Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Hoe centrale groepsuitbreidingen ontstaan uit oppervlaktes van driehoeken

How central group extensions arise from the notion of area of triangles

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

ARNOUD VAN DER LEER

Delft, Nederland
Juli 2018

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

"Hoe centrale groepsuitbreidingen ontstaan uit oppervlaktes van driehoeken"

"How central group extensions arise from the notion of area of a triangles"

ARNOUD VAN DER LEER

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr. B. Janssens

Overige commissieleden

Dr. J.G. Spandaw

Dr. W.M. Ruszel

Juli 2018 Delft

Abstract

In deze scriptie volgen we de lijn die in W. van Est in “A group theoretic interpretation of area in the elementary geometries”[1] heeft uitgezet, maar we gaan grondiger in op de stof en bewijzen de meeste claims die door Van Est worden gedaan. We kijken naar wat triviale en nontriviale centrale groepsuitbreidingen zijn, wat die te maken hebben met cocykels en coranden en cohomologieklassen. We zien dat iedere cocykel een corresponderende homogene cocykel heeft. Aan de hand van het oppervlaktebegrip in een tweedimensionale ruimte kunnen we een homogene cocykel definiëren en daarmee kunnen we dan een centrale groepsuitbreiding construeren van de symmetriegroepen op het tweedimensionale hyperbolische, euclidische en elliptische vlak. We zien dat die uitbreidingen niet triviaal zijn, maar dat wanneer we ieder van deze uitbreidingen verheffen naar hun universele overdekking, de uitbreiding op de symmetriegroep van het hyperbolische vlak triviaal wordt, in tegenstelling tot die van het euclidische vlak.

Voorwoord

Het onderzoek waaruit dit verslag tot stand is gekomen, is uitgevoerd ter afsluiting van de bacheloropleidingen Technische Wiskunde en Technische Informatica aan de Technische Universiteit Delft. Voordat ik dit onderzoek begon, werd mij gevraagd om een presentatie te houden over het te voeren onderzoek. Omdat ik me toen nog niet had ingelezen op het onderwerp, had ik eigenlijk geen idee waar het onderzoek over zou gaan en heb daarom wat verteld over wiskundige ruimtes, (verschuivingen in) Hilbertruimtes, quantummechanica en pianosnaren. Na een kwartaal van lezen, nadenken, schrijven, schrappen en nog meer nadenken, heb ik het inzicht verkregen dat het onderzoek wel iets te maken heeft met deze onderwerpen, maar dat de kern ergens anders ligt.

Mijn kennis over dit onderwerp is in de afgelopen maanden gestaag toegenomen. Dit was mij echter in mijn eentje nooit gelukt. Allereerst gaat daarom mijn dank uit naar mijn begeleider, Bas Janssens, die altijd enthousiast was, altijd het overzicht behield en vaak met nieuwe ideeën kwam over hoe de ontbrekende stukken in een redenering konden worden aangepakt. Daarnaast wil ik mijn vriendin, Licia, bedanken, die zo nu en dan haar bureau beschikbaar stelde en mij vaak pushte om aan het werk te gaan, ook als ik daar zelf geen zin in had. Ten slotte wil ik mijn ouders, broertje en zusje bedanken, bij wie ik onder het avondeten vaak mijn enthousiasme over het project kwijt kon.

Persoonlijk ben ik erg trots op het bewijs van stelling 13, waarin blijkt dat twee cocykels via een isomorfisme exact gelijk aan elkaar zijn. Ook het bewijs van stelling 31 heeft mij blij verrast, omdat ik had verwacht dit niet eenvoudig te kunnen bewijzen.

Bij voorbaat dank voor het ter hand nemen van deze scriptie. Ik hoop dat het lezen ervan uw leven in enig opzicht zal verrijken.

Arnoud van der Leer,
Leiderdorp,
2018-07-12

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Inleiding

In een tak van de quantummechanica bestudeert men een quantummechanisch systeem door te kijken naar de symmetrieën die dat systeem, of een structuur die dat systeem vertegenwoordigt, heeft. Zo'n structuur kan een zogenoemde 'Hilbertruimte' zijn. Nu blijkt dat de symmetrieën die op een dergelijke Hilbertruimte werken, te veel informatie bevatten. Er zijn meerdere van die symmetrieën die bij één symmetrie van het quantummechanisch systeem horen. Daarom vormen de symmetrieën van de Hilbertruimte een zogenoemde 'groepsuitbreiding' op de symmetrieën van het systeem. In dit verslag gaan we kijken wat groepsuitbreidingen zijn en hoe groepsuitbreidingen tot stand komen uit het oppervlaktebegrip in een tweedimensionale ruimte.

We gaan in hoofdstuk 2 centrale groepsuitbreidingen definiëren, kijken wat een triviale groepsuitbreiding is en wat het verschil is met een nontriviale groepsuitbreiding. We bepalen wat groepsuitbreidingen te maken hebben met 'cocykels', 'coranden' en 'cohomologieklassen'. In hoofdstuk 3 kijken we naar twee manieren om uitbreidingen op een groep via een homomorfisme, te 'verheffen' naar een andere groep. In hoofdstuk 4 gaan we het verband bepalen tussen 'homogene cocykels' en cocykels, zodat we in hoofdstuk 5, aan de hand van oppervlaktes in een tweedimensionale ruimte, met een homogene cocykel een groepsuitbreiding kunnen construeren. In hoofdstuk 6 gaan we dan zien dat deze uitbreiding niet triviaal is. In hoofdstuk 7 gaan we eerst symmetrieën op een tweedimensionale ruimte ontleden, dan het verband laten zien tussen deze ontleding en een cocykel en ten slotte laten zien dat hierdoor de uitbreiding op de universele overdekking van de symmetriegroep triviaal is. In hoofdstuk 8 gaan we wederom kijken naar de uitbreiding van een symmetriegroep, maar ditmaal van een boloppervlak. We zullen deze uitbreiding construeren en laten zien dat deze niet triviaal is.

We volgen de structuur die Van Est gebruikte in zijn artikel, hier en daar aanvullingen gevend als dat in de lijn van het verhaal past. Waar Van Est claims heeft gedaan die om een langer bewijs vragen, wordt uitgeweken naar de appendices, waar een theoretische basis wordt gelegd voor de door Van Est gedane claims. Wanneer in de tekst wordt verwezen naar een stelling, lemma of corollarium, dan is dat in een appendix te vinden.

Hoofdstuk 2

Centrale Groepsuitbreidingen

Een *centrale groepsuitbreiding* (definitie 4) op een groep G door een abelse groep C is een groep U, samen met een homomorfisme $\Phi : U \to G$ (projectie), met de volgende eigenschappen:

U1 C is (isomorf met) een deelgroep van U en alle elementen van C commuteren met alle elementen van U

U2 C is de kern van Φ

U3 Φ is surjectief

Zo'n uitbreiding bestaat voor ieder paar groepen G en C (met C abels).

Een voorbeeld is de groep $U = G \times C$: de groep bestaande uit paren (g, c) met $g \in G$ en $c \in C$, met de groepsbewerking $(g_1, c_1)(g_2, c_2) = (g_1g_2, c_1c_2)$ en de projectie $\Phi((g, c)) = g$. Deze uitbreiding noemen we een *triviale uitbreiding*. Niet alle uitbreidingen zijn echter triviaal.

2.1 Nontriviale uitbreidingen

Voor een element $g \in G$, is het inverse beeld $\Phi^{-1}(g) \subseteq U$ een nevenklasse van C in U (zie stelling 4 voor het bewijs). Dat wil zeggen dat er een element $u \in U$ bestaat zodanig dat $\Phi^{-1}(g) = uC = \{uc \mid c \in C\}$.

Voor elk element $g \in G$ kiezen we nu een element in $\Phi^{-1}(g)$, dus een element $u \in U$ zodanig dat $\Phi(u) = g$. Dit element noemen we $s(g)$. De zo ontstane functie $s : G \to U$ noemen we een *selector*. Dan heeft ieder element $u \in U$ een unieke representatie als $u = s(g)c$ voor zekere $g \in G$ en $c \in C$ (stelling 5). Daarom kunnen we iedere u ook wel schrijven als paren (g, c), waarbij g en c een soort coördinaten zijn voor u.

Nu lijkt de representatie van U een triviale uitbreiding te beschrijven. Het verschil zit hem echter in de groepsbewerking. We definieren eerst $f(g_1, g_2) = s(g_1)s(g_2)s(g_1g_2)^{-1}$. Dan is

$$s(g_1)s(g_2) = s(g_1g_2)f(g_1, g_2). \tag{2.1}$$

Zij $u_i = s(g_i)c_i$ voor $i \in \{1, 2\}$. Merk op dat $c_i \in C$ en c_i commuteert met ieder element van U. Dan is

$$u_1u_2 = s(g_1)c_1s(g_2)c_2 = s(g_1)s(g_2)c_1c_2 = s(g_1g_2)f(g_1, g_2)c_1c_2.$$

Merk op dat

$$\Phi(f(g_1, g_2)) = \Phi(s(g_1))\Phi(s(g_2))\Phi(s(g_1g_2))^{-1} = g_1g_2(g_1g_2)^{-1} = 1.$$

Daarom is $f(g_1, g_2) \in C$. Als we dan de elementen noteren met hun coördinaten, krijgen we

$$(g_1, c_1)(g_2, c_2) = (g_1 g_2, f(g_1, g_2) c_1 c_2)$$

of, als we de operatie op C additief schrijven:

$$(g_1, c_1)(g_2, c_2) = (g_1 g_2, f(g_1, g_2) + c_1 + c_2). \tag{2.2}$$

Omdat de groepsbewerking associatief is en f waarden heeft in C (die dus commuteren met alle elementen in U), vinden we uit $(s(g_1)s(g_2))s(g_3) = s(g_1)(s(g_2)s(g_3))$ met $g_1, g_2, g_3 \in G$ het volgende:

$$\begin{aligned}
s(g_1g_2)f(g_1,g_2)s(g_3) &= s(g_1)s(g_2g_3)f(g_2,g_3)\\
s(g_1g_2)s(g_3)f(g_1,g_2) &= s(g_1)s(g_2g_3)f(g_2,g_3)\\
s(g_1g_2g_3)f(g_1g_2,g_3)f(g_1,g_2) &= s(g_1g_2g_3)f(g_1,g_2g_3)f(g_2,g_3)\\
f(g_1g_2,g_3)f(g_1,g_2) &= f(g_1,g_2g_3)f(g_2,g_3)\\
f(g_1g_2,g_3)f(g_1,g_2)f(g_1,g_2g_3)^{-1}f(g_2,g_3)^{-1} &= 1.
\end{aligned}$$

Dit zijn waarden in C en we kunnen dit additief schrijven als

$$f(g_1g_2, g_3) + f(g_1, g_2) - f(g_1, g_2g_3) - f(g_2, g_3) = 0. \tag{2.3}$$

Een functie die aan deze vergelijking voldoet met waarden in een abelse groep noemen we een *2-cocykel* op G. We zullen deze in het vervolg gewoon cocykel noemen. Uit bovenstaande vergelijking volgt vrij snel dat het optellen van twee cocykels, of het negatief maken van een cocykel, wederom een cocykel geeft. De cocykels vormen daarom een additieve groep.

Zoals we hierboven hebben gezien, kan iedere centrale groepsuitbreiding (U, Φ) op een groep G met een abelse groep C ook wel beschreven worden als *de groep van paren (g, c) waarvoor de groepsbewerking is gedefinieerd zoals in vergelijking 2.2 met een passende cocykel f op G, waar $\Phi(g, c) = g$*. Echter, deze beschrijving is niet uniek, omdat f en dus de groepsbewerking afhangt van de selector.

Andersom redenerend, kunnen we aan de hand van een cocykel f met 2.2 een groepsbewerking definiëren op een groep van paren (g, c) en op die manier een groepsuitbreiding op G met C verkrijgen. Die uitbreiding is dan een (U, Φ), met $U = G \times C$, en de groepsbewerking gegeven door vergelijking 2.2 met eerdergenoemde f, en $\Phi(g, c) = g$ (stelling 7).

2.2 Veranderen van selector

Als we een groepsuitbreiding hebben, dan hangt de cocykel f af van de keuze van de selector s. We gaan nu kijken welke invloed het veranderen van de selector heeft. Laat s' een andere selector zijn. Omdat voor iedere $g \in G$, beiden $s(g)$ en $s'(g)$ in $\Phi^{-1}(g) = uC$ liggen (voor zekere $u \in U$), is $s(g) = uc_1$ en $s'(g) = uc_2$ voor $c_1, c_2 \in C$. Dan is het verschil $s'(g)s(g)^{-1} = u(c_2 - c_1)u^{-1} = c_2 - c_1 \in C$. Als we dit verschil $v(g)$ noemen, dan geeft dit de gelijkheid $s'(g) = s(g)v(g)$. Andersom is, voor een functie $v : G \to C$, $s'(g) = s(g)v(g)$ ook een selector.

De selector s' geeft een cocykel f'. Merk op dat v waarden heeft in C, die daarom commuteren met ieder element van U. Nu geldt (zie ook vergelijking 2.1):

$$\begin{aligned}
s(g_1)s(g_2) &= s(g_1g_2)f(g_1,g_2)\\
f(g_1,g_2) &= s(g_1)s(g_2)s(g_1g_2)^{-1}\\
s'(g_1)s'(g_2) &= s'(g_1g_2)f'(g_1,g_2)\\
s(g_1)v(g_1)s(g_2)v(g_2) &= s(g_1g_2)v(g_2)f'(g_1,g_2)\\
f'(g_1,g_2) &= s(g_1)v(g_1)s(g_2)v(g_2)s(g_1g_2)^{-1}v(g_1g_2)^{-1}.
\end{aligned}$$

Als we nu de functie δv definiëren als het verschil $f'(g_1,g_2) - f(g_1,g_2)$, voortkomende uit $v(g)$, dan krijgen we:

$$\begin{aligned}
\delta v(g_1,g_2) &= f'(g_1,g_2) - f(g_1,g_2)\\
&= s(g_1)v(g_1)s(g_2)v(g_2)s(g_1g_2)^{-1}v(g_1g_2)^{-1}(s(g_1)s(g_2)s(g_1g_2)^{-1})^{-1}\\
&= v(g_1)v(g_2)v(g_1g_2)^{-1}s(g_1)s(g_2)s(g_1g_2)^{-1}s(g_1g_2)s(g_2)^{-1}s(g_1)^{-1}\\
&= v(g_1)v(g_2)v(g_1g_2)^{-1}\\
&= v(g_1) + v(g_2) - v(g_1g_2).
\end{aligned}$$

Zie ook vergelijking C.1.

Omdat δv het verschil is tussen twee cocykels, is δv zelf ook weer een cocykel. We noemen het de *corand* van v (definitie 9). De coranden vormen een additieve deelgroep van de groep van cocykels (stelling 8). We zagen zojuist al dat een verandering van de selector tot een verandering van de cocykel met een corand leidt. We noemen de verzameling $\{f + \delta v \mid v : G \to C\}$ de *cohomologieklasse* van f (definitie 10): de verzameling van functies die precies een corand met f verschillen. We hebben nu het volgende gevonden:

De centrale groepsuitbreidingen op G met C hebben een een-op-eenrelatie met de cohomologieklassen van cocykels (stelling 13).

Hoofdstuk 3

Het verheffen van een groepsuitbreiding

Laat (U, Φ) nu een uitbreiding zijn op G door C, met een cocykel f op G. Laat $\Psi : \bar{G} \to G$ een homomorfisme zijn. Dan kan f als volgt worden 'verheven' tot een cocykel $\bar{f}$ op $\bar{G}$: laat $\bar{f}(a, b) = f(\Psi(a), \Psi(b))$. Zij voor $i \in \{1, 2, 3\}$, voor $\bar{g_i} \in \bar{G}$, $g_i = \Psi(\bar{g_i})$. Omdat Ψ een homomorfisme is, is $\Psi(\bar{g_j}\bar{g_k}) = \Psi(\bar{g_j})\Psi(\bar{g_k}) = g_j g_k$ voor $j, k \in \{1, 2, 3\}$. Merk op dat f een cocykel is en daarom voldoet aan vergelijking 2.3. Dan is:

$$\begin{aligned}
&\bar{f}(\bar{g_1}\bar{g_2}, \bar{g_3}) + \bar{f}(\bar{g_1}, \bar{g_2}) - \bar{f}(\bar{g_1}, \bar{g_2}, \bar{g_3}) - \bar{f}(\bar{g_2}, \bar{g_3}) \\
&= f(\Psi(\bar{g_1}\bar{g_2}), \Psi(\bar{g_3})) + f(\Psi(\bar{g_1}), \Psi(\bar{g_2})) - f(\Psi(\bar{g_1})\Psi(\bar{g_2}, \bar{g_3})) - f(\Psi(\bar{g_2}), \Psi(\bar{g_3})) \\
&= f(g_1 g_2, g_3) + f(g_1, g_2) - f(g_1, g_2 g_3) - f(g_2, g_3) \\
&= 0
\end{aligned}$$

en daarmee is $\bar{f}$ een cocykel op $\bar{G}$. Daarom bepaalt de gegeven centrale uitbreiding op G met C een uitbreiding op $\bar{G}$ met C, die we de *verheven uitbreiding* zullen noemen.

Een andere manier om deze verheven uitbreiding te beschrijven is de volgende: Laat $\bar{U}$ de deelgroep zijn van het directe product $\bar{G} \times U$, bestaande uit die paren $(\bar{g}, u)$ met $\bar{g} \in \bar{G}$ en $u \in U$, waarvoor $\Psi(\bar{g}) = \Phi(u)$. Laat $\bar{\Phi}$ gegeven zijn door $\bar{\Phi}(\bar{g}, u) = \bar{g}$. Dan is $(\bar{U}, \bar{\Phi})$ (isomorf met) de verheven uitbreiding die hierboven geconstrueerd is door zijn cocykel (stelling 9).

