

# Een ray-tracer voor geodeten van lichtstralen om een zwart gat

D. Knoppert





# Een ray-tracer voor geodeten van lichtstralen om een zwart gat

door

D. Knoppert

ter verkrijging van de graad van Bachelor of Science  
aan de Technische Universiteit Delft,  
in het openbaar de verdedigen op woensdag 26 augustus om 10:00 uur.

Student number: 4699815  
Project duration: Januari 22, 2020 – Augustus 26, 2020  
Thesis committee: Dr. P.M. Visser, TU Delft, supervisor TW  
Prof. Dr. B. Rieger, TU Delft, supervisor TN  
Dr. B. van den Dries, TU Delft  
Prof. Dr. Y.M. Blanter, TU Delft

*Op dit verslag is geheimhouding van toepassing tot en met 26 augustus 2020.*

An electronic version of this thesis is available at <http://repository.tudelft.nl/>.



# Samenvatting

In 2019 werd er voor het eerst een foto van een zwart gat gepubliceerd. Het betreffende super zware zwarte gat ligt in het midden van het sterrenstelsel Messier 87. In dit onderzoek willen we simulaties maken van hoe een foto van een zwart gat eruit ziet. Zowel voor een achtergrond (zoals de sterrenhemel) als de accretieschijf die eromheen zit. De vraag is vervolgens welke informatie uit de foto gehaald kan worden. Om de foto te maken, werd een ray-tracer gemaakt. Hierbij kijk je waar een lichtstraal, die op het scherm komt (een oog of camera), vandaan komt. De bewegingsvergelijkingen zijn vereenvoudigd door constantes van de beweging te zoeken om de geodeetvergelijkingen te versimpelen. Vervolgens zijn de bewegingsvergelijkingen numeriek opgelost. Er is gevonden dat lichtstralen van veraf niet in een zwart gat vallen bij  $\frac{\sqrt{27}}{2}R_s$ .  $R_s$  is de Schwarzschild straal. Dit is de straal waarvandaan licht niet meer kan ontsnappen van een zwart gat. De gesimuleerde plaatjes zijn 128x128 pixels. In de gesimuleerde plaatjes had het zwart gat ongeveer  $2.5R_s$ . Dit komt nauw overeen maar er wordt een aanzienlijke fout gemaakt door de resolutie van de plaatjes. Verder is kwalitatief de oriëntatie en rotatieparameter  $a$  goed uit de plaatjes te halen.



# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Geodeten voor lichtstralen</b>	<b>3</b>
2.1	Einstein's veldvergelijking en de geodeetvergelijking. . . . .	3
2.2	Killing vectorveld . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Schwarzschild metriek</b>	<b>7</b>
3.1	Kerr-metriek. . . . .	7
3.2	Schwarzschild metriek . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Schwarzschild metriek in Cartesische coördinaten</b>	<b>13</b>
4.1	Geodeten . . . . .	13
4.1.1	Constanten van de beweging . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Niet-roterend zwart gat als zwaartekracht lens</b>	<b>17</b>
5.1	Ray-tracer. . . . .	17
5.2	Beginvoorwaarde. . . . .	18
5.3	Achtergrond. . . . .	18
5.4	Ring rond een zwart gat . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Kerr metriek in Kerr-Schild coördinaten</b>	<b>21</b>
6.1	Metriek en coördinaten. . . . .	21
6.2	Constanten van de beweging . . . . .	23
<b>7</b>	<b>Roterend zwart gat als zwaartekracht lens</b>	<b>25</b>
7.1	Beginvoorwaarden . . . . .	25
7.2	Ring rond een roterend zwart gat . . . . .	25
<b>8</b>	<b>Conclusie</b>	<b>29</b>
	<b>Bibliografie</b>	<b>31</b>





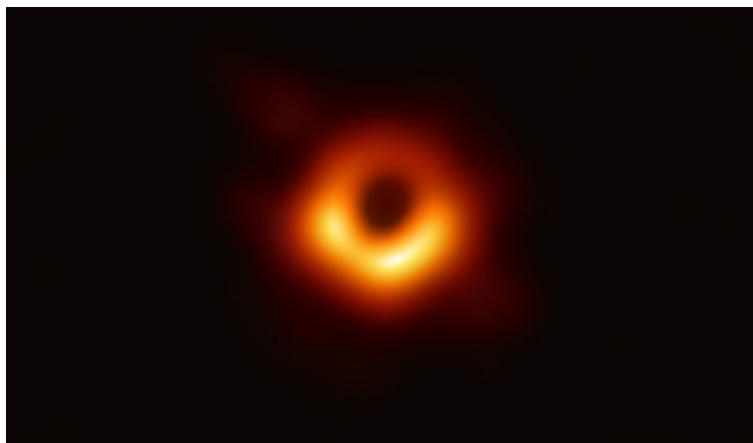
# 1

## Inleiding

In januari 2019 werd er voor het eerst een foto van een zwart gat gepubliceerd. Hiermee was dit het eerste visuele bewijs van het bestaan van een zwart gat. Meer dan 200 wetenschappers hebben hiervoor collectief samengewerkt. Ze hebben radiotelescopen op verschillende plaatsen op aarde tegelijkertijd gericht naar het zwarte gat. Gezamenlijk vormen deze telescopen de Event Horizon-Telescope (EHT). Het zwarte gat in kwestie ligt in sterrenstelsel M87. M87 ligt ongeveer op 55 miljoen lichtjaar afstand [8]. Een erg groot getal maar het is toch een van de dichtsbijzijnde sterrenstelsels. Het zwarte gat zelf is 6.5 miljard keer zo zwaar als de zon. Dit is een van de zwaarste zwarte gaten die we kennen. De Schwarzschild straal (straal waar licht niet meer kan ontsnappen) van het zwarte gat is hiermee 20 miljard kilometer. Dat is ongeveer 120 keer de afstand van de aarde tot de zon. Het construeren van deze foto is een heel erg knappe prestatie. Het is vergelijkbaar om vanuit Europa een zandkorrel te fotograferen in Australië.

Voorafgaand aan deze foto is er al veel gebeurd op het gebied van het waarnemen van zwarte gaten. In begin 20e eeuw formuleerde Einstein zijn theorie over zwaartekracht: De algemene relativiteitstheorie. Dit was een nieuwe kijk op hoe we met zwaartekracht om moeten gaan. Hij ontdekte dat het klassieke Newtonse plaatje niet correct was. Newton's theorie werkte alleen in een regime van relatief kleine massa's (zoals de aarde en de zon) en lage snelheden. Al snel werd er door Karl Schwarzschild een oplossing gevonden voor Einstein's veldvergelijking. De situatie beschreef een singulariteit in de oorsprong met nul volume en oneindig grote dichtheid. Een andere oplossing van de Einstein veldvergelijking waren zwaartekrachtgolven. Deze golven kunnen ontstaan van twee neutronen sterren of zwarte gaten die om elkaar heen draaien. In 2016 zijn deze voor het eerst gemeten. Dit was weer een belangrijk bewijs en succes van Einstein's algemene relativiteitstheorie. En het was bekend dat de golven van twee fuserende zwarte gaten kwamen. Dit was dus weer een bewijs dat zwarte gaten werkelijk bestaan. Eerder in 1995 werd er ook al met radio telescopen een zwart gat waargenomen [8]. Niet het zwart gat zelf maar de straling afkomstig uit de omgeving van een zwart gat. In 2019, toen de foto werd gepubliceerd, was dit het allereerste visuele bewijs van het bestaan van zwarte gaten. Officieel is het zwarte gat nog steeds niet te zien. Een zwart gat zendt geen licht uit. Maar een accretieschijf is wel gefotografeerd waardoor de schaduw van het zwarte gat is waargenomen [7]. Al dit onderzoek rondom zwarte gaten is erg belangrijk. Zwarte gaten spelen namelijk een belangrijke rol in het verbinden van de algemene relativiteitstheorie met de quantum mechanica. Iets dat tot op heden nog niet is gelukt.

Wat is een zwart gat? Een zwart gat is een ineengestorte massa. Hij wordt gekarakteriseerd door zijn horizon. Alles wat binnen de horizon valt, kan niet meer terugkeren. Dit komt doordat de massa dusdanig groot is, dat de ontsnappingsnelheid groter is dan de lichtsnelheid. Zwarte gaten zijn op vele manieren te classificeren. Een manier is op basis van massa en omvang. Op basis hiervan zijn er 4 soorten. De eerste zijn de minuscule zwarte gaten. Deze kunnen een massa hebben tot ongeveer de massa van de maan en hebben dus een omvang tot ongeveer 0.1 millimeter. Deze zijn alleen nog theoretisch en er is nog niet aangetoond dat ze bestaan. Als ze al bestaan zouden ze verdampen in enkele seconden vanwege Hawkingstraling. Verder heb je de stellaire zwarte gaten. Deze hebben



Figuur 1.1: Foto die is gemaakt door de EHT. Door tegelijkertijd de radiogolven van het superzware zwart gat, die in het midden van sterrenstelsel Messier 87 ligt, met meerdere telescopen verspreid op aarde, kon deze foto in 2019 geconstrueerd worden.

ongeveer de massa van 5 tot 100 keer de massa van de zon. Deze zwarte gaten zijn ontstaan uit een supernova van een zware ster. Dan heb je middelgrote zwarte gaten. Deze hebben een massa van 500 tot 1000 keer de massa van de zon. Ten slotte heb je de superzware zwarte gaten. Deze hebben meestal een massa van een paar miljoen keer de zon. Deze zwarte gaten bevinden zich in het centrum van een sterrenstelsel. Het zwarte gat waar een foto van is gemaakt valt hieronder.[3]  
Verder kunnen zwarte gaten geclassificeerd worden op basis van lading en impulsmoment. Zo kan een zwart gat een lading hebben en/of een impulsmoment. De vier mogelijkheden (wel/geen spin, wel/geen lading) hebben ook een ander effect op de buiging van de ruimte tijd.[2]

Er is nog veel onduidelijk over de accretieschijf van een zwart gat. Net als planeten om een zon, draait het gas van een accretieschijf om een zwart gat en kan daar voor altijd blijven. De gassen worden dusdanig heet, dat ze Röntgenstraling uitstralen. Toch valt er toch een deel van de materie uit de accretieschijf in het zwarte gat. Dit moet van frictie komen. Door frictie verliezen deeltjes energie en vallen verder in de ring. Hierbij krijgen ze meer snelheid en zenden Röntgenstraling uit. Het is nog niet duidelijk waar die frictie vandaan komt[9]. De EHT die de foto heeft gemaakt hoopt daar achter te komen. Wat de EHT opvangt is geen zichtbaar licht maar radiogolven. Met numerieke simulaties proberen ze de foto's te vergelijken. Met het doel om te controleren of Einstein's algemene relativiteitstheorie werkt rond een super groot zwart gat.[1]

In dit onderzoek wil ik kijken wat voor informatie uit een foto van een zwart gat gehaald kan worden. Wat is de oriëntatie van het zwarte gat? Wat is de impulsmoment van het zwarte gat? Kan die informatie wel uit de afbeelding van het zwarte gat gehaald worden?

