Wiskundige geometrische modellen
opkomst, erfgoed, ontwikkeling

van Woerkom, Paul

Publication date
2017

Document Version
Final published version

Published in
175 jaar TU Delft

Citation (APA)
van Woerkom, P. (2017). Wiskundige geometrische modellen: opkomst, erfgoed, ontwikkeling. In P. T. L. M. van Woerkom, W. Ankersmit, R. Hagman, H. G. Heijmans, G. J. Olsder, & G. van de Schootbrugge (Eds.), *175 jaar TU Delft: Erfgoed in 33 verhalen* (pp. 96-102). Histechnica.

175 jaar TU Delft

Erfgoed in 33 verhalen

Wiskundige geometrische modellen: opkomst, erfgoed, ontwikkeling

P.Th.L.M. van Woerkom

Visualisatie

In het jaar 1816 formuleerde de Franse wiskundige J.D. Gergonne het volgende probleem: beschouw een familie van oppervlakken welke aan boven- en onderzijde zijn opgespannen door twee diagonalen van een kubus, en waarvan de zijranden op zijvlakken van die kubus liggen. Welke vorm heeft de minimale oppervlakte? Dit probleem werd in 1865 door H.A. Schwarz opgelost en geïllustreerd. Het vormde een stimulans voor Schwarz, Felix Klein en andere collega's om fysieke modellen van wiskundige oplossingen te gaan construeren om zo het gedrag van de wiskundige oplossingen enigszins te kunnen visualiseren en begrijpen. De modellen waren van metaal, van draad, van gips, van hout, van karton.

Een stroom van geometrische modellen

In Göttingen leidde de energieke aanpak van Schwarz en Felix Klein tot de constructie en de aankoop en verzameling van een grote variëteit aan geometrische modellen. Deze activiteiten vonden hun weerklank elders in Duitsland. Zeer actief was de firma L. Brill, die eind 19-de eeuw een veelheid aan modellen produceerde en op de markt bracht. Het werk van deze firma werd in 1899 overgenomen door M. Schilling, wiens catalogus uit 1911 grote bekendheid verwierf [4]. Ze beschrijft vele honderden modellen, met bijbehorende prijzen.

De modellen vonden grote aftrek, zowel binnen Europa als daarbuiten. Universiteiten die momenteel nog grote hoeveelheden modellen bezitten zijn onder meer die van Amsterdam, Arizona State, Dresden, Göttingen, Groningen, Illinois, Leiden, München, Pavia en Utrecht. Ook Delft bezit een aanzienlijk aantal modellen; een recent overzicht komt tot 80 [5].

Hedendaagse universitaire collecties van geometrische modellen bevinden zich veelal in zalen, in kantoren, op gangen van wiskunde faculteiten en opgeslagen in magazijnen. De stroom van aankopen zal wereldwijd vermoedelijk in de jaren dertig zijn opgehouden.

De modellen werden oorspronkelijk ontworpen voor didactische doeleinden. Maar sommige modellen zijn zo gecompliceerd en zo exotisch dat een didactische waarde waarschijnlijk alleen mag worden toegeschreven aan een klein aantal ervan.

Modellen werden ook gemaakt om het gedrag van bijzondere functies te visualiseren. Voor specifieke toepassingen waren modellen niet altijd aanwezig, of niet direct toegankelijk voor studenten. Hierin werd voorzien door grafische afbeeldingen verzameld door de wiskundigen Jahnke en Emde en gepresenteerd in hun boek “*Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*” (1909). Second-best ten opzichte van visualisatie en betasten van een fysiek model, maar nu wel uitstekend toegankelijk voor de gehele universitaire gemeenschap:

Speelden de Delftse modellen een rol in Delft? De geschiedschrijving op dit punt is mager. Bekend is een foto van prof. David van Dantzig uit 1938. Men ziet hem daarop in een collegezaal, met naast hem onder andere een draadmodel van een hyperbolische paraboloïde (waarover later meer) en met de wiskundige beschrijving daarvan uitgeschreven op het schoolbord achter hem. Bij navraag blijkt dat hedendaagse TUD alumni zich herinneren dat draadmodellen en gipsmodellen door wiskunde docenten werden meegenomen naar colleges, zeker nog in de jaren vijftig en in het begin van de jaren zestig.

Ontwikkeling

Maar meer recent is een nieuwe en zeer productieve stroming ontstaan, die van virtuele modellen. Met behulp van krachtige symbolische formule manipulatie programma’s voor digitale computers kunnen specialisten op betrekkelijk eenvoudige wijze en op zeer inzichtelijke wijze een spectrum van geheel nieuwe geometrische vormen genereren. Vormen die, met toevoeging van de juiste kleuren, een lust voor het oog zijn. Niet altijd didactisch bedoeld, maar dan wel van esthetische waarde [3].