Hoofdstuk 4

Homogene functies

Laat G en C groepen zijn met C abels. Dan is er voor iedere functie $f : G \times G \to C$ ook een functie $F : G \times G \times G \to C$ door, voor $g_0, g_1, g_2 \in G$, te nemen:

$$F(g_0, g_1, g_2) = f(g_0^{-1}g_1, g_1^{-1}g_2). \tag{4.1}$$

Zij nu g in G. Dan is

$$\begin{aligned} F(gg_0, gg_1, gg_2) &= f(g_0^{-1}g^{-1}gg_1, g_1^{-1}g^{-1}gg_2) \\ &= f(g_0^{-1}g_1, g_1^{-1}g_2) \\ &= F(g_0, g_1, g_2) \end{aligned}$$

Oftewel, voor alle $g \in G$, is $F(gg_0, gg_1, gg_2) = F(g_0, g_1, g_2)$. Functies die hieraan voldoen noemen we *homogeen*. Andersom geldt ook: laat $F : G \times G \times G \to C$ een homogene functie zijn. Dan is er een functie $f : G \times G \to C$, gegeven door

$$f(g_1, g_2) = F(1, g_1, g_1g_2). \tag{4.2}$$

Dan geldt:

$$\begin{aligned} F(g_0, g_1, g_2) &= F(g_0^{-1}g_0, g_0^{-1}g_1, g_0^{-1}g_2) \\ &= F(1, g_0^{-1}g_1, g_0^{-1}g_2) \\ &= F(1, g_0^{-1}g_1, g_0^{-1}(g_1g_1^{-1})g_2) \\ &= F(1, g_0^{-1}g_1, (g_0^{-1}g_1)(g_1^{-1}g_2)) \\ &= f(g_0^{-1}g_1, g_1^{-1}g_2). \end{aligned}$$

dus f voldoet aan vergelijking 4.1. Blijkbaar kunnen we aan de hand van een gewone functie met twee argumenten een homogene functie met drie argumenten construeren en aan de hand van een homogene functie met drie argumenten een gewone functie van twee argumenten. Deze twee constructies zijn inversen van elkaar, dus er is een een-op-eenrelatie tussen gewone functies van $G \times G$ naar C en homogene functies van $G \times G \times G$ naar C.

Als f nu een cocykel is, voor $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $h_i \in G$ en voor $i > 0$, we $g_i = h_{i-1}^{-1}h_i \in G$ in vergelijking 2.3 invullen en we vergelijking 4.2 gebruiken, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} 0 &= f(g_1g_2, g_3) + f(g_1, g_2) - f(g_1, g_2g_3) - f(g_2, g_3) \\ &= f(h_0^{-1}h_1h_1^{-1}h_2, h_2^{-1}h_3) + f(h_0^{-1}h_1, h_1^{-1}h_2) - f(h_0^{-1}h_1, h_1^{-1}h_2h_2^{-1}h_3) - f(h_1^{-1}h_2, h_2^{-1}h_3) \\ &= f(h_0^{-1}h_2, h_2^{-1}h_3) + f(h_0^{-1}h_1, h_1^{-1}h_2) - f(h_0^{-1}h_1, h_1^{-1}h_3) - f(h_1^{-1}h_2, h_2^{-1}h_3) \\ &= F(h_0, h_2, h_3) + F(h_0, h_1, h_2) - F(h_0, h_1, h_3) - F(h_1, h_2, h_3) \\ &= F(h_1, h_2, h_3) + F(h_0, h_1, h_3) - F(h_0, h_2, h_3) - F(h_0, h_1, h_2). \end{aligned} \tag{4.3}$$

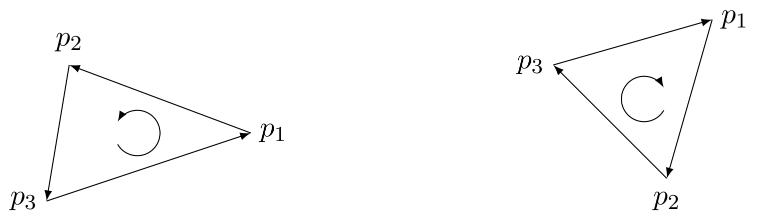
Als die laatste regel geldt voor een functie $F : G \times G \times G \to C$, dan noemen we F een *homogene cocykel*.

Hoofdstuk 5

Een groepsuitbreiding construeren met oppervlaktes

We gaan ons voor nu toeleggen op meetkunde in een euclidisch of hyperbolisch vlak (definities 12 en 13). Laat V zo'n vlak zijn en G de groep van alle afstand- en oriëntatiebehoudende verplaatsingen (rotaties, translaties) in dat vlak. We nemen in V een punt o en een oriëntatie vast.

Laat voor ieder drietal punten $v_0, v_1, v_2 \in V$, $\omega(v_0, v_1, v_2)$ het georiënteerde oppervlak zijn van de driehoek $\triangle v_0, v_1, v_2$ zijn. Dat wil zeggen: $\omega(v_0, v_1, v_2)$ is positief als de punten een draaiing tegen de klok in hebben, en negatief als ze met de klok mee draaien.



(a) Positieve oriëntatie (b) Negatieve oriëntatie

Figuur 5.1: Oriëntatie

Zij voor drie verplaatsingen $g_0, g_1, g_2 \in G$, $F(g_0, g_1, g_2) = \omega(g_0(o), g_1(o), g_2(o))$. Omdat het georiënteerde oppervlak van een driehoek niet verandert wanneer je deze verplaatst, geldt dat voor een verplaatsing $g \in G$:

$$F(gg_0, gg_1, gg_2) = \omega(g(g_0(o)), g(g_1(o)), g(g_2(o))) = \omega(g_0(o), g_1(o), g_2(o)) = F(g_0, g_1, g_2).$$

Daarom is F homogeen. Ook geldt voor ieder viertal punten $v_0, v_1, v_2, v_3 \in V$ (stelling 31):

$$\omega(v_1, v_2, v_3) + \omega(v_0, v_1, v_3) - \omega(v_0, v_2, v_3) - \omega(v_0, v_1, v_2) = 0,$$

dus F voldoet aan vergelijking 4.3 en is daarmee een homogene cocykel. We kunnen nu aan de hand van deze F een cocykel f definiëren met (vergelijking 4.1)

$$f(g_1, g_2) = F(1, g_1, g_1 g_2) = \omega(o, g_1(o), g_1(g_2(o))).$$

Volgens stelling 7 geeft deze f dan een centrale groepsuitbreiding op G met $\mathbb{R}$.

Hoofdstuk 6

Nontrivialiteit van de uitbreiding

In het vorige hoofdstuk hebben we een uitbreiding (U, Φ) gemaakt aan de hand van de oppervlakte van driehoeken in een euclidisch of hyperbolisch vlak.

Stel dat U triviaal is. Dan bestaat er een selector s' en bijbehorende coördinatisering van U, zodanig dat voor $(g_1, c_1), (g_2, c_2) \in U$ in die coördinatisering, $(g_1, c_1)(g_2, c_2) = (g_1 g_2, c_1 c_2)$. Oftewel, de uit s' voortkomende cocykel, f', is de nulfunctie. Daarom liggen alle cocykels van U in de cohomologieklasse van de nulfunctie en daarom is $f = 0 + \delta v = \delta v$ voor een zekere $v : G \to \mathbb{R}$. Merk op dat

$$0 = \omega(o, o, o) = f(1, 1) = v(1) + v(1) - v(1) = v(1).$$
$$0 = \omega(o, g(o), o) = f(g, g^{-1}) = v(g) + v(g^{-1}) - v(1) = v(g) + v(g^{-1}).$$

Zij nu $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$, zodanig dat

$$g_1 g_2 \ldots g_n g_1^{-1} g_2^{-1} \ldots g_n^{-1} = 1.$$

Zij dan

$$p(g_1, g_2, \ldots, g_n) = (g_1, 0)(g_2, 0) \ldots (g_n, 0)(g_1^{-1}, 0)(g_2^{-1}, 0) \ldots (g_n^{-1}, 0) = (1, \psi),$$

met

$$\begin{aligned}
\psi &= f(g_1, g_2) + f(g_1 g_2, g_3) + \cdots + f(g_1 g_2 \ldots g_n, g_1^{-1}) + \cdots + f(g_1 g_2 \ldots g_{n-1}^{-1}, g_n^{-1}) \\
&= v(g_1) + v(g_2) - v(g_1 g_2) + v(g_1 g_2) + v(g_3) - v(g_1 g_2 g_3) + \ldots \\
&+ v(g_1 g_2 \ldots g_n) + v(g_1^{-1}) - v(g_1 g_2 \ldots g_n g_1^{-1}) + \ldots \\
&+ v(g_1 g_2 \ldots g_{n-1}^{-1}) + v(g_n^{-1}) - v(g_1 g_2 \ldots g_{n-1}^{-1} g_n^{-1}) \\
&= v(g_1) + v(g_2) + v(g_3) + \cdots + v(g_1^{-1}) + \cdots + v(g_n^{-1}) - v(1) \\
&= v(g_1) + v(g_1^{-1}) + v(g_2) + v(g_2^{-1}) + \cdots + v(g_n) + v(g_n^{-1}) - 0 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

dus $p(g_1, g_2, \ldots, g_n) = (1, 0)$.

Daarom gaan we bewijzen dat wanneer V euclidisch of hyperbolisch is, er $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ bestaan, zodat $p(g_1, g_2, \ldots, g_n) \neq (1, 0)$, waardoor de uitbreiding niet triviaal kan zijn.

Merk op dat $(g_1, 0)(g_2, 0) \ldots (g_n, 0) = (g_1 g_2 \ldots g_n, \psi)$ met

$$\begin{aligned}
\psi &= f(g_1, g_2) + f(g_1 g_2, g_3) + \cdots + f(g_1 g_2 \ldots g_{n-1}, g_n) \\
&= \omega(o, g_1(o), g_1 g_2(o)) + \omega(o, g_1 g_2(o), g_1 g_2 g_3(o)) + \cdots + \omega(o, g_1 g_2 \ldots g_{n-1}(o), g_1 g_2 \ldots g_n(o)).
\end{aligned}$$

Dit is het georiënteerde oppervlak van de veelhoek $o, g_1(o), g_1 g_2(o), \ldots, g_1 g_2 \ldots g_n(o), o$.

Merk ten slotte nog op dat volgens stelling 7, voor $g \in G$, $(g, 0)^{-1} = (g^{-1}, 0)$.

6.1 Euclidisch

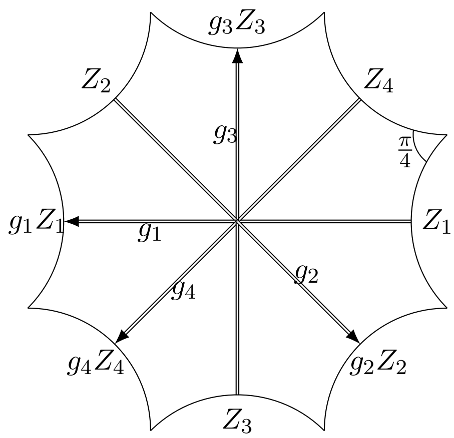
Stel dat V euclidisch is. Laat $t_1, t_2 \in G$ twee translaties zijn met afstand 1, loodrecht op elkaar, zodanig dat $\omega(o, t_1(o), t_1t_2(o)) = +\frac{1}{2}$. Zij voor $i \in \{0, 1\}$, $u_i = (t_i, 0)$. Dan is

$$p(u_1, u_2) = (t_1, 0)(t_2, 0)(t_1^{-1}, 0)(t_2^{-1}, 0) = (1, \psi),$$

waarbij ψ het georiënteerde oppervlak van de vierhoek $o, t_1(o), t_1t_2(o), t_2(o), o$ is, namelijk 1. Daarom is de uitbreiding in het euclidische geval niet triviaal.

6.2 Hyperbolisch

Stel dat V hyperbolisch is. We nemen een regelmatige achthoek A met als hoek tussen iedere twee aansluitende kanten $\frac{\pi}{4}$. We nemen A zodanig dat o zijn middelpunt is. Laat dan g_1, g_2, g_3, g_4 de translaties loodrecht op de zijden, door o zijn, zie figuur 6.1.



Figuur 6.1: De achthoek

Zij $a = p((g_1, 0), (g_2, 0), (g_3, 0), (g_4, 0))$. Dat $g_1g_2g_3g_4g_1^{-1}g_2^{-1}g_3^{-1}g_4^{-1} = 1$, kan als volgt worden ingezien:

Merk op dat iedere hoek van de achthoek maar $\frac{\pi}{4}$ graden is. Daarom kan de hele hyperbolische ruimte worden betegeld met deze achthoeken, waarbij er steeds acht om één hoekpunt liggen. g_4^{-1} verplaatst o dan over Z_4 naar de achthoek die ten "noordoosten" van onze achthoek ligt. Vervolgens verplaatst g_3^{-1} dit punt, $g_4^{-1}(o)$ over $g_4^{-1}(Z_3)$ naar een volgende achthoek. Merk echter op dat $g_4^{-1}(Z_3)$ náást $g_4^{-1}(g_4Z_4) = Z_4$ ligt, dus de achthoek waarin $g_3^{-1}g_4^{-1}(o)$ terecht komt, ligt aan het hoekpunt tussen Z_4 en Z_1. Het blijkt dat de achthoek van $g_2^{-1}g_3^{-1}g_4^{-1}(o)$ óók aan dit hoekpunt grenst. Met $g_1g_2g_3g_4g_1^{-1}g_2^{-1}g_3^{-1}g_4^{-1}$ verplaatsen we o, via alle achthoeken die om het hoekpunt tussen Z_4 en Z_1 liggen, weer terug naar o. We kunnen het voorgaande ook checken voor de gehele achthoek. Deze wordt weer netjes afgebeeld op zichzelf. Daarom is $g_1g_2g_3g_4g_1^{-1}g_2^{-1}g_3^{-1}g_4^{-1} = 1$.

Nu is $a = (1, \psi)$, met ψ het oppervlak van de achthoek A', met

$$A' = o, g_1(o), g_1g_2(o), \ldots, g_1g_2g_3g_4g_1^{-1}g_2^{-1}g_3^{-1}(o), o.$$

Merk op dat

$$\angle o, g_1(o), g_1g_2(o) = \angle g_1^{-1}(o), o, g_2(o) = \frac{\pi}{4}.$$

Evenzo is $\angle g_1(o), g_1g_2(o), g_1g_2g_3(o) = \frac{\pi}{4}$, evenals de andere hoeken van A'. Merk op dat de hoeken van A' de middelpunten zijn van de kopieën van A waarmee we de ruimte betegelen. Daarom liggen de hoeken van A' even ver uit elkaar en omdat ze even groot zijn, is A' een regelmatige achthoek. Omdat de hoeken van A' even groot zijn als de hoeken van A en omdat ze beide regelmatige achthoeken zijn, is A' congruent met A en het oppervlak van A' is het oppervlak van A.

A bestaat uit acht driehoeken, ieder met een hoekensom van $2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot \pi}{8} = \frac{\pi}{2}$. In de hyperbolische meetkunde is het oppervlak van een driehoek gelijk aan het verschil tussen π en zijn hoekensom. Iedere driehoek heeft daarom een oppervlak van $\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Daarom is ψ, het georiënteerde oppervlak van de achthoek gelijk aan $8 \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi$.

Daarom is

$$p((g_1, 0), (g_2, 0), (g_3, 0), (g_4, 0)) = (1, 4\pi),$$

dus in het hyperbolische geval is de uitbreiding niet triviaal.

Hoofdstuk 7

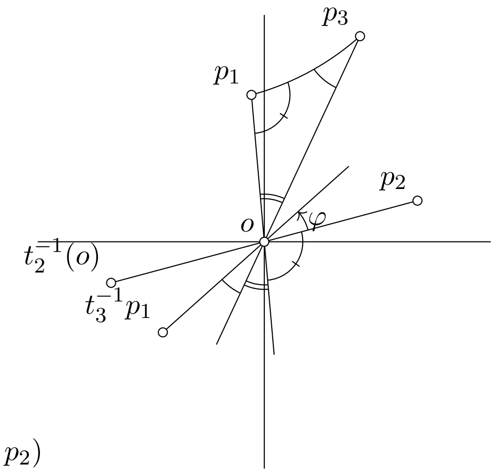
De universele overdekking

7.1 Verplaatsingen ontleden

Een verplaatsing g in euclidische of hyperbolische meetkunde kan op een unieke manier geschreven worden als $g = \tau(g)\rho(g)$ (stellingen 27, 28 en 30), waarbij $\rho(g)$ een rotatie om o is (dit noemen we vanaf nu een rotatie) en $\tau(g)$ een translatie. In de hyperbolische meetkunde is dit een translatie met een as die door o gaat, maar dit zullen we vanaf nu een translatie noemen.

Merk op dat voor een rotatie r, een translatie t en een verplaatsing g, $\rho(gr) = \rho(g)r$ (corollarium 5), $\rho(rg) = r\rho(g)$ (corollarium 4) en rtr^{-1} een translatie is (corollarium 3).