# 2

## Geodeten voor lichtstralen

In het regime van zware massa's en hoge snelheden, moeten we de algemene relativiteits theorie van Einstein gebruiken om de banen van lichtstralen uit te rekenen. In de klassieke Newtonse mechanica gaan lichtstralen altijd in een rechte baan door de ruimte. Einstein's theorie zegt dat massa de ruimte buigt. Dit heeft als gevolg dat een lichtstraal mee beweegt met de kromming van de ruimte.

### 2.1. Einstein's veldvergelijking en de geodeetvergelijking

Volgens de speciale relativiteitstheorie moeten we tijd meenemen als een coördinaat in de wereld. Tijd en ruimte kunnen we anders waarnemen dan iemand die een snelheid relatief van ons heeft. Als we de 'afstand' tussen twee naburige events of waarnemers willen uitrekenen doen we dat als volgt. [6]

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x^\mu = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Hier is  $\eta_{\mu\nu}$  de Minkowski metriek en  $x^\mu$  de Cartesische viervector met  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Als er in een vergelijking een indice boven en onder staat, dan wordt er gesommeerd over alle waarden van de indice. In deze context betekent dat er wordt gesommeerd over vier componenten. Dit is de Einstein sommatie conventie.

$$x^\mu y_\mu = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu y_\mu \quad (2.2)$$

We nemen voor de lichtsnelheid en voor de gravitatieconstante  $c = G = 1$ . De Minkowski metriek beschrijft de vlakke ruimte tijd. Als we met een gekromde ruimte willen werken, moeten we de Minkowski metriek inruilen voor een metriek afhankelijk van positie. Hierdoor verandert de beschrijving van onderlinge afstand.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.3)$$

Hier is  $g_{\mu\nu}$  de metrische tensor. Voor de metrische tensor geldt  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ . De metrische tensor is een oplossing van de Einstein veldvergelijkingen.[4]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

Hier is  $R_{\mu\nu}$  de Ricci tensor en  $R$  de Ricci scalair.  $T_{\mu\nu}$  is de energie-impuls tensor. In de energie impuls tensor staat alle informatie van een systeem beschreven in energie, impuls en de energie en impuls stromen daarvan. Dus links van vergelijking (2.4) staat alles over de kromming van de ruimte, en rechts schetst de situatie in energie en impuls. Dus de Einstein veldvergelijking zegt van links naar rechts hoe de kromming van de ruimte de baan van een deeltje beïnvloedt. En van rechts naar links vertelt de Einstein vergelijking hoe energie en impuls de ruimte buigt. Gegeven de metrische tensor is

het mogelijk de banen van massa's en lichtdeeltjes te berekenen. Dit wordt gedaan met de geodeet-vergelijking. [4]

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (2.5)$$

Hier is  $\lambda$  een affine parameter voor een deeltje met massa  $m$ . We kiezen hem als  $\lambda = \frac{1}{m}\tau$ . Hierdoor is

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (2.6)$$

de vierimpuls. Dan is  $\tau$  de proper time.  $\Gamma_{\sigma\nu}^\mu$  is het Christoffel symbool. Deze is volledig bepaald door de metrische tensor, volgens:[4]

$$\Gamma_{\sigma\nu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\tau} (\partial_\nu g_{\tau\sigma} + \partial_\sigma g_{\nu\tau} - \partial_\tau g_{\sigma\nu}) \quad (2.7)$$

De metrische tensor heeft een inverse  $g^{\mu\nu}$  zodat

$$g^{\mu\tau} g_{\tau\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (2.8)$$

We noteren  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . Er geldt voor de Christoffel symbolen dat  $\Gamma_{\sigma\nu}^\mu = \Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ . Merk op dat als de Christoffel symbolen nul zijn (ruimte is vlak), de geodeetvergelijking veranderd in de vergelijking van een rechte lijn. De geodeetvergelijking is een stelsel van vier niet-lineaire differentiaalvergelijkingen. En daarom niet makkelijk op te lossen. Door gebruik te maken van symmetrieën in de metrieek, kunnen we de berekeningen van geodeten versimpelen.

## 2.2. Killing vectorveld

Gegeven een vectorveld  $\xi^\mu$ . Er zit een symmetrie in de metrieek als het vectorveld  $\xi^\mu$  voldoet aan de volgende Killing vergelijking: [5]

$$\nabla_\nu \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\nu = 0 \quad (2.9)$$

Hierbij is  $\nabla_\mu$  de covariante afgeleide.  $\xi^\mu$  heet dan een Killing vectorveld.

$$\nabla_\nu \xi_\mu = \partial_\nu \xi_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\tau \xi_\tau \quad (2.10)$$

Voor een Killing vectorveld geldt dat langs de geodeet de scalaire grootheid  $Q = p^\alpha \xi_\alpha$  behouden is. Om dit te bewijzen, willen we laten zien

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} p^\alpha \xi_\alpha = 0 \quad (2.11)$$

We beginnen met het toepassen van de productregel en de ketting regel

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} p^\alpha \xi_\alpha = \frac{\partial p^\alpha}{\partial \lambda} \xi_\alpha + p^\alpha \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \lambda} = \frac{\partial p^\alpha}{\partial \lambda} \xi_\alpha + p^\alpha \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \lambda} = \frac{\partial p^\alpha}{\partial \lambda} \xi_\alpha + p^\alpha p^\beta \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} \quad (2.12)$$

Omdat we het hebben over geodeten gebruiken we vergelijking (2.5). Verder gebruiken we vergelijking (2.10).

$$\frac{\partial p^\alpha}{\partial \lambda} \xi_\alpha + p^\alpha p^\beta \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} = (-\Gamma_{\mu\nu}^\alpha p^\mu p^\nu) \xi_\alpha + p^\alpha p^\beta (\nabla_\beta \xi_\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \xi_\mu) = p^\alpha p^\beta \nabla_\beta \xi_\alpha \quad (2.13)$$

We hebben bij de laatste stap gebruikt dat als je sommeerd over indices, dan kunnen we de indice vrij kiezen. Dit verder uitwerken geeft

$$p^\alpha p^\beta \nabla_\beta \xi_\alpha = \frac{1}{2} p^\alpha p^\beta \nabla_\beta \xi_\alpha + \frac{1}{2} p^\alpha p^\beta \nabla_\alpha \xi_\beta = \frac{1}{2} p^\alpha p^\beta [\nabla_\beta \xi_\alpha + \nabla_\alpha \xi_\beta] = 0 \quad (2.14)$$

Bij de laatste stap hebben we vergelijking (2.9) gebruikt. Het kan voorkomen dat de metrieek van toepassing niet afhankelijk is van een van de coördinaten. Stel de metrieek is onafhankelijk van de coördinaat  $K$ . Dus

$$\partial_K g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.15)$$

In dit geval is  $\xi^\mu = \delta_K^\mu$ . Als we dit invullen in vergelijking (2.9), krijgen we

$$\nabla_\nu \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\nu = \nabla_\nu g_{\mu K} + \nabla_\mu g_{\nu K} = \partial_\nu g_{\mu K} + \partial_\mu g_{\nu K} - 2\Gamma_{\mu\nu}^\alpha g_{\alpha K} \quad (2.16)$$

Als we vergelijking (2.7) invullen dan krijgen we

$$\partial_\nu g_{\mu K} + \partial_\mu g_{\nu K} - 2 \left[ \frac{1}{2} g^{\alpha\tau} (\partial_\nu g_{\tau\mu} + \partial_\mu g_{\nu\tau} - \partial_\tau g_{\mu\nu}) \right] g_{\alpha K} \quad (2.17)$$

Dit verder uitwerken geeft

$$(g^{\alpha\tau} \partial_\tau g_{\mu\nu}) g_{\alpha K} = \delta_K^\tau \partial_\tau g_{\mu\nu} = \partial_K g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.18)$$

We hebben gebruikt dat  $g^{\mu\tau} g_{\tau\nu} = \delta_\nu^\mu$ . In de laatste stap hebben we vergelijking (2.15) gebruikt. Dus  $\xi^\mu = \delta_K^\mu$  is inderdaad in dit geval de Killing vector. Dit betekent dat  $\xi^\mu p_\mu$  behouden is.

$$\xi^\mu p_\mu = \delta_K^\mu p_\mu = p_K = \text{constant} \quad (2.19)$$

Dit zorgt ervoor dat de berekening van de geodeten veel makkelijker wordt. Killing vectoren zullen dan ook in de komende hoofdstukken gebruikt worden. De metrieken die wij gaan gebruiken is niet afhankelijk van de tijd-richting ( $x^0 = t$ ).  $p_0$  is dan behouden. De impuls  $p_0$  kunnen we dan identificeren met de energie van het deeltje. Voor niet roterende zwarte gaten, is er een symmetrie rond de  $z$ -as. Voor  $x^3 = \phi$  is  $p_3$  behouden. Dit is het impulsmoment.



