/of de rotatie in x en/of y richting is belemmerd. De knopen in de hoekpunten worden daarbij twee keer een beperking toegewezen.

3. Bepaling elementstijfheidsmatrix

De elementstijfheidsmatrix wordt bepaald aan de hand van de differentiaalvergelijking

$$\text{op één element: } EI_{zz,x} \cdot \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x), EI_{zz,y} \cdot \frac{d^4 w(y)}{dy^4} = q(y), GI_{w,x} \cdot \frac{d\phi(x)}{dx} = M_{w,x},$$

$$GI_{w,y} \cdot \frac{d\phi(y)}{dy} = M_{w,y}$$

De elementstijfheidsmatrices zijn altijd hetzelfde en hieronder weergegeven.

$$\mathbf{K}_{\text{elem},x} = \begin{bmatrix} \frac{12.0}{dx^3}EI_{zz_x} & -\frac{6.0}{dx^2}EI_{zz_x} & 0 & -\frac{12.0}{dx^3}EI_{zz_x} & -\frac{6.0}{dx^2}EI_{zz_x} & 0 \\ -\frac{6.0}{dx^2}EI_{zz_x} & \frac{4.0}{dx}EI_{zz_x} & 0 & \frac{6.0}{dx^2}EI_{zz_x} & \frac{2.0}{dx}EI_{zz_x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GI_{wx}}{dx} & 0 & 0 & -\frac{GI_{wx}}{dx} \\ -\frac{12.0}{dx^3}EI_{zz_x} & \frac{6.0}{dx^2}EI_{zz_x} & 0 & \frac{12.0}{dx^3}EI_{zz_x} & \frac{6.0}{dx^2}EI_{zz_x} & 0 \\ -\frac{6.0}{dx^2}EI_{zz_x} & \frac{2.0}{dx}EI_{zz_x} & 0 & \frac{6.0}{dx^2}EI_{zz_x} & \frac{4.0}{dx}EI_{zz_x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{GI_{wx}}{dx} & 0 & 0 & \frac{GI_{wx}}{dx} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\text{elem},y} = \begin{bmatrix} \frac{12.0}{dy^3}EI_{zz_y} & 0 & -\frac{6.0}{dy^2}EI_{zz_y} & -\frac{12.0}{dy^3}EI_{zz_y} & 0 & -\frac{6.0}{dy^2}EI_{zz_y} \\ 0 & \frac{GI_{wy}}{dy} & 0 & 0 & -\frac{GI_{wy}}{dy} & 0 \\ -\frac{6.0}{dy^2}EI_{zz_y} & 0 & \frac{4.0}{dy}EI_{zz_y} & \frac{6.0}{dy^2}EI_{zz_y} & 0 & \frac{2.0}{dy}EI_{zz_y} \\ -\frac{12.0}{dy^3}EI_{zz_y} & 0 & \frac{6.0}{dy^2}EI_{zz_y} & \frac{12.0}{dy^3}EI_{zz_y} & 0 & \frac{6.0}{dy^2}EI_{zz_y} \\ 0 & -\frac{GI_{wy}}{dy} & 0 & 0 & \frac{GI_{wy}}{dy} & 0 \\ -\frac{6.0}{dy^2}EI_{zz_y} & 0 & \frac{2.0}{dy}EI_{zz_y} & \frac{6.0}{dy^2}EI_{zz_y} & 0 & \frac{4.0}{dy}EI_{zz_y} \end{bmatrix}$$

De inputwaarden worden in de elementstijfheidsmatrix gesubstitueerd (niet meer ge-parameteriseerd)

Voor de randen wordt een aparte elementstijfheidsmatrix bepaald:

- $\mathbf{K}_{\text{elem,rand}} = 0.5 \cdot \mathbf{K}_{\text{elem}}$ , onduidelijk waarom? (onjuist meegenomen dat halve breedte)
- Torsiestijfheid randenbalken wordt gesteld op 0 (onduidelijk waarom precies)  
Er kan wel een wringend moment ontstaan langs een scharnierende rand.  
Onduidelijk waarom dit een juiste aanname is.

Onduidelijk waarom er voor  $x=0$  de richting van de krachten wordt omgedraaid:  $F_z A = -V_z$  en  $T_y A = -M_y A$ ? Omzetten naar globale positieve richtingen?

4. Bepalen belastingsvector, voor *invloedslijn*: *belastingsvector bestaat uit eenheidskracht op 1 knoop*

De inputwaarden worden in de elementstijfheidsmatrix gesubstitueerd (niet meer ge-parameteriseerd)

Belasting bestaat uit verdeelde belasting in alle richtingen en externe puntlasten

Voor randbalken worden belasting gehalveerd (halve breedte)

5. Bepalen stijfheidsmatrix systeem

Matrix wordt stap-voor-stap ingevuld, eerst in x-richting, dan in y-richting.