Laat t_1 en t_2 translaties zijn en laat $p_1 = t_1(o)$, $p_2 = t_2(o)$, $p_3 = t_1t_2(o)$, zie figuur 7.1. We willen t_1t_2 factoriseren. Laat t_3 de translatie $o \to p_3$ zijn. Dan laat $t_3^{-1}t_1t_2$ het punt o op zijn plek en dus is $t_3^{-1}t_1t_2$ een rotatie (stellingen 21 en 22). Daarom is $t_1t_2 = t_3\rho(t_1t_2)$, dus $t_3^{-1}t_1t_2 = \rho(t_1t_2)$. Daarom is de rotatiehoek φ van $\rho(t_1t_2)$ de hoek waarover alle punten verplaatst worden door $t_3^{-1}t_1t_2$. Als we nu het punt $t_2^{-1}(o)$ nemen, dan wordt dat door t_1t_2 verplaatst naar p_1, wat door t_3^{-1} wordt verplaatst naar $t_3^{-1}(p_1)$ (zie afbeelding). Daarom is φ de hoek $\angle t_2^{-1}(o), o, t_3^{-1}(p_1)$. Nu geldt (mede door verschillende verplaatsingen van de driehoek o, p_1, p_3):



Figuur 7.1: Het bepalen van φ aan de hand van een oppervlakte

$$\begin{aligned}\varphi &= \pi - \angle t_3^{-1}(p_1), o, p_2 \\ &= \pi - (\angle t_3^{-1}(p_1), o, t_3^{-1}(o) + \angle t_3^{-1}(o), o, t_1^{-1}(o) + \angle t_1^{-1}(o), o, p_2) \\ &= \pi - (\angle p_1, p_3, o + \angle p_3, o, p_1 + \angle o, p_1, p_3).\end{aligned}$$

Omdat in de euclidische meetkunde de hoekensom van een driehoek gelijk is aan π, is daar $\varphi = 0$. In hyperbolische meetkunde is het verschil tussen de hoekensom en π gelijk aan het (georiënteerde) oppervlak van de driehoek, dus

$$\varphi = \omega(o, p_1, p_3) = F(1, t_1, t_1t_2) = f(t_1, t_2).$$

7.2 Het vinden van een corand

We gaan nu uitsluitend verder met de hyperbolische meetkunde. We bedoelen met $r(\varphi)$ de rotatie over de hoek φ. We zagen dat $\rho(t_1t_2) = r(f(t_1, t_2))$. zij nu voor $g \in G$, $\rho'(g) = \rho(g)^{-1}$

en zij voor $g_1, g_2 \in G$,

$$\delta\rho'(g_1, g_2) = \rho'(g_1)\rho'(g_1g_2)^{-1}\rho'(g_2).$$

Dit is precies vergelijking C.1 in multiplicatieve vorm, met v vervangen door ρ'. Laat t_1, t_2 translaties zijn in G. Dan is

$$\delta\rho'(t_1, t_2) = \rho'(t_1)\rho'(t_1t_2)^{-1}\rho'(t_2) = 1 \cdot \rho'(t_1t_2)^{-1} \cdot 1 = r(f(t_1, t_2)).$$

Merk nu op dat voor een rotatie $r \in G$,

$$\begin{aligned}
\delta\rho'(rg_1, g_2) &= \rho'(g_1)r^{-1}r\rho'(g_1g_2)^{-1}\rho'(g_2) = \delta\rho'(g_1, g_2),\\
\delta\rho'(g_1, g_2r) &= \rho'(g_1)\rho'(g_1g_2)^{-1}rr^{-1}\rho'(g_2) = \delta\rho'(g_1, g_2),\\
f(rg_1, g_2) &= \omega(r(o), rg_1(o), rg_1g_2(o)) = \omega(o, g_1(o), g_1g_2(o)) = f(g_1, g_2),\\
f(g_1, g_2r) &= \omega(o, g_1(o), g_1g_2r(o)) = \omega(o, g_1(o), g_1g_2(o)) = f(g_1, g_2),
\end{aligned}$$

dus $\delta\rho'(g_1, g_2)$ en $f(g_1, g_2)$ veranderen niet als je g_1 links of g_2 rechts vermenigvuldigt met r. Zij nu

$$\begin{aligned}
&t_1 = \rho(g_1)^{-1}g_1 = \rho(g_1)^{-1}\tau(g_1)\rho(g_1) = \rho(g_1)^{-1}\rho(g_1)\rho(g_1)^{-1}\tau(g_1)\rho(g_1) = \rho(g_1)^{-1}\tau(g_1)\rho(g_1).\\
&t_2 = g_2\rho(g_2)^{-1} = \tau(g_2)\rho(g_2)\rho(g_2)^{-1} = \tau(g_2).
\end{aligned}$$

Dan zijn t_1 en t_2 translaties, verkregen door g_1 links en g_2 rechts te vermenigvuldigen met een rotatie. Dat geldt:

$$\delta\rho'(g_1, g_2) = \delta\rho'(t_1, t_2) = r(f(t_1, t_2)) = r(f(g_1, g_2)).$$

Als we kijken naar rotatiehoeken en we noteren de rotatiehoek van rotatie $r \in G$ met $h(r)$, dan zien we dat voor $g_1, g_2 \in G$,

$$\begin{aligned}
f(g_1, g_2) &\equiv h(\delta\rho^{-1}(g_1, g_2))\\
&\equiv h(\rho'(t_1)) + h(\rho'(t_1t_2)^{-1}) + h(\rho'(t_2))\\
&= h(\rho(t_1t_2)) - h(\rho(t_1)) - h(\rho(t_2)) \pmod{2\pi}.
\end{aligned}$$

Daarom is f een corand $\pmod{2\pi}$ van een functie die op G gedefinieerd is.

7.3 Het verheffen van f

We gaan de universele overdekking van G maken. Merk eerst op dat voor willekeurige translaties t_1 en t_2 en rotaties r_1 en r_2, het volgende geldt:

$$\begin{aligned}
(t_1r_1)(t_2r_2) &= t_1(r_1t_2r_1^{-1})r_1r_2\\
&= \tau(t_1(r_1t_2r_1^{-1}))\rho(t_1(r_1t_2r_1^{-1}))r_1r_2\\
&= \tau(t_1(r_1t_2r_1^{-1}))r(f(t_1, r_1t_2r_1^{-1}))r_1r_2.
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Laat nu $\bar{G}$ de groep zijn van paren (t, φ) met $t \in G$ een translatie en φ een reëel getal. De groepsbewerking op $\bar{G}$ definiëren we als

$$(t_1, \varphi_1)(t_2, \varphi_1) = (\tau(t_1(r(\varphi_1)t_2r(-\varphi_1))), f(t_1, r(\varphi_1)t_2r(-\varphi_1)) + \varphi_1 + \varphi_2). \tag{7.2}$$

De geslotenheid van $\bar{G}$ volgt uit het feit dat de functiewaarden van τ per definitie translaties zijn. Verder heeft $\bar{G}$ als eenheidselement $(1, 0)$, en de inverse van (t_1, φ_1) is $(r(-\varphi_1)t_1^{-1}r(\varphi_1), -\varphi_1)$.

Dat de bewerking op $\bar{G}$ associatief is, volgt uit de associativiteit van de normale vermenigvuldiging op G, maar dit voert te ver om nu te bewijzen.

Dat de afbeelding $\Psi : \bar{G} \to G, (t, \varphi) \mapsto t \cdot r(\varphi)$ een homomorfisme is, volgt uit vergelijking 7.1 en 7.2.

Eerst laten we zien dat $\bar{G}$ een overdekking is, dus dat er een surjectieve, continue afbeelding, Ψ in dit geval, bestaat, die $\bar{G}$ op G afbeeldt. Allereerst is Ψ surjectief, want voor $g \in G$, bestaat er $(\tau(g), h(\rho(g))) \in \bar{G}$, zodanig dat $\tau(g)r(h(\rho(g))) = \tau(g)\rho(g) = g$. Dat Ψ continu is, dus dat het beeld van Ψ geen gaten of sprongen heeft, is iets moeilijker te zien, maar eigenlijk is Ψ een combinatie van de functie die T op zichzelf afbeeldt, en $\mathbb{R}$ op een cirkelverzameling, door een simpele modulofunctie. Die functies zijn beiden continu, dus is Ψ ook continu en dus is $\bar{G}$ een overdekking van G. We moeten nu nog laten zien dat $\bar{G}$ een universele overdekking is. We kunnen T identificeren met V zelf, waarbij we een translatie t identificeren met het het beeld $t(o)$ van de oorsprong onder deze verschuiving. V is homeomorf met $\mathbb{R}^2$, en dus is $\bar{G}$ homeomorf met

$$T \times \mathbb{R} \cong V \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3.$$

Dat $\mathbb{R}^3$ eenvoudig samenhangend is, behoeft geen toelichting. Daarom is $\bar{G}$ ook enkelvoudig samenhangend en per definitie een universele overdekking.

7.4 Trivialiteit van (U, Φ) verheven naar de universele overdekking van G

Zij $(t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in \bar{G}$. Merk op dat, omdat $r(\varphi)(o) = o$ voor iedere φ,

$$\begin{aligned} f(t_1, r(\varphi_1)t_2r(-\varphi_1)) &= \omega(o, t_1(o), t_1r(\varphi_1)t_2r(-\varphi_1)(o)) \\ &= \omega(o, t_1r(\varphi_1)(o), t_1r(\varphi_1)t_2r(\varphi_2)(o)) \\ &= f(t_1r(\varphi_1), t_2r(\varphi_2)). \end{aligned}$$

Zij $h(t, \varphi) = -\varphi$. Dan is, voor $\bar{f}$ de verheven cocykel behorende bij f en $\Psi(t, \varphi) = tr(\varphi)$:

$$\begin{aligned} &\delta h((t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2)) \\ &= h(t_1, \varphi_1) + h(t_2, \varphi_2) + h((t_1, \varphi_1)(t_2, \varphi_1)) \\ &= h(t_1, \varphi_1) + h(t_2, \varphi_2) - h(\tau(t_1(r(\varphi_1)t_2r(-\varphi_1))), f(t_1, r(\varphi_1)t_2r(-\varphi_1)) + \varphi_1 + \varphi_2) \\ &= -\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2 + f(t_1, r(\varphi_1)t_2r(-\varphi_1)) \\ &= f(t_1, r(\varphi_1)t_2r(-\varphi_1)) \\ &= f(t_1r(\varphi_1), t_2r(\varphi_2)) \\ &= \bar{f}(\Psi(t_1, \varphi_1), \Psi(t_2, \varphi_2)) \\ &= \bar{f}((t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2)). \end{aligned}$$

Daarom is de cocykel $\bar{f}$ van de verheven uitbreiding $\bar{G}$, een corand van h. Dan is $\bar{f} - \delta h = 0$ ook een cocykel van $\bar{G}$, maar dat betekent dat $\bar{G}$ triviaal is.

We vonden eerst dat wanneer we G uitbreiden met de reeële getallen, met een cocykel f gegeven door de oppervlaktes van driehoeken, die uitbreiding nontriviaal is. Daarna hebben f verheven tot een cocykel $\bar{f}$ op $\bar{G}$, de universele overdekking van G. Met behulp van de wetmatigheid die zegt dat het oppervlak van een driehoek verband houdt met zijn hoekensom, bleek toen dat $\bar{f}$ een corand was en dat de nontriviale uitbreiding op G, bij verheffing naar $\bar{G}$ triviaal werd.

In euclidische meetkunde bestaat er geen verband tussen het oppervlak van een driehoek en zijn hoekensom, dus het is te verwachten dat de uitbreiding op G met de reële getallen nontriviaal blijft wanneer men deze verheft tot de universele overdekking $\bar{G}$ van G. In dat geval bestaat G wederom uit paren (t, φ) met t een translatie en φ een reëel getal, met de bewerking

$$(t_1, \varphi_1)(t_2, \varphi_2) = (t_1(r(\varphi_1)t_2r(-\varphi_1)), \varphi_1 + \varphi_2)$$

Dan kan dezelfde redenering gebruikt worden als in hoofdstuk 6 om aan te tonen dat $\bar{G}$ nontriviaal is.

Hoofdstuk 8

Elliptische meetkunde

Laat V de 2-sfeer zijn met een vaste oriëntatie, G de groep verplaatsingen op V en o een vast punt op V. Als punten v_1 en v_2 punten zijn op V, dan noteren we met (v_1, v_2) de cirkelboog van de grootcirkel door v_1 en v_2 met lengte kleiner dan of gelijk aan π. De cirkelboog loopt dan van v_1 naar v_2. Als de afstand tussen v_1 en v_2 over het oppervlak gelijk is aan π bestaan er oneindig veel cirkelbogen die hieraan voldoen. Zo niet, dan bestaat er maar één. De haakjes om (v_1, v_2) laten we voor het gemak vaak weg, tenzij dit tot verwarring kan leiden.

Laat er een drietal punten $v_0, v_1, v_2 \in V$ en een keuze voor (v_0, v_1), (v_1, v_2) en (v_2, v_0) zijn. Dan bedoelen we met de *georiënteerde driehoek* $\triangle v_0, v_1, v_2$, de georiënteerde kromme $(v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_0)$. Laat D het gebied zijn dat in positieve zin (tegen de klok in) door $\triangle v_0, v_1, v_2$ wordt omsloten. Dan noteren we met $\omega(v_0, v_1, v_2)$ het oppervlak van D. Omdat het totale oppervlak van V gelijk is aan 4π, is $0 \leq \omega(v_0, v_1, v_2) \leq 4\pi$. Zij voor vier punten v_0, v_1, v_2, v_3, voor ieder paar v_i, v_j, een cirkelboog $v_i v_j$ van een grootcirkel door v_i en v_j gegeven zijn, zodanig dat $v_i v_j$ de andersom gerichte boog $v_j v_i$ is. Dan is

$$\omega(v_1, v_2, v_3) + \omega(v_0, v_1, v_3) - \omega(v_0, v_1, v_2) - \omega(v_0, v_2, v_3) \in \{-4\pi, 0, 4\pi\}.$$

Dit kunnen we op exact dezelfde manier aantonen als in stelling 31. Het enige verschil is dat de oppervlakte van een negatief georiënteerde driehoek $\triangle w_0, w_1, w_2$ gelijk is aan $\omega(w_0, w_1, w_2) = 4\pi - \omega(w_1, w_0, w_2)$. Hierdoor geeft de vergelijking -4π wanneer $v_3 \in V_0$, 0 wanneer $v_3 \in V_1 \cup V_3 \cup V_5$ en 4π wanneer $v_3 \in V_2 \cup V_4 \cup V_6$, mits $\triangle v_0, v_1, v_2$ positief georiënteerd is. Anders is het teken van het resultaat andersom: 4π als $v_3 \in V_0$ en -4π als $v_3 \in V_2 \cup V_4 \cup V_6$.

Als we ω beschouwen als een functie die waarden heeft in $\mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}$, dan vinden we

$$\omega(v_1, v_2, v_3) + \omega(v_0, v_1, v_3) - \omega(v_0, v_1, v_2) - \omega(v_0, v_2, v_3) = 0 \pmod{4\pi}.$$

Om nu een cocykel te vinden die betrekking heeft op oppervlakte, gaan we eerst voor ieder drietal $g_0, g_1, g_2 \in G$ een driehoek $\triangle g_0(o), g_1(o), g_2(o)$ bepalen zodanig dat voor alle $g \in G$, $g(\triangle g_0(o), g_1(o), g_2(o)) = \triangle gg_0(o), gg_1(o), gg_2(o)$.

Daarvoor nemen we het punt o' zodanig dat de afstand tussen o en o' gelijk is aan π en we kiezen een cirkelboog σ tussen o en o' vast. We nemen nu voor alle $g \in G$ een cirkelboog $o, g(o)$. Als de afstand tussen o en $g(o)$ kleiner is dan π, dan bestaat er maar één zo'n cirkelboog. Als ze afstand π hebben, dan nemen we $o, g(o) = \sigma$.

Nu nemen we voor ieder paar $g_1, g_2 \in G$, $g_1(o), g_2(o) = g_1(o, g_1^{-1} g_2(o))$. Dan is $g(g_1(o), g_2(o)) = gg_1(o), gg_2(o)$.

Ten slotte nemen we voor ieder drietal $g_0, g_1, g_2 \in G$, de cirkelbogen $(g_0(o), g_1(o)), (g_1(o), g_2(o))$ en $\mathrm{flip}(g_0(o), g_2(o))$: de boog $(g_0(o), g_2(o))$, maar dan tegengesteld gericht. Dit geeft voor ieder drietal $g_0, g_1, g_2 \in G$ een driehoek $\triangle g_0(o), g_1(o), g_2(o)$ met de vereiste eigenschap, want inderdaad, voor $g \in G$ is

$$\begin{aligned}
&g(\triangle g_0(o), g_1(o), g_2(o)) \\
&= \triangle gg_0(o, g_0^{-1}g_1(o)), gg_1(o, g_1^{-1}g_2(o)), \mathrm{flip}(gg_0(o, g_0^{-1}g_2(o))) \\
&= \triangle gg_0(o), gg_1(o), gg_2(o).
\end{aligned}$$

Laat voor $g_0, g_1, g_2 \in G$, $F(g_0, g_1, g_2) = \omega(g_0(o), g_1(o), g_2(o))$ zijn. Dan zorgt de constructie van $g_0(o), g_1(o), g_2(o)$ ervoor dat F een homogene cocykel is, met waarden in de groep $C = \mathbb{R}/4\pi\mathbb{Z}$. Dan is $f(g_1, g_2) = \omega(o, g_1(o), g_1g_2(o))$ een cocykel, waarmee we volgens stelling 7 een uitbreiding op G kunnen maken.

We tonen nu aan dat de uitbreiding nontriviaal is, door de redenering van hoofdstuk 6 toe te passen. Laat r_1 de rotatie zijn om o en r_2 de rotatie om het middelpunt m van σ, zodanig dat voor $i \in \{1, 2\}$, $r_i \neq 1$, maar $r_i^2 = 1$. Dan is volgens corollarium 1, $r_i = r_i^{-1}$, dus

$$p((r_1, 0), (r_2, 0)) = (r_1, 0)(r_2, 0)(r_1, 0)(r_2, 0).$$

Nu is $r_1r_2r_1r_2(o) = o$ en $r_1r_2r_1r_2(m) = m$, dus $r_1r_2r_1r_2 = 1$ en $r_1r_2 = r_2r_1$ en $p((r_1, 0), (r_2, 0)) = (1, \psi)$, met

$$\begin{aligned}
\psi &= f(r_1, r_2) + f(r_1r_2, r_1) + f(r_1r_2r_1, r_2) \\
&= f(r_1, r_2) + f(r_2r_1, r_1) + f(r_2, r_2) \\
&= \omega(o, r_1(o), r_1r_2(o)) + \omega(o, r_2r_1(o), r_2r_1r_1(o)) + \omega(o, r_2(o), r_2^2(o)) \\
&= \omega(o, r_1(o), r_1r_2(o)) + \omega(o, r_2r_1(o), r_2(o)) + \omega(o, r_2(o), o) \\
&= \omega((o, o), r_1(\sigma), \mathrm{flip}(\sigma)) + \omega(\sigma, (o', o'), \mathrm{flip}(\sigma)) + \omega(\sigma, r_2(\sigma), \mathrm{flip}(0, 0)) \\
&= 2\pi + 0 + 0 \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Daarom is $p((r_1, 0), (r_2, 0)) = (1, 2\pi)$, dus (U, Φ) is nontriviaal.

