Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Onvergelijkbare elementen in de Rudin-Keislerorde op $\beta\mathbb{N}$

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

Bachelor of Science
in
Technische Wiskunde

door

Duuk Sikkens
Amsterdam, Nederland
26 augustus 2022

BSc scriptie Technische Wiskunde

"Onvergelijkbare elementen in de Rudin-Keislerorde op $\beta\mathbb{N}$"

Duuk Sikkens
5107229

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr. K.P. Hart

Overig commissielid

Dr. C.O. Smet

26 augustus 2022 Amsterdam

Samenvatting

Deze scriptie gaat over $\beta\mathbb{N}$. Wat specifieker: ze gaat over onvergelijkbare elementen in de Rudin-Keislerorde op $\beta\mathbb{N}$. $\beta\mathbb{N}$ is een topologische ruimte, het is de Čech-Stone-compactificatie van de natuurlijke getallen. Er kan over $\beta\mathbb{N}$ echter ook op een meer verzamelingtheoretische manier worden nagedacht, namelijk als de familie van alle ultrafilters op de natuurlijke getallen. Deze dualiteit maakt $\beta\mathbb{N}$ een interessante plek om te onderzoeken voor zowel topologen als verzamelingtheoretici. Een vruchtbare techniek om grip te krijgen op $\beta\mathbb{N}$ is om deze uit te rusten met een orde. Een nuttige orde op $\beta\mathbb{N}$ is de Rudin-Keislerorde, genoemd naar M. E. Rudin en H. J. Keisler. We gaan bewijzen dat de Rudin-Keislerorde op $\beta\mathbb{N}$ niet totaal is. Dat wil zeggen, dat er onvergelijkbare elementen in deze orde bestaan. Eerst gaan we twee onvergelijkbare elementen vinden. Hiervoor zien we $\beta\mathbb{N}$ als de verzameling van alle ultrafilters op $\mathbb{N}$ en laten we de topologische eigenschappen buiten beschouwing. We gaan twee oneindige torens van filters bouwen, en boven op die twee torens plakken we een ultrafilter. De manier waarop we de torens geconstrueerd hebben gaat ervoor zorgen dat die twee ultrafilters onvergelijkbaar zijn in de Rudin-Keislerorde. Deze constructie kan ook gebruikt worden om $\mathfrak{c}$ onderling onvergelijkbare elementen in de Rudin-Keislerorde te vinden, dan maken we $\mathfrak{c}$ torens van filters en plakken we boven op al die torens een ultrafilter. Deze ultrafilters gaan onvergelijkbaar zijn in de Rudin-Keislerorde. Nadat we $\mathfrak{c}$ onvergelijkbare ultrafilters hebben gevonden gaan we dit resultaat overtreffen door $2^{\mathfrak{c}}$ onderling onvergelijkbare elementen te vinden. Dit doen we door gebruik te maken van de topologische eigenschappen van $\beta\mathbb{N}$.

Populaire samenvatting

In deze bachelorscriptie maken we onvergelijkbare ultrafilters. We noemen twee dingen onvergelijkbaar als het niet logisch is om de ene 'groter' te vinden dan de andere. We geven een voorbeeld. Stel dat Max en Julia twee personen zijn, en we weten van Max dat hij één meter 83 is en van Julia weten we dat ze één meter 63 is, wie van de twee is dat groter? Simpel, Max natuurlijk. Dat klopt, mits we de lengte van een persoon gebruiken om personen met een notie van 'grootte' uit te rusten. We kunnen personen ook met een hele andere notie van 'grootte' uitrusten. Een populaire manier om personen met een notie van 'grootte' uit te rusten is door naar recordtijden te kijken van een of andere sport. We gaan nu een persoon 'groter' vinden dan een ander persoon als dit persoon een snellere recordtijd op de honderd meter sprint heeft dan het andere persoon.

Stel nu dat we van Max weten dat hij één meter 83 is, maar van Julia weten we de lengte niet. Van Julia weten we wel dat haar recordtijd op de honderd meter sprint 13.6 seconden is, maar van Max weten we zijn recordtijd op de honderd meter sprint juist niet. Wie vinden we nu 'groter'? Vinden we Max 'groter' dan Julia of vinden we Julia 'groter' dan Max? Het antwoord is: allebei niet. Het is niet logisch om de ene 'groter' te vinden dan de andere, Max en Julia zijn dus onvergelijkbaar.

We gaan in deze scriptie dus op zoek naar onvergelijkbare ultrafilters. Hier worden de zaken een beetje meta. Een ultrafilter is op zichzelf namelijk ook een manier om grootte toe te kennen: dingen die in een ultrafilter zitten die vinden we groot, en dingen die niet in een ultrafilter zitten die vinden we klein. We zullen aan de ruimte van alle ultrafilters een notie van grootte toekennen; een soort meta-grootte dus. Binnen deze meta-grootte gaan we op zoek naar onvergelijkbare ultrafilters.

Inhoudsopgave

1 Introductie

In deze scriptie gaan we op zoek naar onvergelijkbare elementen in de Rudin-Keislerorde op $\beta\mathbb{N}$. Het vinden van onvergelijkbare elementen dient echter niet te worden begrepen als het hoofddoel van deze scriptie. De zoektocht naar onvergelijkbare elementen is slechts een middel tot het doel om bekend te raken met de intrigerende ruimte $\beta\mathbb{N}$. Onderweg gedurende onze zoektocht zullen we dan ook veel vragen over $\beta\mathbb{N}$ kunnen beantwoorden, vragen zoals

- Wat is $\beta\mathbb{N}$ eigenlijk?
- Het is een stuk fijner om in $\beta\mathbb{N}$ te werken als de Continuümhypothese waar is, waarom is dit zo?
- Wat zijn de topologische eigenschappen van $\beta\mathbb{N}$?
- Wat zijn onafhankelijke families en hoe helpen ze ons om $\beta\mathbb{N}$ beter te begrijpen?

Het doel van de scriptie is dus om een uitgebreide introductie van $\beta\mathbb{N}$ te bieden, maar waarom zijn we in de eerste plaats geïnteresseerd in $\beta\mathbb{N}$? Heeft diepgaand begrip van $\beta\mathbb{N}$ directe en zinvolle toepassingen op het dagelijks leven van een gemiddeld persoon? Het antwoord op die vraag is helaas: nee, diepgaand begrip van $\beta\mathbb{N}$ heeft geen directe of zinvolle toepassingen op het dagelijks leven van een gemiddeld persoon. Als troost kan ik slechts een verklaring bieden van waarom ikzelf vind dat het onderzoeken van $\beta\mathbb{N}$, en theoretische wiskunde in het algemeen, tijd en energie waard is. Het bedrijven van theoretische wiskunde valt te vergelijken met het oplossen van denkpuzzels. Er zijn een aantal spelregels (axioma's), en binnen het kader van deze regels is het de bedoeling om een probleem op te lossen. Door het oplossen van dit soort problemen worden denkpatronen aangeleerd en technieken ontwikkeld die vaak in veel meer situaties toepasbaar zijn dan in het oorspronkelijke probleem. Om deze reden komt het vaak voor dat resultaten die worden geboekt in de theoretische wiskunde later toepassingen krijgen in de 'echte' wereld. Hiernaast (en wat volgt is een persoonlijke opvatting) vind ikzelf dat de achterliggende theorieën van $\beta\mathbb{N}$, de Čech-Stone-compactificatie en de Stoneruimte, simpelweg mooie theorieën zijn. Dit geeft $\beta\mathbb{N}$ voor mij esthetische waarde, maar dit hoeft natuurlijk niet voor iedereen zo te zijn.

Voordat we de wiskunde induiken geven we nog een globaal overzicht van de structuur van deze scriptie. Eerst gaan we in paragraaf 2 een aantal algemene zaken op een rijtje zetten. We lichten in deelparagraaf 2.1 kort toe wat we bedoelen met een ordening. Vervolgens houden we een bespreking van het Keuzeaxioma, van ordinaal- en kardinaalgetallen en van de Continuümhypothese in deelparagrafen 2.2, 2.3 en 2.4 respectievelijk. Hierna introduceren we het begrip van een filter en bewijzen we een aantal belangrijke eigenschappen, dit gebeurt in deelparagraaf 2.5. We sluiten af met een aantal definities en handige feitjes uit de topologie in deelparagraaf 2.6. In paragraaf 3 richten we ons op de vraag wat $\beta\mathbb{N}$ nou precies is. Eerst definiëren we in deelparagraaf 3.1 $\beta\mathbb{N}$ als de Čech-compactificatie van de natuurlijke getallen. Vervolgens tonen we in deelparagraaf 3.2 aan dat we ook over $\beta\mathbb{N}$ kunnen nadenken als de Stoneruimte van de machtsverzameling van de natuurlijke getallen. In paragraaf 4 geven we $\beta\mathbb{N}$ wat structuur door de Rudin-Keislerorde te definiëren. De overige paragrafen zijn gewijd aan het vinden van de onvergelijkbare elementen. Eerst vinden we er in deelparagraaf 5.1 twee, onder de veronderstelling dat de Continuümhypothese waar is, in deelparagraaf 5.2 laten we daarna zien dat het ook zonder de Continuümhypothese kan. Vervolgens passen we het argument een beetje aan om een deelverzameling onderling onvergelijkbare elementen van kardinaliteit $\mathfrak{c}$ te vinden, dit gebeurt in paragraaf 6. In paragraaf 7 overtreffen we onszelf door $2^{\mathfrak{c}}$ onvergelijkbare elementen te vinden. Eerst doen we dat in deelparagraaf 7.1 onder de veronderstelling dat een versie van de Continuümhypothese niet waar is en daarna in deelparagraaf 7.2 onder de veronderstelling dat deze versie van de Continuümhypothese wel waar is.

2 Voorkennis

Voordat we het over $\beta\mathbb{N}$ en over de Rudin-Keislerorde gaan hebben, moeten we eerst een aantal algemene zaken op een rijtje zetten. Hier is deze paragraaf aan gewijd. In deelparagraaf 2.1 zullen we alle verschillende types ordeningen benoemen, en een aantal elementaire eigenschappen van deze ordeningen laten zien. Dit vervolgen we met een korte bespreking van het Keuzeaxioma in deelparagraaf 2.2. Hier gaan we ook de Welordeningsstelling van Zermelo en het Lemma van Zorn geven, en zonder bewijs stellen we dat deze equivalent zijn aan het Keuzeaxioma. Hierna houden we in deelparagraaf 2.3 een bespreking van ordinaal- en kardinaalgetallen. In deelparagraaf 2.4 bespreken we de Continuümhypothese en een veralgemenisering ervan. Vervolgens richten we ons in deelparagraaf 2.5 op filters en ultrafilters. We zullen een paar voorbeelden geven en elementaire eigenschappen bewijzen. Als laatste zetten we in deelparagraaf 2.6 een paar concepten uit de topologie op een rijtje.

2.1 Ordeningen

In deze deelparagraaf bespreken we ordeningen. Een ordening is een manier om paren elementen van een verzameling met elkaar te vergelijken, waardoor we kunnen zeggen dat één van de twee elementen 'groter' is dan het andere element. Om ervoor te zorgen dat een ordening in lijn ligt met onze intuïtieve notie van 'groter dan' eisen we dat een ordening aan een aantal voorwaarden voldoet. Er zijn verschillende types ordeningen, onderscheiden van elkaar door aan hoeveel van deze voorwaarden wordt voldaan. We gaan eerst de voorwaarden opsommen, vervolgens definiëren we aan de hand van deze voorwaarden de verschillende types ordeningen. Laat X een verzameling zijn en $\leq \subseteq X \times X$ een relatie op X. We schrijven $x \leq y$ voor $(x, y) \in \leq$. De voorwaarden die we van $\leq$ gaan eisen zijn als volgt.

1. Reflexiviteit: $\forall x \in X : x \leq x$.
2. Transitiviteit: $\forall x, y, z \in X : x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$.
3. Antisymmetrie: $\forall x, y \in X : x \leq y \wedge y \leq x \implies y = x$.
4. Totaliteit: $\forall x, y \in X : x \leq y \vee y \leq x$.
5. Welordening: $\forall A : A \subseteq X \wedge A \neq \emptyset \implies \exists m \in A\ \forall x \in A : m \leq x$.

Als $\leq$ alleen aan eisen 1 en 2 voldoet dan is $\leq$ een **preorde**, als $\leq$ ook nog aan eis 3 voldoet dan heet $\leq$ een **partiële orde**. Wanneer aan eisen 1 tot en met 4 wordt voldaan dan noemen we $\leq$ een **totale orde** en als ook nog aan eis 5 wordt voldaan dan is $\leq$ een **welorde**. Eis 5 is de uitspraak dat elke niet lege deelverzameling een minimum moet hebben in symbolen uitgeschreven.

Elke ordening induceert een **strikte ordening** door te zeggen dat $x < y$ dan en slechts dan als $x \leq y$ en $x \neq y$. In een totale orde geldt de trichotomie wet, deze wet zegt dat voor elk paar $(x, y) \in X \times X$ aan precies één van de condities $x < y$, $y < x$ en $x = y$ voldaan wordt. In een partiële orde geldt de trichotomie wet in het algemeen niet. Paren elementen in een partieel geordende verzameling die de trichotomie wet schenden heten onvergelijkbaar. Dat wil zeggen: twee elementen $x, y \in X$ zijn **onvergelijkbaar** als $x \not\leq y$ en $y \not\leq x$. Elke ordening induceert ook een **duale ordening** door te zeggen dat $x \geq y$ dan en slechts dan als $y \leq x$. Een totaal geordende deelverzameling van een partieel geordende verzameling heet een **keten**. Een element $x \in X$ is **maximaal** als $x \leq y$ impliceert dat $y = x$. Een maximaal element in de duale orde heet **minimaal**.