# 3

## Schwarzschild metriek

In dit hoofdstuk gaan we de metriek van een niet-roterend zwart gat behandelen. Hiervoor gebruiken we de Schwarzschild metriek. We beginnen echter met het introduceren van de Kerr metriek. Deze metriek beschrijft de situatie van een roterend zwart gat. Dit is een algemenere metriek dan de Schwarzschild metriek. We gebruiken de Kerr metriek alleen als startpunt om het verder te versimpelen naar de situatie van een niet-roterend zwart gat. In een later hoofdstuk zullen we de Kerr-Metriek verder behandelen.

### 3.1. Kerr-metriek

We werken met de volgende coördinaten.

$$x^\mu = \begin{pmatrix} t \\ r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Dit zijn de gebruikelijke bolcoördinaten met de tijd als nulde component van de viervector. Deze coördinaten heten de Boyer-Lindquist coördinaten. De vierimpuls en de geodeetvergelijking wordt als volgt gegeven (zie vergelijking (2.5) en (2.6))

$$p^\mu = \frac{d}{d\lambda} x^\mu, \quad \frac{d}{d\lambda} p^\tau = -\Gamma_{\mu\nu}^\tau p^\mu p^\nu \quad (3.2)$$

Voor een roterend zwart gat gebruiken we de Kerr metriek die er als volgt uit ziet met de gekozen coördinaten. [4]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{2aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} (dt d\phi + d\phi dt) + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta] d\phi^2 \quad (3.3)$$

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (3.4)$$

$$\Delta(r) = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (3.5)$$

$M$  is hier de massa van het zwarte gat.  $a$  is de rotatieparameter en is verbonden aan de intrinsieke spin van het zwarte gat. Namelijk [4]

$$a = \frac{J}{M} \quad (3.6)$$

Hier is  $J$  de intrinsieke spin.  $a = 0$  betekent geen rotatie. Deze coördinaten heten de Boyer-Lindquist coördinaten. Dit is dus een oplossing van vergelijking(2.4) met  $T_{\mu\nu} = 0$ . Dus een vacuum. De metriek

is niet afhankelijk van de coördinaten  $t$  en  $\phi$ . Dus  $\partial_t$  en  $\partial_\phi$  zijn twee killingvectoren. Uit deze vectoren komen de behouden grootheden energie  $E$  en impulsmoment  $L_3$ . Omdat we het over lichtstralen hebben, is de lengte van de vierimpuls altijd nul. Dit is ook een behouden grootheid.

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0 \quad (3.7)$$

Er is een vierde behouden grootheid die niet zo opvallend is als de andere drie. Deze noteren we als  $L^2$ . Deze constante komt niet van een Killing vectorveld maar een Killing tensorveld. Deze constante heet Carter's constante [5] en is gevonden op een manier die buiten het niveau van dit verslag ligt. We hebben nu de vier behouden grootheden

$$0 = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu \quad (3.8)$$

$$L_3 = p_\phi \quad (3.9)$$

$$E = -p_t \quad (3.10)$$

$$L^2 = p_\theta^2 - \cos^2 \theta \left[ \frac{L_3^2}{\sin^2 \theta} - a^2 E^2 \right] \quad (3.11)$$

De laatste vergelijking is Carter's constante. We kunnen  $E$  en  $L_3$  uitdrukken in de impuls componenten

$$p_t = g_{tt}p^t + g_{t\phi}p^\phi = -E \quad (3.12)$$

$$p_\phi = g_{\phi\phi}p^\phi + g_{\phi t}p^t = L_3 \quad (3.13)$$

Dit kunnen we oplossen voor  $p^t$  en  $p^\phi$ . Dan krijgen we

$$\rho^2 p^t = -a(aE \sin^2 \theta - L_3) + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - aL_3] \quad (3.14)$$

$$\rho^2 p^\phi = -\left(aE - \frac{L_3}{\sin^2 \theta}\right) + \frac{a}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - aL_3] \quad (3.15)$$

Door Carter's constant kunnen we vergelijking (3.11) heel makkelijk oplossen voor  $p^\theta$

$$\rho^2 p^\theta = \pm \sqrt{L^2 - \cos^2 \theta \left[ \frac{L_3^2}{\sin^2 \theta} - a^2 E^2 \right]} \quad (3.16)$$

We kunnen nu de laatste behouden grootheid gebruiken, vergelijking (3.7), om op te lossen voor  $p^r$

$$\rho^2 p^r = \pm \sqrt{[E(r^2 + a^2) - aL_3]^2 - \Delta [(L_3 - aE)^2 + L^2]} \quad (3.17)$$

Dit zijn de snelheden voor een roterend zwart gat in Boyer-Lindquist coördinaten. Als je  $p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$  substitueert, dan krijgen we de bewegingsvergelijkingen voor de geodeet.

$$\rho^2 \left( \frac{dt}{d\lambda} \right) = -a(aE \sin^2 \theta - L_3) + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - aL_3] \quad (3.18)$$

$$\rho^2 \left( \frac{dr}{d\lambda} \right) = \pm \sqrt{[E(r^2 + a^2) - aL_3]^2 - \Delta [(L_3 - aE)^2 + L^2]} \quad (3.19)$$

$$\rho^2 \left( \frac{d\theta}{d\lambda} \right) = \pm \sqrt{L^2 - \cos^2 \theta \left[ \frac{L_3^2}{\sin^2 \theta} - a^2 E^2 \right]} \quad (3.20)$$

$$\rho^2 \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right) = -\left(aE - \frac{L_3}{\sin^2 \theta}\right) + \frac{a}{\Delta} [E(r^2 + a^2) - aL_3] \quad (3.21)$$

De rechterkant van vergelijking (3.20) en (3.21) divergeren op de  $z$ -as. Dus als  $\theta = 0$  of  $\theta = \pi$ . Dit geeft problemen bij het numeriek oplossen van deze vergelijkingen.



### 3.2. Schwarzschild metriek

Nu we de bewegingsvergelijkingen hebben voor een roterend zwart gat, kunnen we kijken naar het speciale geval van een niet-roterend zwart gat. Hier is  $a = 0$ . Voor de coördinaten gebruiken we nog steeds  $(t \ r \ \theta \ \phi)^T$  als notatie. Het zijn echter niet meer de Boyer-Lindquist coördinaten, maar de Schwarzschild coördinaten. Bijvoorbeeld in Schwarzschild coördinaten is  $r = \rho$ . Dit is niet het geval voor Boyer-Lindquist coördinaten.  $r$  heeft een andere rol gekregen. De nieuwe metriek is de Schwarzschild metriek. [4]

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\right)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.22)$$

Merk op dat dit de Kerr metriek is (vergelijking (3.3)) voor  $a = 0$ . De metriek heeft twee singulariteiten. Een op  $r = 0$  en een op  $r = 2M$ . Echter zijn deze singulariteiten om een andere reden. Op  $r = 0$  is de buiging oneindig groot. Op de singulariteit  $r = 2M$  is de buiging niet oneindig. De singulariteit is een resultaat van de gekozen coördinaten. Deze singulariteit is de Schwarzschildstraal. De straal waarvandaan licht niet meer kan ontsnappen van een zwart gat. De formule voor de Schwarzschild straal met  $G$  en  $c$  [4]

$$R_s = \frac{2MG}{c^2} \quad (3.23)$$

In theorie kan deze singulariteit 'weggepoetst' worden met andere coördinaten. Echter blijven de Schwarzschild coördinaten de voorkeur houden door de vele symmetrieën in de bijbehorende metriek[4]. Als we  $a = 0$  invullen in de bewegingsvergelijkingen (3.18) t/m (3.21) krijgen we

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \quad (3.24)$$

$$r^2 \frac{dr}{d\lambda} = \pm \sqrt{E^2 r^4 - (r^2 - 2Mr)(L_3^2 + L^2)} \quad (3.25)$$

$$r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \pm \sqrt{L^2 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} L_3^2} \quad (3.26)$$

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L_3}{\sin^2 \theta} \quad (3.27)$$

Om te kijken hoe de oplossingen van dit stelsel eruit moeten zien, kijken we naar vergelijking (3.25). Als we de  $r^2$  naar rechts verplaatsen en de afgeleide kwadrateren krijgen we

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)(L_3^2 + L^2)}{r^2} = E^2 \quad (3.28)$$

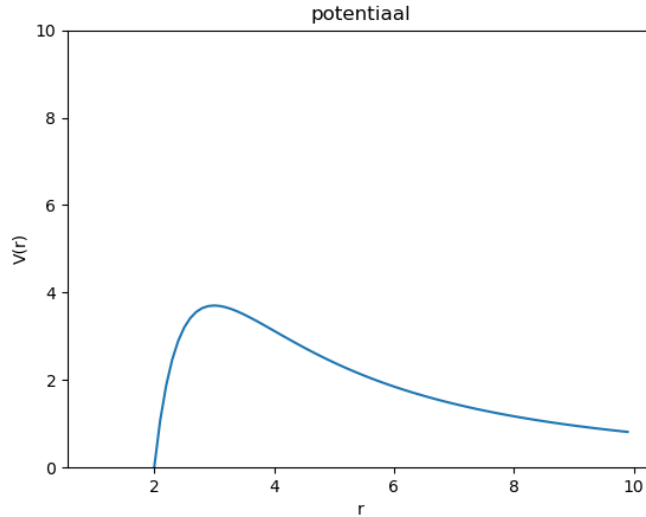
We herkennen  $E$  als de totale energie en de afgeleide als maat van radiële kinetische energie. De andere term aan de linkerkant is dus een potentiaal.

$$V(r) = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)(L_3^2 + L^2)}{r^2} \quad (3.29)$$

De potentiaal is weergegeven in figuur 3.1.