Volgens stelling 30 kan niet iedere $g \in G$ worden ontleed in een rotatie en een translatie. Daarom kunnen we niet dezelfde methode gebruiken als in hoofdstuk 7 om aan te tonen dat de lift van (U, Φ) naar de universele overdekking van G triviaal is.

Hoofdstuk 9

Conclusie

9.1 Samenvatting

We hebben gezien dat door de oppervlaktes van driehoeken in het euclidische en hyperbolische vlak een homogene cocykel en daarmee een groepsuitbreiding kunnen construeren op de symmetriegroep van deze vlakken. We hebben gezien dat deze groepsuitbreidingen niet triviaal zijn. We hebben toen de symmetrieën ontleed, met behulp van een cocykel, waarmee we konden aantonen dat wanneer we de uitbreiding verheffen naar de universele overdekking van de symmetriegroep, deze in het hyperbolische geval triviaal wordt, maar in het euclidische geval nontriviaal blijft. Vervolgens hebben we ook driehoeken gedefiniëerd voor symmetrieën van de 2-sfeer. We zagen dat de oppervlaktes van deze driehoeken ons ook een nontriviale groepsuitbreiding geven.

9.2 Aanleidingen voor verder onderzoek

Deze scriptie geeft enkele aanleidingen tot verder onderzoek:

- We hebben de universele overdekking van de symmetriegroep van het hyperbolische vlak geconstrueerd, maar het bewijs weggelaten dat de groepsbewerking op deze overdekking associatief is. Dit kan wellicht bewezen worden door de associativiteit van de symmetriegroep en het homomorfisme tussen de symmetriegroep en de overdekking te gebruiken.
- Van Est neemt in zijn paper aan dat de symmetrieën van de 2-sfeer op dezelfde manier kunnen worden ontleed als de symmetrieën van het hyperbolische vlak. Hij vergeet dat er enkele symmetrieën zijn waarbij dit niet kan. Hierdoor kan niet dezelfde methode als in het voorgaande deel gebruikt worden om aan te tonen dat de uitbreiding triviaal wordt wanneer men hem verheft naar de universele overdekking van de symmetriegroep. Om dit aan te tonen is een meer gedegen kennis nodig van de topologie van deze symmetriegroep en zijn universele overdekking.
- We hebben de relatie tussen oppervlaktes en groepsuitbreidingen laten zien. Nu kan dit, zoals hier is gedaan, voor symmetriegroepen van een tweedimensionaal vlak, maar ook voor lie-groepen in het algemeen, omdat deze groepen ook differentieerbare variëteitet zijn. Dit vereist wel enige kennis van differentiaalmeetkunde.

Bijlage A

Elementaire groepentheorie

Definitie 1. Een verzameling G samen met een bewerking $\circ$ is een groep als aan de volgende voorwaarden wordt voldaan:

G1 Voor alle $g_1, g_2 \in G$, is $g_1 \circ g_2 \in G$;

G2 Voor alle $g_1, g_2, g_3 \in G$ is $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$;

G3 G heeft een eenheidselement. Dat wil zeggen, dat er een element $e \in G$ bestaat, zodanig dat voor alle $g \in G$, $e \circ g = g = g \circ e$;

G4 Voor alle $g \in G$ bestaat er een $g^{-1} \in G$, zodanig dat $g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g$ met e het eenheidselement van G.

We schrijven meestal $g_1 \circ g_2$ ook wel als $g_1 g_2$ en $\underbrace{gg \ldots g}_{n \text{ keer}}$ als g^n.

Stelling 1. *Zij G een groep, $g \in G$ en $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $g^n = 1$. Dan is $g^{n-1} = g^{-1}$.*

Bewijs. Beide zijden van de vergelijking $g^n = 1$ links vermenigvuldigen met g^{-1} geeft

$$g^{n-1} = g^{-1} g^n = g^{-1} \circ 1 = g^{-1}.$$

□

Corollarium 1. *Laat G een groep zijn en $g \in G$ zodanig dat $g^2 = 1$. Dan is $g = g^{-1}$.*

Bewijs. Dit volgt direct uit de vorige stelling door $n = 2$ te nemen. □

Definitie 2. Voor een groep G met groepsbewerking en een verzameling D is D een deelgroep van G als

D1 $D \subseteq G$;

D2 Voor alle $d_1, d_2 \in D$ is $d_1 d_2 \in D$;

D3 Voor alle $d \in D$, $d^{-1} \in D$.

Definitie 3. We zeggen dat twee groepen G_1 en G_2 *isomorf* zijn, als er een functie $I : G_1 \to G_2$ bestaat, die een *isomorfisme* is. Dat wil zeggen dat:

I1 I is een homomorfisme, oftewel: voor alle $g_1, g_2 \in G_1$ is $I(g_1 g_2) = I(g_1) I(g_2)$;

I2 I is injectief, oftewel: als voor $g_1, g_2 \in G_1$, $I(g_1) = I(g_2)$, dan is $g_1 = g_2$;

I3 I is surjectief, oftewel: voor alle $g_2 \in G_2$ bestaat er een $g_1 \in G_1$ zodanig dat $I(g_1) = g_2$.

Definitie 4. Een *centrale groepsuitbreiding* op een groep G met een abelse groep C is een groep U, samen met een homomorfisme $\Phi : U \to G$ (projectie) en een isomorfisme J, met de volgende eigenschappen:

U1 C is isomorf met een deelgroep C' van U, met het isomorfisme $J : C \to C'$;

U2 alle elementen van C' commuteren met U;

U3 C' is de kern van Φ;

U4 Φ is surjectief.

Soms identificeren we C met de met C isomorfe deelgroep van U, dus dan doen we alsof $C \subseteq U$. Ook noemen we niet altijd J, omdat hij soms niet relevant is.

Definitie 5. Laat A, B, C verzamelingen zijn en $f : A \to B$ en $g : B \to C$ functies. Dan is de functie $g \circ f$ (spreek uit: g na f), de functie gegeven door $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ voor $a \in A$.

Definitie 6. We zeggen dat twee centrale groepsuitbreidingen (U_1, Φ_1) en (U_2, Φ_2) *isomorf* zijn als aan de volgende voorwaarden wordt voldaan:

UI1 Er is een isomorfisme $I : U_1 \to U_2$;

UI2 Als C_1' en C_2' de inbeddingen zijn van C in respectievelijk U_1 en U_2, met isomorfismen $J_1 : C \to C_1'$ en $J_2 : C \to C_2'$, dan is $J_2 = I \circ J_1$;

UI3 Er geldt dat $\Phi_1 = \Phi_2 \circ I$.

Stelling 2. *Laat de uitbreidingen (U_1, Φ_1) en (U_2, Φ_2) op G met C isomorf zijn. Laat I het isomorfisme zijn van U_1 naar U_2. Dan geldt:*

1. *Als C_1' en C_2' de inbeddingen zijn van C in respectievelijk U_1 en U_2, met isomorfismen $J_1 : C \to C_1'$ en $J_2 : C \to C_2'$, dan is $I^{-1} \circ J_2 = J_1$.*

2. *Er geldt dat $\Phi_1 \circ I^{-1} = \Phi_2$.*

Bewijs.

1. Er geldt dat $I^{-1} \circ J_2 = I^{-1} \circ I \circ J_1 = J_1$.

2. Het isomorfisme I^{-1} heeft waarden in U_1, dus $\Phi_1 \circ I^{-1} = \Phi_2 \circ I \circ I^{-1} = \Phi_2$.

$\square$

Bijlage B

Nevenklassen

Definitie 7. Zij G een groep zijn met deelgroep D. Dan noemen we een verzameling $S \subseteq G$ een nevenklasse van D, als er een $g \in G$ bestaat, zodanig dat $gD = S$ of $Dg = S$, waarbij $gD = \{gd \mid d \in D\}$ een linkernevenklasse wordt genoemd en $Dg = \{dg \mid d \in D\}$ een rechternevenklasse.

Wanneer D in het centrum van G ligt, dan commuteren alle elementen van D met alle elementen van G. Dan is

$$gD = \{gd \mid d \in D\} = \{dg \mid d \in D\} = Dg,$$

dus dan zijn de linker- en rechternevenklassen gelijk. Omdat we in dit verslag alleen zullen werken met nevenklassen van deelgroepen in het centrum van een groep, zullen we de notatie van linkernevenklassen gebruiken, die we gewoon "nevenklassen" zullen noemen.

Stelling 3. *Zij D een deelgroep van een groep G en $g_1, g_2 \in G$, zodanig dat $g_1 \in g_2D$. Dan is $g_1D = g_2D$.*

Bewijs. Omdat $g_1 \in g_2D$, bestaat er een $d_0 \in D$, zodanig dat $g_1 = g_2d_0$. Dan is voor alle $g_1d \in g_1D$, $g_1d = g_2d_0d \in g_2D$. Daarom is $g_1D \subseteq g_2D$.

Ook is $g_2 = g_1d_0^{-1}$, dus volgens bovenstaande redenering is $g_2D \subseteq g_1D$ en dus is $g_1D = g_2D$. □

Stelling 4. *Voor een centrale uitbreiding (U, Φ) op G met C, is voor $g \in G$, $\Phi^{-1}(g)$ een nevenklasse van C.*

Bewijs. Laat $g \in G$ zijn. Neem een willekeurige $u \in \Phi^{-1}(g)$. We gaan bewijzen dat $uC = \Phi^{-1}(g)$.

Zij $uc \in uC$. Omdat $C = \ker \Phi$, is $\Phi(c) = 1 \in G$. Daarom is

$$\Phi(cu) = \Phi(c)\Phi(u) = 1 \cdot g = g.$$

Daarom is $cu \in \Phi^{-1}(g)$ en dus is $uC \subseteq \Phi^{-1}(g)$.

Andersom, neem een $v \in \Phi^{-1}(g)$. Dan is

$$\Phi(u^{-1}v) = \Phi(u)^{-1}\Phi(v) = g^{-1}g = 1,$$

en dus is $u^{-1}v \in \ker \Phi = C$. Dan is $v = u(u^{-1}v) \in uC$ en dus is $\Phi^{-1}(g) \subseteq uC$.

Daarom is $\Phi^{-1}(g) = uC$, een nevenklasse van C. □

Stelling 5. *Voor een selector s voor een uitbreiding (U, Φ), bestaan er voor alle $u \in U$ unieke $g \in G$ en $c \in C$, zodanig dat $s(g)c = u$.*

Bewijs. Zij $u \in U$, $g = \Phi(u)$ en $c = s(g)^{-1}u$. Dan is $s(g)c = u$. Ook is

$$\Phi(c) = \Phi(s(g)^{-1}u) = \Phi(s(g))^{-1}\Phi(u) = g^{-1}g = 1,$$

dus $c \in C$. Daarom bestaan er $g \in G$ en $c \in C$ die aan de voorwaarden voldoen.

Stel dat voor $c_1, c_2 \in C$ en $g_1, g_2 \in G$, $s(g_1)c_1 = u = s(g_2)c_2$. Dan is

$$g_1 = g_1 \cdot 1 = \Phi(s(g_1))\Phi(c_1) = \Phi(s(g_1)c_1) = \Phi(s(g_2)c_2) = \Phi(s(g_2))\Phi(c_2) = g_2 \cdot 1 = g_2.$$

Dan is ook $s(g_1)^{-1} = s(g_2)^{-1}$, dus

$$c_1 = (c_1 s(g_1))s(g_1)^{-1} = (c_2 s(g_2))s(g_1)^{-1} = c_2 s(g_2)s(g_2)^{-1} = c_2.$$

Daarom zijn de gevonden g en c uniek. $\square$

Bijlage C

Cocykels

Definitie 8. We noemen een functie $f : G \times G \to C$ voor G een groep en C een abelse groep, een *2-cocykel* als voor alle $g_1, g_2, g_3 \in G$,

$$f(g_1g_2, g_3) + f(g_1, g_2) - f(g_1, g_2g_3) - f(g_2, g_3) = 0.$$

We noemen zo'n functie in dit verslag ook wel gewoon *cocykel*.

Stelling 6. *Zij voor een uitbreiding (U, Φ) op G met C, een functie $s : G \to U$, zodanig dat voor alle $g \in G$, $s(g) \in \Phi^{-1}(g)$. Laat de functie $f : G \times G \to C$ gegeven zijn door*

$$f(g_1, g_2) = s(g_1)s(g_2)s(g_1g_2)^{-1}.$$

Dan is f een cocykel.

Bewijs. We moeten eerst bewijzen dat voor ieder paar $g_1, g_2 \in G$, $f(g_1, g_2) \in C$. Zij daarom $g_1, g_2 \in G$. Dan is

$$\Phi(f(g_1, g_2)) = \Phi(s(g_1))\Phi(s(g_2))\Phi^{-1}(s(g_1g_2)) = g_1g_2(g_1g_2)^{-1} = 1.$$

Daarom is $f(g_1, g_2) \in \ker \Phi = C$. Omdat de groepsbewerking in U associatief is en f waarden heeft in C (die dus commuteren met alle elementen in U), vinden we uit $(s(g_1)s(g_2))s(g_3) = s(g_1)(s(g_2)s(g_3))$ met $g_1, g_2, g_3 \in G$ het volgende:

$$\begin{aligned}
s(g_1g_2)f(g_1, g_2)s(g_3) &= s(g_1)s(g_2g_3)f(g_2, g_3),\\
s(g_1g_2)s(g_3)f(g_1, g_2) &= s(g_1)s(g_2g_3)f(g_2, g_3),\\
s(g_1g_2g_3)f(g_1g_2, g_3)f(g_1, g_2) &= s(g_1g_2g_3)f(g_1, g_2g_3)f(g_2, g_3),\\
f(g_1g_2, g_3)f(g_1, g_2) &= f(g_1, g_2g_3)f(g_2, g_3),\\
f(g_1g_2, g_3)f(g_1, g_2)f(g_1, g_2g_3)^{-1}f(g_2, g_3)^{-1} &= 1.
\end{aligned}$$

Als we dat laatste additief schrijven, dan zien we dat f inderdaad een cocykel is. □

Stelling 7. *Laat G een groep zijn, C een abelse groep en laat $f : G \times G \to C$ een cocykel. Zij dan U de groep $G \times C$ met als groepsbewerking*

$$(g_1, c_1)(g_2, c_2) = (g_1g_2, c_1 + c_2 + f(g_1, g_2))$$

en $\Phi : (g, c) \mapsto g$. Dan is (U, Φ) een centrale groepsuitbreiding op G, met C.

Bewijs. Zij 1 het eenheidselement van G. Zij $g_1 = g$ voor een zekere $g \in G$ en zij $g_2 = g_3 = 1$. Dit invullen in vergelijking 2.3 geeft dan dat $f(1, g) = f(1, 1)$. Op eenzelfde manier volgt voor $g_1 = g_2 = 1$ en $g_3 = g$ dat $f(g, 1) = f(1, 1)$. Daarom geldt voor alle $g \in G$, dat $f(1, g) = f(1, 1) = f(g, 1)$.

Laat $g_1 = g_3 = g$ zij voor een zekere $g \in G$ en laat $g_2 = g^{-1}$ zijn. Dan geeft invullen in vergelijking 2.3 dat $f(g, g^{-1}) + f(1, g) = f(g^{-1}, g) + f(g, 1)$. In combinatie met het feit dat $f(g, 1) = f(1, g)$, geeft dat dan $f(g^{-1}, g) = f(g, g^{-1})$.

We moeten de volgende dingen bewijzen:

1. U met de gegeven groepsbewerking is een groep;
2. (U, Φ) is een uitbreiding op G met C.

Dit bewijs gaat als volgt:

1. G1 Omdat G en C groepen zijn en f een functie is met waarden in C, is voor $g_1, g_2 \in G$ ook $g_1 g_2 \in G$ en voor $c_1, c_2 \in C$ is ook $c_1 + c_2 + f(g_1, g_2) \in C$. Daarom is voor $(g_1, c_1), (g_2, c_2) \in G \times C = U$, ook

$$(g_1, c_1)(g_2, c_2) = (g_1 g_2, c_1 + c_2 + f(g_1, g_2)) \in G \times C = U.$$

G2 Zij $(g_1, c_1), (g_2, c_2), (g_3, c_3) \in U$. Dan is, omdat f per definitie voldoet aan vergelijking 2.3,

$$\begin{aligned}((g_1, c_1)(g_2, c_2))(g_3, c_3) &= (g_1 g_2 g_3, c_1 + c_2 + c_3 + f(g_1, g_2) + f(g_1 g_2, g_3)) \\ &= (g_1 g_2 g_3, c_1 + c_2 + c_3 + f(g_1, g_2 g_3) + f(g_2, g_3)) \\ &= (g_1, c_1)((g_2, c_2)(g_3, c_3)).\end{aligned}$$

G3 $(1, -f(1, 1))$ is het eenheidselement van U. Dit blijkt uit het feit dat voor alle $(g, c) \in U$, geldt dat

$$(1, -f(1, 1))(g, c) = (1 \cdot g, -f(1, 1) + c + f(1, g)) = (g, c)$$

en

$$(g, c)(1, -f(1, 1)) = (g \cdot 1, c - f(1, 1) + f(g, 1)) = (g, c).$$

G4 Omdat $(1, -f(1, 1))$ het eenheidselement van U is, is voor $(g, c) \in U$,

$$(g, c)^{-1} = (g^{-1}, -c - f(1, 1) - f(g, g^{-1})),$$

want

$$\begin{aligned}&(g, c)(g^{-1}, -c - f(1, 1) - f(g, g^{-1})) \\ &= (gg^{-1}, c - c - f(1, 1) - f(g, g^{-1}) + f(g, g^{-1})) \\ &= (1, -f(1, 1))\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}&(g^{-1}, -c - f(1, 1) - f(g, g^{-1}))(g, c) \\ &= (g^{-1} g, -c - f(1, 1) - f(g, g^{-1}) + c + f(g^{-1}, g)) \\ &= (1, -c + c - f(g, g^{-1}) + f(g^{-1}, g) - f(1, 1)) \\ &= (1, -f(1, 1)).\end{aligned}$$

2. U1 C is isomorf met de deelgroep $C' = \{(1,c) \mid c \in C\}$:

   D1 Voor alle elementen $(1,c) \in C'$, is $1 \in G$ en $c \in C$, dus $(1,c) \in G \times C$. Daarom $C' \subseteq G \times C$.