Voorbeeld 2.1. De verzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ uitgerust met hun standaard ordening zijn allemaal totaal geordend. Op $\mathbb{N}$ is de standaard ordening zelfs een welorde.

Voorbeeld 2.2. Zij X een verzameling. Dan is $\subseteq$ een partiële ordening op $\mathcal{P}(X)$. Inderdaad: voor elke $A \subseteq X$ geldt dat $A \subseteq A$, dus $\subseteq$ is reflexief. Als $A \subseteq B$ en $B \subseteq C$ dan geldt ook dat $A \subseteq C$, dus $\subseteq$ is transitief. Als $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$ dan geldt per definitie dat $A = B$, dus $\subseteq$ is ook antisymmetrisch. De ordening $\subseteq$ is totaal dan en slechts dan als $|X| \in \{0, 1\}$.

Er is een goede reden dat een preorde deze naam heeft gekregen. Een preorde $\leq$ op een verzameling X induceert namelijk een partiële orde. Niet op X, maar op de versie van X waarin we elementen $x, y \in X$ met $x \leq y$ en $y \leq x$ hetzelfde vinden.

Lemma 2.3. *Zij X een verzameling en $\leq$ een preorde op X. Definieer de volgende equivalentierelatie: $x \sim y$ dan en slechts dan als $x \leq y$ en $y \leq x$. We schrijven $[\cdot] : X \to X/{\sim}$ voor de quotiëntafbeelding. De preorde $\leq$ induceert op natuurlijke wijze een partiële orde op $X/{\sim}$, gegeven door $[x] \preceq [y]$ dan en slechts dan als er $x \in [x]$ en $y \in [y]$ zijn zodat $x \leq y$.*

Bewijs. Als eerste zullen we aantonen dat onze partiële orde welgedefinieerd is, dat wil zeggen, onafhankelijk van de gekozen representant. Veronderstel dus dat $x \sim x'$ en dat $y \sim y'$. We gaan bewijzen dat $x \leq y$ dan en slechts dan als $x' \leq y'$. Dit is helemaal geen kunst, als $x \leq y$ dan geldt namelijk dat $x' \leq x \leq y \leq y'$. De andere kant op gaat op dezelfde manier.

Nu tonen we aan dat $\preceq$ een geldige partiële orde levert. Laat $[x], [y], [z] \in X/{\sim}$. Eerst reflexiviteit. Kies een representant $x \in [x]$. Uit $x \leq x$ volgt dat $[x] \preceq [x]$.

Dan nu transitiviteit. Als $[x] \preceq [y]$ en $[y] \preceq [z]$ dan zijn er $x \in [x]$, $y, y' \in [y]$ en $z \in [z]$ zodat $x \leq y$ en $y' \leq z$. We zien dat $x \leq y \leq y' \leq z$, dus $[x] \preceq [z]$.

Als laatste komt antisymmetrie. Stel dat $[x] \preceq [y]$ en $[y] \preceq [x]$. Dan zijn er $x, x' \in [x]$ en $y, y' \in [y]$ zodat $x \leq y$ en $y' \leq x'$. Merk op dat $x \leq y \leq y'$, maar ook dat $y' \leq x' \leq x$. Dus $x \sim y'$ en $[x] = [y]$. □

Als een partiële orde wordt geïnduceerd door een preorde zoals in Lemma 2.3, dan kun je onvergelijkbare elementen in de partiële orde vinden door te zoeken naar onvergelijkbare elementen in de preorde.

Lemma 2.4. *Zij $\leq$ een preorde op X. Als $x \in X$ en $y \in X$ onvergelijkbaar zijn, dan zijn $[x] \in X/{\sim}$ en $[y] \in X/{\sim}$ ook onvergelijkbaar. Hier is $\sim$ zoals in Lemma 2.3.*

Bewijs. Om een tegenspraak uit te lokken, veronderstel zonder beperking der algemeenheid dat $[x] \preceq [y]$. Dan zijn er $x' \in [x]$ en $y' \in [y]$ zodat $x' \leq y'$. Maar omdat $x \sim x'$ en $y \sim y'$ volgt dan dat $x \leq x' \leq y' \leq y$. Een tegenspraak. □

2.2 Het Keuzeaxioma

We zullen in deze deelparagraaf een bespreking van het Keuzeaxioma houden. Het Keuzeaxioma is één van de axioma's van de verzamelingenleer en is veruit het meest omstreden. De reden van de controversie rondom het

Keuzeaxioma is dat het postuleert dat iets bestaat zonder hier een directe constructie voor te bieden. Dit staat direct haaks op de gedachtestroom die het 'constructivisme' wordt genoemd. Grofweg zegt het Keuzeaxioma dat je voor elke collectie niet lege verzamelingen $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ altijd simultaan uit elke X_i één element x_i kan kiezen. De precieze formulering gaat middels een keuzefunctie. Een **keuzefunctie** is een functie $f : \mathcal{I} \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i$ zodat $f(i) \in X_i$ voor elke $i \in \mathcal{I}$. Het Keuzeaxioma is nu als volgt geformuleerd.

Voor elke collectie niet lege deelverzamelingen $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ bestaat er een keuzefunctie.

Graag willen we opmerken dat in sommige situaties het Keuzeaxioma helemaal niet nodig is om een keuzefunctie te construeren. Bijvoorbeeld als $\mathcal{I} = \{1 \ldots n\}$ eindig is. In dit geval kunnen we één voor één de verzamelingen X_1 tot en met X_n langs gaan en een element uitzoeken. In het geval dat de doorsnede $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} X_i$ niet leeg is dan kunnen we ook expliciet een keuzefunctie aanwijzen: we nemen een element $x \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} X_i$ en stellen $f : \mathcal{I} \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i$ de constante functie $i \mapsto x$. In het algemene geval hebben we echter het Keuzeaxioma nodig om existentie van een keuzefunctie te garanderen.

Het **Cartesisch product** $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ is gedefinieerd als de verzameling van alle keuzefuncties $f : \mathcal{I} \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i$. Een andere formulering van het Keuzeaxioma is dus dat $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ niet leeg is als X_i niet leeg is voor elke $i \in \mathcal{I}$. Een meer gangbare notatie voor een element $f \in \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ is $(f(i))_{i\in\mathcal{I}}$, deze notatie is meer in lijn met hoe men meestal informeel over een Cartesisch product nadenkt: alle geordende $|\mathcal{I}|$-tallen $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ met elke $x_i \in X_i$. Een belangrijke en natuurlijke collectie functies zijn de projecties $\pi_i : \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to X_i$ gegeven door $(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \mapsto x_i$. In de functienotatie is dit niets anders dan de evaluatieafbeelding: $\pi_i(f) = f(i)$. Als $X_i = X$ constant is dan noteren we het product $\prod_{i\in\mathcal{I}} X$ ook wel als $X^{\mathcal{I}}$. Elke functie $f : \mathcal{I} \to X$ is nu automatisch een keuzefunctie, dus $X^{\mathcal{I}}$ is de verzameling van alle functies van $\mathcal{I}$ naar X.

Het Keuzeaxioma vindt zijn oorsprong in het Welordeningsprincipe. Dit is het principe dat er op elke verzameling een welordening bestaat. In het jaar 1883 noemde G. Cantor, één van de grondleggers van de verzamelingentheorie, het Welordeningsprincipe een "Denkgesetz"[Can83], oftewel, een wet van het denken. Cantor heeft getracht om een bewijs te vinden van zijn Denkgesetz, maar tevergeefs. In 1904 werd een artikel van E. Zermelo gepubliceerd met een bewijs van het Welordeningsprincipe [Zer04], hiertoe formuleerde Zermelo de eerste versie van het Keuzeaxioma. Zermelo postuleerde dat voor elke verzameling X een keuzefunctie $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ bestaat zodat $f(A) \in A$ voor elke $\emptyset \neq A \subseteq X$. Het Welordeningsprincipe werd nu een stelling, afhankelijk van het Keuzeaxioma. Tegenwoordig staat het Welordeningsprincipe dus bekend als de Welordeningsstelling van Zermelo. Het is ook mogelijk om het Keuzeaxioma af te leiden uit de Welordeningsstelling van Zermelo. Het Keuzeaxioma en de Welordeningsstelling van Zermelo zijn dus equivalent aan elkaar.

Een ander nuttig gevolg (zelfs equivalentie) van het Keuzeaxioma staat bekend als het Lemma van Zorn. Dit lemma garandeert existentie van maximale elementen als elke keten een bovengrens heeft. In deze scriptie gaan we het Keuzeaxioma als Denkgesetz veronderstellen en verkrijgen we de Welordeningsstelling van Zermelo en het Lemma van Zorn als gevolg. Deze gaan we nu ook dusdanig formuleren. We zullen geen bewijs geven, in plaats daarvan refereren we aan een bewijs van de relevante uitspraak.

Stelling 2.5 (De Welordeningsstelling van Zermelo)**.** *Op elke verzameling bestaat een welorde.*

Bewijs. [Zer04] □

Lemma 2.6 (Het Lemma van Zorn)**.** *Zij* $(X, \leq)$ *een niet lege partieel geordende verzameling waarin elke keten een bovengrens heeft. Dat wil zeggen.*

$$\textit{Voor elke keten } \mathcal{K} \subseteq X \textit{ bestaat er een } M \in X \textit{ zodat } x \leq M \textit{ voor elke } x \in \mathcal{K}.$$

Dan bezit X *een maximaal element.*

Bewijs. [Hal74] □

Door het Lemma van Zorn toe te passen op de duale orde ondervinden we dat elke partieel geordende verzameling waarin elke keten een ondergrens heeft een minimaal element bezit. We gaan het Lemma van Zorn gebruiken om de Ultrafilterstelling te bewijzen. De Welordeningsstelling van Zermelo gebruiken we om transfiniete recursie en transfiniete inductie toe te passen. Transfiniete inductie is een veralgemenisering van het bekende idee van inductie op de natuurlijke getallen, alleen nu doen we het op een overaftelbare verzameling. Transfiniete inductie is een bewijstechniek die werkt op welgeordende verzamelingen. Wegens de Welordeningsstelling van Zermelo kunnen we dus op elke verzameling transfiniete inductie toepassen.

Lemma 2.7 (Het principe van transfiniete inductie)**.** *Zij* $(X, \leq)$ *een welgeordende verzameling en zij* P *een eigenschap waar elementen van* X *aan kunnen voldoen (dat wil zeggen:* $P(x)$ *is waar dan en slechts dan als* $x \in X$ *aan deze eigenschap voldoet). Stel verder dat*

$$\forall x \in X : \big((\forall y < x : P(y)) \implies P(x)\big).$$

Dan geldt $P(x)$ *voor elke* $x \in X$*.*

Bewijs. Laat $A = \{x \in X : \neg P(x)\}$ en stel dat A niet leeg is. Dan heeft A een minimum, want X is welgeordend. Laat $a = \min A$. Voor elke $y < a$ geldt dan $P(y)$ waar is. Uit onze veronderstelling volgt nu dat $P(a)$ waar is, een tegenspraak, want $a \in A$. Dus A is leeg en $P(x)$ geldt voor elke $x \in X$. □

2.3 Ordinaal- en kardinaalgetallen

Er bestaat een bekende uitspraak in de wiskunde: oneindig is geen getal, het is een concept. De uitspraak weert novice wiskundigen om oneindig als getal te gebruiken, dit kan in veel situaties namelijk tot een paradox leiden. Toch is het wiskundigen gelukt om een rigoureuze theorie van oneindige getallen op te bouwen: de theorie van ordinaal- en kardinaalgetallen. Om het verschil uit te leggen tussen een ordinaalgetal en een kardinaalgetal beginnen we onze discussie bij eindige getallen. We kunnen eindige getallen op twee manieren opvatten: eindige getallen kunnen hoeveelheid aangeven, en eindige getallen kunnen volgorde aangeven. In de uitspraak 'we hebben nog vijf appels' wordt het getal vijf gebruikt om hoeveelheid aan te geven, de nummering van de paragrafen in deze scriptie is een voorbeeld van hoe getallen worden gebruikt om volgorde aan te geven. Als een getal volgorde aangeeft dan beschouwen we dat getal als een ordinaalgetal en als een getal hoeveelheid aangeeft dan beschouwen we het getal als een kardinaalgetal. In het eindige geval is er niet zoveel verschil tussen ordinaalgetallen en kardinaalgetallen: deze scriptie begint bij paragraaf 1 en eindigt bij paragraaf 8, de scriptie heeft dus 8 paragrafen. Andersom: als een scriptie 8 paragrafen heeft dan is er, op herschikking na, maar één manier om deze paragrafen op volgorde te zetten. In het oneindige geval gaan we echter een verschil zien.

De strategie waarmee we oneindige getallen gaan construeren is om getallen te zien als verzamelingen. Om deze reden is het natuurlijk te beginnen bij 0, we kunnen 0 namelijk identificeren met de lege verzameling $\emptyset$. De volgende uitspraak is een beetje flauw, maar er geldt dat de lege verzameling wordt welgeordend door de lege relatie op $\emptyset \times \emptyset$. We definiëren dus de relatie $< \subseteq 0 \times 0$ als de lege verzameling en dit geeft ons een welordening op 0. Alle andere eindige getallen definiëren we nu recursief door $n+1 = n \cup \{n\}$ te stellen en we geven $n+1$ een welordening door het getal n als maximum uit te roepen. Dus het getal 1 identificeren we met $0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$ samen met de triviale welordening, het getal 2 identificeren we met $1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ samen met de welordening $0 < 1$ (oftewel $\emptyset < \{\emptyset\}$) en in het algemeen identificeren we het getal n met de verzameling $\{0, 1, 2, \ldots n-1\}$ samen met de welordening $0 < 1 < 2 < \ldots < n-2 < n-1$. De verzameling van alle eindige getallen noteren we als $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Omdat we het getal m hebben gedefinieerd als de verzameling van alle getallen kleiner dan m is de relatie $n \in m$ op $\mathbb{N}$ de bekende standaard ordening $n < m$ op $\mathbb{N}$. Dit is in feite hoe we de standaard ordening op $\mathbb{N}$ definiëren: we zeggen dat $n < m$ dan en slechts dan als $n \in m$.