In figuur 3.1 zien we dat naarmate een lichtdeeltje dichterbij het zwarte gat komt, het lichtdeeltje een top in de potentiaal moet overwinnen voordat hij opgeslokt kan worden. De top van die piek is een instabiel evenwicht. Op die afstand kan een lichtstraal een perfecte cirkelbaan maken. Daarbinnen zou de lichtstraal verdwijnen en daarbuiten zou de lichtstraal ontsnappen. Om de afstand van de top te berekenen, lossen we de volgende vergelijking op voor  $r$ .

$$\frac{dV}{dr} = -2 \frac{(L_3^2 + L^2)}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \frac{2M(L_3^2 + L^2)}{r^4} = 0 \quad (3.30)$$



Figuur 3.1: Potentiële energie geplote over radiële afstand  $r$ . Hier is  $M = 1$ . Er is een maximum op anderhalf keer de Schwarzschildstraal. Op die afstand kan licht en instabiele gesloten cirkelbaan om het zwarte gat draaien. Als een lichtstraal van veraf het zwarte gat nadert, heeft het genoeg energie nodig om over de maximum heen te gaan en in het zwarte gat te verdwijnen. Anders buigt de lichtstraal alleen maar af en ontsnapt weer aan de aantrekkingskracht van het zwarte gat.

Dit geeft voor  $r_{top}$  en  $V(r_{top})$

$$r_{top} = 3M = \frac{3}{2}R_s \quad (3.31)$$

$$V(r_{top}) = \frac{(L_3^2 + L^2)}{27M} \quad (3.32)$$

De lichtstralen die we willen analyseren komen van veraf en lopen in het begin parallel aan de  $x$ -as. De volgende vraag die we kunnen stellen is welke lichtstralen in het zwarte gat verdwijnen en welke er kunnen ontsnappen. Voor een niet-roterend zwart gat is de metriek bolsymmetrisch. Hierdoor licht elke baan in een plat vlak. Dit is dus een probleem die we in het  $z = 0$  oppervlak kunnen oplossen. Dus we stellen  $L^2 = 0$ . Voor lichtstralen die van ver komen, geldt dat ze kunnen ontsnappen als het punt van dichtste nadering minimaal  $r_{top}$  is. Op het punt voor dichtste nadering geldt voor vergelijking (3.25).

$$\frac{dr}{d\lambda} = 0 \quad (3.33)$$

dus

$$E^2 r^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) L_3^2 = 0 \quad (3.34)$$

We definiëren  $h$  als de botsingsparameter. Dit is de afstand van de ingaande lijn tot de oorsprong. Voor de impulsmoment geldt dan

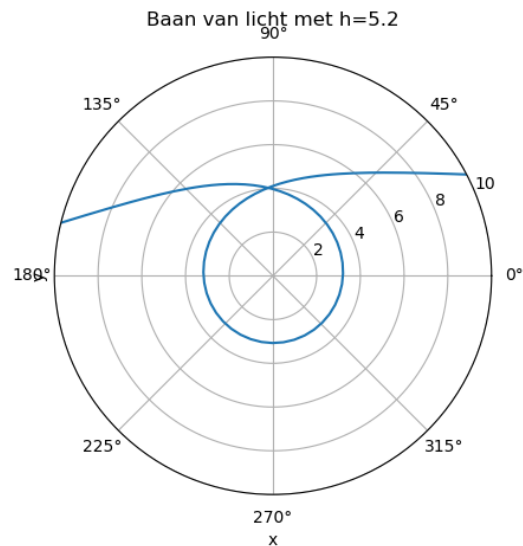
$$L_3 = hE \quad (3.35)$$

Als we dit invullen in vergelijking (3.34) krijgen we

$$r^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) h^2 \quad (3.36)$$

De minimum  $h$  krijgen we als we  $r = r_{top}$  invullen in vergelijking (3.36). Voor  $h$  krijgen we dan

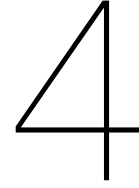
$$h = \sqrt{27M} = \frac{3\sqrt{3}}{2}R_s \approx 2.6R_s \quad (3.37)$$



Figuur 3.2: Baan van een lichtstraal in het  $z = 0$  vlak met  $M = 1$ . De impactparameter is  $h = 5.2$ . Dit is net iets groter dan  $\sqrt{27}M$ , de minimale impact van een lichtstraal, die van veraf komt, dat kan ontsnappen aan het zwarte gat. De baan draait bijna een volledig rondje om het zwarte gat. Het punt van dichtste nadering is de binnenste straal waar licht een gesloten cirkelbaan kan maken.

In figuur 3.2 zien we dat voor  $h \geq \sqrt{27}M$  de lichtstraal bijna een volledige cirkelbaan maakt en toch weer ontsnapt. De baan raakt de top van de potentiaal. Hij passeert het zwarte gat. Als  $h < \sqrt{27}M$  Zal de lichtstraal door de horizon vallen.





# Schwarzschild metriek in Cartesische coördinaten

In plaats van de Schwarzschild coördinaten, kunnen we Cartesische coördinaten gebruiken. Het is fijn om analytisch te werken met de Schwarzschild coördinaten. Echter geven vergelijking (3.20),(3.21),(3.26) en (3.27) problemen op de  $z$ -as. Numeriek is het fijner om met Cartesisch-achtige coördinaten te werken. Het voordeel is dat de nieuwe metriek die we gaan gebruiken, een makkelijke vorm heeft. Daarbij is hij asymptotisch de Minkowski metriek waardoor de begin condities makkelijker worden. Omdat we niet in bol-coördinaten werken, hebben we geen last van de  $z$ -as waar  $\phi$  niet gedefinieerd is. We noteren voor de coördinaat-vector

$$x^\mu = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

De Schwarzschild metriek wordt in deze coördinaten gegeven door [5]

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + f(r)k_\mu k_\nu \quad (4.2)$$

Hier is  $k^\mu$  de volgende null vector.

$$k^\mu = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad f(r) = -\frac{2MG}{r} \quad (4.3)$$

Merk op dat deze metriek de Minkowski metriek is met een correctie term. De inverse metriek wordt gegeven door

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - f(r)k^\mu k^\nu \quad (4.4)$$

Deze coördinaten en metriek zijn afkomstig van de Kerr metriek en heten de Kerr-Schild coördinaten. Deze zullen we behandelen in een later hoofdstuk.

## 4.1. Geodeten

De vierimpuls van de cartesische coördinaten is

$$p^\mu = \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = m \frac{\partial}{\partial \tau} x^\mu = \frac{d}{d\lambda} x^\mu \quad (4.5)$$

Hier is  $\tau = m\lambda$ . Dit geldt voor een deeltje met massa  $m$ . Voor een lichtdeeltje geldt alleen de laatste formule. We kunnen de gebruikelijke Cartesische vectoren voor positie en impulsmoment definiëren.

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

De radiële component van de impuls is

$$p = \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{r}}, \quad \bar{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (4.7)$$

Daarbij is

$$\frac{d}{d\lambda} r = \frac{1}{2r} \frac{d}{d\lambda} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \frac{d}{d\lambda} \mathbf{r} \cdot \bar{\mathbf{r}} = p \quad (4.8)$$

We kunnen dus de impuls opdelen in een radiëel deel en een loodrecht deel. Omdat

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} yp^3 - zp^2 \\ zp^1 - xp^3 \\ xp^2 - yp^1 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$$\frac{\mathbf{L} \times \mathbf{r}}{r^2} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} L^2 z - L^3 y \\ L^3 x - L^1 z \\ L^1 y - L^2 x \end{pmatrix} = \mathbf{p} - p\bar{\mathbf{r}} \quad (4.10)$$

We hebben dus voor de scheiding van radiële en loodrechte componenten.

$$\mathbf{p} = p\bar{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{r}}{r^2} \quad (4.11)$$

en ook

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = p^2 + \frac{L^2}{r^2} \quad (4.12)$$

met  $L^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}$ . Deze vergelijkingen zijn belangrijk voor het beschrijven van de geodeten. We vinden ze namelijk ook terug in de constanten van de beweging.

#### 4.1.1. Constanten van de beweging

Wat we weten uit vorige hoofdstukken is dat de vierimpuls voor lichtstralen een nul vector is. Dit geldt dus ook in de cartesische coördinaten. Dus

$$-g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = 0 \quad (4.13)$$

Dit uitgeschreven is

$$-\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu - f k_\mu k_\nu p^\mu p^\nu = (p^0)^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - f (p^0 + p)^2 = 0 \quad (4.14)$$

Van de Schwarzschild metriek weten we dat de componenten van de impulsmoment behouden zijn. Voor de  $z$ -component geldt

$$\frac{d}{d\lambda} L_3 = \frac{d}{d\lambda} (xp^2 - yp^1) = p^1 p^2 - p^2 p^1 + x \frac{d}{d\lambda} p^2 - y \frac{d}{d\lambda} p^1 = x \frac{dp^2}{d\lambda} - y \frac{dp^1}{d\lambda} \quad (4.15)$$

We weten dat voor geodeten geldt

$$\frac{dp^\tau}{d\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\tau p^\mu p^\nu = 0 \quad (4.16)$$

Dus

$$\frac{d}{d\lambda} L_3 = (x\Gamma_{\mu\nu}^2 - y\Gamma_{\mu\nu}^1) p^\mu p^\nu = 0 \quad (4.17)$$

Hieruit concluderen we dus dat ook, in Cartesische coördinaten, de impulsmomenten behouden zijn. Net als bij de Schwarzschild coördinaten is de metriek niet afhankelijk van de variabele  $t$  in Cartesische coördinaten. dus ook hier is  $\xi^\mu = \partial_t = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$  een killing vector. Dus

$$\xi^\mu p_\mu = p_0 = -E \quad (4.18)$$

Dus

$$-E = p_0 = g_{0\nu} p^\nu = \eta_{0\nu} p^\nu + f k^0 k^\nu = -p^0 + f(p^0 + p) \quad (4.19)$$

Dus voor de energie hebben we

$$E = (1 - f)p^0 - fp \quad (4.20)$$

Als we vergelijking (4.14) vermenigvuldigen met  $(1 - f)^2$  en vergelijking (4.20) kwadrateren. Kunnen we ze combineren en oplossen voor  $p$  en  $p^0$ . We krijgen dan voor  $p$  het volgende.