   D2 Omdat f waarden heeft in C, geldt voor alle paren $(1,c_1),(1,c_2) \in C'$ dat

   $$(1,c_1)(1,c_2) = (1, c_1 + c_2 + f(1,1)) \in C'.$$

   D3 Voor alle $(1,c) \in C'$ is de hierboven aangetoonde inverse:

   $$(1,c)^{-1} = (1^{-1}, -c - f(1,1) - f(1,1^{-1})).$$

   Omdat f waarden heeft in C, is daarom $(1,c)^{-1} \in C'$.

   Laat $J : C \to C'$ gegeven zijn door $J(c) = (1, c - f(1,1))$. We bewijzen dat J een isomorfisme is:

   I1 Er geldt voor alle paren $c_1, c_2 \in C$,

   $$J(c_1 + c_2) = (1, c_1 + c_2 - f(1,1)) = (1, c_1 - f(1,1))(1, c_2 - f(1,1)) = J(c_1)J(c_2).$$

   I2 Als voor $c_1, c_2 \in C$, $J(c_1) = J(c_2)$, dan is

   $$(1, c_1 - f(1,1)) = (1, c_2 - f(1,1)),$$

   dus $c_1 = c_2$.

   I3 Voor $(1,c) \in C'$, is, $c + f(1,1) \in C$, zodat

   $$J(c + f(1,1)) = (1, c + f(1,1) - f(1,1)) = (1,c).$$

   U2 Merk op dat we hebben gevonden dat voor alle $g \in G$, $f(g,1) = f(1,g)$. Voor $(g,c) \in U$ en $(1,c') \in C'$ geldt dat

   $$(1,c')(g,c) = (g, c' + c + f(1,g)) = (g, c + c' + f(g,1)) = (g,c)(1,c'),$$

   dus alle elementen van C' commuteren met alle elementen van U.

   U3 Voor alle $(1,c) \in C'$ geldt dat $\Phi(1,c) = 1$, dus $(1,c) \in \ker\Phi$ en $C' \subseteq \ker\Phi$. Andersom geldt voor alle elementen $(g,c) \in \ker\Phi$ dat $1 = \Phi(g,c) = g$, dus $(g,c) = (1,c) \in C'$ en $\ker\Phi \subseteq C'$. Daarom is $C' = \ker\Phi$.

   U4 Laat $g \in G$ zijn. Dan is er $(g,0)$, zodanig dat $\Phi(g,0) = g$. Daarom is Φ surjectief.

□

Definitie 9. Voor een groep G en een abelse groep C noemen we een functie $f : G \times G \to C$ een *corand* als er een functie $v : G \to C$ bestaat, zodanig dat voor alle $g_1, g_2 \in G$:

$$f(g_1, g_2) = v(g_1) + v(g_2) - v(g_1 g_2). \tag{C.1}$$

Dan schrijven we f als δv en noemen we $f = \delta v$ de corand van v.

Stelling 8. *Voor een groep G en een abelse groep C vormt de verzameling coranden van G naar C een additieve deelgroep van de cocykels van G naar C.*

Bewijs. In dit bewijs wordt met *cocykel* een cocykel van G naar C bedoeld en met een *corand* een corand van G naar C.

D1 Dit kan bewezen worden door met behulp van vergelijking C.1 na te gaan dat iedere corand voldoet aan vergelijking 2.3.

D2 Dit kan bewezen worden door, met behulp van vergelijking C.1, te laten zien dat voor een willekeurige corand δv van een functie v de functie $-(\delta v)$ de corand $\delta(-v)$ van de functie $-v$ is.

D3 Dit kan bewezen worden door, met behulp van vergelijking C.1 voor een willekeurig paar coranden $\delta v_1, \delta v_2$ te laten zien dat de functie $(\delta v_1) + (\delta v_2)$ de corand $\delta(v_1 + v_2)$ is van de functie $v_1 + v_2$.

□

Stelling 9. *Laat G en $\bar{G}$ groepen, $\Psi : \bar{G} \to G$ een homomorfisme, C een abelse groep en $f : G \times G \to C$ een cocykel zijn. Laat de functie $\bar{f} : \bar{G} \times \bar{G} \to C$ worden gegeven door $\bar{f}(g_1, g_2) = f(\Psi(g_1), \Psi(g_2))$. Zij (U, Φ) en $(\bar{U}, \bar{\Phi})$ de groepsuitbreidingen geconstrueerd volgens stelling 7 met respectievelijk f en $\bar{f}$. Zij*

$$\bar{U}' = \{(\bar{g}, u) \in \bar{G} \times U \mid \Psi(\bar{g}) = \Phi(u)\} \subseteq \bar{G} \times U$$

een deelverzameling van het directe product van U en $\bar{G}$ en voor $(\bar{g}_1, u_1), (\bar{g}_2, u_2) \in \bar{G} \times U$ de volgende groepsbewerking voor $\circ_{\bar{G}}$ en $\circ_U$ de groepsbewerkingen van respectievelijk $\bar{G}$ en U:

$$(\bar{g}_1, u_1)(\bar{g}_2, u_2) = (\bar{g}_1 \circ_{\bar{G}} \bar{g}_2, u_1 \circ_U u_2).$$

Laat $\bar{\Phi}' : \bar{U} \to \bar{G}$ gegeven zijn door $\bar{\Phi}'(\bar{g}, u) = \bar{g}$. Dan zijn $(\bar{U}', \bar{\Phi}')$ en $(\bar{U}, \bar{\Phi})$ isomorf.

Bewijs. Merk op:

$$\bar{U}' \subseteq \bar{G} \times U = \bar{G} \times G \times C.$$

We bewijzen nu dat $(\bar{U}, \bar{\Phi})$ en $(\bar{U}', \bar{\Phi}')$ isomorf zijn.

UI1 Laat $I : \bar{U} \to \bar{U}'$ gegeven zijn door $I(\bar{g}, c) = (\bar{g}, \Psi(\bar{g}), c)$. We bewijzen nu dat I een isomorfisme is:

I1 Zij voor $i \in \{1, 2\}$, $(\bar{g}_i, c_i) \in \bar{U}$ en zij $g_i = \Psi(\bar{g}_i)$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} I((\bar{g}_1, c_2)(\bar{g}_2, c_2)) &= I(\bar{g}_1\bar{g}_2, c_1 + c_2 + \bar{f}(\bar{g}_1, \bar{g}_2)) \\ &= (\bar{g}_1\bar{g}_2, \Psi(g_1)\Psi(g_2), c_1 + c_2 + \bar{f}(\bar{g}_1, \bar{g}_2)) \\ &= (\bar{g}_1\bar{g}_2, g_1g_2, c_1 + c_2 + f(g_1, g_2)) \\ &= (\bar{g}_1, g_1, c_1)(\bar{g}_2, g_2, c_2) \\ &= I(\bar{g}_1, c_1)I(\bar{g}_2, c_2). \end{aligned}$$

I2 Stel dat voor $(\bar{g}_1, c_1), (\bar{g}_2, c_2) \in \bar{U}$, $I(\bar{g}_1, c_1) = I(\bar{g}_2, c_2)$. Dan is

$$(\bar{g}_1, \Psi(\bar{g}_1), c_1) = I(\bar{g}_1, c_1) = I(\bar{g}_2, c_2) = (\bar{g}_2, \Psi(\bar{g}_2), c_2),$$

dus $\bar{g}_1 = \bar{g}_2$ en $c_1 = c_2$.

I3 Laat $(\bar{g}, g, c) \in \bar{U}'$ zijn. Dan is door de definitie van $\bar{U}'$, $g = \Phi(g, c) = \Psi(\bar{g})$. Ook is $(\bar{g}, c) \in \bar{G} \times C = \bar{U}$ en

$$I(\bar{g}, c) = (\bar{g}, \Psi(\bar{g}), c) = (\bar{g}, g, c).$$

UI2 De inbedding van C in $\bar{U}$ is, volgens stelling 7 gelijk aan $\bar{C} = \{(\bar{1}, c) \in \bar{G} \times C\}$ met isomorfisme $J_1 : C \to \bar{C}$ gegeven door $J_1(c) = (\bar{1}, c - \bar{f}(\bar{1}, \bar{1}))$. Omdat $\bar{U}'$ een direct product is van $\bar{G}$ en U, is de inbedding van C in $\bar{U}$ gelijk aan $\bar{C}' = \{(\bar{1}, 1, c) \in \bar{G} \times G \times C\}$ met isomorfisme $J_2 : C \to \bar{C}'$ gegeven door $J_2(c) = (\bar{1}, 1, c - f(1, 1))$. Nu is voor alle $c \in C$:

$$I(J_1(c)) = I(\bar{1}, c - \bar{f}(\bar{1}, \bar{1})) = (\bar{1}, 1, c - f(1, 1)) = J_2(c),$$

dus $I \circ J_1 = J_2$.

UI3 Ook geldt er voor alle $(\bar{g}, c) \in \bar{U}$,

$$\bar{\Phi}(\bar{g}, c) = \bar{g} = \bar{\Phi}'(\bar{g}, \Psi(\bar{g}), c) = \bar{\Phi}'(I(\bar{g}, c)),$$

dus $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}' \circ I$.

$\square$

Bijlage D

Cohomologieklassen

Definitie 10. Laat G een groep zijn, C een abelse groep en $f : G \times G \to C$ een cocykel. Dan noemen we de verzameling $\{f + \delta v \mid v : G \to C\}$ de *cohomologieklasse* van f.

Stelling 10. *Laat K de cohomologieklasse zijn van een cocykel $f : G \times G \to C$. Dan is iedere functie in K een cocykel.*

Bewijs. Voor alle $k \in K$ geldt dat er een functie $v : C \to G$ is, zodanig dat $k = f + \delta v$. δv, een corand, is een cocykel volgens stelling 8. Omdat f en δv voldoen aan vergelijking 2.3, is het eenvoudig te verifiëren door $f + \delta v$ in te vullen in diezelfde vergelijking 2.3 dat $f + \delta v$ en dus k een cocykel is. $\square$

Stelling 11. *Laat (U, Φ) een centrale groepsuitbreiding zijn op G met C en s_1 en s_2 selectors voor Φ. Dan is de cohomologieklasse van de cocykel van s_1 gelijk aan de cohomologieklasse van de cocykel van s_2.*

Met andere woorden: voor een centrale groepsuitbreiding is er exact één cohomologieklasse die hoort bij de cocykels van selectors van die uitbreiding, dus voor iedere uitbreiding U is 'de cohomologieklasse van U' welgedefinieerd.

Bewijs. Laat voor $i \in \{1, 2\}$, f_i de cocykel zijn van s_i, gegeven door $f_i(g_1, g_2) = s_i(g_1)s_i(g_2)s_i(g_1g_2)^{-1}$ en

$$K_i = \{f_i + \delta v \mid v : G \to C\} = f_i + \{\delta v \mid v : G \to C\}.$$

We definiëren de functie $v : G \to C$ door $v(g) = s_2(g)s_1(g)^{-1}$. Dan is $s_2(g) = v(g)s_1(g)$ en

$$\begin{aligned}
f_2 - f_1 &= s_2(g_1)s_2(g_2)s_2(g_1g_2)^{-1}(s_1(g_1)s_1(g_2)s_1(g_1g_2)^{-1})^{-1} \\
&= v(g_1)s_1(g_1)v(g_2)s_1(g_2)s_1(g_1g_2)^{-1}v(g_1g_2)^{-1}s_1(g_1g_2)s_1(g_2)^{-1}s_1(g_1)^{-1} \\
&= v(g_1)v(g_2)v(g_1g_2)^{-1}s_1(g_1)s_1(g_2)s_1(g_1g_2)^{-1}s_1(g_1g_2)s_1(g_2)^{-1}s_1(g_1)^{-1} \\
&= v(g_1)v(g_2)v(g_1g_2)^{-1} \\
&= \delta v(g_1, g_2).
\end{aligned}$$

Daarom is $f_2 = f_1 + \delta v$, dus $f_2 \in K_1$. Omdat K_1 en K_2 nevenklassen zijn van de deelgroep van coranden en $f_2 \in K_1$, geldt dan volgens stelling 3 dat $K_1 = K_2$. $\square$

Stelling 12. *Laat (U_1, Φ_1) en (U_2, Φ_2) isomorfe uitbreidingen zijn op G met C. Zij voor $i \in \{1, 2\}$, K_i' de cohomologieklasse van U_i, C_i' de inbedding van C in U_i met isomorfisme J_i en*

$$K_i = \{J_i^{-1} \circ f \mid f \in K_i'\}.$$

Dan is $K_1 = K_2$.

Bewijs. Omdat U_1 en U_2 isomorf zijn, bestaat er een isomorfisme $I : U_1 \to U_2$. Laat s_1 een selector zijn van U_1. Dan definiëren we de functie $s_2 = I \circ s_1$. Omdat (U_1, Φ_1) en (U_2, Φ_2) isomorf zijn, is $\Phi_2 \circ I = \Phi_1$, dus

$$\Phi_2 \circ s_2 = \Phi_2 \circ I \circ s_1 = \Phi_1 \circ s_1 = \mathbb{1},$$

dus $s_2(g) \in \Phi_2^{-1}(g)$ voor alle $g \in G$, waardoor s_2 per definitie een selector is voor Φ_2.

Laat voor $i \in \{1, 2\}$, f_i' de cocykel zijn van s_i. Dan is $f_i' \in K_i'$. Laat $f_i = J_i^{-1} \circ f_i'$ zijn. Dan is $f_i \in K_i$. Omdat I een isomorfisme is, is voor alle $g_1, g_2 \in G$,

$$f_2'(g_1, g_2) = I(s_1(g_1))I(s_1(g_2))I(s_1(g_1g_2)^{-1}) = I(f_1'(g_1, g_2)).$$

Nu is

$$\begin{aligned} K_i &= \{J_i^{-1} \circ f \mid f \in K_i'\} \\ &= \{J_i^{-1} \circ (f_i' + \delta v') \mid v' : G \to C_i'\} \\ &= \{J_i^{-1} \circ f_i' + J_i^{-1} \circ \delta v' \mid v' : G \to C_i'\} \\ &= \{f_i + \delta v \mid v : G \to \operatorname{Im} J_i^{-1}\} \\ &= f_i + \{\delta v \mid v : G \to C\} \end{aligned}$$

de cohomologieklasse van f_i.

Nu geldt wegens isomorfie van (U_1, Φ_1) en (U_2, Φ_2), volgens stelling 2 dat $J_1 = I^{-1} \circ J_2$, dus dat $J_1^{-1} = J_2^{-1} \circ I$. Daarom is

$$f_1 = J_1^{-1} \circ f_1' = J_2^{-1} \circ I \circ f_1' = J_2^{-1} \circ f_2' = f_2$$

en is $K_1 = f_1 + \{\delta v \mid v : G \to C\} = f_2 + \{\delta v \mid v : G \to C\} = K_2$. $\square$

Stelling 13. *De centrale groepsuitbreidingen op G met C (modulo isomorfie) hebben een een-op-eenrelatie met de cohomologieklassen van cocykels $G \times G \to C$.*

Bewijs. We moeten aantonen dat er een bijectie bestaat tussen de uitbreidingen op G met C modulo isomorfie en de cohomologieklassen van cocykels $G \times G \to C$. Laat I de functie zijn die uit een verzameling isomorfe groepsuitbreidingen een uitbreiding (U, Φ) neemt en deze afbeeldt op zijn cohomologieklasse. Laat I^{-1} de functie zijn die uit een cohomologieklasse een cocykel neemt en die afbeeldt op de verzameling van met de in stelling 7 beschreven groepsuitbreiding isomorfe groepsuitbreidingen. We moeten een aantal dingen aantonen:

(1) De keuze van de groepsuitbreiding uit de verzameling isomorfe uitbreidingen maakt voor het beeld van I niet uit.

(2) De keuze van de cocykel uit de cohomologieklasse maakt voor het beeld van I^{-1} niet uit.

(3) Voor een verzameling isomorfe groepsuitbreidingen V is $I^{-1}(I(V)) = V$.

(4) Voor een cohomologieklasse K is $I(I^{-1}(K)) = K$.

Als dit alles is aangetoond is I een welgedefinieerde bijectie.

(1) Wanneer we twee isomorfe groepsuitbreidingen hebben, zijn volgens stelling 12 hun cohomologieklassen, en dus hun beeld onder I in essentie hetzelfde.