Omdat we getallen identificeren met verzamelingen kunnen we een nieuw getal ω defininïeren als de verzameling $\mathbb{N}$. We kunnen nu hetzelfde trucje toepassen als in het eindige geval: we stellen $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega\}$ en we geven $\omega + 1$ een welordening door ω als maximum uit te roepen. Dit is waar we verschil gaan zien tussen oneindige ordinaal- en kardinaalgetallen: om $\omega + 1$ te vormen hebben we namelijk maar één element aan ω toegevoegd. Door het Hilbert hotel na te spelen is het nu eenvoudig om een bijectie tussen ω en $\omega + 1$ te vinden, als er een bijectie tussen twee verzamelingen bestaat dan vinden we dat die twee verzamelingen dezelfde 'hoeveelheid' elementen hebben. Met andere woorden, ω en $\omega + 1$ hebben dezelfde kardinaliteit. Als we echter gaan kijken naar de volgorde waarin de elementen van ω en de elementen van $\omega + 1$ staan, dat wil zeggen: de welordeningen van deze verzamelingen, dan zien we een wezenlijk verschil. De verzameling $\omega + 1$ heeft namelijk een maximum en de verzameling ω heeft dit niet. Als ordinaalgetallen zijn ω en $\omega + 1$ dus verschillend. Nu kunnen we weer recursief doorgaan om $\omega + n$ te definiëren voor elke $n \in \mathbb{N}$. Nu stellen we $\omega + \omega$ als de verzameling $\{0, 1, 2, 3 \ldots \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots\} = \bigcup_{\eta < \omega+\omega} \{\eta\}$, waarbij we de welordening op $\omega + \omega$ definiëren als $\eta < \lambda$ dan en slechts dan als $\eta \in \lambda$. Dit is hoe hoe we in het algemeen een ordinaalgetal η definiëren: als we elk ordinaalgetal $\lambda < \eta$ al hebben gedefinieerd dan definiëren we $\eta = \bigcup_{\lambda < \eta} \{\lambda\}$ als de verzameling van alle ordinaalgetallen kleiner dan η en we geven η de welordening $\lambda < \alpha$ dan en slechts dan als $\lambda \in \alpha$. Zij η een ordinaalgetal, als $\eta = \lambda + 1$ voor een zeker ordinaalgetal λ dan noemen we η een **opvolger ordinaal**. Alle andere ordinaalgetallen ongelijk aan 0 noemen we een **limiet ordinaal**.

Nu we ordinaalgetallen hebben gedefinieerd kunnen we kardinaalgetallen definiëren als initiële ordinaalgetallen. Dat wil zeggen: een ordinaalgetal η is een kardinaalgetal als er voor elk ordinaalgetal λ kleiner dan η *geen* bijectie bestaat tussen η en λ. Een voorbeeld van een initieel ordinaalgetal is ω, want als $\lambda < \omega$ dan is λ eindig en bestaat er geen bijectie tussen λ en ω. Als we over ω nadenken als kardinaalgetal dan noteren we deze als $\aleph_0$. De notatie $\aleph$ is geïntroduceerd door G. Cantor en duidt altijd op een kardinaalgetal. Het beschouwt de oneindige kardinaalgetallen onder hun canonieke welordening (de welordening van de ordinaalgetallen beperkt tot de kardinaalgetallen), dus $\aleph_0 = \omega = \mathbb{N}$ is het kleinste oneindige kardinaalgetal. Als η een ordinaalgetal is, en $\aleph_\eta$ een kardinaalgetal, dan is $\aleph_{\eta+1}$ het kleinste ordinaalgetal zodat er geen bijectie bestaat tussen $\aleph_\eta$ en $\aleph_{\eta+1}$. Dit minimum bestaat omdat de ordinaalgetallen zijn welgeordend, en $\aleph_{\eta+1}$ is nu per definitie een initieel ordinaalgetal en dus een kardinaalgetal. Het kardinaalgetal $\aleph_{\eta+1}$ wordt het **opvolger kardinaal** van $\aleph_\eta$ genoemd. Als κ een kardinaalgetal is dan wordt het opvolger kardinaal ook wel met κ^+ aangeduid. Bij een limiet ordinaal η, dan is $\aleph_\eta = \bigcup_{\lambda < \eta} \aleph_\lambda$.

Voor elke welgeordende verzameling X bestaat er een uniek ordinaalgetal η zodat er een ordebehoudende bijectie $\lambda \mapsto x_\lambda$ van η naar X bestaat. Ordebehoudend wil zeggen dat $\lambda < \alpha$ in de welordening van η dan en slechts dan als $x_\lambda < x_\alpha$ in de welordening van X. Het ordinaalgetal η wordt het **ordetype** van X genoemd.

Onder het Keuzeaxioma bestaat er nu (vanwege de Welordeningsstelling van Zermelo) voor elke verzameling X een uniek kardinaalgetal κ zodat er een bijectie bestaat tussen κ en X. Dit kardinaalgetal heet de **kardinaliteit** van X en noteren we als $|X|$. Nu kunnen we operaties op verzamelingen gebruiken om de som en het product van kardinaalgetallen te definiëren. Zij $\mathcal{I}$ een indexverzameling en zij κ_i een kardinaalgetal voor elke $i \in \mathcal{I}$. We definiëren het product van de kardinaalgetallen als de kardinaliteit van het cartesisch product:

$$\prod_{i \in \mathcal{I}} \kappa_i = \left| \prod_{i \in \mathcal{I}} \kappa_i \right|.$$

Een belangrijk resultaat uit de verzamelingenleer is dat $\kappa \cdot \kappa = \kappa$ voor elk oneindig kardinaalgetal κ, dit gebruiken we in de scriptie zonder opmerking of terugverwijzing. We definiëren de som van kardinaalgetallen als de kardinaliteit van de disjuncte vereniging:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \kappa_i = \left| \bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} \kappa_i \right|.$$

We gaan ook gebruik maken van ordinaal- en kardinaalgetallen bij bewijzen die gebruik maken van het principe van transfiniete inductie. Als X een verzameling van kardinaliteit κ is dan heet een bijectie tussen X en κ een **aftelling** van X. We kunnen X dan schrijven als $X = \{x_\eta : \eta < \kappa\}$ en de welordening van alle ordinaalgetallen kleiner dan κ induceert nu een welordening op X door te zeggen dat $x_\lambda < x_\eta$ dan en slechts dan als $\lambda < \eta$. Het principe van transfiniete inductie vertelt ons nu dat als we voor elke $\eta < \kappa$ kunnen bewijzen dat x_η aan een zekere eigenschap voldoet, onder de aanname dat x_λ aan deze eigenschap voldoet voor elke $\lambda < \eta$, dan voldoet x_η aan deze eigenschap voor elke $\eta < \kappa$. We zullen echter slechts één keer een bewijs met transfiniete inductie deze structuur laten aannemen, namelijk in het bewijs van Stelling 7.35. Alle andere bewijzen met transfiniete inductie delen we voor de overzichtelijkheid op in drie onderdelen. Het eerste onderdeel is het geval $\eta = 0$, waarin we bewijzen dat x_0 aan de gewenste eigenschap voldoet. Het tweede onderdeel is de opvolger stap, waarin we bewijzen dat $x_{\eta+1}$ aan de gewenste eigenschap voldoet onder de aanname dat x_η aan de eigenschap voldoet. Als laatste is er nog het limiet ordinaal geval, hier laten we zien dat voor een limiet ordinaal η geldt dat x_η aan de eigenschap voldoet onder de aanname dat x_λ aan de eigenschap voldoet voor elke $\lambda < \eta$.

2.4 De Continuümhypothese

Nu we hebben verteld wat ordinaal- en kardinaalgetallen zijn is het tijd om aan te geven wat de Continuümhypothese is, en waarom we het voor deze scriptie nodig hebben. De Continuümhypothese is, net als het Keuzeaxioma, een uitspraak over het oneindige. Net als het Keuzeaxioma is het geformuleerd door G. Cantor [Can77], geloofde hij dat de Continuümhypothese waar was en heeft hij, tevergeefs, naar een bewijs gezocht. De Continuümhypothese verschilt echter van het Keuzeaxioma in de mate waarin het als 'Denkgesetz' wordt geaccepteerd. Het klopt dat er critici van het Keuzeaxioma zijn, maar als er een uitspraak in de verzamelingentheorie wordt bewezen afhankelijk van het Keuzeaxioma dan wordt dit in het algemeen gezien als een uitspraak die 'echt' waar is. Als een uitspraak wordt bewezen met behulp van de Continuümhypothese dan kijkt de wiskundige gemeenschap er wat anders naar.

De Continuümhypothese is de veronderstelling dat $\aleph_1 = \mathfrak{c}$. We weten al wat $\aleph_1$ is, het is het opvolger kardinaal van $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$. Het kardinaalgetal $\mathfrak{c}$ is de kardinaliteit van het continuüm $\mathbb{R}$. Het is ook gelijk aan de kardinaliteit van de familie van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ en de kardinaliteit van alle functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$. Oftewel: $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. Volgens de Continuümhypothese zijn deze twee kardinaalgetallen gelijk aan elkaar, de Continuümhypothese veronderstelt dus dat er geen verzameling X bestaat die een kardinaliteit heeft die strikt groter is dan $\aleph_0$, en strikt kleiner dan $2^{\aleph_0}$. In dit geval zou $|X|$ namelijk groter of gelijk zijn aan de opvolger van $\aleph_0$, en zien we dat $\aleph_1 \leq |X| < 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Met de axioma's van de verzamelingentheorie (inclusief het Keuzeaxioma) is het onmogelijk om de Continuümhypothese te bewijzen, maar het is ook onmogelijk om het tegendeel te bewijzen. De Continuümhypothese is daarmee **onafhankelijk** van de verzamelingentheorie.

Er zijn ook andere versies en veralgemeniseringen van de Continuümhypothese. Eén hiervan zullen we nog bespreken, namelijk de veronderstelling dat voor een zeker oneindig kardinaalgetal κ geldt dat $\kappa^+ = 2^\kappa$. In het geval $\kappa = \aleph_0$ dan is dit precies de voorheen besproken 'standaard' Continuümhypothese. Als een stelling afhankelijk is van de standaard Continuümhypothese dan geven we dit aan met **CH**. Als we uitgaan van de veronderstelling dat $\kappa^+ = 2^\kappa$ voor een oneindig kardinaalgetal ongelijk aan $\aleph_0$, dan geven we dit aan met $\mathbf{CH}_\kappa$.

De reden dat we de Continuümhypothese bij het project hebben betrokken is dat de ruimte $\beta\mathbb{N}$ zich heel anders gedraagt onder de Continuümhypothese dan zonder de Continuümhypothese. De stellingen die we in deze scriptie gaan bewijzen kunnen allemaal zonder de Continuümhypothese bewezen worden, maar onder de Continuümhypothese is alles een stuk makkelijker. Hier geeft deelparagraaf 5.1 een indicatie van. Ook gaan we in paragraaf 7 de veralgemeniseerde Continuümhypothese $\mathbf{CH}_\mathfrak{c}$ nodig hebben. Het bewijs van de stelling die we in die paragraaf gaan aantonen ziet er namelijk heel anders uit onder $\mathbf{CH}_\mathfrak{c}$ dan onder $\neg\mathbf{CH}_\mathfrak{c}$.

2.5 Filters

Het volgende onderwerp waar we wat voorkennis over zullen verschaffen is filters. We gaan de definitie van een filter en een ultrafilter geven. Vervolgens geven we een paar voorbeelden van filters en ultrafilters. Daarna geven we de definitie van een filterbasis en een filtersubbasis en laten we zien hoe we hieruit nieuwe filters kunnen maken. Als laatste bewijzen we de Ultrafilterstelling en geven we equivalente formuleringen van de uitspraak dat een filter een ultrafilter is.

Definitie 2.8. Zij X een verzameling. Een **filter** op X is een collectie deelverzamelingen $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ van X zó dat

1. $\emptyset \notin \mathscr{F}$ en $X \in \mathscr{F}$.
2. Als $A, B \in \mathscr{F}$ dan $A \cap B \in \mathscr{F}$.
3. Als $A \in \mathscr{F}$ en $A \subseteq B \subseteq X$ dan $B \in \mathscr{F}$.

Definitie 2.9. Zij X een verzameling. Een **ultrafilter** op X is een filter $\mathscr{F}$ op X maximaal onder $\subseteq$. Dat wil zeggen: als $\mathscr{G}$ een filter is zodat $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$, dan geldt dat $\mathscr{F} = \mathscr{G}$.

Om een beetje een gevoel te krijgen bij deze definities zullen we twee voorbeelden langslopen.

Voorbeeld 2.10. Zij X een verzameling en $\emptyset \neq A \subseteq X$ een deelverzameling. De collectie deelverzamelingen $\mathscr{F}_A = \{B \subseteq X : A \subseteq B\}$ is een filter, dit gaan we nu aantonen.