$$p^2 = E^2 - (1 - f) \frac{L^2}{r^2} \quad (4.21)$$

Als we dit invullen in vergelijking (4.11) krijgen we

$$\mathbf{p} = \pm \mathbf{r} \sqrt{E^2 - (1 - f) \frac{L^2}{r^2} + \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{r}}{r^2}} \quad (4.22)$$

We gebruiken het plus-teken als de lichtstraal van het zwarte gat af beweegt en het min-teken als de lichtstraal het zwarte gat nadert. Het teken wordt dus omgeklapt bij het punt van dichtste benadering. Dit is op het moment dat de term in de wortel nul is. We gaan dus niet de geodeetvergelijking (vergelijking (2.5)) numeriek berekenen. Voordeel is dat we niet de Christoffel symbolen nodig hebben. Een nadeel is dat we wel rekening moeten houden met het omklappen van min-teken in vergelijking (4.22). De bewegingsvergelijkingen die we numeriek gaan berekenen zijn

$$\frac{dt}{d\lambda} = p^0 = \frac{E + fp}{1 - f} \quad (4.23)$$

$$\frac{dx}{d\lambda} = p^1 = \frac{x}{r} p + \frac{L_2 z}{r^2} \quad (4.24)$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = p^2 = \frac{y}{r} p + \frac{L_3 x}{r^2} \quad (4.25)$$

$$\frac{dz}{d\lambda} = p^3 = \frac{z}{r} p + \frac{L_1 y}{r^2} \quad (4.26)$$

$$p = \pm \sqrt{E^2 - (1 - f) \frac{L^2}{r^2}} \quad (4.27)$$





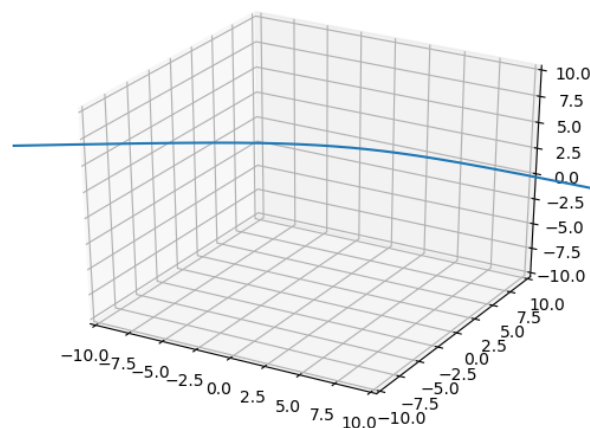
# 5

## Niet-roterend zwart gat als zwaartekracht lens

Nu we weten hoe we de banen van lichtstralen kunnen berekenen, kunnen we een zwart gat als zwaartekracht lens modelleren. Een zware massa, zoals een zwart gat, buigt licht af. Dit heeft als gevolg dat we sterren of andere lichtbronnen op een andere plek waarnemen dan ze werkelijk zijn. De vraag is hoe we een achtergrond van sterren waarnemen als er een zwart gat ervoor ligt. Om dit voor elkaar te krijgen moeten we een ray-tracer maken.

### 5.1. Ray-tracer

Bij een ray-tracer ga je terug in de tijd om er achter te komen waar een lichtstraal vandaan komt. Je kiest een punt waar je wilt weten wat je waarneemt. Je laat een lichtstraal daarvandaan vertrekken en kijkt waar die vandaan komt. We gaan dus als het ware terug in de tijd. We hebben een object en een camera. We kiezen een pixel op de camera. En kijken vanaf welk punt van het object hij vandaan komt. In ons geval zal er dus een lichtstraal vertrekken. Die zal om het zwarte gat terugreizen en ergens in de achtergrond aankomen. Waar die aan zal komen zien we dus op het gekozen beginpunt.



Figuur 5.1: Een baan van een lichtstraal om een niet-roterend zwart gat. De baan komt uit een scherm op positieve  $x_0$ -waarde en reist in de negatieve  $x$ -richting. Door het zwarte gat in de oorsprong wordt de baan gebogen en komt in de achtergrond terecht. Door te kijken wat zijn  $y$  en  $z$ -waarde is op een bepaalde  $x$ -waarde ver achter het zwarte gat, weten we wat we zien op de positie van het scherm waar de straal vandaan vertrok.

In figuur (5.1) zien we de lichtstraal langs een zwart gat reizen. We nemen de achtergrond op negatieve  $x$ -waarde. We nemen aan dat de lichtstraal het scherm loodrecht verlaat. Dit is dus onze beginvoorwaarde.

## 5.2. Beginvoorwaarde

Zoals in de vorige sectie beschreven, verlaat de lichtstraal loodrecht het scherm. Wat betekent dit voor de beginvoorwaarde? We nemen aan dat het scherm ver verwijderd is van het zwarte gat. We kunnen dus de ruimte tijd beschrijven met de Minkowski metriek. Zoals we weten is de energie een constante van de beweging. We weten van vergelijking (4.18)

$$p_0 = -E \quad (5.1)$$

Dus

$$p^0 = -\eta^{\mu 0} p_\mu = E \quad (5.2)$$

We weten dat het scherm een vlak is op positieve  $x_0$ -waarde. De lichtstralen gaan in de negatieve  $x$ -richting. Dit betekent dat aan het begin

$$p^1 = \frac{dx}{d\lambda} = -1 \quad (5.3)$$

Voor lichtstralen geldt dat de inproduct van de impuls met de impuls 0 is (vergelijking 3.7)

$$g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -(p^0)^2 + (p^1)^2 = 0 \quad (5.4)$$

Dit betekent dat we, voor de gekozen begin impuls, voor  $p^0$  1 of -1 kunnen kiezen. Vanaf nu kiezen we  $E = 1$  (positieve energie).

Uit voorgaande hoofdstukken weten we dat de 3-impulsmoment behouden is. Voor begin 3-impuls hebben we

$$\mathbf{p} = (-1 \quad 0 \quad 0)^T \quad (5.5)$$

Voor beginpositie hebben we

$$\mathbf{r} = (x_0 \quad y_0 \quad z_0)^T \quad (5.6)$$

$x_0 > 0$  is de positie van het scherm. De beginposities  $y_0$  en  $z_0$  zijn bepaald door waar we op het scherm willen beginnen. Met deze begin vectoren kunnen we de behouden impulsmoment berekenen.

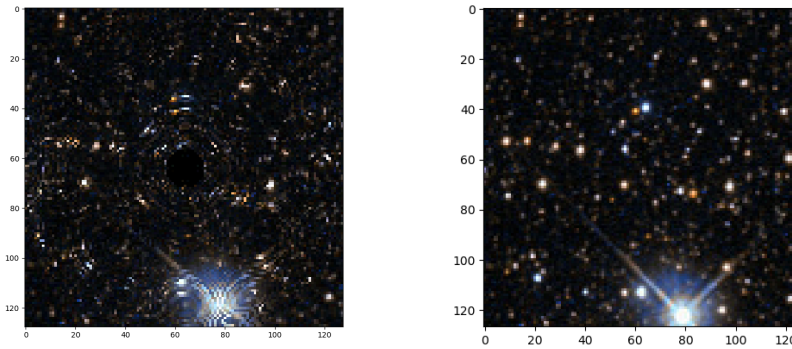
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = (0 \quad -z_0 \quad y_0)^T \quad (5.7)$$

Nu kunnen we deze behouden grootheden gebruiken om de banen te berekenen met de bewegingsvergelijking (4.23) - (4.26) ofwel

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} = \pm \mathbf{r} \sqrt{E^2 - (1-f) \frac{L^2}{r^2} + \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{r}}{r^2}} \quad (5.8)$$

## 5.3. Achtergrond

We delen het scherm op in vakjes. Dit worden de pixels. In dit onderzoek worden afbeeldingen gemaakt van  $128 \times 128$  pixels. Uit elke pixel laten we een lichtstraal loodrecht vertrekken. We zoeken vervolgens waar de lichtstraal de achtergrond snijdt. Voor een gegeven achtergrond (object) krijgen we een plaatje op het scherm. In figuur (5.2) zien we hoe een zwart gat, een achtergrond veranderd. In het midden is het zwart. Daar vallen de lichtstralen door de horizon in het zwarte gat. Ver van het zwart gat is de achtergrond vrijwel onveranderd. Uit het plaatje kan gehaald worden dat de straal van de schaduw  $5 \pm 0.5$  pixels is. Waarbij een pixel een half keer de Schwarzschild straal is. Dus de schaduw in dit plaatje is ongeveer  $(2.5 \pm 0.25)R_s$ . Dit komt overeen met het gevonden resultaat uit hoofdstuk 3 dat stralen die van ver komen, langs het zwarte gat kunnen als de botsingsparameter ongeveer  $\frac{\sqrt{27}}{2}R_s \approx 2.6R_s$  is. Hiermee kunnen we de Schwarzschild straal uit het plaatje halen en vervolgens ook de massa van het zwarte gat.



Figuur 5.2: Plaatje van twee achtergronden. Het plaatje is  $128 \times 128$  pixels. Een pixel is een half keer de Schwarzschild straal. De schaduw heeft een straal van 5 pixels. Links is een achtergrond met een zwart gat ervoor. Rechts is het origineel. We zien dat in het midden van de achtergrond, alles zwart is. Dit zijn alle lichtstralen die door de event horizon heen vallen.

## 5.4. Ring rond een zwart gat

Nu willen we bekijken hoe we een ring om een zwart gat waarnemen. Om de ring te visualiseren, moeten we weten welke banen uit het scherm met de ring kruisen. Hiervoor nemen we de normaalvector van de ring.