(3) Zij V een verzameling isomorfe uitbreidingen, (U, Φ) een uitbreiding in deze verzameling, s een selector voor Φ, f de cocykel van s en K de cohomologieklasse van f (en van (U, Φ)). Dan is $K = I(V)$. Neem $f + \delta v \in K$ de door I^{-1} genomen cocykel uit de cohomologieklasse en laat (U', Φ') de uitbreiding zijn gegeven door stelling 7 voor $f + \delta v$. Dan is $(U', \Phi') \in I^{-1}(K)$. Dan rest ons te bewijzen dat $(U', \Phi') \cong (U, \Phi)$, omdat dan de verzameling met (U, Φ) isomorfe uitbreidingen gelijk is aan de met (U', Φ') isomorfe uitbreidingen. Merk op dat $U = G \times C$ en laat nu de functie $\Psi : U' \to U$ gegeven zijn door $\Psi(g, c) = s(g)v(g)c$. Dan bewijzen we nu dat Ψ een isomorfisme is:

I1 Zij $(g_1, c_1), (g_2, c_2) \in U'$. Merk op dat

$$v(g_1)v(g_2) = v(g_1)v(g_2)v(g_1g_2)^{-1}v(g_1g_2) = \delta v(g_1, g_2)v(g_1g_2).$$

Dan is

$$\begin{aligned}
\Psi(g_1, c_1)\Psi(g_2, c_2) &= (s(g_1)v(g_1)c_1)(s(g_2)v(g_2)c_2) \\
&= s(g_1)s(g_2)v(g_1)v(g_2)c_1c_2 \\
&= s(g_1g_2)f(g_1, g_2)\delta v(g_1, g_2)v(g_1g_2)c_1c_2 \\
&= s(g_1g_2)v(g_1g_2)c_1c_2(f\delta v)(g_1, g_2) \\
&= \Psi(g_1g_2, c_1 + c_2 + (f + \delta v)(g_1, g_2)) \\
&= \Psi((g_1, c_1)(g_2, c_2)).
\end{aligned}$$

I2, I3 Injectiviteit en surjectiviteit worden bewezen in stelling 5, namelijk: voor selector $s \cdot v$ bestaan er voor alle $u \in U$ unieke $g \in G$ en $c \in C$ zodanig dat $\Psi(g, c) = s(g)v(g)c = (s \cdot v)(g)c = u$. Het bestaan van g en c betekent dat Ψ surjectief is en hun uniciteit betekent dat Ψ injectief is.

(2) Bij (3) tonen we aan dat de door I^{-1} geconstrueerde groepsuitbreiding isomorf is met U. Laat (U_1, Φ_1) en (U_2, Φ_1) twee uitbreidingen zijn die geconstrueerd zijn met een cocykel uit K. Omdat $(U_1, \Phi_1) \cong (U, \Phi) \cong (U_2, \Phi_2)$ en uitbreidingsisomorfie een equivalentierelatie is, zijn alle uitbreidingen die isomorf zijn met (U_1, Φ_1) ook isomorf met (U_2, Φ_2) en andersom. Daarom maakt de keuze van de cocykel niet uit voor het beeld van I^{-1}: de verkregen verzameling isomorfe groepsuitbreidingen.

(4) Zij K een cohomologieklasse $f + \{\delta v \mid v : G \to C\}$, (U, Φ) de uitbreiding op G met C zoals beschreven in stelling 7 voor cocykel $f \in K$ en laat K' de cohomologieklasse zijn van (U, Φ). Merk op dat volgens stelling 7, het isomorfisme J dat C met zijn inbedding C' in U identificeert, c naar $(1, c - f(1, 1))$ stuurt. Daarom stuurt J^{-1} het element $(1, c - f(1, 1)) \in C'$ naar $c \in C$.

Laat $s : G \to U$ gegeven zijn door $s(g) = (g, 0)$. Zij f' de cocykel van s. Dan is voor $g_1, g_2 \in G$,

$$\begin{aligned}
J^{-1}(f'(g_1, g_2)) &= J^{-1}(s(g_1)s(g_2)s(g_1, g_2)^{-1}) \\
&= J^{-1}((g_1g_2, f(g_1, g_2))((g_1g_2)^{-1}, -f(1, 1) - f(g_1g_2, (g_1, g_2)^{-1}))) \\
&= J^{-1}((1, f(g_1, g_2) - f(1, 1) - f(g_1g_2, (g_1, g_2)^{-1}) + f(g_1g_2, (g_1, g_2)^{-1}))) \\
&= J^{-1}((1, f(g_1, g_2) - f(1, 1))) \\
&= f(g_1, g_2).
\end{aligned}$$

Ook geldt, voor iedere functie $v : G \to C'$, voor alle $g_1, g_2 \in G$, dat

$$(J^{-1} \circ \delta v)(g_1, g_2) = J^{-1}(v(g_1))J^{-1}(v(g_2))J(v(g_1 g_2)) = \delta(J^{-1} \circ v)(g_1, g_2).$$

Dan is

$$J(K') = \{J^{-1} \circ (f' + \delta v) \mid v : G \to C'\} = \{f + \delta v \mid v : G \to C\} = K.$$

$\square$

Bijlage E

Meetkunde

E.1 Definities en notatie

Notatie 1. Voor $n \in \mathbb{N}$, is de $n \times n$ *eenheidsmatrix*:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Notatie 2. Laat voor $n \in \mathbb{N}$, de matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ zijn. Dan definieren we, voor $a, b \in \mathbb{R}^n$, de volgende *bilineaire vorm*

$$A\langle a, b\rangle = a^T A b^T.$$

Een speciaal geval is het *inwendig product* of *inproduct*:

$$\langle a, b\rangle = a^T I_n b = a^T b.$$

Notatie 3. We definiëren voor $n \in \mathbb{N}$ en $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, de *eenheidsvector*

$$e_i = \begin{bmatrix} \underbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}_{i-1 \text{ keer}} & 1 & \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0}_{n-i \text{ keer}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Notatie 4. Laat voor $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n$ zijn. Dan definiëren we voor $i \in \{1, 2, \ldots n\}$, de *coëfficiënt* $a_i = \langle a, e_i\rangle$.

Definitie 11. Zij S een topologische ruimte. Dan noemen we de verzameling $D \subseteq S$ *padverbonden*, als voor alle $s, s' \in D$, er een in S continue functie $p : [0, 1] \to D$ bestaat, zodat $p(0) = s$ en $p(1) = s'$.

Definitie 12. Voor $\eta = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ is de inbedding in $\mathbb{R}^3$ van het tweedimensionaal *hyperbolisch vlak*, de verzameling

$$V_H = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \eta\langle v, v\rangle = -1, v_3 > 0\},$$

met als verzameling (rigide) bewerkingen:

$$G_H = \{g \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid g^T \eta = \eta g^{-1}, \det g = 1, \exists v \in V_H : g(v) \in V_H\}.$$

Definitie 13. De inbedding in $\mathbb{R}^3$ van het tweedimensionaal *euclidisch vlak* is de verzameling

$$V_E = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v_3 = 1\},$$

met als verzameling bewerkingen:

$$G_E = \left\{ \begin{bmatrix} R & & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid R \in SO(2), t \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Definitie 14. De inbedding in $\mathbb{R}^3$ van het *elliptisch vlak*, $\mathbb{S}^2$, is de verzameling

$$V_S = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1\},$$

met als groep bewerkingen de verzameling:

$$G_S = SO(3) = \{g \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid g^T = g^{-1}, \det g = 1\}.$$

E.2 De ruimtes en hun operaties

Stelling 14. *Zij $g : D \to \mathbb{R}$ continue met $D \subseteq \mathbb{R}^n$ padverbonden, zodanig dat voor zekere $r \in \mathbb{R}$, voor alle $d \in D$, $g(d) \neq r$. Dan is voor alle $d \in D$, $g(d) > r$, of voor alle $d \in D$, $g(d) < r$.*

Bewijs. Stel dat er er $d^+, d^- \in D$ bestaan, zodanig dat $g(d^+) > r$ en $g(d^-) < r$. Omdat D padverbonden is, bestaat er dan een pad $p : [0,1] \to D$, zodanig dat $p(0) = d^+$ en $p(1) = d^-$. Dan is $g \circ p : [0,1] \to \mathbb{R}$ een samenstelling van continue functies en dus continue. De tussenwaardestelling zegt dan dat, omdat $g(p(0)) < r$ en $g(p(1)) > r$, er een $c \in (0,1)$ bestaat, zodanig dat $g(p(c)) = r$. Echter, dan is er een $d = p(c) \in D$, zodanig dat $g(d) = r$, terwijl we hadden aangenomen dat dat niet zo was. Daarom bestaat d^+ niet of d^- bestaat niet.

Als d^+ niet bestaat, dan is voor alle $d \in D$, $g(d) < r$. Als d^- niet bestaat, dan is voor alle $d \in D$, $g(d) > r$. □

Stelling 15. *V_H is padverbonden.*

Bewijs. Zij $v, v' \in V_H$. Laat dan $f : [0,1] \to V_H$ gegeven zijn door

$$f(x) = \begin{bmatrix} (1-x)v_1 + xv_1' \\ (1-x)v_2 + xv_2' \\ \sqrt{((1-x)v_1 + xv_1')^2 + ((1-x)v_2 + xv_2')^2 + 1} \end{bmatrix}.$$

Omdat kwadrateren, worteltrekken, vermenigvuldigen en optellen allen continue bewerkingen zijn, is f continu. Ook is, voor alle $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
&\eta\langle f(x), f(x)\rangle \\
&= f(x)^T \eta f(x) \\
&= \begin{bmatrix} (1-x)v_1 + xv_1' \\ (1-x)v_2 + xv_2' \\ -\sqrt{((1-x)v_1 + xv_1')^2 + ((1-x)v_2 + xv_2')^2 + 1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (1-x)v_1 + xv_1' \\ (1-x)v_2 + xv_2' \\ \sqrt{((1-x)v_1 + xv_1')^2 + ((1-x)v_2 + xv_2')^2 + 1} \end{bmatrix} \\
&= ((1-x)v_1 + xv_1')^2 + ((1-x)v_2 + xv_2')^2 - ((1-x)v_1 + xv_1')^2 - ((1-x)v_2 + xv_2')^2 - 1 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Omdat de waarden van $\sqrt{1+a^2+b^2}$ altijd groter zijn dan 0, is dan voor alle $x \in [0,1]$, $f(x) \in V_H$. Ook is voor alle $v \in V_H$, $-1 = \eta\langle v,v\rangle = v^T\eta v = v_1^2+v_2^2-v_3^2$. Daarom is $v_3 = \pm\sqrt{v_1^2+v_2^2+1}$ en omdat $v_3 > 0$, is $v_3 = \sqrt{v_1^2+v_2^2+1}$. Dan is

$$f(0) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \sqrt{v_1^2+v_2^2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = v,\ f(1) = \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \sqrt{{v_1'}^2+{v_2'}^2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{bmatrix} = v'.$$

Daarom is f een pad in V_H tussen v en v'.

Daarom bestaat er tussen ieder paar $v, v' \in V_H$ een pad, en dus is V_H padverbonden. □

Stelling 16. *Als voor $g \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $g^T\eta = \eta g^{-1}$ en voor zekere $v \in V_H$, $g(v) \in V_H$, dan is $g(V_H) \subseteq V_H$.*

Bewijs. Er geldt dat $g^T\eta g = \eta$. Daarom geldt voor alle $v \in V_H$:

$$(gv)_1^2 + (gv)_2^2 - (gv)_3^2 = \eta\langle gv, gv\rangle = v^Tg^T\eta gv = v^T\eta v = \eta\langle v,v\rangle = -1.$$

Daarom is $(gv)_3^2 = 1+(gv)_1^2+(gv)_2^2 > 1$, dus $(gv)_3^2 \neq 0$ voor alle $v \in V_H$. De functie πg, gegeven door $\pi g(v) = (gv)_3$ is een continue functie van V_H naar $\mathbb{R}$, met V_H padverbonden, zodat voor alle $v \in V_H, \pi g(v) \neq 0$.

Daarom is voor alle $v \in V_H$, $\pi g(v) > 0$ of voor alle $v \in V_H$, $\pi g(v) < 0$. Omdat er een $v \in v_H$ bestaat, zodat $g(v) \in V_H$, waarvoor dus geldt dat $\pi g(v) > 0$, is voor alle $v \in V_H$, $(gv)_3 = \pi g(v) > 0$. Omdat we ook al wisten dat voor alle $v \in V_H$, $\eta\langle gv, gv\rangle = \eta\langle v,v\rangle = -1$, is daarom voor alle $v \in V_H$, $gv \in V_H$. Daarom is $g(V_H) \subseteq V_H$. □

Stelling 17. *Voor alle $g \in G_H$ is $g(V_H) = V_H$.*

Bewijs. Laat $g \in G_H$ zijn. Volgens stelling 16 is dan $g(V_H) \subseteq V_H$. Dan geldt: ${g^T}^{-1} = {g^{-1}}^T$ en $g^T\eta g = \eta$, dus $\eta {g^{-1}}^{-1} = {g^{-1}}^T\eta$. Ook is er een $v \in V_H$, zodanig dat $g(v) \in V_H$. Daarom is $g^{-1}(g(v)) \in V_H$, met $g(v) \in V_H$. Dan is volgens stelling 16, $g^{-1}(V_H) \subseteq V_H$, dus

$$V_H = g(g^{-1}(V_H)) \subseteq g(V_H).$$

□

Stelling 18. *De verzamelingen bewerkingen G_H, G_E en G_S zijn groepen onder matrixsamenstelling.*

Bewijs. G1 Zij $g_1, g_2 \in G_H$. Dan is

$$(g_1g_2)^T\eta = g_2^Tg_1^T\eta = g_2^T\eta\eta^{-1}g_1^T\eta = \eta g_1^{-1}\eta^{-1}\eta g_1^{-1} = \eta g_2^{-1}g_1^{-1} = \eta(g_1g_2)^{-1}.$$

Ook is $\det g_1g_2 = \det g_1 \det g_2 = 1\cdot 1 = 1$ en volgens stelling 17 is $g_1(g_2(V_H)) = g_1(V_H) = V_H$, dus voor $e_3 \in V_H$, is $g_1g_2e_3 \in V_H$, waardoor $g_1g_2 \in G_H$.

Zij $g_1 = \left[\begin{smallmatrix} R_1 & t_1 \\ 0\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], g_2 = \left[\begin{smallmatrix} R_2 & t_2 \\ 0\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \in G_E$. Dan is

$$g_1g_2 = \begin{bmatrix} R_1R_2 & t_1 + R_1t_2 \\ 0\quad 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Omdat $SO(2)$ een groep is, is $R_1R_2 \in SO(2)$. Omdat ook $t_1 + R_1t_2 \in \mathbb{R}^2$, is $g_1g_2 \in G_E$.

Laat $g_1, g_2 \in G_S$ zijn. Dan is

$$(g_1g_2)^T = g_2^Tg_1^T = g_2^{-1}g_1^{-1} = (g_1g_2)^{-1}.$$

Ook is $\det g_1g_2 = \det g_1 \det g_2 = 1 \cdot 1 = 1$, dus $g_1g_2 \in G_S$.

G2 In de lineaire algebra is het algemeen bekend dat voor matrices g_1, g_2, g_3, $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$.

G3 Het eenheidselement van G_H, G_E en G_S is I_3, want voor alle matrices g, is $I_3g = g = gI_3$.

G4 Laat $g \in G_H$ zijn. Dan is $g^T\eta = \eta g^{-1}$, dus $g^{-1} = \eta^{-1}g^T\eta$. Dan is $g = (g^{-1})^{-1} = \eta^{-1}(g^T)^{-1}\eta$ en $\eta(g^{-1})^{-1} = \eta g = (g^T)^{-1}\eta = (g^{-1})^T\eta$. Ook is $\det g^{-1} = \frac{1}{\det g} = \frac{1}{1} = 1$. Omdat $I_3 = g^{-1}g$, is

$$g^{-1}(V_H) = g^{-1}g(V_H) = I(V_H) = V_H.$$

Daarom is voor $e_3 \in V_H$, $g^{-1}e_3 \in V_H$ en dus is $g^{-1} \in G_H$.

Zij $g = \left[\begin{smallmatrix} R & t \\ 0\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \in G_E$. Omdat $SO(2)$ een groep is, is $R^{-1} \in SO(2)$. Ook is $-R^{-1}t \in \mathbb{R}^2$. Daarom is er een matrix $g^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} R^{-1} & -R^{-1}t \\ 0\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \in G_E$. Dan is

$$gg^{-1} = \begin{bmatrix} RR^{-1} & t - t \\ 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 = \begin{bmatrix} R^{-1}R & R^{-1}t - R^{-1}t \\ 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} = g^{-1}g,$$

dus g^{-1} is de inverse van g.

Laat ten slotte $g \in G_S$ zijn. Dan is $(g^{-1})^T = (g^T)^{-1} = (g^{-1})^{-1}$. Ook is $\det g^{-1} = \frac{1}{\det g} = 1$, dus $g^{-1} \in G_S$.

□

E.3 Rotaties

Lemma 1. *Voor $a, b \in \mathbb{R}$, gelden de volgende identiteiten:*

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)); \\
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)); \\
\sin a \sin b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)); \\
\cos(a)^2 &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2a)); \\
\sin a \cos a &= \frac{1}{2}\sin(2a); \\
\sin(a)^2 &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2a));
\end{aligned}$$

Bewijs. Per definitie is

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)} + e^{-i(a+b)}}{4} = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)); \\
\sin a \cos b &= \frac{e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)} - e^{-i(a+b)}}{4i} = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)); \\
\sin a \sin b &= \frac{e^{i(a+b)} - e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)} + e^{-i(a+b)}}{-4} = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)).
\end{aligned}$$

Als we nu in bovenstaande vergelijkingen $a = b$ invullen, krijgen we

$$\begin{aligned} \cos(a)^2 = \cos a \cos a &= \frac{1}{2}(\cos(2a) + \cos 0) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a)); \\ \sin a \cos a &= \frac{1}{2}(\sin(2a) + \sin 0) = \frac{1}{2}(\sin(2a)); \\ \sin(a)^2 = \sin a \sin a &= \frac{1}{2}(\cos 0 - \cos(2a)) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a)). \end{aligned}$$

□

Definitie 15. Voor $a \in \mathbb{R}$, definiëren we een *rotatie* $r(a)$ in G_H, G_E and G_S met hoek $a \in \mathbb{R}$ als de matrix

$$r(a) = \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stelling 19. *Laat $a \in \mathbb{R}$ zijn. Dan is $r(a)$ een element van G_H, G_E en G_S.*

Bewijs. Allereerst is

$$\begin{aligned} r(a)^T \eta r(a) &= \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(a)^2 + \sin(a)^2 & -\cos a \sin a + \sin a \cos a & 0 \\ -\sin a \cos a + \cos a \sin a & \sin(a)^2 + \cos(a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \eta. \end{aligned}$$

Ook is $\det r(a) = \cos(a)^2 + \sin(a)^2 = 1$ en voor $e_3 \in V_H$, is $r(a)e_3 = e_3 \in V_H$, dus $r(a) \in G_H$.