Een kleine greep uit de Delftse collectie

Ter illustratie worden hierna vier Delftse modellen getoond. Omdat het hier om wiskundige modellen gaan kan enige wiskunde niet ontbreken. Voor de lezer met zuivere alfa-achtergrond zijn er in ieder geval nog de afbeeldingen voor zijn/haar visueel genot.

We beperken ons hier tot wiskundige modellen die geometrieën beschrijven in de driedimensionale ruimte. Beschouw dan ook een cartesiaans assenstelsel met coördinaten x en y in het horizontale vlak en z-coördinaat loodrecht daarop (verticaal).

> *Model 1:* ***Kegel***

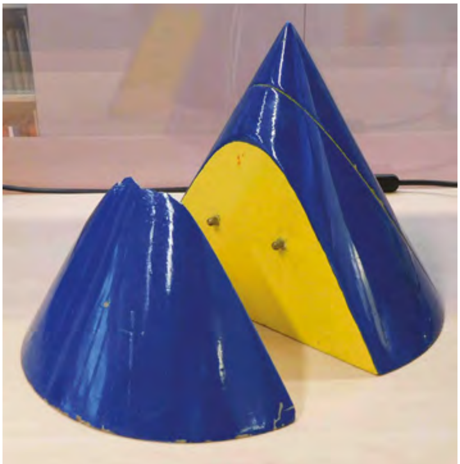
Een axi-symmetrische kegel (figuur 1) wordt beschreven door de vergelijking $x^2 + y^2 = a^2z^2$ waar a een constante is.

– Doorsnij de kegel met het horizontale vlak $z = z_0$ (constant). De snijlijn beschrijft dan een *cirkel*.
– Doorsnij de kegel met het verticale vlak $y = y_0$ (constant). De snijlijn beschrijft dan een *hyperbool*.

– Doorsnij de kegel met het scheve vlak $y = b\,(z - z_0)$ waar b en z_0 constanten zijn met $|b| > |a|$. De snijlijn beschrijft dan een *ellips*. Voor het speciale geval $|b| = |a|$ beschrijft de snijlijn een *parabool*.

De kegel heeft nog een overduidelijke eigenschap: het gekromde oppervlak kan ook worden beschreven door *rechte lijnen*. Men noemt dit oppervlak een regelvlak.

Een voorbeeld van een fysische betekenis:
wordt een ruimtevaartuig om de aarde gelanceerd, dan kan de gevolgde baan in het geval van een ideale bolvormige aarde beschreven worden door een cirkel, ellips, een deel van een parabool, of een deel van een hyperbool, afhankelijk van de initiële lanceersnelheid en lanceerrichting.



Figuur 1 | Enkelbladig kegeloppervlak met snedevlak.

> *Model 2*: ***Hyperboloïde***

Een axi-symmetrische hyperboloïde wordt beschreven door $x^2 + y^2 = a^2z^2 + b^2$ (figuur 2.)
– Doorsnij de hyperboloïde met het horizontale vlak $z = z_0$ (constant). De snijlijn beschrijft dan een *cirkel*.
– Doorsnij de hyperboloïde met het verticale vlak $x = c\,y$. Dit vlak gaat door de verticale as. De twee snijlijnen beschrijven de twee takken van een *hyperbool*.
– Merk op dat voor $b = 0$ de hyperboloïde ontaardt in een twee *kegels* met gemeenschappelijke rotatie as en elkaar rakend aan de tip.

Ook de hyperboloïde heeft nog de interessante eigenschap dat het gekromde oppervlak kan worden beschreven door *rechte lijnen*. Het is dus een regelvlak.

Figuur 2 | Draadmodel D 41 uit de studieverzameling van EWI:
hyperboloïde (lichtblauw) en dubbele kegel (rose) als limietgeval.

Een voorbeeld van een fysische betekenis: prof. Frederik Th. K. van Iterson (hoogleraar TH Werktuigbouwkunde 1910-1913) kreeg wereldwijde erkenning voor zijn destijdse ontwerp van unieke koeltorens in de vorm van een hyperboloïde. Zoals reeds gezegd heeft deze vorm de eigenschap dat het oppervlak kan worden opgebouwd uit rechte lijnen. Omdat de vorm van de toren een regeloppervlak is bestaat de bewapening uit rechte staven, die eenvoudig kunnen worden gemonteerd. De construcie wordt daardoor kosteneffectief. De betonnen koeltorens kunnen zeer dunwandig worden uitgevoerd en toch stabiel blijven. Zie figuur 3.

Figuur 3 | De drie hyperboloïde koeltorens van de vroegere staatsmijn Emma te Heerlen, ontworpen door prof. F.K.Th. van Iterson [6]. Wereldwijd geroemd ontwerp, Rijksmonument, dus nationaal erfgoed, en in 1986 toch gesloopt ...