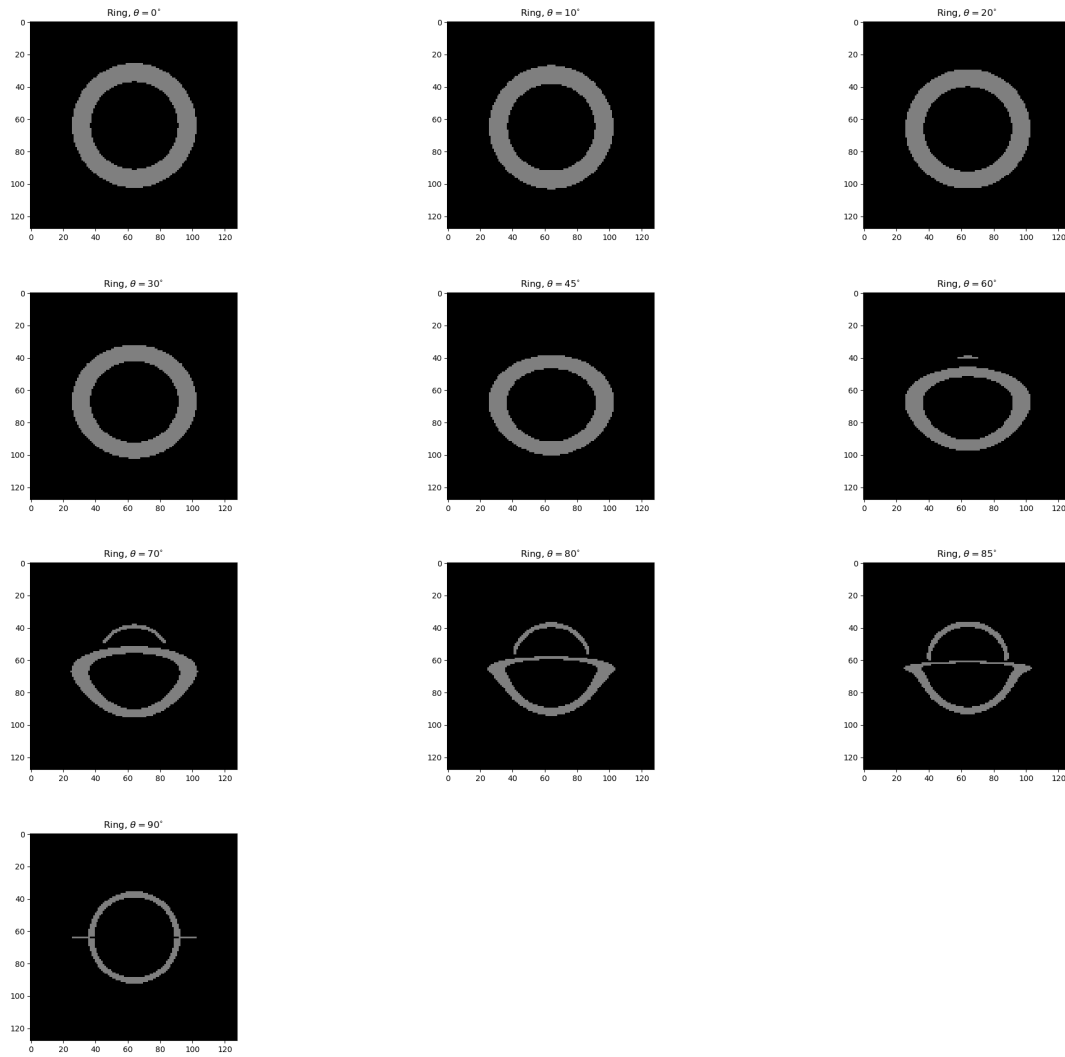
$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Dus voor  $\theta = 90^\circ$  ligt de ring horizontaal. Voor  $\theta = 0^\circ$  ligt de ring verticaal. Om te kijken of een lichtstraal de ring snijdt, checken we bij elke tijdstap of het inproduct  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}$  van teken is veranderd. De baan snijdt de ring als  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}$ . Daarna moeten we checken of het snijden tussen de binnenste radius  $R_{\text{binnen}}$  en buitenste radius  $R_{\text{buiten}} = 9$  was. Dus  $R_{\text{binnen}} < r < R_{\text{buiten}}$ . In figuur(5.3) zijn verschillende oriëntaties van ringen weergegeven  $\theta = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ, 85^\circ, 90^\circ$ , respectievelijk. Voor deze ring is  $R_{\text{binnen}} = 3$  en  $R_{\text{buiten}}$ . Wat goed te zien is, is dat verticaal lijkt de ring er niet anders uit te zien dan wat je normaal zou zien. Naarmate de oriëntatie van de ring naar voren meer horizontaal wordt, zien we de ring aan de bovenkant vlakker worden. Dit is wat je ook verwacht. Maar aan de onderkant blijft hij vrijwel gelijk. Er komt dus heel veel licht achter het zwarte gat. Na ongeveer  $60^\circ$  zien we aan de bovenkant ook een dunne ring. Dus licht boven de  $y$ -as bereikt de ring aan de achterkant van het zwarte gat vandaan. Bij  $90^\circ$  zien we nog steeds een dunne ring. We zien het deel achter het zwarte gat. Door naar de dikte van de onderkant van de ring te kijken, kunnen we kijken wat ongeveer de oriëntatie is van het zwarte gat. In onderstaande tabel zien we ongeveer kwantitatief wat de diktes

$\theta$	Dikte (pixels)	Dikte ( $R_s$ )
$0^\circ$	$12 \pm 0.5$	$1.5 \pm 0.0625$
$10^\circ$	$12 \pm 0.5$	$1.5 \pm 0.0625$
$20^\circ$	$10 \pm 0.5$	$1.25 \pm 0.0625$
$30^\circ$	$10 \pm 0.5$	$1.25 \pm 0.0625$
$45^\circ$	$9 \pm 0.5$	$1.125 \pm 0.0625$
$60^\circ$	$7 \pm 0.5$	$0.875 \pm 0.0625$
$70^\circ$	$5 \pm 0.5$	$0.625 \pm 0.0625$
$80^\circ$	$5 \pm 0.5$	$0.625 \pm 0.0625$
$85^\circ$	$4 \pm 0.5$	$0.5 \pm 0.0625$
$90^\circ$	$4 \pm 0.5$	$0.5 \pm 0.0625$

Tabel 5.1: Tabel die de dikte van de onderkant van de accretieschijf geeft bij verschillende oriëntaties. De dikte van de ring is  $1.5R_s$ . We zien dat voor verticale oriëntaties, we de ring in volle dikte zien.

van de schijf zijn die onderin de plaatjes van figuur 5.3 te zien zijn. De ring met verticale oriëntatie lijkt



Figuur 5.3: Plaatjes van een ring om een zwart gat met verschillende oriëntatie. De plaatjes zijn  $128 \times 128$  pixels en  $M = 1$ . 4 pixels is een half keer de Schwarzschild straal. De hoek  $\theta$  met de  $z$ -as is respectievelijk  $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ, 85^\circ, 90^\circ$ . Bij kleine  $\theta$  zien we vrijwel een normale ring. Bij grotere  $\theta$  zien we dat de ring van boven er gekanteld uitziet, maar aan de onderkant vrijwel rond eruit blijft zien. Vanaf  $\theta = 60^\circ$  zien we aan de bovenkant een dunne ring ontstaan. Vanaf daar buigt licht via boven om het zwarte gat.

zijn volledige dikte te hebben. Verder is ook in de tabel te zien dat de onderkant van de ring dunner eruit ziet bij een horizontale oriëntatie.

## Kerr metriek in Kerr-Schild coördinaten

We hebben in hoofdstuk 3 en 4 verschillende metrieken en coördinaten gebruikt. Dit hoofdstuk gaan we weer een andere metriek en andere coördinaten introduceren. Om niet het overzicht te verliezen, staat in onderstaande tabel een overzicht van de metrieken en coördinaten die we gebruiken. De Kerr

Metriek	Schwarzschild ( $M, a = 0$ )	Kerr ( $M, a \neq 0$ )
Cartesische coördinaten	Cartesisch	Kerr-Schild
Bolcoördinaten	Schwarzschild	Boyer-Lindquist

Tabel 6.1: Tabel met de verschillende gebruikte metrieken. Voor beide metrieken kunnen we bol-coördinaten en cartesische coördinaten gebruiken.

metriek is een extensie van de Schwarzschild metriek. De Schwarzschild metriek beschreef de situatie van een niet roterend zwart gat. De Kerr metriek beschrijft de situatie van een roterend zwart gat. Over het algemeen zijn de Boyer-Lindquist coördinaten de makkelijkste coördinaten om met de Kerr metriek te werken. Echter voor het numeriek berekenen van de differentiaalvergelijking zijn de singulariteiten ( $\phi$ -coördinaat op de  $z$ -as) van de Boyer-Lindquist coördinaten onhandig. In plaatst daarvan willen we met Cartesisch-achtige coördinaten werken. Dit zijn de Kerr-Schild coördinaten.