Natuurlijk is $t = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$. Ook is voor $R = \left[\begin{smallmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{smallmatrix}\right]$, $\det R = \cos(a)^2 + \sin(a)^2 = 1$ en

$$RR^T = \left[\begin{smallmatrix} \cos(a)^2 + \sin(a)^2 & -\cos a \sin a + \sin a \cos a \\ -\sin a \cos a + \cos a \sin a & \sin(a)^2 + \cos(a)^2 \end{smallmatrix}\right] = I_2,$$

dus $R \in SO(2)$ en $r(a) = \left[\begin{smallmatrix} R & t \\ 0\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \in G_e$.

Zoals eerder aangetoond is $\det r(a) = 1$. Verder is

$$\begin{aligned} r(a)^T r(a) &= \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(a)^2 + \sin(a)^2 & -\cos a \sin a + \sin a \cos a & 0 \\ -\sin a \cos a + \cos a \sin a & \sin(a)^2 + \cos(a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= I_3. \end{aligned}$$

Daarom is $r(a) \in G_S$. □

Lemma 2. *Zij $a, b \in \mathbb{R}$. Dan is $r(a)r(b) = r(a + b)$.*

Bewijs. Gebruimakend van lemma 1 volgt dat

$$\begin{aligned}
r(a)r(b) &= \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b & 0 \\ \sin b & \cos b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos a \cos b - \sin a \sin b & -\cos a \sin b - \sin a \cos b & 0 \\ \sin a \cos b + \cos a \sin b & -\sin a \sin b + \cos a \cos b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) & 0 \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= r(a+b).
\end{aligned}$$

□

Corollarium 2. *Voor alle $a \in \mathbb{R}$ is $r(a)^{-1} = r(-a)$.*

Bewijs. Er geldt dat

$$r(a)r(-a) = r(a-a) = r(0) = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 & 0 \\ \sin 0 & \cos 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

□

Stelling 20. *Laat de matrix*

$$g = \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zijn, zodanig dat

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= 1; \\
c^2 + d^2 &= 1; \\
ca + db &= 0; \\
ad - cb &= 1.
\end{aligned}$$

Dan is $g = r(\theta)$ voor zekere $\theta \in \mathbb{R}$.

Bewijs. Er geldt dat $a^2 \leq a^2 + b^2 = 1$. Dan is er een $\theta \in \mathbb{R}$, zodanig dat $a = \cos(\theta)$. Dan is, voor zekere $s \in \{-1, 1\}$:

$$\begin{aligned}
b &= s\sqrt{1 - \cos(\theta)^2} = s \sin\theta = \sin(s\theta); \\
a &= \cos(\theta) = \cos(s\theta); \\
c\cos(s\theta) + d\sin(s\theta) &= 0; \\
c &= -d\tan(s\theta); \\
d\cos(s\theta) + c\sin(s\theta) &= 1; \\
d\cos(s\theta)^2 + d\sin(s\theta)^2 &= \cos(s\theta); \\
d &= \cos(s\theta); \\
c &= -\sin(s\theta).
\end{aligned}$$

Dan is

$$g = \begin{bmatrix} \cos(s\theta) & -\sin(s\theta) & 0 \\ \sin(s\theta) & \cos(s\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r(s\theta).$$

□

Stelling 21. *Laat $g \in G_H$ zijn, zodanig dat $ge_3 = e_3$. Dan is g een rotatie.*

Bewijs. Laat $g \in G_H$ zijn, zodanig dat $ge_3 = e_3$. Dan is

$$g = \begin{bmatrix} ge_1 & ge_2 & ge_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ge_1)_1 & (ge_2)_1 & 0 \\ (ge_1)_2 & (ge_2)_2 & 0 \\ (ge_1)_3 & (ge_2)_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ook is

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = g^T \eta g = \begin{bmatrix} \langle \eta ge_1, ge_1 \rangle & \langle \eta ge_1, ge_2 \rangle & \langle \eta ge_1, ge_3 \rangle \\ \langle \eta ge_2, ge_1 \rangle & \langle \eta ge_2, ge_2 \rangle & \langle \eta ge_2, ge_3 \rangle \\ \langle \eta ge_3, ge_1 \rangle & \langle \eta ge_3, ge_2 \rangle & \langle \eta ge_3, ge_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \eta ge_1, ge_1 \rangle & \langle \eta ge_1, ge_2 \rangle & -(ge_1)_3 \\ \langle \eta ge_2, ge_1 \rangle & \langle \eta ge_2, ge_2 \rangle & -(ge_2)_3 \\ -(ge_1)_3 & -(ge_2)_3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Daarom is $(ge_1)_3 = (ge_2)_3 = 0$. Laat $a = (ge_1)_1$, $b = (ge_1)_2$, $c = (ge_2)_1$ en $d = (ge_2)_2$ zijn. Dan is

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = g^T \eta g = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd & 0 \\ ca + db & c^2 + d^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ook is $1 = \det g = ad - bc$. Dan is volgens stelling 20, $g = r(\theta)$ voor zekere $\theta \in \mathbb{R}$. □

Stelling 22. *Zij $g \in G_E$, zodanig dat $ge_3 = e_3$. Dan is g een rotatie.*

Bewijs. Zij $g \in G_E$, zodanig dat $ge_3 = e_3$. Dan is

$$g = \begin{bmatrix} R & & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ge_1 & ge_2 & ge_3 \end{bmatrix}.$$

met $R = \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right] \in SO(2)$. Dit combineren geeft

$$g = \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Volgens de definitie van $SO(2)$ is $R^T R = I_2$ en $\det R = 1$. Dat geeft

$$\begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ca + db & c^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verder is $1 = \det R = ad - bc$. Dan is volgens stelling 20, $g = r(\theta)$ voor zekere $\theta \in \mathbb{R}$. □

Stelling 23. *Zij $g \in G_S$, zodanig dat $ge_3 = e_3$. Dan is g een rotatie.*

Bewijs. Zij $g \in G_S$, zodanig dat $ge_3 = e_3$. Dan is

$$g = \begin{bmatrix} ge_1 & ge_2 & ge_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ge_1)_1 & (ge_2)_1 & 0 \\ (ge_1)_2 & (ge_2)_2 & 0 \\ (ge_1)_3 & (ge_2)_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Volgens de definitie van G_S, is $g^T g = I_3$. Dat geeft

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = g^T g = \begin{bmatrix}\langle ge_1, ge_1\rangle & \langle ge_1, ge_2\rangle & \langle ge_1, ge_3\rangle\\ \langle ge_2, ge_1\rangle & \langle ge_2, ge_2\rangle & \langle ge_2, ge_3\rangle\\ \langle ge_3, ge_1\rangle & \langle ge_3, ge_2\rangle & \langle ge_3, ge_3\rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\langle ge_1, ge_1\rangle & \langle ge_1, ge_2\rangle & (ge_1)_3\\ \langle ge_2, ge_1\rangle & \langle ge_2, ge_2\rangle & (ge_2)_3\\ \langle ge_3, ge_1\rangle & \langle ge_3, ge_2\rangle & 1\end{bmatrix}.$$

Dan is $(ge_1)_3 = (ge_2)_3 = 1$. Laat dan $a = (ge_1)_1$, $b = (ge_1)_2$, $c = (ge_2)_1$ en $d = (ge_2)_2$ zijn. Dan is

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = g^T g = \begin{bmatrix}a^2+b^2 & ac+bd & 0\\ ca+db & c^2+d^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Ook is $1 = \det g = ad - bc$. Dan is volgens stelling 20, $g = r(\theta)$ voor zekere $\theta \in \mathbb{R}$. □

E.4 Translaties

Definitie 16. Voor $b \in \mathbb{R}$, definiëren we een *simpele translatie* $t(b)$ in G_H als

$$t(b) = \begin{bmatrix}\sqrt{b^2+1} & 0 & b\\ 0 & 1 & 0\\ b & 0 & \sqrt{b^2+1}\end{bmatrix},$$

in G_E als

$$t(b) = \begin{bmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{I_2}} & b\\ & & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

en in G_S als

$$t(b) = \begin{bmatrix}\cos b & 0 & -\sin b\\ 0 & 1 & 0\\ \sin b & 0 & \cos b\end{bmatrix}.$$

Stelling 24. *De simpele translaties in G_H, G_E en G_S zijn elementen van hun respectievelijke groep.*

Bewijs. Voor $b \in \mathbb{R}$, geldt in G_H:

$$\begin{aligned} t(b)^T \eta t(b) &= \begin{bmatrix}\sqrt{b^2+1} & 0 & -b\\ 0 & 1 & 0\\ b & 0 & -\sqrt{b^2+1}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\sqrt{b^2+1} & 0 & b\\ 0 & 1 & 0\\ b & 0 & \sqrt{b^2+1}\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\sqrt{b^2+1}^2 - b^2 & 0 & \sqrt{b^2+1}b - b\sqrt{b^2+1}\\ 0 & 1 & 0\\ b\sqrt{b^2+1} - \sqrt{b^2+1}b & 0 & b^2 - \sqrt{b^2+1}\end{bmatrix} \\ &= \eta. \end{aligned}$$

Ook is $\det t(b) = \sqrt{b^2+1}^2 - b^2 = 1$. Ten slotte is voor $e_3 \in V_H$,

$$t(b)e_3 = \begin{bmatrix}b\\ 0\\ \sqrt{b^2+1}\end{bmatrix}.$$

Dan is $\eta\langle t(b)e_3, t(b)e_3\rangle = b^2 - \sqrt{b^2+1} = -1$ en $(t(b)e_3)_3 = \sqrt{b^2+1} > 0$, dus $t(b)e_3 \in V_H$. Daarom is $t(b) \in V_H$.

Voor G_E geldt dat natuurlijk $I_2 \in SO(2)$ en $\left[\begin{smallmatrix} b \\ 0 \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$, dus

$$t(b) = \begin{bmatrix} \begin{matrix} I_2 \end{matrix} & \begin{matrix} b \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} \in G_E.$$

Ten slotte voor G_S geldt dat $\det t(b) = \cos(b)^2 + \sin(b)^2 = 1$. Ook is

$$t(b)^T t(b) = \begin{bmatrix} \cos(b)^2 + \sin(b)^2 & 0 & -\cos b \sin b + \sin b \cos b \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin b \cos b + \cos b \sin b & 0 & \sin(b)^2 + \cos(b)^2 \end{bmatrix} = I_3.$$

Daarom is $t(b)^T = t(b)^{-1}$, dus $t(b) \in G_S$. $\square$

Stelling 25. *Zowel in G_H als in G_E en G_S is voor alle $b \in \mathbb{R}$, $t(b)^{-1} = t(-b)$.*

Bewijs. In G_H is

$$t(b)^{-1} = \eta t(b)^T \eta = \begin{bmatrix} \sqrt{b^2+1} & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & \sqrt{b^2+1} \end{bmatrix} = t(-b).$$

In G_E is

$$t(b)t(-b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b+b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

Ten slotte, voor G_S, is

$$t(b)^{-1} = t(b)^T = \begin{bmatrix} \cos b & 0 & \sin b \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin b & 0 & \cos b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos -b & 0 & -\sin -b \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin -b & 0 & \cos -b \end{bmatrix} = t(-b).$$

$\square$

Definitie 17. Voor $a, b \in \mathbb{R}$ definiëren we een *translatie* als

$$t(a,b) = r(a)t(b)r^{-1}(a).$$

Stelling 26. *De translaties zijn elementen van G_H, G_E en G_S.*

Bewijs. Volgens stelling 18 zijn G_H, G_E en G_S groepen onder matrixsamenstelling. Volgens de stellingen 19 en 24 zijn voor alle $a, b \in \mathbb{R}$, $r(a)$, $t(b)$ en dus ook $r(a)^{-1}$, elementen van G_H, G_E en G_S, dus de translatie $t(a,b) = r(a)t(b)r(a)^{-1}$ is ook een element van G_H, G_E en G_S. $\square$

Corollarium 3. *Voor translatie t en rotatie r is rtr^{-1} een translatie.*

Bewijs. Voor alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, is volgens lemma 2,

$$r(a)t(b,c)r(a)^{-1} = r(a)r(b)t(c)r(b)^{-1}r(a)^{-1} = r(a+b)t(c)r(a+b)^{-1} = t(a+b,c).$$

$\square$

E.5 Ontbinding

Lemma 3. *Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a^2 + b^2 > 0$. Zij $a' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ en $b' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Dan bestaat er een $\theta \in \mathbb{R}$, zodanig dat*

$$\begin{bmatrix} a' & -b' & 0 \\ b' & a' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r(\theta).$$

Bewijs. Zij $p = s = a'$, $q = b'$ en $r = -b'$. Dan geldt dat

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= (a')^2 + (b')^2 = 1; \\ r^2 + s^2 &= (b')^2 + (a')^2 = 1; \\ pr + qs &= -a'b' + b'a' = 0; \\ ps - qr &= a'a' - -b'b' = 1. \end{aligned}$$

Dan bestaat er volgens stelling 20 een $\theta \in \mathbb{R}$, zodanig dat

$$\begin{bmatrix} a' & -b' & 0 \\ b' & a' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & r & 0 \\ q & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r(\theta).$$

□

Stelling 27. *Voor alle $g \in G_H$, bestaat er een translatie $t(a, b)$ en rotatie $r(c)$ zodanig dat $g = t(a, b)r(c)$.*

Bewijs. Laat $g \in G_H$ en $\left[\begin{smallmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{smallmatrix}\right] = ge_3 \in V_H$ zijn. Dan is

$$-1 = \eta\langle ge_3, ge_3\rangle = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ -g_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = g_1^2 + g_2^2 - g_3^2.$$

Dan is $g_3^2 = g_1^2 + g_2^2 + 1$, dus $g_3 = \pm\sqrt{g_1^2 + g_2^2 + 1}$. Omdat $ge_3 \in V_H$, en voor alle $v \in V_H, v_3 > 0$, is

$$g_3 = (ge_3)_3 = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + 1} = \sqrt{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}^2 + 1}.$$

Stel dat $g_1^2 + g_2^2 > 0$. Laat a de hoek van de rotatie zijn die in lemma 3 wordt geconstrueerd voor g_1 en g_2. Zij $b = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$. Dan is

$$t(b) = \begin{bmatrix} \sqrt{b^2+1} & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & \sqrt{b^2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_3 & 0 & \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{g_1^2 + g_2^2} & 0 & g_3 \end{bmatrix},$$

dus

$$r(a)t(b)e_3 = r(a) \begin{bmatrix} \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \\ 0 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{g_1\sqrt{g_1^2+g_2^2}}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}} \\ \frac{g_2\sqrt{g_1^2+g_2^2}}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}} \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = ge_3.$$

Stel dat $g_1^2 + g_2^2 = 0$. Laat dan $a = b = 0$ zijn. Dan is $g_3 = \sqrt{1 + g_1^2 + g_2^2} = 1$. Ook dan is

$$r(a)t(b)e_3 = I_3^2 e_3 = e_3 = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = ge_3.$$

Daarom is $t(b)^{-1}r(a)^{-1}ge_3 = e_3$ en

$$t(a,b)^{-1}ge_3 = r(a)t(b)^{-1}r(a)^{-1}ge_3 = r(a)e_3 = e_3.$$

Daarom bestaat er volgens stelling 21 een $c \in \mathbb{R}$, zodanig dat $t(a,b)^{-1}g = r(c)$, maar dan is $g = t(a,b)r(c)$. $\square$

Stelling 28. *Voor alle $g \in G_E$, bestaat er een translatie $t(a,b)$ en een rotatie $r(c)$, zodanig dat $g = t(a,b)r(c)$.*

Bewijs. Stel dat $g_1^2 + g_2^2 > 0$. Laat a de hoek van de rotatie zijn die in lemma 3 wordt geconstrueerd voor g_1 en g_2. Laat $b = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$ zijn. Dan is

$$r(a)t(b)e_3 = r(a) \begin{bmatrix} \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \\ 0 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{g_1\sqrt{g_1^2+g_2^2}}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}} \\ \frac{g_2\sqrt{g_1^2+g_2^2}}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}} \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = ge_3.$$

Stel dat $g_1^2 + g_2^2 = 0$. Laat dan $a = b = 0$ zijn. Ook dan is

$$r(a)t(b)e_3 = I_3^2 e_3 = e_3 = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = ge_3.$$

Daarom is $t(b)^{-1}r(a)^{-1}ge_3 = e_3$ en

$$t(a,b)^{-1}ge_3 = r(a)t(b)^{-1}r(a)^{-1}ge_3 = r(a)e_3 = e_3.$$

Daarom bestaat er volgens stelling 22 een $c \in \mathbb{R}$, zodanig dat $t(a,b)^{-1}g = r(c)$, maar dan is $g = t(a,b)r(c)$. $\square$

Stelling 29. *Voor alle $g \in G_S$, bestaat er een translatie $t(a,b)$ en een rotatie $r(c)$, zodanig dat $g = t(a,b)r(c)$.*

Bewijs. Stel dat $g_1^2 + g_2^2 > 0$. Laat a de hoek van de rotatie zijn die in lemma 3 wordt geconstrueerd voor g_1 en g_2. Omdat $g \in G_S$, is $g^T g = I_3$, dus

$$g_3^2 \leq g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = \langle ge_3, ge_3 \rangle = 1.$$

Daarom is $g_3^2 \leq g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = 1$. Dan bestaat er een $b \in [0, \pi]$, zodanig dat $\cos b = g_3$. Omdat voor $0 \leq b \leq \pi$, $\sin b \geq 0$, is

$$\sin b = \sqrt{1 - \cos(b)^2} = \sqrt{1 - g_3^2} = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}.$$

Dan is

$$r(a)t(b)e_3 = r(a) \begin{bmatrix} \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \\ 0 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{g_1\sqrt{g_1^2+g_2^2}}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}} \\ \frac{g_2\sqrt{g_1^2+g_2^2}}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}} \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = ge_3.$$

Stel dat $g_1^2 + g_2^2 = 0$. Dan is $g_3 = \pm\sqrt{1 - g_1^2 - g_2^2} = \pm 1$. Stel dat $g_3 = 1$. Laat dan $a = b = 0$ zijn. Dan is

$$r(a)t(b)e_3 = I_3^2 e_3 = e_3 = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = ge_3.$$

Stel dat $g_3 = -1$. Zij dan $a = 0$ en $b = \pi$. Dan is

$$r(a)t(b)e_3 = I_3 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} e_3 = -e_3 = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = ge_3.$$

In ieder van deze gevallen is daarom is $t(b)^{-1}r(a)^{-1}ge_3 = e_3$ en

$$t(a,b)^{-1}ge_3 = r(a)t(b)^{-1}r(a)^{-1}ge_3 = r(a)e_3 = e_3.$$

Daarom bestaat er volgens stelling 22 een $c \in \mathbb{R}$, zodanig dat $t(a,b)^{-1}g = r(c)$, maar dan is $g = t(a,b)r(c)$. □

Stelling 30. *De voor elementen g van G_H, G_E en G_S gevonden ontleding in een translatie $\tau(g)$ en rotatie $\rho(g)$ is uniek, behalve voor $g \in G_S$, waarvoor geldt dat $ge_3 = -e_3$.*

Met andere woorden: $\rho(g)$ en $\tau(g)$ zijn welgedefinieerd, behalve als $g \in G_S$, waarvoor geldt dat $ge_3 = -e_3$.