1. A is niet leeg dus $A \not\subseteq \emptyset$, we zien dat $\emptyset \notin \mathscr{F}_A$. Uiteraard geldt dat $A \subseteq X$, dus $X \in \mathscr{F}_A$.
2. Als $B, C \in \mathscr{F}_A$ dan geldt dat $A \subseteq B$ en $A \subseteq C$. Er volgt dat $A \subseteq B \cap C$ en dus dat $B \cap C \in \mathscr{F}_A$.
3. Als $B \in \mathscr{F}$ en $B \subseteq C \subseteq X$ dan zien we dat $A \subseteq B \subseteq C$. Dus $C \in \mathscr{F}_A$.

Als X eindig is dan is *elk* filter van deze vorm. Immers, als X eindig is dan is $\mathcal{P}(X)$ ook eindig. Dus elk filter $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ bestaat uit eindig veel deelverzamelingen van X. Door inductie toe te passen op punt 2 in Definitie 2.8 ondervinden we dat een eindige doorsnede van elementen in een filter weer in het filter moet zitten. Er volgt dat $A = \bigcap \mathscr{F} \in \mathscr{F}$. In het bijzonder is A dus niet leeg. Het is eenvoudig om na te gaan dat $\mathscr{F} = \mathscr{F}_A$.

Als $A = \{x\}$ uit één element bestaat, dan schrijven we ook wel $\mathscr{F}_x$ in plaats van $\mathscr{F}_{\{x\}}$. In dit geval is $\mathscr{F}_x$ zelfs een ultrafilter: stel $\mathscr{F}$ is een filter op X zodat $\mathscr{F}_x \subsetneq \mathscr{F}$. Dan is er een $B \in \mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_x$. Voor deze B geldt dus dat $x \notin B$. Echter, $\{x\} \in \mathscr{F}_x \subseteq \mathscr{F}$. Dus $B \cap \{x\} = \emptyset \in \mathscr{F}$. Een tegenspraak. Een ultrafilter van de vorm $\mathscr{F}_x$ noemen we een **elementair ultrafilter**. Een ultrafilter niet van deze vorm heet een **vrij ultrafilter**.

Voorbeeld 2.11. Zij X een oneindige verzameling. Laat $\mathscr{F} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ is eindig}\}$. We gaan aantonen dat $\mathscr{F}$ een filter is.

1. De verzameling $X \setminus \emptyset = X$ is oneindig, dus $\emptyset \notin \mathscr{F}$. Verder is $X \setminus X = \emptyset$ juist eindig, dus $X \in \mathscr{F}$.
2. Als $A, B \in \mathscr{F}$ dan zijn $X \setminus A$ en $X \setminus B$ dus eindig. Met de wetten van De Morgan zien we dat $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ een vereniging van twee eindige verzamelingen is. Dit is weer een eindige verzameling, dus $A \cap B \in \mathscr{F}$.
3. Als $A \in \mathscr{F}$ en $A \subseteq B$, dan geldt dat $X \setminus B \subseteq X \setminus A$ en $X \setminus A$ is eindig. Dus $X \setminus B$ is ook eindig en $B \in \mathscr{F}$.

Het filter $\mathscr{F}$ wordt het **Fréchet filter** genoemd.

Een veel voorkomende manier om filters te construeren is door middel van een filterbasis of een filtersubbasis. We zullen nu definiëren wat een filterbasis en een filtersubbasis is, vervolgens tonen we aan dat we hiermee daadwerkelijk filters kunnen maken.

Definitie 2.12. Zij X een verzameling. Een **filterbasis** op X is een collectie deelverzamelingen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ van X zó dat

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$.
2. $\emptyset \notin \mathcal{B}$.
3. Als $A, B \in \mathcal{B}$ dan is er een $C \in \mathcal{B}$ zodat $C \subseteq A \cap B$.

Definitie 2.13. Zij X een verzameling. Een **filtersubbasis** op X is een collectie deelverzamelingen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ van X die voldoet aan de eindige doorsnede eigenschap. Dat wil zeggen.

$$\text{Voor elke } \vartheta \subseteq \mathcal{S} \text{ eindig geldt dat } \bigcap \vartheta \neq \emptyset.$$

Lemma 2.14. *Zij X een verzameling en $\mathcal{B}$ een filterbasis op X. Dan is $\mathscr{F} = \{A \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq A\}$ een filter op X.*

Bewijs. Om aan te tonen dat $\mathscr{F}$ een filter is gaan we verifiëren dat $\mathscr{F}$ aan punten 1, 2 en 3 voldoet van Definitie 2.8.

1. Voor elk element $B \in \mathcal{B}$ geldt dat $B \neq \emptyset$ en dus dat $B \not\subseteq \emptyset$. We zien dat $\emptyset \notin \mathscr{F}$. Tegelijkertijd is $\mathcal{B}$ niet leeg. Er is dus een $B \in \mathcal{B}$ waarvoor natuurlijk geldt dat $B \subseteq X$. We zien dat $X \in \mathscr{F}$.
2. Stel $A_1, A_2 \in \mathscr{F}$. Dan zijn er $B_1 \in \mathcal{B}$ en $B_2 \in \mathcal{B}$ zodat $B_1 \subseteq A_1$ en $B_2 \subseteq A_2$. Neem een $B_3 \in \mathcal{B}$ zodat $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. We zien dat $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq A_1 \cap A_2$. Dus $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{F}$.
3. Stel dat $A_1 \in \mathscr{F}$ en dat $A_1 \subseteq A_2$. Dan is er een $B \in \mathcal{B}$ zodat $B \subseteq A_1$. Dan geldt ook dat $B \subseteq A_2$, dus $A_2 \in \mathscr{F}$.

□

Lemma 2.15. *Zij X een verzameling en $\mathcal{S}$ een filtersubbasis op X. Dan is $\mathcal{B} = \{\bigcap \vartheta : \vartheta \subseteq \mathcal{S}$ eindig$\}$ een filterbasis op X.*

Bewijs. Om aan te tonen dat $\mathcal{B}$ een filterbasis is controleren we punten 1, 2 en 3 van Definitie 2.12.

1. Neem $\vartheta = \emptyset \subseteq \mathcal{S}$. We zien dat $X = \bigcap \emptyset = \bigcap \vartheta \in \mathcal{B}$, dus $\mathcal{B}$ is niet leeg.
2. Dit wordt precies gewaarborgd door het feit dat $\mathcal{S}$ aan de eindige doorsnede eigenschap voldoet.
3. Veronderstel dat $A, B \in \mathcal{B}$. Zeg $A = \bigcap \vartheta_1$ en $B = \bigcap \vartheta_2$, met $\vartheta_1, \vartheta_2 \subseteq \mathcal{S}$ eindig. Dan geldt dat $A \cap B = \bigcap \vartheta_1 \cap \bigcap \vartheta_2 = \bigcap(\vartheta_1 \cup \vartheta_2)$. De vereniging $\vartheta_1 \cup \vartheta_2 \subseteq \mathcal{S}$ is weer eindig, dus $A \cap B \in \mathcal{B}$ en we kunnen $C = A \cap B$ nemen.

□

Als $\mathcal{B}$ een filterbasis op X is, dan noteren we het filter uit Lemma 2.14 als $\langle \mathcal{B} \rangle$. Als $\mathcal{S}$ een filtersubbasis op X is, dan schrijven we $\langle \mathcal{S} \rangle$ voor $\langle \{\bigcap \vartheta : \vartheta \subseteq \mathcal{S} \text{ eindig}\} \rangle$. We zeggen dat $\langle \mathcal{B} \rangle$ en $\langle \mathcal{S} \rangle$ worden **voortgebracht** door $\mathcal{B}$ respectievelijk $\mathcal{S}$. Als $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ of $\mathcal{S} = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ aftelbaar is, dan noteren we de voortgebrachte filters als $\langle B_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ en $\langle S_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ respectievelijk.

We hebben nu een aantal manieren gezien om filters te maken. Maar hoe zit het met ultrafilters? We hebben gezien dat een filter van de vorm $\mathscr{F}_x$ een ultrafilter is. Zijn er nog meer mooie voorbeelden van ultrafilters? Het antwoord is: niet echt. Er bestaan zeker vrije ultrafilters (op een oneindige verzameling), maar het is een beetje lastig om te zeggen hoe ze eruit zien. We gaan ze namelijk maken met behulp van het Keuzeaxioma. Dit brengt ons bij de Ultrafilterstelling, de uitspraak dat elk filter bevat is in een ultrafilter. We gaan de stelling bewijzen met het Lemma van Zorn, maar voordat we dit kunnen doen hebben we het volgende lemma nodig.

Lemma 2.16. *Zij X een verzameling en $\mathcal{K} \neq \emptyset$ een keten van filters op X, dan is $\bigcup \mathcal{K}$ weer een filter op X.*

Bewijs. We gaan controleren dat $\bigcup \mathcal{K}$ aan punten 1, 2 en 3 van Definitie 2.8 voldoet.

1. Zij $\mathscr{F} \in \mathcal{K}$ arbitrair. Dan geldt dat $\emptyset \notin \mathscr{F}$. We zien dat $\emptyset \notin \bigcup \mathcal{K}$. We weten dat $\mathcal{K}$ niet leeg is. Neem dus een $\mathscr{F} \in \mathcal{K}$, dan geldt dat $X \in \mathscr{F} \subseteq \bigcup \mathcal{K}$.
2. Stel $A, B \in \bigcup \mathcal{K}$. Dan zijn er $\mathscr{F} \in \mathcal{K}$ en $\mathscr{G} \in \mathcal{K}$ zodat $A \in \mathscr{F}$ en $B \in \mathscr{G}$. Omdat $\mathcal{K}$ een keten is weten we dat $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$ of $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$. Stel zonder beperking der algemeenheid dat $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$. Dan geldt dat $A, B \in \mathscr{G}$ en dus dat $A \cap B \in \mathscr{G} \subseteq \bigcup \mathcal{K}$.
3. Stel dat $A \in \bigcup \mathcal{K}$ en $A \subseteq B \subseteq X$. Dan is er een $\mathscr{F} \in \mathcal{K}$ zodat $A \in \mathscr{F}$. We zien dat $B \in \mathscr{F} \subseteq \bigcup \mathcal{K}$.

□

Stelling 2.17 (De Ultrafilterstelling)**.** *Zij X een verzameling. Voor elk filter $\mathscr{F}$ op X bestaat er een ultrafilter p op X met $\mathscr{F} \subseteq p$*

Bewijs. Laat $\mathscr{F}$ een filter zijn op X en stel $\mathfrak{f} = \{\mathscr{G} : \mathscr{G}$ is een filter op X en $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}\}$. Merk op dat $\mathfrak{f}$ partieel geordend wordt door $\subseteq$. Laat $\mathcal{K}$ een keten in $\mathfrak{f}$ zijn. We gaan laten zien dat $\mathcal{K}$ een bovengrens in $\mathfrak{f}$ heeft. Als $\mathcal{K} = \emptyset$ dan is $\mathscr{F} \in \mathfrak{f}$ zelf op triviale wijze een bovengrens (de eis is leeg vervuld). Als $\mathcal{K}$ niet leeg is, dan is $\bigcup \mathcal{K}$ wegens Lemma 2.16 een filter. Ook is er een $\mathscr{G} \in \mathcal{K} \subseteq \mathfrak{f}$. We zien dat $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G} \subseteq \bigcup \mathcal{K}$. We concluderen dat $\bigcup \mathcal{K} \in \mathfrak{f}$. Ook is $\bigcup \mathcal{K}$ duidelijk een bovengrens van $\mathcal{K}$. We zien dat elke keten in $\mathfrak{f}$ een bovengrens heeft. Wegens het Lemma van Zorn heeft $\mathfrak{f}$ dan een maximaal element $p \in \mathfrak{f}$. Omdat $p \in \mathfrak{f}$ geldt dat $\mathscr{F} \subseteq p$. We weten dat p maximaal is in $\mathfrak{f}$ en we beweren dat p ook maximaal is in alle filters op X. Inderdaad: als $\mathscr{G}$ een filter is zodat $p \subseteq \mathscr{G}$ dan geldt automatisch dat $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$. We zien dat $\mathscr{G} \in \mathfrak{f}$ en omdat p maximaal is in $\mathfrak{f}$ volgt nu dat $p = \mathscr{G}$. □

Gevolg 2.18. *Zij X een verzameling. Voor elke filtersubbasis $\mathcal{S}$ op X bestaat er een ultrafilter p op X met $\mathcal{S} \subseteq p$.*

Bewijs. Stelling 2.17 geeft ons een ultrafilter p op X zodat $\langle \mathcal{S} \rangle \subseteq p$. We zien dat $\mathcal{S} \subseteq \langle \mathcal{S} \rangle \subseteq p$. □

Gevolg 2.19. *Zij X een oneindige verzameling en $A \subseteq X$ een oneindige deelverzameling van X. Er bestaat een vrij ultrafilter p op X zó dat $A \in p$.*

Bewijs. Laat $\mathcal{S} = \{A \setminus \{a\} : a \in A\}$. We gaan laten zien dat $\mathcal{S}$ een filtersubbasis is. Laat hiertoe $\vartheta \subseteq \mathcal{S}$ eindig, zeg $\vartheta = \{A \setminus \{a_i\} : a_i \in A$ voor $i = 1 \ldots n\}$. Dan geldt dat $\bigcap \vartheta = \bigcap_{i=1}^{n} A \setminus \{a_i\} = A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i\} = A \setminus \{a_1 \ldots a_n\}$. Omdat A oneindig is is deze verzameling niet leeg. Neem een ultrafilter p zodat $\mathcal{S} \subseteq p$. Het is duidelijk dat $A \in p$, want $A \setminus \{a\} \subseteq A$ voor elke $a \in A$. We gaan aantonen dat p een vrij ultrafilter is. Stel om een tegenspraak uit te lokken dat $p = \mathscr{F}_x$ een elementair ultrafilter is. Als $x \in X \setminus A$ dan zou volgen dat $\{x\} \cap A = \emptyset \in p$, een tegenspraak. Maar als $x \in A$ dan zou volgen dat $\{x\} \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset \in p$, weer een tegenspraak. □

Voor het bestaan van vrije ultrafilters hebben we dus de kracht van het Keuzeaxioma nodig. Om toch wat grip op ultrafilters te krijgen zullen we een aantal formuleringen geven die equivalent zijn aan de uitspraak dat een filter een ultrafilter is.