> *Model 3:* ***Hyperbolische paraboloïde***

Een hyperbolische paraboloïde kan worden beschreven door de vergelijking $x^2 - y^2 = a^2 z$.

- Doorsnij het oppervlak met het horizontale vlak $z = z_0$ (constant). De snijlijn beschrijft dan de twee takken van een *hyperbool*.
- Doorsnij het oppervlak met het vlak $x = c\,y + d$ waar c en d constanten zijn.De snijlijn beschrijft dan een *parabool*.

Vandaar de benaming “hyperbolische paraboloïde” (figuur 4).

Figuur 4 | Gipsmodel DLib 24 uit de academische erfgoedcollectie van de TUD: hyperbolische paraboloïde.

Ook de hyperbolische parabolo*ïde* heeft de interessante eigenschap dat het gekromde oppervlak kan worden beschreven door *rechte lijnen*. Ook dit oppervlak is dus een regelvlak.

Een voorbeeld van een fysische betekenis:
het dak van het Ochota treinstation in de stad Warschau heeft de vorm van een hyperbolische paraboloïde. Omdat het dak kan worden opgebouwd uit rechte balken is haar constructie relatief eenvoudig. Men noemt het ook wel een zadeldak.

De vooral bij de jeugd bekende Pringle potato chips hebben eveneens dit soort vorm!

> *Model 4:* ***Torus***

Beschouw het oppervlak beschreven door $[(x \cos \varphi + y \sin \varphi) - R_0]^2 + z^2 = r^2$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$
Deze uitdrukking beschrijft blijkbaar het oppervlak van een torus (een “doughnut”!) met radius van de centrumlijn gelijk aan R_0 en radius van de torusbuis gelijk aan r .

- De dwarsdoorsnede van de torus is een *poloïdale cirkel* met straal r.
- De doorsnijding van de torus met het vlak z = a (waar a een constante is) is een *toroïdale cirkel*, mits $|a| \leq r$.

Een voorbeeld van een fysische betekenis:
een grote watertank in de Poolse stad Ciechanow heeft de vorm van een toroïde. Ze wordt ondersteund door een toren van hyperboloïde vorm.

> *Vier nog niet-geïdentificeerde oppervlakken*

In een deel van de collectie van de TU Delft, onder dagelijks beheer van de faculteit EWI, bevinden zich vier geometrische objecten waarbij de beschrijvende wiskundige vergelijking nog ontbreekt (figuur 5). Ook de betekenis van de lijnen aangebracht op die objecten moet nog worden onderzocht. Schoonheid van deze modellen kan niet ontkend worden. Reden om deze Delftse objecten hier toch af te beelden.

Figuur 5 | Niet geïdentificeerde oppervlakken, uit de collectie van de TUD (EWI Studieverzameling). Welke wiskundige beschrijving ligt hieraan ten grondslag?

Erfgoed

Alhoewel geometrische modellen al in de oudheid voorkomen, kwam pas in de tweede helft van de negentiende eeuw een systematische analyse en daaruit voortvloeiende visualisatie tot ontwikkeling. Daarbij en daarvoor werden de meest gecompliceerde geometrische modellen bestudeerd en vervaardigd. Een aantal van de algebraïsche vergelijkingen en de daarop gebaseerde geometrische modellen werden in het onderwijs gebruikt om de betekenis van algebraïsche resultaten aanschouwelijk te maken en daarbij de studenten te stimuleren in hun wiskundig onderzoek. Veel van de geproduceerde modellen zijn ingewikkeld opgebouwd maar hun relevantie voor ingenieursopleidingen was en is minder duidelijk. De bestaande modellenverzamelingen wereldwijd geven een beeld van wiskunde onderwijs en wiskunde onderzoek zoals dat plaats vond tot ruwweg midden twintigste eeuw.

Sinds de opkomst van digitale computers met daarvoor te schrijven algoritmen en met algemene symbolische formule manipulatie programma's worden de mogelijkheden om de meest complexe en meest artistieke geometrische vormen te genereren relatief moeiteloos en welhaast eindeloos. Soms zijn animaties ingebouwd om het inzicht verder te vergroten.

De oude draadmodellen vormen bronnen van inspiratie voor veel kunstenaars en architecten. Zeer bekend is de creatie van Naum Gabó aan de Coolsingel in Rotterdam, nu een Rijksmonument. In de wereld van de architectuur kennen we Zaha Hadid, die wiskunde studeerde voordat zij haar carrière als architect begon. Continue geometrische oppervlakken keren steeds weer terug in haar wereldberoemde creaties.

De oude, fysieke modellen behoren tot het waardevolle en gekoesterde erfgoed van universiteiten wereldwijd. De geometrische modellen sindsdien geconstrueerd met behulp van digitale computers stijgen als een ware Phoenix uit de klassieke, fysieke modellenverzameling omhoog in een nieuwe en welhaast onbelemmerde vlucht.