Bewijs. Stel dat voor g een bewerking in G_H, G_E of G_S, $t(a_1,b_1)r(c_1) = g = t(a_2,b_2)r(c_2)$ voor $a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 \in \mathbb{R}$. Dan is

$$\begin{aligned} t(a_1,b_1)r(c_1)e_3 &= t(a_2,b_2)r(c_2)e_3, \\ t(a_1,b_1)e_3 &= t(a_2,b_2)e_3, \\ r(a_1)t(b_1)r(a_1)^{-1}e_3 &= r(a_2)t(b_2)r(a_2)^{-1}e_3, \\ r(a_1)t(b_1)e_3 &= r(a_2)t(b_2)e_3. \end{aligned}$$

- Voor $g \in G_H$ is

  $$\begin{bmatrix} b_1 \cos a_1 \\ b_1 \sin a_1 \\ \sqrt{1+b_1^2} \end{bmatrix} = r(a_1)t(b_1)e_3 = r(a_2)t(b_2)e_3 = \begin{bmatrix} b_2 \cos a_2 \\ b_2 \sin a_2 \\ \sqrt{1+b_2^2} \end{bmatrix}.$$

  Dan is $b_1^2 = b_2^2$.

- Voor $g \in G_E$ is

  $$\begin{bmatrix} b_1 \cos a_1 \\ b_1 \sin a_1 \\ 1 \end{bmatrix} = r(a_1)t(b_1)e_3 = r(a_2)t(b_2)e_3 = \begin{bmatrix} b_2 \cos a_2 \\ b_2 \sin a_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

  Dan is

  $$b_1^2 = b_1^2(\cos^2 a_1 + \sin^2 a_1) = b_2^2(\cos^2 a_2 + \sin^2 a_2) = b_2^2.$$

- Voor $g \in G_S$ is

  $$\begin{bmatrix} -\sin b_1 \cos a_1 \\ -\sin b_1 \sin a_1 \\ \cos b_1 \end{bmatrix} = r(a_1)t(b_1)e_3 = r(a_2)t(b_2)e_3 = \begin{bmatrix} -\sin b_2 \cos a_2 \\ -\sin b_2 \sin a_2 \\ \cos b_2 \end{bmatrix}.$$

  Dan is $\cos b_1 = \cos b_2$ en

  $$\sin^2 b_1 = \sin^2 b_1(\cos^2 a_1 + \sin^2 a_1) = \sin^2 b_2(\cos^2 a_2 + \sin^2 a_2) = \sin^2 b_2.$$

We gaan nu de volgende gevallen onderscheiden:

(1) Voor $g \in G_H \cup G_E$, $b_1 = b_2 = 0$ of voor $g \in G_S$, $\sin b_1 = \sin b_2 = 0$ en $\cos b_1 = \cos b_2 = 1$.

(2) Voor $g \in G_S$, $\sin b_1 = \sin b_2 = 0$ en $\cos b_1 = \cos b_2 = -1$.

(3) Voor $g \in G_H \cup G_E$, $b_1 \neq 0 \neq b_2$ of voor $g \in G_S$, $\sin b_1 \neq 0 \neq \sin b_2$.

  (a) Voor $g \in G_H \cup G_S$, $b_1 = b_2$ of voor $g \in G_S$, $\sin b_1 = \sin b_2$.

  (b) Voor $g \in G_H \cup G_S$, $b_1 = -b_2$ of voor $g \in G_S$, $\sin b_1 = -\sin b_2$.

Dit doen we als volgt:

(1) Stel dat voor $g \in G_H \cup G_E$, $b_1 = b_2 = 0$ of voor $g \in G_S$, $\sin b_1 = \sin b_2 = 0$ en $\cos b_1 = \cos b_2 = 1$. Dan is, in zowel G_H als G_E en G_S, $t(b_1) = t(b_2) = I$. Dan is

$$t(a_1, b_1) = r(a_1)Ir(a_1)^{-1} = I = r(a_2)Ir(a_2)^{-1} = t(a_2, b_2).$$

Zojuist hebben we aangenomen dat $\cos b_1 = \cos b_2 = 1$. (2) Echter, als $\sin b_1 = \sin b_2 = 0$, dan kan ook $\cos b_1 = \cos b_2 = -1$. Dan is $ge_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T = -e_3$. Dit is de in de stelling genoemde uitzondering. In dit geval zijn $t(a_1, b_1)$ en $t(a_2, b_2)$ niet per se gelijk. Bijvoorbeeld voor $a_1 = \pi$, $a_2 = 0$ en $b_1 = b_2 = \pi$.

(3) Stel dat $b_1 \neq 0$ in G_H of G_E. Dan is $b_2 \neq 0$ en $b_2 = b_1$ of $b_2 = -b_1$. In G_S geldt: als $\sin b_1 \neq 0$, dan is $\sin b_2 \neq 0$ en $\sin b_2 = \sin b_1$ of $\sin b_2 = -\sin b_1$.

(a) Stel nu dat in G_H of G_E, $b_1 = b_2$, of dat in G_S, $\sin b_1 = \sin b_2$. Dan is $t(b_1) = t(b_2)$ en $\cos a_1 = \cos a_2$ en $\sin a_1 = \sin a_2$, dus $r(a_1) = r(a_2)$. Dan is $t(a_1, b_1) = t(a_2, b_2)$.

(b) Stel dat $b_1 = -b_2$ in G_H of G_E, of dat $\sin b_1 = -\sin b_2$ in G_S. Dan is $\cos a_1 = -\cos a_2$ en $\sin a_1 = -\sin a_2$. Zij

$$\begin{bmatrix} T_{11}(b) & 0 & T_{12}(b) \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{21}(b) & 0 & T_{22}(b) \end{bmatrix} = t(b).$$

Dit geeft de volgende waarden voor T:

	G_H	G_E	G_S
$T_{11}(b)$	$\sqrt{b^2+1}$	1	$\cos b$
$T_{12}(b)$	b	b	$-\sin b$
$T_{21}(b)$	b	0	$\sin b$
$T_{22}(b)$	$\sqrt{b^2+1}$	1	$\cos b$

Dan is

$$\begin{aligned} t(a,b) &= r(a)t(b)r(a)^{-1} \\ &= r(a)t(b)r(-a) \\ &= \begin{bmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11}(b) & 0 & T_{12}(b) \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{21}(b) & 0 & T_{22}(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos -a & -\sin -a & 0 \\ \sin -a & \cos -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_{11}(b)\cos a & -\sin a & T_{12}(b)\cos a \\ T_{11}(b)\sin a & \cos a & T_{12}(b)\sin a \\ T_{21}(b) & 0 & T_{22}(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_{11}(b)\cos^2 a + \sin^2 a & (T_{11}(b)-1)\cos a \sin a & T_{12}(b)\cos a \\ (T_{11}(b)-1)\cos a \sin a & T_{11}(b)\sin^2 a + \cos^2 a & T_{12}(b)\sin a \\ T_{21}(b)\cos a & T_{21}(b)\sin a & T_{22}(b) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

In G_H, G_E en G_S is dan $T_{11}(b_1) = T_{22}(b_1) = T_{11}(b_2) = T_{22}(b_2)$, terwijl $T_{11}(b_1) = T_{22}(b_1) = -T_{11}(b_2) = -T_{22}(b_2)$. Dan is

$$\begin{aligned} t(a_1, b_1) &= \begin{bmatrix} T_{11}(b_1)\cos^2 a_1 + \sin^2 a_1 & (T_{11}(b_1) - 1)\cos a_1 \sin a_1 & T_{12}(b_1)\cos a_1 \\ (T_{11}(b_1) - 1)\cos a_1 \sin a_1 & T_{11}(b_1)\sin^2 a_1 + \cos^2 a_1 & T_{12}(b_1)\sin a_1 \\ T_{21}(b_1)\cos a_1 & T_{21}(b_1)\sin a_1 & T_{22}(b_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_{11}(b_2)\cos^2 a_2 + \sin^2 a_2 & (T_{11}(b_2) - 1)\cos a_2 \sin a_2 & T_{12}(b_2)\cos a_2 \\ (T_{11}(b_2) - 1)\cos a_2 \sin a_2 & T_{11}(b_2)\sin^2 a_2 + \cos^2 a_2 & T_{12}(b_2)\sin a_2 \\ T_{21}(b_2)\cos a_2 & T_{21}(b_2)\sin a_2 & T_{22}(b_2) \end{bmatrix} \\ &= t(a_2, b_2). \end{aligned}$$

Daarom is, tenzij $g \in G_S$ en $ge_3 = -e_3$, in alle gevallen $t(a_1, b_1) = t(a_2, b_2)$.

Dan is

$$\begin{aligned} r(c_1) &= t(a_1, b_1)^{-1} t(a_1, b_1) r(c_1) \\ &= t(a_1, b_1)^{-1} t(a_2, b_2) r(c_2) \\ &= t(a_1, b_1)^{-1} t(a_1, b_1) r(c_2) \\ &= r(c_2). \end{aligned}$$

Daarom is, als $t(a_1, b_1)r(c_1) = g = t(a_2, b_2)r(c_2)$, $t(a_1, b_1) = t(a_2, b_2)$ en $r(c_1) = r(c_2)$, tenzij $g \in G_S$ en $ge_3 = -e_3$. □

Corollarium 4. *Voor $g \in G_H \cup G_E$, is $\rho(gr) = \rho(g)r$.*

Bewijs.

$$\tau(gr)\rho(gr) = gr = \tau(g)\rho(g)r,$$

met $\tau(g)$ een translatie en $\rho(g)r$ een rotatie en deze ontbinding is uniek. □

Corollarium 5. *Voor $g \in G_H \cup G_E$, is $\rho(rg) = r\rho(g)$.*

Bewijs.

$$\tau(rg)\rho(rg) = rg = r\tau(g)\rho(g) = r\tau(g)r^{-1}r\rho(g),$$

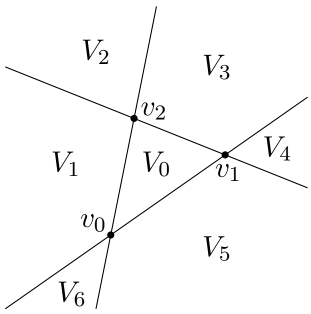
met $r\tau(g)r^{-1}$ een translatie en $r\rho(g)$ rotatie en deze ontbinding is uniek. □

Bijlage F

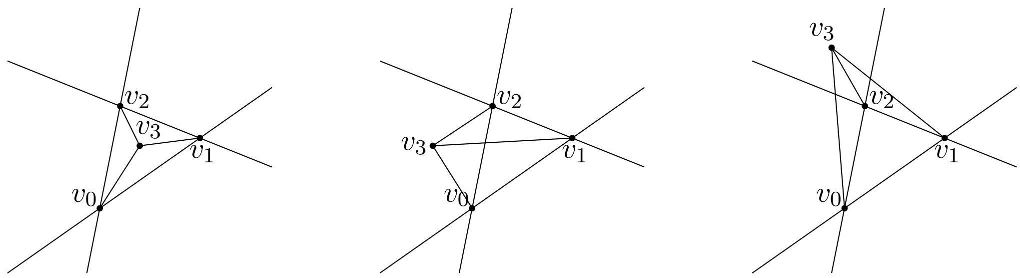
Driehoeken

Stelling 31. *Zij V het euclidische of hyperbolische vlak, laat positieve oriëntatie tegen de klok in zijn en laat voor $v_0, v_1, v_2 \in V$, $\omega(v_0, v_1, v_2)$ het georiënteerde oppervlak van de driehoek v_0, v_1, v_2 zijn. Dan is voor alle $v_0, v_1, v_2, v_3 \in V$,*

$$\omega(v_0, v_1, v_3) + \omega(v_1, v_2, v_3) - \omega(v_0, v_2, v_3) - \omega(v_0, v_1, v_2) = 0. \tag{F.1}$$



Figuur F.1: De zeven vlakken waar v_3 in kan liggen



(a) $v_3 \in V_0$ (b) $v_3 \in V_1$ (c) $v_3 \in V_2$

Figuur F.2: Mogelijke posities van v_3

Bewijs. Zij $v_0, v_1, v_2, v_3 \in V$. Merk op dat het verwisselen van twee punten van een driehoek zijn oriëntatie omklapt, en dus het teken van zijn georiënteerde oppervlak. We herschrijven vergelijking F.1 naar

$$\omega(v_0, v_1, v_3) + \omega(v_1, v_2, v_3) + \omega(v_2, v_0, v_3) - \omega(v_0, v_1, v_2) = 0. \tag{F.2}$$

Het nagaan van deze vergelijking wordt bemoeilijkt door het feit dat de oriëntatie, en dus het teken van het georiënteerde oppervlak, van ieder van de vier driehoeken van situatie tot situatie kan verschillen. Daarom zullen we de vergelijking controleren voor iedere combinatie van oriëntaties.

Allereerst kan $\triangle v_0, v_1, v_2$ positieve of negatieve oriëntatie hebben. Laten we nu even uitgaan van positieve oriëntatie.

Het vlak $\{v_3 \in V \mid \triangle v_0, v_1, v_3$ heeft positieve oriëntatie$\}$ wordt van het vlak $\{v_3 \in V \mid \triangle v_0, v_1, v_3$ heeft negatieve oriëntatie$\}$ gescheiden door een lijn, namelijk de lijn door v_0 en v_1, zie figuur F.1. De lijn door v_1 en v_2 verdeelt deze twee vlakken ieder in twee vlakken op basis van de oriëntatie van $\triangle v_1, v_2, v_3$. De lijn door v_2 en v_0 deelt drie van deze vlakken dan verder op, op basis van de oriëntatie van $\triangle v_2, v_0, v_3$. In totaal geeft dit zeven vlakken en ieder van deze vlakken geeft een andere combinatie van oriëntaties van $\triangle v_0, v_1, v_3$, $\triangle v_1, v_2, v_3$ en $\triangle v_2, v_0, v_3$.

We kijken eerst naar de gevallen waarin (a) $v_3 \in V_0$, (b) $v_3 \in V_1$ en (c) $v_3 \in V_2$ (zie figuur F.2).

Het is gemakkelijk na te gaan dat in geval (a),

$$\omega(v_0, v_1, v_3) + \omega(v_1, v_2, v_3) + \omega(v_2, v_0, v_3) = \omega(v_0, v_1, v_2),$$

in geval (b),

$$\omega(v_0, v_1, v_3) + \omega(v_1, v_2, v_3) = \omega(v_0, v_2, v_3) + \omega(v_0, v_1, v_2)$$

en in geval (c),

$$\omega(v_0, v_1, v_2) + \omega(v_3, v_2, v_1) + \omega(v_0, v_2, v_3) = \omega(v_0, v_1, v_3)$$

en dat daarom voor alle drie deze gevallen vergelijking F.2 en dus vergelijking F.1 klopt. Het bewijs dat vergelijking F.1 klopt voor $v_3 \in V_3$ en $v_3 \in V_5$ gaat analoog aan het bewijs voor (b) en het bewijs dat vergelijking F.1 klopt voor $v_3 \in V_4$ en $v_3 \in V_6$ gaat analoog aan het bewijs voor (c).

We hadden aangenomen dat $\triangle v_0, v_1, v_3$ positieve oriëntatie had. Stel nu dat dat niet het geval is. In dat geval gaat er een bewijs op dat analoog is aan het voorgaande, maar de georiënteerde oppervlaktes die men dan verkrijgt zijn negatief, omdat de driehoeken het spiegelbeeld zijn van de driehoeken in het voorgaande. Vergelijking F.1 gaat dan echter nog steeds op, omdat $-0 = 0$.

Stel nu dat de punten van een van de driehoeken op een lijn vallen. In dat geval heeft de driehoek positieve noch negatieve oriëntatie. Het blijkt dat dan zowel het bewijs voor wanneer de driehoek positieve oriëntatie als het bewijs voor wanneer deze negatieve oriëntatie heeft opgaat. Daarmee is vergelijking F.1 voor alle gevallen bewezen. $\square$

Bibliografie

[1] W.T. van Est. A group theoretic interpretation of area in the elementary geometries. *Simon Stevin*, 32:29–38, 1954.

Index