Stelling 2.20. *Zij X een verzameling en $\mathscr{F}$ een filter op X. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

1. *$\mathscr{F}$ is een ultrafilter.*
2. *Voor elke $A \subseteq X$ geldt ofwel $A \in \mathscr{F}$ ofwel $X \setminus A \in \mathscr{F}$.*
3. *Als $A \cup B \in \mathscr{F}$ dan geldt $A \in \mathscr{F}$ of $B \in \mathscr{F}$.*

Bewijs. <u>$1 \implies 2.$</u> Laat $\mathscr{F}$ een ultrafilter zijn. Zij $A \subseteq X$ en veronderstel dat $X \setminus A \notin \mathscr{F}$. We gaan laten zien dat $A \in \mathscr{F}$. Hiertoe tonen we aan dat $\mathscr{F} \cup \{A\}$ een filtersubbasis is. Laat $\vartheta \subseteq \mathscr{F} \cup \{A\}$ eindig. Laat $F = \bigcap(\vartheta \cap \mathscr{F}) \in \mathscr{F}$. Als $A \notin \vartheta$ dan geldt dat $\bigcap \vartheta = F \in \mathscr{F}$, in het bijzonder is $\bigcap \vartheta$ dus niet leeg. In het geval dat $A \in \vartheta$ dan is $\bigcap \vartheta = F \cap A$. We moeten dus laten zien dat $F \cap A \neq \emptyset$. Stel om een tegenspraak uit te lokken dat $F \cap A = \emptyset$, dan geldt dat $F \subseteq X \setminus A$ en we zien dat $X \setminus A \in \mathscr{F}$, een tegenspraak. We concluderen dat $\langle \mathscr{F} \cup \{A\} \rangle$ een filter is waarvoor duidelijk geldt dat $\mathscr{F} \subseteq \langle \mathscr{F} \cup \{A\} \rangle$. Omdat $\mathscr{F}$ een ultrafilter is volgt nu dat $\mathscr{F} = \langle \mathscr{F} \cup \{A\} \rangle$ en dat $A \in \mathscr{F}$.

<u>$2 \implies 3.$</u> Stel dat $A \cup B \in \mathscr{F}$. Als toevallig $A \in \mathscr{F}$ dan zijn we klaar, dus stel dat $X \setminus A \in \mathscr{F}$. Dan geldt dat $(X \setminus A) \cap (A \cup B) = B \setminus A \in \mathscr{F}$. Omdat $B \setminus A \subseteq B$ volgt nu dat $B \in \mathscr{F}$.

<u>$3 \implies 1.$</u> Stel $\mathscr{F}$ is een filter zodat $A \cup B \in \mathscr{F}$ impliceert $A \in \mathscr{F}$ of $B \in \mathscr{F}$. Stel dat $\mathscr{G}$ een filter is zodat $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$. We gaan laten zien dat $\mathscr{F} = \mathscr{G}$. Stel dus dat $G \in \mathscr{G}$. Dan geldt dat $X \setminus G \notin \mathscr{G}$. Immers, als $X \setminus G \in \mathscr{G}$ dan zou volgen dat $G \cap (X \setminus G) = \emptyset \in \mathscr{G}$. We zien dat $X \setminus G \notin \mathscr{F}$. Er geldt echter dat $G \cup (X \setminus G) = X \in \mathscr{F}$, dus ofwel $G \in \mathscr{F}$, of $X \setminus G \in \mathscr{F}$. Omdat we $X \setminus G \in \mathscr{F}$ hebben uitgesloten moet dan gelden dat $G \in \mathscr{F}$. We concluderen dat $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ en dus dat $\mathscr{F} = \mathscr{G}$. Dus $\mathscr{F}$ is een ultrafilter. $\square$

2.6 Topologie

Het laatste onderwerp waar we naar gaan kijken voordat het daadwerkelijke onderwerp van deze scriptie induiken is topologie. Topologie probeert om ideeën uit de theorie van metrische ruimten, zoals convergentie, continuïteit, open en gesloten, zonder metriek en zo algemeen mogelijk te formuleren. Dit wordt gedaan door alleen de open verzamelingen te specificeren, in plaats van om de open verzamelingen geïnduceerd te laten worden door een metriek, zoals bij een metrische ruimte.

Wat volgt dient niet te worden opgevat als een eerste introductie in het vakgebied topologie. We zullen slechts de nodige definities geven een een reeks feitjes opsommen die we zonder bewijs en zonder terugverwijzing door de scriptie heen zullen gebruiken. We gaan er oogluikend vanuit dat de lezer al bekend is met de meeste definities en feitjes die we in deze deelparagraaf gaan geven.

<u>Definities.</u>

Zij X een verzameling. Een **topologie** op X is een collectie deelverzamelingen $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ van X zó dat

1. $\emptyset, X \in \tau$.
2. als $\sigma \subseteq \tau$ dan $\bigcup \sigma \in \tau$.
3. Als $A, B \in \tau$ dan $A \cap B \in \tau$.

Het paar (X, τ) heet een **topologische ruimte** en de elementen van τ zijn de **open verzamelingen** van X. Een complement van een open verzameling heet **gesloten**. Een deelverzameling van X die zowel open als gesloten is noemen we **clopen**. De familie van alle clopen deelverzamelingen van X noteren we als $CO(X)$. Een functie $f : (X, \tau) \to (Y, \mathcal{T})$ is **continu** als $A \in \mathcal{T}$ impliceert dat $f^{-1}[A] \in \tau$. Als $x \in X$ een punt is in de topologische ruimte X dan noemen we $U \subseteq X$ een **omgeving** van x als $x \in U$ en er een open verzameling G bestaat zodat $x \in G \subseteq U$. Een **basis voor de topologie** τ is een familie $\mathcal{B} \subseteq \tau$ zodat voor elke $U \in \tau$ en elke $x \in U$ er een $B \in \mathcal{B}$ bestaat zodat $x \in B \subseteq U$. Het is ook mogelijk om eerst een basis aan te wijzen en een topologie door deze basis te laten worden voortgebracht. We hebben dan dus nog geen topologie op X, dus het is dan niet logisch om een aanwijzend lidwoord te gebruiken. Een **basis voor *een* topologie** is een familie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ zodat

1. $\bigcup \mathcal{B} = X$.
2. Als $A, B \in \mathcal{B}$ en $x \in A \cap B$ dan is er een $C \in \mathcal{B}$ zodat $x \in C \subseteq A \cap B$.

Nu definiëren we de topologie τ door te zeggen dat $U \in \tau$ dan en slechts dan als voor elke $x \in U$ er een $B \in \mathcal{B}$ bestaat zodat zodat $x \in B \subseteq U$. We zeggen in dit geval dat τ wordt **voortgebracht** door $\mathcal{B}$. Als $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ een arbitraire collectie deelverzamelingen van X is, dan is $\{\bigcap \vartheta : \vartheta \subseteq \mathcal{S} \text{ eindig}\}$ een basis voor een topologie. In dit geval noemen we $\mathcal{S}$ een **subbasis** voor de topologie die door deze basis wordt voortgebracht. Als (X, τ) een topologische ruimte is en $x \in X$ dan is een **lokale basis in** x een familie $\mathcal{B}_x \subseteq \tau$ zodat $x \in B$ voor elke $B \in \mathcal{B}_x$ en voor elke $U \in \tau$ met $x \in U$ er een $B \in \mathcal{B}_x$ bestaat zodat $x \in B \subseteq U$. Een afbeelding $f : (X, \tau) \to (Y, \mathcal{T})$ tussen twee topologische ruimtes heet **open** als $A \in \tau$ impliceert dat $f[A] \in \mathcal{T}$. Als $A \subseteq X$ een deelverzameling is, dan kan A tot topologische ruimte worden gemaakt door deze uit te rusten met de **deelruimtetopologie**, gegeven door $\tau|_A = \{A \cap U : U \in \tau\}$. Als $A \subseteq X$ een deelruimte is dan is een **uitwendige basis in** A een familie $\mathcal{B}_A \subseteq \tau$ zodat $A \subseteq B$ voor elke $B \in \mathcal{B}_A$ en voor elke $U \in \tau$ met $A \subseteq U$ er een $B \in \mathcal{B}_A$ bestaat zodat $A \subseteq B \subseteq U$. De topologie $\tau = \mathcal{P}(X)$ heet de **discrete topologie** op X. Elke functie met een discrete topologische ruimte als domein is op triviale wijze automatisch continu. Een continue bijectie $f : X \to Y$ waarvoor de inverse $f^{-1} : Y \to X$ ook continu is heet een **homeomorfisme**. Een homeomorfisme $f : X \to X$ van X naar zichzelf heet een **autohomeomorfisme**. Een punt $x \in X$ heet **geïsoleerd** als $\{x\}$ open is. Als $A \subseteq X$ een deelverzameling is, dan is de **afsluiting** van A gegeven door $\overline{A} = \bigcap\{F : F \text{ gesloten en } A \subseteq F\}$. Een deelverzameling $A \subseteq X$ ligt **dicht** in X als $\overline{A} = X$. Twee elementen $x \in X$ en $y \in X$ zijn **van hetzelfde type** als er een autohomeomorfisme $f : X \to X$ bestaat zodat $x = f(y)$. Het is eenvoudig na te gaan dat de relatie $x \sim y$ dan en slechts dan als x en y van hetzelfde type zijn een equivalentierelatie is. Als we $[\cdot] : X \to X/\!\sim$ als de quotientafbeelding schrijven dan wordt $[x]$ het **type van** x genoemd. De ruimte van alle typen noteren we als $T(X) = X/\!\sim$. Een topologische ruimte X is **Hausdorff** als voor elk paar $x, y \in X$ zodat $x \neq y$ er open verzamelingen $U \subseteq X$ en $V \subseteq X$ bestaan zodat $x \in U$, $y \in V$ en $U \cap V = \emptyset$. Een topologische ruimte X is **regulier** als X Hausdorff is en als voor elke gesloten verzameling $F \subseteq X$ en elke $x \in X \setminus F$ er open verzamelingen $U \subseteq X$ en $V \subseteq X$ bestaan zodat $x \in U$, $F \subseteq V$ en $U \cap V = \emptyset$. Een topologische ruimte X is **volledig regulier** als X Hausdorff is en als voor elke gesloten verzameling $F \subseteq X$ en elke $x \in X \setminus F$ er een continue functie $f : X \to [0, 1]$ bestaat zodat $f(x) = 0$ en $f(y) = 1$ als $y \in F$. Een topologische ruimte X

is compact als elke open overdekking een eindige deeloverdekking heeft. Dat wil zeggen: voor elke $\sigma \subseteq \tau$ met $\bigcup \sigma = X$ bestaat er een eindige $\sigma' \subseteq \sigma$ zodat $\bigcup \sigma' = X$. Een **inbedding** van X in Y is een continue functie $\iota : X \to Y$ zodat $\iota : X \to \iota[X]$ een homeomorfisme is, waar $\iota[X] \subseteq Y$ de deelruimtetopologie krijgt. Als X een topologische ruimte is, dan is Y een **compactificatie** van X als Y compact Hausdorff is, en er een inbedding $\iota : X \to Y$ bestaat zodat $\iota[X]$ dicht ligt in Y. Als er een basis $\mathcal{B} \subseteq CO(X)$ voor de topologie van X bestaande uit clopen verzamelingen bestaat dan noemen we X **nuldimensionaal**. Als $\mathcal{I}$ een indexverzameling is, en voor elke $i \in \mathcal{I}$ is (X_i, τ_i) een topologische ruimte, dan kunnen we het cartesisch product $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ van een topologie voorzien door $\mathcal{S} = \{\pi_i^{-1}[U] : i \in \mathcal{I} \text{ en } U \in \tau_i\}$ als subbasis uit te roepen. Hier zijn $\pi_i : \prod_{i\in\mathcal{I}} \to X_i$ de projecties. Als $\mathscr{F}$ een filter op X is dan zeggen we dat $\mathscr{F}$ **convergeert naar** een punt $x \in X$ als voor elke omgeving U van x geldt dat $U \in \mathscr{F}$, we schrijven ook wel $\mathscr{F} \to x$. Zij (X, τ) een topologische ruimte en $x \in X$ een punt in x. Het **gewicht** van X noteren we als $\mathrm{wt}(X)$ en is de minimale kardinaliteit van een basis voor de topologie van X. Vergelijkbaar is het **karakter** van x de minimale kardinaliteit van een lokale basis in x, het karakter van x noteren we als $\chi(x)$.

Feitjes.