### 6.1. Metriek en coördinaten

De Kerr metriek ziet er als volgt uit in Kerr-Schild coördinaten.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + f k_\mu k_\nu, \quad f(r) = \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2}, \quad k_\mu = \frac{1}{r^2 + a^2} \begin{pmatrix} 0 \\ rx + ay \\ ry - ax \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

Merk op dat als  $a = 0$ , we de Schwarzschild metriek in Cartetische coördinaten terugkrijgen zoals beschreven in hoofdstuk 4. De Kerr-Schild coördinaten komen uit de Boyer-Lindquist coördinaten met de volgende coördinaten transformatie.

$$x = (r \cos \phi + a \sin \phi) \sin \theta \quad (6.2)$$

$$y = (r \sin \phi - a \cos \phi) \sin \theta \quad (6.3)$$

$$z = r \cos \theta \quad (6.4)$$

$$dt = dt' + \frac{2Mr}{\Delta} dr \quad (6.5)$$

Hier is  $r$  niet meer de radius zoals normaal wordt beschreven. Impliciet wordt hij beschreven met

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1 \quad (6.6)$$

Als we dit oplossen voor  $r$  krijgen we

$$r = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - a^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2z^2}}}{\sqrt{2}} \quad (6.7)$$

We willen de bewegingsvergelijkingen van de  $x, y$  en  $z$  coördinaten verkrijgen. Hiervoor gaan we de bewegingsvergelijkingen gebruiken van de Boyer-lindquist coördinaten  $(t \ r \ \theta \ \phi)^T$ . Deze bewegingsvergelijkingen willen we vervolgens schrijven in de Kerr-Schild coördinaten. Hiervoor moeten we de Boyer-Linquist coördinaten schrijven in termen van Kerr-Schild coördinaten.

$$\cos \theta = \frac{z}{r} \quad (6.8)$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{r^2} \quad (6.9)$$

$$\cos \phi = \frac{rx - ay}{\sqrt{(r^2 + a^2)(x^2 + y^2)}} \quad (6.10)$$

$$\sin \phi = \frac{ax + ry}{\sqrt{(r^2 + a^2)(x^2 + y^2)}} \quad (6.11)$$

Dit zijn de inverse van vergelijking (6.3) t/m (6.5). Dit geeft voor de vierimpuls componenten in Boyer-Lindquist coördinaten uitgedrukt in Kerr-Schild coördinaten.

$$\bar{p}^r = \frac{\pm \sqrt{((r^2 + a^2)E - aL_3)^2 - \Delta(L^2 - (L_3 - aE)^2)}}{r^2 + \frac{a^2z^2}{r^2}} \quad (6.12)$$

$$\bar{p}^\theta = \frac{\pm \sqrt{L^2 - \frac{z^2}{r^2} \left[ \frac{L_3^2 r^2}{r^2 - z^2} - E^2 a^2 \right]}}{r^2 + \frac{a^2z^2}{r^2}} \quad (6.13)$$

$$\bar{p}^\phi = \frac{\frac{a}{\Delta} ((r^2 + a^2)E - aL_3) - \left( aE - L_3 \frac{r^2}{r^2 - z^2} \right)}{r^2 + \frac{a^2z^2}{r^2}} \quad (6.14)$$

We kunnen nu de snelheden van  $x, y, z$  uitschrijven met bovenstaande snelheden.

$$p^1 = \frac{\partial x}{\partial r} \bar{p}^r + \frac{\partial x}{\partial \theta} \bar{p}^\theta + \frac{\partial x}{\partial \phi} \bar{p}^\phi \quad (6.15)$$

$$p^2 = \frac{\partial y}{\partial r} \bar{p}^r + \frac{\partial y}{\partial \theta} \bar{p}^\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi} \bar{p}^\phi \quad (6.16)$$

$$p^3 = \frac{\partial z}{\partial r} \bar{p}^r + \frac{\partial z}{\partial \theta} \bar{p}^\theta + \frac{\partial z}{\partial \phi} \bar{p}^\phi \quad (6.17)$$

Hierbij gebruiken we de elementen van de Jacobiaan  $J_\alpha^\mu$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{rx - ay}{r^2 + a^2} \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{xz}{\sqrt{r^2 - z^2}} \quad \frac{\partial x}{\partial \phi} = -y \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{ry + ax}{r^2 + a^2} \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{yz}{\sqrt{r^2 - z^2}} \quad \frac{\partial y}{\partial \phi} = x \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{z}{r} \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -\sqrt{r^2 - z^2} \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0 \quad (6.20)$$

## 6.2. Constanten van de beweging

Net als de voorgaande hoofdstukken moeten we de constanten van de beweging uitschrijven in de coördinaten die we gebruiken. Dit betreft de eerder gevonden

$$E = -p_0 \quad (6.21)$$

$$L_3 = p_\phi \quad (6.22)$$

$$L^2 = p_\theta^2 - \frac{z^2}{r^2} \left[ \frac{L_3 r^2}{r^2 - z^2} - a^2 E^2 \right] \quad (6.23)$$

De derde vergelijking is Carter's constante. Deze grootheden kennen we in de Boyer-Lindquist coördinaten. We willen deze constante uitschrijven in de Kerr-Schild coördinaten. Met name de impulsen  $p_\theta, p_\phi$ .

$$\bar{p}_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} p_1 + \frac{\partial y}{\partial \theta} p_2 + \frac{\partial z}{\partial \theta} p_3 \quad (6.24)$$

$$\bar{p}_\phi = \frac{\partial x}{\partial \phi} p_1 + \frac{\partial y}{\partial \phi} p_2 \quad (6.25)$$

We hebben gebruikt dat

$$p_\alpha = g_{\alpha\beta} p^\beta = g_{\alpha\beta} J_v^\beta \bar{p}^v = g_{\alpha\beta} J_v^\beta g^{\mu\nu} \bar{p}_\mu = J_\alpha^\mu \bar{p}_\mu \quad (6.26)$$

Hier is  $J_\alpha^\mu$  de Jacobiaan. Voor de  $x, y, z$ -impulsen geldt

$$p_i = g_{i\mu} p^\mu = (n_{i\mu} + f k_i k_\mu) p^\mu = p^i + f k_i (k_\mu p^\mu) \quad (6.27)$$

$$k_\mu p^\mu = 1 + \frac{rx + ay}{r^2 + a^2} p^1 + \frac{ry - ax}{r^2 + a^2} p^2 + \frac{z}{r} p^3 \quad (6.28)$$

$$i = 1, 2, 3 \quad (6.29)$$

Als we dit invullen in vergelijking (6.25) krijgen we

$$L_3 = xp_2 - yp_1 \quad (6.30)$$

Merk op dat dit dezelfde formule is voor  $L_3$  die we gewend zijn maar dan met indices omlaag. Voor  $p_\theta$  krijgen we

$$p_\theta = \frac{xz}{\sqrt{r^2 - z^2}} p_1 + \frac{yz}{\sqrt{r^2 - z^2}} p_2 - \sqrt{r^2 - z^2} p_3 \quad (6.31)$$

Als we vergelijking (6.30) en (6.31) invullen in vergelijking (6.23), krijgen we

$$L^2 = \frac{z^2}{r^2} \left[ (r^2 + a^2)(p_1^2 + p_2^2) - E^2 a^2 \right] + (r^2 - z^2) p_3^2 - 2(xp_1 + yp_2)zp_3 \quad (6.32)$$

Nu we de constanten van de beweging kunnen berekenen met de Kerr-Schild coördinaten, kunnen we de bewegingsvergelijking opstellen met deze coördinaten.





# 7

## Roterend zwart gat als zwaartekracht lens

In dit hoofdstuk gaan we kijken hoe een achtergrond eruit ziet met een roterend zwart gat ervoor. Ook gaan we kijken naar hoe een ring om een roterend zwart gat eruit ziet.

### 7.1. Beginvoorwaarden

In deze paragraaf willen we kijken hoe een ring om een roterend zwart gat eruit ziet. We willen dit in verschillende oriëntaties. Omdat de Schwarzschild metriek bolsymmetrisch is, kunnen we de ring van oriëntatie veranderen. In dit geval is de metriek alleen symmetrisch om de  $z$ -as. De ring draait altijd in dezelfde richting als het zwart gat draait. Sterker nog een ring van massa is vaak de reden dat een zwart gat gaat draaien. We willen van een andere oriëntatie kijken. We kunnen niet de ring van oriëntatie veranderen ten opzichte van het zwarte gat. Dus moeten we ons scherm veranderen. Tot nu toe was het scherm op constante  $x_0$ -waarde ( $x_0 > 0$ ) en de beginimpuls  $p_1 = -1$ . We moeten onze beginvoorwaarde aanpassen. We willen ons scherm om de  $y$ -as draaien. De  $y$ -waardes en  $t$ -waardes blijven hetzelfde. We gebruiken de volgende rotatiematrix

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & 0 & -\cos \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

Bij  $\alpha = 0$  is het scherm boven het zwarte gat en op  $\alpha = 90^\circ$  is het scherm op de positieve  $x_0$ -waarde zoals we normaal hadden. Met de standaard beginpositie en -impuls die we normaal hebben krijgen we met roteren de nieuwe startsituatie.

$$x^\mu(0) = R_\alpha \begin{pmatrix} t \\ 10 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 10 \sin \alpha - z_0 \cos \alpha \\ y_0 \\ 10 \cos \alpha + z_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

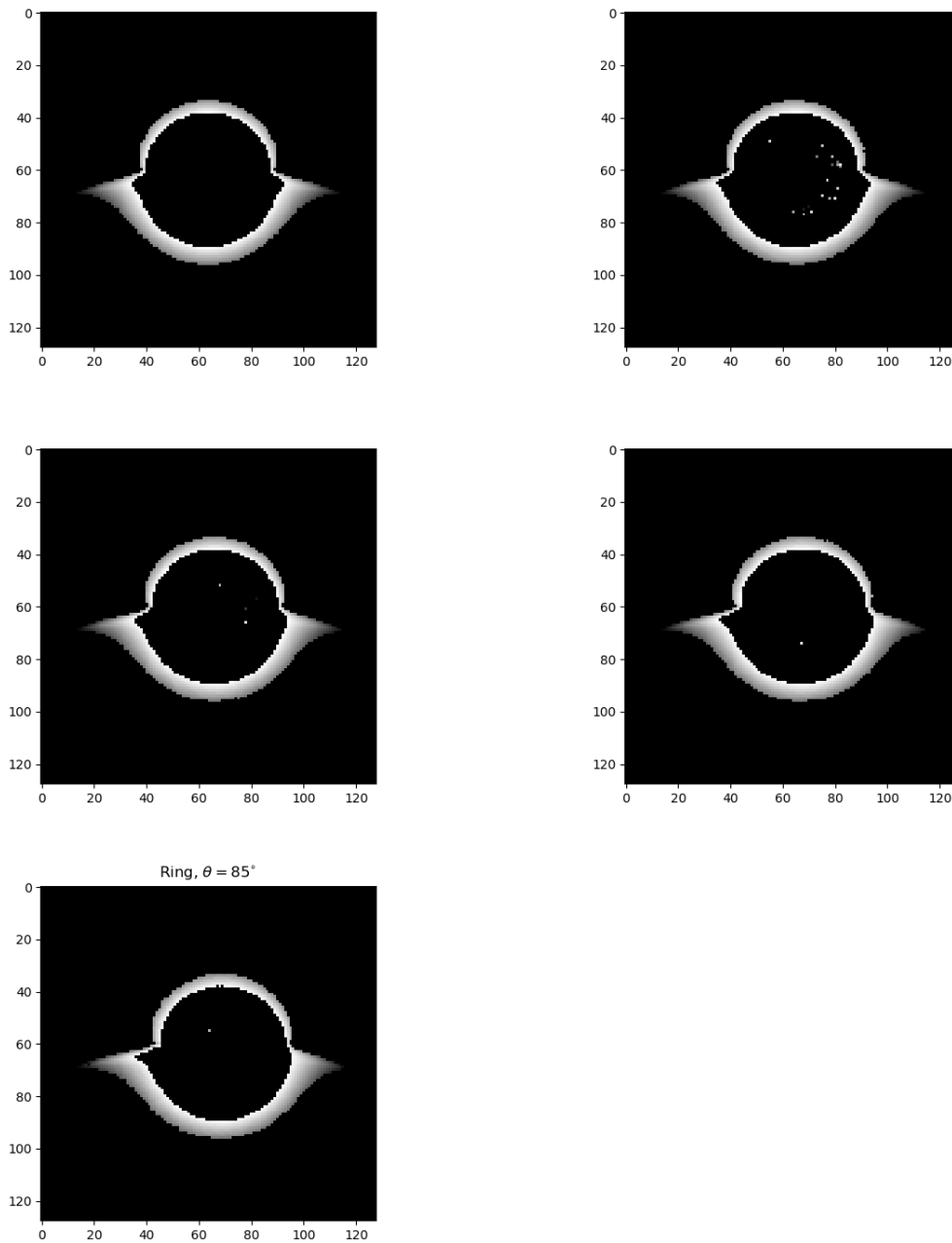
$$p^\mu(0) = R_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin \alpha \\ 0 \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