De matrix wordt in een gewone matrix geplaatst, dus geen sympy-object meer en daarmee niet meer ge-parameteriseerd.

6. Aanpassen stijfheidsmatrix met randvoorwaarden

Voor knopen waarin een vrijheidsgraad is verhinderd worden alle rijen en kolommen binnen van deze vrijheidsgraad 0. De diagonaal wordt 1 en daarmee de zakking of hoekverdraaiing dus gelijkgesteld aan 0.

Als de diagonaal een factor 0 heeft, wordt dit een factor 1. Onduidelijk waarom?

*Voor invloedslijn: herhaal stap 7 en 8 met eenheidskracht op alle knopen (brute force method).*

7. Bepalen verplaatsingsvector

De vergelijking met de aangepaste stijfheidsmatrix  $[k_{\text{randvoorwaarden}}] \cdot [U] = [f]$  wordt opgelost.

### 8. Bepalen snedekrachten

Aan de hand van de vergelijking  $M_x = -EI_{zz,x} \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2}$  met  $x=0$  of  $x = dx$ , en met op-

geloste differentiaalconstanten in termen van zakking en hoekverdraaiing. In het script nog gedeeld door  $dx$ , waarom is onduidelijk. (moment per eenheid van breedte (balkjesmodel  $\rightarrow$  plaatmodel)). Torsie niet meegenomen, moet wel?

Dwarskracht bepaald met  $V_x = \frac{M_{x,A} - M_{x,B}}{dx}$ , torsie niet meegenomen? moet wel

(Hambly, 1991)

Onduidelijk waarom er voor  $x=0$  de richting van de krachten wordt omgedraaid:  $FzA = -Vz$  en  $TyA = -MyA$ ? Weer terugzetten naar interne positieve richtingen?

### 9. Bepalen oplegreacties

De oplegreacties worden bepaald met  $[K] \cdot [U] = [f]$ . Alleen de oplegkrachten worden verwerkt, de oplegmomenten niet.

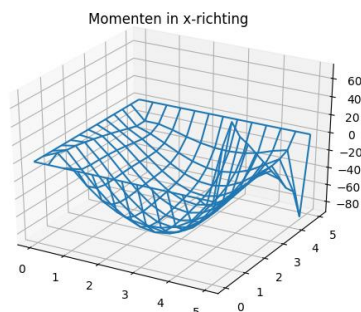
### 10. 3D-plot / contourplot

Er worden wireframe (normaal en stapsgewijs) gemaakt en contourplots.

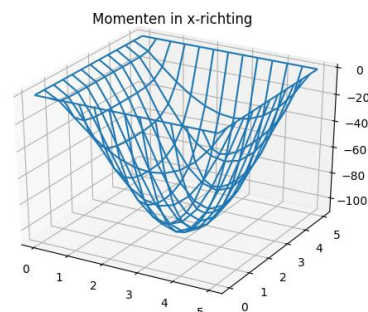
Algemene opmerkingen script:

- Indices zijn allemaal vanaf 1 ipv 0 door overstap vanuit Maple
- Input is beperkt in de mogelijkheden
- Randbalken onduidelijk gemodelleerd. Een halve breedte of niet? Waarom wordt de stijfheidsmatrix aangepast? Balkjes gemodelleerd in  $nc$  van doorsnede, maar hoe schematisatie op randen dan?
- Veel overbodige loops  $\rightarrow$  langzaam bij groot aantal knopen (4 seconden bij  $12 \times 12$  elementen, 42 seconden bij  $48 \times 48$  elementen)
- Geen geparameteriseerde oplossing, maar dit kost wellicht te veel rekenkracht en verklaart waarom het Maple-script langzaam werd bij grote modellen.
- Rare oplossingen ontstaan als torsie wordt meegenomen (momenten op scharnieroplegging):

Met torsie



Zonder torsie



Enkele passages uit literatuur over hoe de randen opgelegd moeten worden:

### **Randen en torsie:**

*It has been recommended by Hambly (1991) that the row of longitudinal beams at each edge of the grillage should be located in a distance of  $0.3d$  from the edge of the slab, where  $d$  is the slab depth. The objective is to locate these beams close to the resultant of the vertical shear stresses,  $\tau_{xz}$ , in the bridge slab, as illustrated in Figure 5.17. It has also been recommended that, when determining the torsional constant of these longitudinal grillage members, the breadth of slab outside  $0.3d$  should be ignored. The second moments of area of these beams are calculated using the full breadth of slab in the normal way. The validity of this recommendation has been confirmed by the authors through comparisons of grillage analysis results with those of elaborate three-dimensional 'brick' FE models. Care should be taken, however, that this recommendation does not result in supports being placed in the wrong locations. Figure 5.20 illustrates an example where a member is correctly placed more than  $0.3d$  from the end, so that the span length between supports in the grillage and the bridge slab are the same. (O'Brien et al., 2014)*

### **Randvoorwaarden dunne plaat**

(Blaauwendraad, 2010, p. 111; Timoshenko & Woinowsky-Krieger, 1959, p. 83)

Inklemming langs y-as:  $w = 0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ , daarmee  $\rightarrow$  wringend moment 0

Inklemming langs x-as:  $w = 0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ , daarmee  $\rightarrow$  wringend moment 0

Scharnier (simply-supported edge):  $w = 0$ ,  $m_{xx} = 0$ , daarmee  $\rightarrow$  wringend moment niet 0

## 10.2 Besprekingsverslag tussenrapport

Datum en tijd: 15 mei 2017

Aanwezigen: Tom van Woudenberg (Tom), Hans Welleman (Hans), Pierre Hoogenboom (Pierre)

In verband met de vakantie van Hans vindt de tussenbespreking plaats voordat het tussenverslag is ingeleverd. In plaats daarvan heeft Tom zijn vorderingen gedocumenteerd in twee werkdocumenten: de beschrijving van het basismodel en toetsing van het basismodel. Deze twee documenten vormen de basis voor dit, na het gesprek voltooide, tussenrapport.

Tom laat zien hoe ver hij is met de beschrijving van het basismodel. De indices en positieve richtingen zijn nu kloppend gemaakt volgens de definities van Hartsuijker. Pierre wijst op een foutje in de indices die Tom nog moet aanpassen. Daarnaast heeft Tom een animatie gemaakt van hoe de globale stijfheidsmatrix wordt gevormd aan de hand van de elementstijfheidsmatrices van de balkelementen. Deze animatie is niet heel nuttig voor in het verslag maar Hans en Pierre adviseren deze te gebruiken in de presentatie. Pierre vraagt of ook de randvoorwaarden in de animatie verwerkt kunnen worden. Dit is mogelijk volgens Tom, maar hij zal zich eerst focussen op het afronden van het werk zelf.

Tom laat het document zien waarin hij het huidige model heeft getoetst op torsie. Hij geeft aan dat hij een beperking voor het model heeft gevonden, die eerder nog niet was meegenomen (namelijk, Poisson's ratio van 0). Hij laat de onderbouwing hiervan zien en vraagt of dit inderdaad zo is. Hans en Pierre geven aan dat dit inderdaad waar zou kunnen zijn. Pierre vraagt zich af of dit effect wel mee kan worden genomen in het model. Tom geeft aan dat dit het model zeer vermoelijkt en dat het model waarschijnlijk dan een volledig plaatmodel is geworden, in plaats van een versimpeling daarvan. Pierre is het hier mee eens.

Tom laat ook de resultaten zien en welke resultaten nog gemaakt moeten worden. Tom laat het grillige effect zien dat ontstaat bij aansluiting van twee balkelementen. Vraag van Hans en Pierre of dit effect kleiner wordt bij verhogen van het aantal balkjes. Tom zegt dat dit inderdaad zo is, maar hij heeft dit niet gedocumenteerd. Tom wijst ook op 'spiky'-karakter van de momentenlijn aan de zijkanten. Dit komt door hetzelfde effect, maar is op de randen vergroot. Hans en Pierre vragen of ook dit effect kleiner wordt bij het verhogen van het aantal balkjes. Tom heeft dit nog niet goed bekeken. Hans en Pierre geven aan dat de vragen die nog open staan duidelijk kunnen worden gedocumenteerd met een onderzoeksvraag en conclusie.

Tom geeft aan dat hij deze week de uitvoer van het model nog wil afmaken en de nog ontstane vragen nog wil beantwoorden. Ook wil hij een opzetje maken voor de te zetten stappen voor het model van invloedslijnen, waaraan hij na het tussenrapport wil beginnen.

Voor het tussenverslag is niet een compleet verslag nodig, maar is het wel goed een voorwoord en inleiding te schrijven geeft Hans aan. Tom heeft hiervoor de opzet al gemaakt in de startnotitie, maar dit kan nog verder worden uitgewerkt.