- De topologische ruimten en continue functies vormen een categorie. Dat wil zeggen dat $\mathrm{id}_X : X \to X$ altijd continu is, en dat de samenstelling van continue functies weer continu is.
- Een functie $f : X \to Y$ tussen twee topologische ruimten is continu dan en slechts dan als $f^{-1}[F]$ gesloten is voor elke gesloten verzameling $F \subseteq Y$.
- Zij $f : X \to Y$ een functie en zij $\mathcal{B}$ een basis voor de topologie van Y. Dan geldt dat f continu is als $f^{-1}[B] \in \tau$ voor elke $B \in \mathcal{B}$.
- Als $f : X \to Y$ continu is en $A \subseteq X$ is een deelruimte dan is $f|_A : A \to Y$ continu.
- Als $f : X \to Y$ continu, bijectief en open is dan is f een homeomorfisme.
- Zij X een topologische ruimte en $A \subseteq X$ een deelruimte. Dan is $F \subseteq A$ gesloten in de deelruimtetopologie van A dan en slechts dan als $F = A \cap G$ voor een $G \subseteq X$ gesloten in X.
- $A \subseteq X$ ligt dicht in X dan en slechts dan als voor elke niet lege open verzameling U geldt dat $A \cap U \neq \emptyset$.
- X is regulier dan en slechts dan als voor elke open verzameling $U \subseteq X$ en elke $x \in U$ er een open verzameling $V \subseteq X$ bestaat zodat $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.
- X is compact dan en slechts dan als voor elke familie gesloten verzamelingen $\mathcal{F}$ die voldoet aan de eindige doorsnede eigenschap geldt dat $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.
- X compact + Hausdorff $\implies$ X volledig regulier $\implies$ X regulier $\implies$ X Hausdorff.
- Als $F \subseteq X$ gesloten is in X en X is compact, dan is F compact.
- Als $F \subseteq X$ met X Hausdorff en F compact, dan is F gesloten in X.
- Het beeld onder een continue functie van een compacte topologische ruimte is weer compact.
- Als $f : X \to Y$ en $g : X \to Y$ continu zijn en als Y Hausdorff is, dan is $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ gesloten in X.

- Zij $\mathcal{B}$ een basis voor de topologie van X. Dan is X compact als elke overdekking $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ van basiselementen een eindige deeloverdekking toelaat.
- Zij $A \subseteq X$ een deelruimte en zij $\mathcal{B}$ een basis voor de topologie van X. Dan is de familie $\{A \cap B : B \in \mathcal{B}\}$ een basis voor de deelruimtetopologie van A.
- Als X compact is dan convergeert elk ultrafilter op X.
- Als X Hausdorff is, $\mathscr{F}$ een filter op X en als $\mathscr{F}$ convergeert naar een punt $x \in X$, dan is dat punt uniek. Dat wil zeggen: als $y \in X$ en $\mathscr{F} \to y$ dan geldt dat $x = y$.
- Als $\mathscr{F}$ een filter is op X, $F \subseteq X$ gesloten is en $\mathscr{F}$ is een filter op X zodat $F \in \mathscr{F}$ en $\mathscr{F} \to x$, dan geldt dat $x \in F$.
- De projecties $\pi_i : \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i \to X_i$ van de productruimte naar de topologische ruimten $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ zijn continu.
- (De universele eigenschap van het topologisch product) $f : Y \to \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ is continu dan en slechts dan als $\pi_i \circ f : Y \to X_i$ continu is voor elke $i \in \mathcal{I}$.
- (De stelling van Tychonoff) $\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i$ is compact en Hausdorff dan en slechts dan als X_i compact en Hausdorff is voor elke $i \in \mathcal{I}$.

3 Twee beschrijvingen van $\beta\mathbb{N}$

Nu we een aantal algemene zaken op een rijtje hebben gezet richten we ons op het onderwerp waar deze scriptie echt over gaat. In deze paragraaf gaan we $\beta\mathbb{N}$ definiëren. We zullen twee lenzen bieden waardoor $\beta\mathbb{N}$ bekeken kan worden. De eerste beschrijving die we zullen geven is als Čech-compactificatie van de natuurlijke getallen zoals beschreven in [Čec37]. De tweede beschrijving is als Stoneruimte van de machtsverzameling van de natuurlijke getallen [Sto37]. Het feit dat deze twee constructies overeenkomen is een algemene waarheid, en we zullen in algemeenheid aantonen dat de twee constructies overeenkomen. Om deze reden wordt naar de Čech-compactificatie tegenwoordig ook wel gerefereerd als de Čech-Stone-compactificatie.

3.1 $\beta\mathbb{N}$ als Čech-compactificatie van $\mathbb{N}$

Zoals besproken in de introductie gaan we in deze deelparagraaf $\beta\mathbb{N}$ definiëren als de Čech-compactificatie van de natuurlijke getallen. Hiertoe gaan we eerst uitleggen wat de Čech-compactificatie van een topologische ruimte is. In 1930 heeft A. Tychonoff laten zien dat de topologische ruimten die een compactificatie toelaten precies de volledig reguliere topologische ruimten zijn [Tyc30]. Zeven jaar later wist E. Čech zo een compactificatie te construeren [Čec37]. Deze constructie zullen we nu geven.

Stelling 3.1 (Čech)**.** *Voor elke volledig reguliere ruimte X bestaat er een compacte Hausdorff ruimte βX en een continue functie $\iota : X \to \beta X$ die voldoen aan de volgende universele eigenschap:*

Voor elke compacte Hausdorff ruimte K en elke continue functie $f : X \to K$ bestaat er een unieke continue uitbreiding $\overline{f} : \beta X \to K$ zodat $\overline{f} \circ \iota = f$. Oftewel: onderstaande diagram is commutatief.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\forall f"'] & \beta X \arrow[dl, dashed, "\exists! \overline{f}"] \\ K & \end{tikzcd}$$

Verder is deze ruimte uniek, op een uniek homeomorfisme na, en is βX een compactificatie (dat wil zeggen: ι is een inbedding en $\iota[X]$ ligt dicht in βX).

Bewijs. Uniciteit: Veronderstel dat $(\iota, \beta X)$ en $(\iota', \beta X')$ allebei aan de universele eigenschap voldoen. Dan zijn er unieke continue afbeeldingen $\overline{\iota} : \beta X' \to \beta X$ en $\overline{\iota'} : \beta X \to \beta X'$ zodat $\overline{\iota} \circ \iota' = \iota$ en $\overline{\iota'} \circ \iota = \iota'$. Merk op dat $(\overline{\iota} \circ \overline{\iota'}) \circ \iota = \overline{\iota} \circ (\overline{\iota'} \circ \iota) = \overline{\iota} \circ \iota' = \iota$. Ook geldt dat $\mathrm{id}_{\beta X} \circ \iota = \iota$. De universele eigenschap garandeert echter uniciteit van dergelijke uitbreiding. Dus $\overline{\iota} \circ \overline{\iota'} = \mathrm{id}_{\beta X}$. Op dezelfde manier volgt dat $\overline{\iota'} \circ \overline{\iota} = \mathrm{id}_{\beta X'}$. Dus $\overline{\iota'}$ en $\overline{\iota}$ zijn elkaars inverse en $\overline{\iota'} : \beta X \to \beta X'$ is een uniek homeomorfisme.

Existentie: Laat $\mathcal{C}_X = \{f : X \to [0,1] : f \text{ continu}\}$. Wegens de Stelling van Tychonoff is $[0,1]^{\mathcal{C}_X}$ compact Hausdorff. Definieer

$$\begin{aligned} \iota : X &\mapsto [0,1]^{\mathcal{C}_X} \\ x &\mapsto (f(x))_{f \in \mathcal{C}_X}. \end{aligned}$$

Noem nu $\beta X = \overline{\iota[X]}$. Dan is βX een gesloten deelruimte van $[0,1]^{\mathcal{C}_X}$ en daarmee compact Hausdorff. Ook ligt $\iota[X]$ per constructie dicht in βX. We tonen aan dat $\iota : X \to \iota[X]$ een homeomorfisme is. Als $x \in X$ en $y \in X$ verschillende elementen zijn dan is er vanwege volledige regulariteit een $f \in \mathcal{C}_X$ zodat $f(x) = 0$ en $f(y) = 1$. Er volgt dat $\iota(x) = (f(x))_{f \in \mathcal{C}_X} \neq (f(y))_{f \in \mathcal{C}_X} = \iota(y)$ vanwege de f-de coördinaat. We concluderen dat $f : X \to \iota[X]$ bijectief is. Het volstaat dus om aan te tonen dat f continu en open is. Voor $f \in \mathcal{C}_X$ laat $\pi_f : [0,1]^{\mathcal{C}_X} \to [0,1]$ de projectie op de f-de coördinaat zijn. Voor elke $f \in \mathcal{C}_X$ geldt dat $\pi_f \circ \iota = x \mapsto f(x)$ en deze afbeelding is continu. Uit de universele eigenschap van het product volgt dat ι continu is. Als laatste tonen we aan dat $\iota : X \to \iota[X]$ open is. Laat hiertoe $U \subseteq X$ open. Voor elke $u \in U$ geeft volledige regulariteit ons een $f_u \in \mathcal{C}_X$ zo dat $f_u(u) = 0$ en $f_u(x) = 1$ als $x \in X \setminus U$. We beweren dat $\bigcup_{x \in U} \pi_{f_x}^{-1}[[0, \frac{1}{2})] \cap \iota[X] = \iota[U]$. Inderdaad: voor elke $u \in U$ geldt dat $\pi_{f_u}(\iota(u)) = f_u(u) = 0 < \frac{1}{2}$. Andersom, als er $x \in X$ en $u \in U$ bestaan zodat $\pi_{f_u}(\iota(x)) = f_u(x) < \frac{1}{2}$, dan volgt dat $x \in U$. Immers, als $x \in X \setminus U$ dan moet gelden dat $f_u(x) = 1 \geq \frac{1}{2}$. We zien dat $\iota[U]$ een open verzameling in de deelruimte $\iota[X] \subseteq \beta X$ is. Dus $\iota : X \to \iota[X]$ is een open afbeelding. We concluderen dat $\iota : X \to \beta X$ een inbedding is.

Om een continue functie $f : X \to K$ naar een compact Hausdorff ruimte K uit te breiden gaan we eerst een continue functie $f : X \to [0,1]$ uitbreiden. Hiervoor hoeven we alleen te projecteren op de f-de coördinaat: $\overline{f} = \pi_f|_{\beta X} : \beta X \to [0,1]$. De uitbreiding is uniek omdat $\iota[X]$ dicht ligt in βX, en omdat $[0,1]$ Hausdorff is.

Om nu een continue functie $f : X \to K$ uit te breiden doen we het volgende: voor elke $g \in \mathcal{C}_K$ bestaat er een unieke continue uitbreiding $\overline{g \circ f} : \beta X \to [0,1]$ zodat $\overline{g \circ f} \circ \iota_X = g \circ f$. Definieer de functie

$$\begin{aligned} f_* : \beta X &\to \beta K \\ p &\mapsto (\overline{g \circ f}_*(p))_{g \in \mathcal{C}_K}. \end{aligned}$$

Deze functie is continu omdat $\pi_g \circ f_* = \overline{g \circ f}$ continu is voor elke $g \in \mathcal{C}_K$, en de universele eigenschap van het product. Verder geldt voor $x \in X$ dat

$$f_*(\iota_X(x)) = (\overline{g \circ f}(\iota_X(x)))_{g \in \mathcal{C}_K} = (g \circ f(x))_{g \in \mathcal{C}_K} = \iota_K(f(x)).$$

Dus $f_* \circ \iota_X = \iota_K \circ f$. Omdat K al compact Hausdorff is geldt dat $\iota_K : K \to \beta K$ een homeomorfisme is. We stellen $\overline{f} = \iota_K^{-1} \circ f_* : \beta X \to K$ en we zien dat $\overline{f} \circ \iota_X = f$, zoals gewild. Deze uitbreiding is uniek omdat $\iota_X[X]$ dicht ligt in βX, en omdat K Hausdorff is. Een schets van het bewijs in een diagram:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, hook, "\iota_X"] \arrow[dd, "f"'] & & \beta X \arrow[dl, dashed, "\exists!\,\overline{g \circ f}"] \arrow[dd, dashed, bend left, "\exists!\,f_*"] \\
& {[0,1]} & \\
K \arrow[ur, "\forall g"] \arrow[rr, "\sim"] & & \beta K
\end{tikzcd}$$

□

Definitie 3.2 (Čech-compactificatie)**.** Zij X een volledig reguliere topologische ruimte. De compacte Hausdorff ruimte βX uit Stelling 3.1 wordt **De Čech-compactificatie** van X genoemd.

De manier waarop we βX hebben gedefinieerd, met een universele eigenschap, riekt naar een functor. Inderdaad is het zo dat Stelling 3.1 op canonieke wijze een functor induceert. In de volgende stelling wordt beschreven hoe functies $f : X \to Y$ worden voortgestuwd naar het niveau van de Čech-compactificatie.

Stelling 3.3. *Zijn X en Y volledig reguliere ruimten en zij $f : X \to Y$ continu. Dan bestaat er een unieke continue functie $f_* : \beta X \to \beta Y$ zodat $f_* \circ \iota_X = \iota_Y \circ f$. Deze toekenning is functorieel, dat wil zeggen.*

1. $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\beta X}$.
2. *Als Z nog een volledig reguliere ruimte en $g : Y \to Z$ nog een continue afbeelding is, dan geldt dat $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

Bewijs. Merk op dat $\iota_Y \circ f : X \to \beta Y$ een continue functie naar een compacte Hausdorff ruimte is. De universele eigenschap van Stelling 3.1 geeft ons een unieke continue functie $f_* = \overline{\iota_Y \circ f} : \beta X \to \beta Y$ zodat $f_* \circ \iota_X = \iota_Y \circ f$.

Voor 1, merk op dat $\mathrm{id}_{\beta X} \circ \iota = \iota = \iota \circ \mathrm{id}_X$. Echter is $(\mathrm{id}_X)_*$ de *unieke* afbeelding die aan deze eigenschap voldoet. Dus moet gelden dat $\mathrm{id}_{\beta_X} = (\mathrm{id}_X)_*$.