Nu we de nieuwe beginvoorwaarde hebben, kunnen we plaatjes maken.

### 7.2. Ring rond een roterend zwart gat

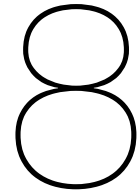
In figuur(7.1) zien we ringen met verschillende waardes voor rotatieparameter  $\alpha$ . In het eerste plaatje kunnen we de dikte van de waargenomen ring. De hier gekozen ring heeft een binnenstraal van

$R_{\text{binnen}} = 3R_s$  en  $R_{\text{buiten}} = 7R_s$ . Het aantal pixels van de binnenstraal is 24 pixels. Dit komt neer op  $R_{\text{binnen}} = 3R_s$ . De buitenstraal is 50 pixels. Dus  $R_{\text{buiten}} = 6.25R_s$ . Niet de hele ring is nog te zien. Hoewel het effect van een andere rotatieparameter  $\alpha$  duidelijk te zien is, is het lastig om een kwantitatieve waarde uit de plaatjes te halen die hiermee verband hebben. Het is duidelijk te zien dat tegen de draairichting, lichtstralen dichterbij naar binnen vallen ten opzichte van lichtstralen die met de draairichting mee reizen. Dit effect wordt versterkt met een sneller draaiend zwart gat.



Figuur 7.1: Plaatjes van een ring om een roterend zwart gat met verschillende rotatieparameter  $a$ . De plaatjes zijn  $128 \times 128$  pixels en  $M = 1$ . 4 pixels is een halve Schwarzschild straal. De hoek  $\theta$  met de  $z$ -as is  $85^\circ$ .  $R_{\text{binnen}} = 6$  en  $R_{\text{buiten}} = 14$  en De plaatjes hebben respectievelijk rotatieparameter  $a = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ . Voor  $a = 0$  zien we een symmetrisch plaatje. Maar voor grotere  $a$  zien we verandering. Aan de rechterkant kunnen lichtstralen dichter langs een zwart gat. Aan de linkerkant juist andersom. Dit effect zien we terug in de ring.





## Conclusie

In dit onderzoek hebben we geodeten van lichtstralen om een zwart gat berekend. Van zowel roterend als niet-roterende zwarte gaten. We hebben met behulp van symmetrieën in de metriek, de bewegingsvergelijking vereenvoudigd. Dit hebben we met verschillende coördinaten gedaan. In bol-coördinaten is het relatief makkelijk om met de metriek te werken en met de behouden grootheden. Echter is de  $z$ -as een singulariteit met deze coördinaten vanwege de wegvallende  $\phi$ -coördinaat. Ook geven de bol-coördinaten moeilijkheden met het beschrijven van de begincondities. In plaats daarvan gebruiken we Cartesische coördinaten en de bijbehorende nieuwe metriek. Deze coördinaten krijgen voor numerieke methode de voorkeur.

Met de bewegingsvergelijkingen hebben we een ray-tracer gemaakt en plaatjes gemaakt. Ten eerste hebben we plaatjes gemaakt van een achtergrond en hoe een niet-roterend zwart gat dat vervormd. Uit het resulterende plaatje kan je de grote van de schaduw van het zwarte gat bepalen. Met de kennis van de geodeten van lichtstralen, kan je de Schwarzschild radius bepalen en de massa van het zwart gat. In mijn gesimuleerde plaatjes (figuur 5.2) is de straal tot ongeveer 5 pixels alles zwart. Waar een pixel overeenkomt met een half keer de Schwarzschild straal. Dit komt ruwweg overeen met de eerder gevonden  $\frac{\sqrt{27}}{2}R_s$ . Verder daarbuiten tot ongeveer 7 pixels is het ook veel zwart. Een verklaring is dat bij die afstanden het licht wel langs het zwart gat komt maar terug wordt afgebogen en niet in de achtergrond terecht komen. Verder is aan de dikte van de ring te zien wat min of meer de oriëntatie is van het zwarte gat. Echter is dit met grote onzekerheid. Dit komt vooral door de resolutie van de plaatjes. Een hogere resolutie zou een duidelijker verband kunnen weergeven tussen de dikte van de ring en de oriëntatie van het zwarte gat.

Veel zwarte gaten hebben een ring van materie om zich heen draaien. De gassen hierin worden zo heet dat ze licht uit stralen. Die ring kan dus waargenomen worden. Uiteraard wordt het licht afgebogen door het zwart gat. Dus van een foto van een zwart gat met de ring kan ongeveer de oriëntatie van het zwarte gat bepaald worden. Aan een ring is ook te zien of een zwart gat roteert en welke richting. Echter is de snelheid van het roteren moeilijk te bepalen uit de plaatjes. Verder is wel nog de grote van de ring uit het plaatje gehaald. De gebruikte stralen zijn  $R_{\text{binnen}} = 3R_s$  en  $R_{\text{buiten}} = 7R_s$ . In het plaatje (figuur 7.1) is te zien dat de binnenste straal van het horizontale deel van de ring 24 pixels is. Hier is 4 pixel een half keer de Schwarzschild straal. Dus in het plaatje is  $R_{\text{binnen}} = 3R_s$ . De buitenste straal zit op 50 pixels. Dus  $R_{\text{buiten}} = 6.25R_s$ . Conclusie is dat niet de gehele ring nog te zien is.

Na dit onderzoek zijn er veel mogelijkheden voor vervolgonderzoek. Er zijn veel dingen die niet meegenomen zijn aan het model. In de plaatjes van de ring is niet meegenomen wat de kleur van de ring is. Zo is de intensiteit van de aan de ene kant groter dan aan de andere. Dat heeft te maken met de snelheid van de gassen in de ring ten opzichte van ons als waarnemer. Aan de ene kant bewegen ze namelijk van ons af en aan de andere kant juist naar ons toe. Dit is niet in het model meegenomen. Verder kan een zwart gat geladen zijn. Dit heeft niet direct invloed op licht. Fotonen zijn namelijk niet geladen. Echter kan de ring er heel anders uitzien. Daarbij kunnen er magnetevelden ontstaan

door een ring. Die zorgen ervoor dat plasma van het zwarte gat weg wordt geschoten met bijna de lichtsnelheid.[1]

Verder kan de methode verbeterd worden. In dit onderzoek hebben we specifiek de constante van de beweging gebruikt. Het voordeel is dat we vier eerste orde differentiaalvergelijkingen overhouden. Het nadeel is dat we een min-teken moesten veranderen in de vergelijking bij dichtste nadering van de lichtstraal. Dit geeft moeilijkheden op numeriek gebied. In plaats daarvan zou direct de geodeetvergelijking (2.5) gebruikt kunnen worden. Het voordeel is dat het omklappen van een minteken niet hoeft. Het nadeel is dat door de Christoffel, de bewegingsvergelijkingen erg groot worden. Daarbij moeten er dan acht eerste orde differentiaalvergelijkingen numeriek opgelost worden. Verder kan een andere methode gebruikt worden voor het numeriek berekenen. In dit onderzoek is de Runge-Kutta methode gebruikt.

# Bibliografie

- [1] Event horizon telescope, science. URL <https://eventhorizontelescope.org/science>.
- [2] Kerr metric. URL [https://en.wikipedia.org/wiki/Kerr\\_metric](https://en.wikipedia.org/wiki/Kerr_metric).
- [3] Zwart gat. URL [https://nl.wikipedia.org/wiki/Zwart\\_gat](https://nl.wikipedia.org/wiki/Zwart_gat).
- [4] Sean Carrol. *Spacetime and Geometry An introduction to General Relativity*. Pearson, 2014.
- [5] John Archibald Wheeler Charles W.Misner, Kip S.Thorne. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1970.
- [6] Ray D'Inverno. *Introducing Einstein's relativity*. Oxford university press, 1992.
- [7] The EHT Collaboration et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 2019. doi: <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab0ec7>.
- [8] Alistar Graham. Observing the invisible: The long journey to the first image of a black hole. URL <https://phys.org/news/2019-04-invisible-journey-image-black-hole.html>.
- [9] P. Chris Fragile Marek A. Abramowicz. Black Hole Accretion Disks. 2011. doi: 10.12942/lrr-2013-1.