Het bewijs van punt 2 gaat op dezelfde manier. Er geldt dat $g_* \circ f_* \circ \iota_X = g_* \circ \iota_Y \circ f = \iota_Z \circ g \circ f$. Maar $(g \circ f)_*$ is de unieke afbeelding die aan deze eigenschap voldoet. Dus $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$. □

Nu weten we dus wat $\beta\mathbb{N}$ is. Het is de Čech-compactificatie van de natuurlijke getallen uitgerust met de discrete topologie. Een discrete topologische ruimte is altijd volledig regulier, dus $\mathbb{N}$ is volledig regulier en de Čech-compactificatie bestaat. Elke functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is automatisch continu, want we hebben $\mathbb{N}$ de discrete topologie gegeven. Stelling 3.3 leert ons nu dat elke functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een continue functie $f_* : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ induceert, en dat deze toekenning functorieel is. Dit biedt de mogelijkheid om een preorde op $\beta\mathbb{N}$ te definiëren. Hier gaan we het in paragraaf 4 over hebben, maar eerst geven we een meer expliciete omschrijving van $\beta\mathbb{N}$. De constructie van Čech geeft namelijk niet zo veel inzicht in hoe de punten van $\beta\mathbb{N}$ er uit zien, of hoe de functie f_* zich gedraagt. Gelukkig werd, een aantal maanden voor het artikel van Čech, een artikel van M. H. Stone gepubliceerd dat ons in staat stelt om zo een expliciete beschrijving van $\beta\mathbb{N}$ te geven.

3.2 $\beta\mathbb{N}$ als Stoneruimte van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

In deze deelparagraaf gaan we op een andere manier kijken naar βX dan in deelparagraaf 3.1. We gaan βX namelijk beschouwen als de ruimte van alle ultrafilters op X, gegeven dat X discreet is. Dit idee, althans de duale versie van dit idee, komt uit het werk 'Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology' van M.H. Stone [Sto37]. Om de constructie van Stone te bieden gaan we eerst definiëren wat een Boolese algebra is. Vervolgens definiëren we de Stoneruimte van een Boolese algebra en laten we zien dat dit een functor naar de compacte Hausdorff topologische ruimten levert. We sluiten af door aan te tonen dat deze functor, voor discrete ruimten en voor bepaalde Boolese algebra's, samenvalt met de functor beschreven in deelparagraaf 3.1. In deze scriptie kijken we anders tegen Boolese algebra's aan dan in de standaard literatuur: wij definiëren een Boolese algebra als een structuur in een machtsverzameling van een vaste verzameling X. Meestal kom je in de literatuur een Boolese algebra als een op zichzelf staande structuur tegen.

Definitie 3.4. Zij X een verzameling. Een **Boolese algebra** op X is een collectie deelverzamelingen $\mathscr{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ zodat

1. $\emptyset, X \in \mathscr{B}$.
2. Als $A, B \in \mathscr{B}$ dan geldt dat $A \cup B \in \mathscr{B}$.
3. Als $A, B \in \mathscr{B}$ dan geldt dat $A \cap B \in \mathscr{B}$.
4. Als $A \in \mathscr{B}$ dan geldt dat $X \setminus A \in \mathscr{B}$.

Als X is uitgerust met een Boolese algebra $\mathscr{B}$ dan noemen we het paar $(X, \mathscr{B})$ een **Boolese ruimte**.

Voorbeeld 3.5. Zij X een topologische ruimte. Schrijf $CO(X)$ voor de verzameling van alle clopen deelverzamelingen van X. Dan is $CO(X)$ een Boolese algebra.

1. Per definitie geldt dat $\emptyset$ en X open zijn, omdat ze elkaars complement zijn geldt dat ze clopen zijn.
2. Stel $A \subseteq X$ en $B \subseteq X$ zijn clopen. Omdat arbitraire verenigingen van open verzamelingen weer open zijn, en omdat eindige verenigingen van gesloten verzamelingen weer gesloten zijn, is $A \cup B$ clopen.
3. Stel $A \subseteq X$ en $B \subseteq X$ zijn clopen. Omdat arbitraire doorsneden van gesloten verzamelingen weer gesloten zijn, en omdat eindige doorsneden van open verzamelingen weer open zijn, is $A \cap B$ clopen.
4. Stel $A \subseteq X$ is clopen. Omdat open en gesloten verzameling precies elkaars complementen zijn geldt dat $X \setminus A$ ook clopen is.

Voorbeeld 3.6. Zij X een verzameling en zij $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ een familie deelverzamelingen. Dan is

$$\mathscr{B}(\mathcal{A}) = \bigcap \{\mathscr{B} : \mathscr{B} \text{ is een Boolese algebra en } \mathcal{A} \subseteq \mathscr{B}\}$$

een Boolese algebra op X. Deze Boolese algebra heet de **Boolese algebra voortgebracht door** $\mathcal{A}$.

1. Voor elke Boolese algebra $\mathscr{B}$ met $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{B}$ geldt dat $\emptyset, X \in \mathscr{B}$. Dus $\emptyset, X \in \mathscr{B}(\mathcal{A})$.
2. Zijn $A \in \mathscr{B}(\mathcal{A})$ en $B \in \mathscr{B}(\mathcal{A})$. Voor een arbitraire Boolese algebra $\mathscr{B} \supseteq \mathcal{A}$ geldt dan dat $A, B \in \mathscr{B}$, er volgt dat $A \cup B \in \mathscr{B}$. Dus $A \cup B \in \mathscr{B}(\mathcal{A})$.
3. Dit gaat op precies dezelfde manier als punt 2.
4. Stel dat $A \in \mathscr{B}(\mathcal{A})$. Voor een arbitraire Boolese algebra $\mathscr{B} \supseteq \mathcal{A}$ geldt dan dat $X \setminus A \in \mathscr{B}(\mathcal{A})$. Dus $X \setminus A \in \mathscr{B}(\mathcal{A})$.

Het voorbeeld van de clopen verzamelingen wordt zo direct belangrijk, het zal namelijk blijken dat, onder bepaalde voorwaarden, de topologie van X kan worden teruggevonden door de clopen verzamelingen. Voorbeeld 3.6 gaat in deelparagraaf 7.2 een rol spelen. Dan gaan we ook het volgende lemma nodig hebben.

Lemma 3.7. *Zij X een verzameling en zij $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ een familie deelverzamelingen van kardinaliteit κ. Dan geldt dat $|\mathscr{B}(\mathcal{A})| \leq \max\{\aleph_0, \kappa\}$.*

Bewijs. Het plan gaat zijn om te beargumenteren dat $\mathscr{B}(\mathcal{A})$ bestaat uit alle verzamelingen die kunnen worden verkregen door eindige combinaties van doorsneden, verenigingen en complementen van eindig veel verzamelingen uit $\mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}$ te nemen. Laat dus $\vartheta = \{\vartheta_1 \dots \vartheta_k\} \subseteq \mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}$ eindig. We gaan de elementen van ϑ niet meer zien als deelverzamelingen van X, maar als formele symbolen waarmee we formules kunnen maken. Laat $s_\vartheta = \vartheta \cup \{\cup, \cap, \neg, (,)\}$. Een **formule van symbolen uit s_ϑ van lengte n** is een element van s_ϑ^n. Een voorbeeld van een formule van symbolen uit s_ϑ van lengte 6 is $\vartheta_1 \cup (\neg\vartheta_2)$. Deze formule is een formeel object en is dus *niet* een deelverzameling van X. Als we de symbolen ϑ_1 en ϑ_2 interpreteren als de deelverzamelingen $\vartheta_1 \subseteq X$ en $\vartheta_2 \subseteq X$, als we het symbool $\neg$ interpreteren als de operatie die het complement van een verzameling neemt en als we het symbool $\cup$ interpreteren als de operatie die de vereniging van twee verzamelingen neemt, dan kunnen we de formule $\vartheta_1 \cup (\neg\vartheta_2)$ redelijkerwijs interpreteren als de deelverzameling $\vartheta_1 \cup (X \setminus \vartheta_2) \subseteq X$. Dit kan echter niet met elke formule van symbolen uit s_ϑ. Neem bijvoorbeeld de formule $))\neg \cup \vartheta_3 \neg\neg))\cap$. Er is geen mogelijke manier om dit op een logische manier te interpreteren als een deelverzameling van X. De formules die wel kunnen worden geïnterpreteerd als een deelverzameling van X noemen we **welgevormd**. We schrijven $F[s_\vartheta] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} s_\vartheta^n$ voor alle formules van symbolen uit s_ϑ, en we schrijven $\hat{F}[s_\vartheta] \subseteq F[s_\vartheta]$ voor alle welgevormde formules van symbolen uit s_ϑ. Nu laten we

$$\hat{F} = \bigcup \{\hat{F}[s_\vartheta] : \vartheta \subseteq \mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\} \text{ eindig}\}.$$

Dus $\hat{F}$ bestaat uit alle mogelijke welgevormde formules van symbolen uit s_ϑ, waarbij $\vartheta \subseteq \mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}$ eindig is. De interpretatie van een welgevormde formule als deelverzameling van X levert een functie $\mathrm{intr} : \hat{F} \to \mathcal{P}(X)$. Laat $\mathscr{B} = \mathrm{intr}[\hat{F}] \subseteq \mathcal{P}(X)$. We beweren dat $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathcal{A})$. Hiertoe moeten we bewijzen dat a) $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{B}$, b) $\mathscr{B}$ een Boolese algebra is en c) als $\mathscr{B}'$ een Boolese algebra is met $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{B}'$, dan geldt dat $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}'$.

a) Zij $A \in \mathcal{A}$. Neem $\vartheta = \{A\} \subseteq \mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}$. Dan is A een welgevormde formule van symbolen uit s_ϑ waarvan de interpretatie natuurlijk de verzameling $A \subseteq X$ is. Dus $A \in \mathrm{intr}[\hat{F}] = \mathscr{B}$.

b)
1. Als we $\vartheta = \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}$ nemen dan volgt uit dezelfde beredenering als bij a) dat $\emptyset \in \mathscr{B}$. Door $\vartheta = \{X\}$ te nemen volgt dat $X \in \mathscr{B}$.
2. Stel dat $A \in \mathscr{B}$ en $B \in \mathscr{B}$. Dan zijn er $\vartheta_A \subseteq \mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}$ en $\vartheta_B \subseteq \mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}$ eindig zó dat A en B de interpretaties zijn van formules van symbolen uit s_{ϑ_A} respectievelijk s_{ϑ_B}. Laat φ_A respectievelijk φ_B deze formules zijn. Nu geldt dat $(\varphi_A) \cup (\varphi_B)$ een welgevormde formule van symbolen uit $s_{\vartheta_A \cup \vartheta_B}$ is waarvan de interpretatie gelijk is aan $A \cup B$, en $\vartheta_A \cup \vartheta_B \subseteq \mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}$ is nog steeds eindig. Dus $A \cup B \in \mathscr{B}$.
3. Dit gaat op dezelfde manier als punt 2.
4. Stel dat $A \in \mathscr{B}$. Dan is er een $\vartheta \subseteq \mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}$ eindig zodat A de interpretatie is van een zekere welgevormde formule φ van symbolen uit s_ϑ. Er geldt dat $\neg(\varphi)$ een welgevormde formule van symbolen uit s_ϑ is waarvan de interpretatie gelijk is aan $X \setminus A$. Dus $X \setminus A \in \mathscr{B}$.

c) Zij $\mathscr{B}'$ een Boolese algebra met $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{B}'$ en zij $A \in \mathscr{B}$. Dan is er een eindige $\vartheta \subseteq \mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}$ zodat A de interpretatie is van een welgevormde formule van symbolen uit s_ϑ. Omdat $\mathscr{B}'$ een Boolese algebra is geldt dat $\emptyset \in \mathscr{B}'$ en $X \in \mathscr{B}'$. Verder hebben we verondersteld dat $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{B}'$. Er volgt dat $\vartheta \subseteq \mathscr{B}'$. Omdat A de interpretatie van een welgevormde formule van symbolen uit s_ϑ is, is A één of andere eindige combinatie van doorsneden, verenigingen en complementen van verzamelingen uit ϑ. Omdat de Boolese algebra $\mathscr{B}'$ gesloten is onder deze drie operaties volgt nu dat $A \in \mathscr{B}'$.

Er geldt dus dat $|\mathscr{B}(A)| = |\mathscr{B}| \leq |\hat{F}|$. We zijn dus klaar als we $|\hat{F}|$ van boven kunnen begrenzen door $\max\{\aleph_0, \kappa\}$. Schrijf hiertoe $[\mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}]^{<\omega}$ voor alle eindige deelverzamelingen $\vartheta \subseteq \mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}$. In het geval dat $\mathcal{A}$ eindig is dan is $\mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}$ natuurlijk ook eindig. Dan is $[\mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}]^{<\omega} = \mathcal{P}(\mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\})$ ook eindig, dus $|[\mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}]^{<\omega}| \leq \aleph_0$. Als $\mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}$ oneindig is dan geldt dat

$$\left|[\mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}]^{<\omega}\right| = \left|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\vartheta \subseteq \mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\} : |\vartheta| = n\}\right| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}|^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}| = \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa.$$

In beide gevallen zien we dat $|[\mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}]^{<\omega}| \leq \max\{\aleph_0, \kappa\}$. Nu volgt dat

$$\begin{aligned}
|\hat{F}| &= \left|\bigcup_{\vartheta \in [\mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}]^{<\omega}} \hat{F}[s_\vartheta]\right| \\
&\leq \left|\bigcup_{\vartheta \in [\mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}]^{<\omega}} F[s_\vartheta]\right| \\
&= \left|\bigcup_{\vartheta \in [\mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}]^{<\omega}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} s_\vartheta^n\right| \\
&\leq \sum_{\vartheta \in [\mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}]^{<\omega}} \sum_{n \in \mathbb{N}} |s_\vartheta|^n \\
&\leq \sum_{\vartheta \in [\mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}]^{<\omega}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \aleph_0 \\
&= |[\mathcal{A} \cup \{\emptyset, X\}]^{<\omega}| \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 \leq \max\{\aleph_0, \kappa\}.
\end{aligned}$$

□

Definitie 3.8. Zijn $(X, \mathscr{B}_X)$ en $(Y, \mathscr{B}_Y)$ Boolese ruimten. Een **morfisme van Boolese ruimten** is een functie $f : X \to Y$ zodat $A \in \mathscr{B}_Y$ impliceert dat $f^{-1}[A] \in \mathscr{B}_X$.

De Boolese ruimten vormen een categorie. Dit wil zeggen dat $\mathrm{id}_X : (X, \mathscr{B}) \to (X, \mathscr{B})$ altijd een morfisme van Boolese algebra's is, en dat de samenstelling van morfismen van Boolese algebra's wederom een morfisme van Boolese algebra's vormt. We kunnen het concept van een filter beperken tot een Boolese algebra. Een filter op X **beperkt tot de Boolese algebra** $\mathscr{B}$ is een collectie deelverzamelingen $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{B}$ die aan de eigenschappen 1, 2 en 3 van Definitie 2.8 voldoet. Bij punt 3 eisen we alleen ook dat $B \in \mathscr{B}$. Een ultrafilter op X beperkt tot $\mathscr{B}$ is dan een filter op X beperkt tot $\mathscr{B}$ maximaal onder de partiële ordening $\subseteq$. Stelling 2.20 geldt nog steeds voor ultrafilters beperkt tot een Boolese algebra $\mathscr{B}$. Alleen eisen we nu in punt 2 dat $A \in \mathscr{B}$, en in punt 3 eisen we dat $A \in \mathscr{B}$ en $B \in \mathscr{B}$. Ook geldt Gevolg 2.18, met een lichte aanpassing, voor ultrafilters beperkt tot $\mathscr{B}$: als we eisen dat $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{B}$, en $\mathcal{S}$ voldoet aan de eindige doorsnede eigenschap, dan bestaat er een ultrafilter p op X beperkt tot $\mathscr{B}$ zodat $\mathcal{S} \subseteq p$.

Stone dacht in [Sto37] echter niet na over filters, maar over idealen. Een ideaal op X is de duale notie van een filter op X. Bij een ideaal $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{B}$ wordt geëist dat de hele verzameling X *niet* in $\mathscr{I}$ zit, en $\emptyset$ juist wel. Verder is een ideaal gesloten onder nemen van eindige verenigingen en deelverzamelingen. Het feit dat de notie ideaal zijn naam deelt met een concept uit de ringen theorie is geen toeval. Als we de som van twee deelverzamelingen van X definiëren als het symmetrisch verschil, en het product als doorsnede, dan wordt $\mathscr{B}$ een ring. Een ideaal zoals boven geformuleerd is dan een ideaal in ringtheoretische zin. Stone beschouwde alle priemidealen in $\mathscr{B}$, dit is een ideaal $\mathscr{I}$ waarvoor geldt dat $A \cap B \in \mathscr{I}$ impliceert dat $A \in \mathscr{I}$ of $B \in \mathscr{I}$. Vergelijk dit met punt 3 van Stelling 2.20. Het is echter natuurlijker gebleken om alle ultrafilters op X beperkt tot een Boolese algebra te beschouwen.

Definitie 3.9. Zij X een verzameling en $\mathscr{B}$ een Boolese algebra op X. De **Stoneruimte** $S(\mathscr{B})$ is de verzameling van alle ultrafilters op X beperkt tot $\mathscr{B}$. We rusten $S(\mathscr{B})$ uit met een topologie door benedenstaande verzamelingen als basiselementen aan te wijzen.

$$B_A = \{p : p \text{ een ultrafilter op } X \text{ beperkt tot } \mathscr{B} \text{ met } A \in p\} \qquad A \in \mathscr{B}.$$

Lemma 3.10.

$$\mathcal{B} = \{B_A : A \in \mathscr{B}\}$$

is een basis voor een topologie.

Bewijs. Er geldt dat $B_X = S(\mathscr{B})$ want elk filter (dus ook elk ultrafilter) bevat X. Dus $\mathcal{B}$ overdekt $S(\mathscr{B})$. Zijn $A \in \mathscr{B}$ en $B \in \mathscr{B}$ en zij $p \in B_A \cap B_B$. Dan geldt dat $p \in B_{A\cap B} \subseteq B_A \cap B_B$. Inderdaad: $p \in B_{A\cap B}$ want een (ultra)filter is gesloten onder het nemen van eindige doorsneden. Als nu $q \in B_{A\cap B}$ dan geldt dat $A \cap B \in q$, er volgt dat $A \in q$ en $B \in q$ want $A \cap B$ is een deelverzameling van zowel A als B. We concluderen dat $q \in B_A \cap B_B$. Bovenstaande verifieert dat $\mathcal{B}$ een basis voor een topologie is. $\square$

Lemma 3.11. *Zij X een verzameling en $\mathscr{B}$ een Boolese algebra op X. Dan is $S(\mathscr{B})$ compact, Hausdorff en nuldimensionaal.*

Bewijs. Eerst laten we zien dat $S(\mathscr{B})$ nuldimensionaal is. Laat $A \in \mathscr{B}$, we beweren dat $S(\mathscr{B}) \setminus B_A = B_{X\setminus A}$. De richting $S(\mathscr{B}) \setminus B_A \subseteq B_{X\setminus A}$ volgt uit punt 2 van Stelling 2.20 en de richting $B_{X\setminus A} \subseteq S(\mathscr{B}) \setminus B_A$ volgt uit het feit dat A en $X \setminus A$ niet tegelijkertijd in een filter kunnen zitten (want dan volgt dat $\emptyset$ er ook in zit). Er volgt dat elk basiselement B_A, met $A \in \mathscr{B}$, een gesloten verzameling is. Dus $\mathcal{B}$ is een clopen basis en $S(\mathscr{B})$ is nuldimensionaal.

Nu gaan we aantonen dat $S(\mathscr{B})$ Hausdorff is. Laat hiertoe $p \in S(\mathscr{B})$ en $q \in S(\mathscr{B})$ verschillende punten zijn. Stel zonder beperking der algemeenheid dat er een $A \in p \setminus q$ bestaat. Wegens Stelling 2.20 geldt dan dat $X \setminus A \in q$. We zien dat $p \in B_A$ en $q \in B_{X\setminus A}$. Uiteraard zijn B_A en $B_{X\setminus A} = S(\mathscr{B}) \setminus B_A$ open en disjunct.

Als laatste bewijzen we dat $S(\mathscr{B})$ compact is. Om een tegenspraak uit te lokken veronderstellen we dat er een overdekking $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ van $S(\mathscr{B})$ bestaat die geen eindige deeloverdekking toelaat. Zeg $\mathcal{B}' = \{B_{A_i} : i \in \mathcal{I}\}$ met elke $A_i \in \mathscr{B}$. We gaan laten zien dat $\{X \setminus A_i : i \in \mathcal{I}\}$ aan de eindige doorsnede eigenschap voldoet. Stel $i_1 \dots i_n \in \mathcal{I}$ en $\bigcap_{l=1}^{n} X \setminus A_{i_l} = X \setminus \bigcup_{l=1}^{n} A_{i_l} = \emptyset$. Dan geldt dat $\bigcup_{l=1}^{n} A_{i_l} = X$. Als p een ultrafilter op X beperkt tot $\mathscr{B}$ is, dan geldt dat $X = \bigcup_{l=1}^{n} A_{i_l} \in p$. Wegens Stelling 2.20 volgt dat $A_{i_l} \in p$ voor een zekere $l \in \{1 \dots n\}$. We zien dat $p \in B_{A_{i_l}}$. Dus $\{B_{A_{i_l}}\}_{l=1}^{n} \subseteq \mathcal{B}'$ is een eindige deeloverdekking van $S(\mathscr{B})$. Dit is een tegenspraak want we hadden verondersteld dat $\mathcal{B}'$ geen eindige deeloverdekking toelaat. We concluderen dat $\bigcap_{l=1}^{n} X \setminus A_{i_l} \neq \emptyset$, en dat $\{X \setminus A_i : i \in \mathcal{I}\}$ aan de eindige doorsnede eigenschap voldoet. Ook geldt dat $X \setminus A_i \in \mathscr{B}$ voor elke $i \in \mathcal{I}$. Er bestaat dus een ultrafilter q op X beperkt tot $\mathscr{B}$ zodat $\{X \setminus A_i : i \in \mathcal{I}\} \subseteq q$. We gaan aantonen dat $q \notin \bigcup \mathcal{B}'$. Stel ten uitlokking van een tegenspraak dat er een $i \in \mathcal{I}$ is zodat $q \in B_{A_i}$. Dan geldt dat $A_i \in q$. Er geldt echter ook dat $X \setminus A_i \in \{X \setminus A_i : i \in \mathcal{I}\} \subseteq q$. Een tegenspraak. Dus inderdaad, $q \notin \bigcup \mathcal{B}'$, maar dit spreekt de veronderstelling tegen dat $\mathcal{B}'$ een overdekking van $S(\mathscr{B})$ is. We concluderen dat er geen overdekking $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ kan bestaan zonder een eindige deeloverdekking. Elke overdekking van basiselementen heeft dus een eindige deeloverdekking en $S(\mathscr{B})$ is compact. $\square$

Het blijkt dat de eigenschappen van een Stoneruimte die we zojuist bewezen hebben karakteristiek zijn. Dat wil zeggen dat als X een compacte Hausdorff en nuldimensionale ruimte is, dan is X de Stoneruimte van een zekere Boolese algebra.

Lemma 3.12. *Zij X een compacte Hausdorff en nuldimensionale ruimte. Dan geldt dat $X \simeq S(CO(X))$.*

Bewijs. Zij $x \in X$. Laat $\mathscr{F}_x = \{A \in CO(X) : x \in A\}$. Uit dezelfde beredenering als in Voorbeeld 2.10 volgt dat $\mathscr{F}_x$ een ultrafilter op X beperkt tot $CO(X)$ is. Deze toekenning definieert dus een functie $\phi : X \to S(CO(X))$ gegeven door $\phi(x) = \mathscr{F}_x$. We gaan laten zien dat ϕ een homeomorfisme is. Eerst tonen we aan dat ϕ continu is. Laat hiertoe B_A, met $A \in CO(X)$, een element zijn van de basis voor de topologie van $S(CO(X))$. Er geldt dat

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}[B_A] &= \{x \in X : \mathscr{F}_x \in B_A\} \\
&= \{x \in X : A \in \mathscr{F}_x\} \\
&= \{x \in X : x \in A\} \\
&= A.
\end{aligned}$$

Omdat A clopen is volgt dat $\phi^{-1}[B_A]$ open is, dus ϕ is continu.

We gaan nu bewijzen dat ϕ bijectief is. Eerst injectief: laat $x \in X$ en $y \in X$ verschillend zijn. Omdat X Hausdorff is bestaan er disjuncte opens $U \subseteq X$ en $V \subseteq X$ zodat $x \in U$ en $y \in V$. Omdat X nuldimensionaal is bestaat er nu een clopen $C \subseteq X$ zodat $x \in C \subseteq U$. Er geldt nu dat $V \subseteq X \setminus U \subseteq X \setminus C$, dus $y \in X \setminus C$ en $X \setminus C$ is natuurlijk ook clopen. We zien dat $C \in \mathscr{F}_x$ en $X \setminus C \in \mathscr{F}_y$. Dus $C \notin \mathscr{F}_y$ en $\mathscr{F}_x \neq \mathscr{F}_y$. We tonen aan dat ϕ surjectief is. Laat dus p een arbitrair ultrafilter op X beperkt tot $CO(X)$ zijn. We gaan aantonen dat $\bigcap p \subseteq X$ uit precies één element x bestaat. We weten dat filters gesloten zijn onder het nemen van eindige doorsneden en dat $\emptyset$ nooit in een filter zit. Dus p voldoet aan de eindige doorsnede eigenschap. Verder geldt dat $p \subseteq CO(X)$, dus elke element van p is gesloten. Uit compactheid van X volgt dat $\bigcap p$ niet leeg is. Veronderstel nu dat $x \in \bigcap p$ en $y \in \bigcap p$ twee verschillende elementen zijn. Omdat X Hausdorff is bestaan er dan disjuncte opens $U \subseteq X$ en $V \subseteq X$ zodat $x \in U$ en $y \in V$. Omdat X nuldimensionaal is bestaat er nu een clopen $C \subseteq X$ zodat $x \in C \subseteq U$. We zien dat $y \in V \subseteq X \setminus U \subseteq X \setminus C$, en $X \setminus C$ is natuurlijk ook clopen. Omdat p een ultrafilter op X beperkt tot $CO(X)$ is moet ofwel gelden dat $C \in p$, of dat $X \setminus C \in p$. In het eerste geval volgt dat $y \in C$ en in het tweede geval volgt dat $x \in X \setminus C$. In beide gevallen hebben we een tegenspraak. Dus $\bigcap p$ bestaat uit één element. Laat x dit element zijn. We beweren dat $\{x\} \in p$. Inderdaad: als $\{x\} \notin p$ dan zou volgen dat $X \setminus \{x\} \in p$. Er volgt nu dat $x \in \bigcap p \subseteq X \setminus \{x\}$, een tegenspraak. Dus $\{x\} \in p$ en $p = \mathscr{F}_x$.

Er resteert te bewijzen dat ϕ open is. Laat $A \subseteq X$ een clopen verzameling zijn en laat $p \in \phi[A]$. We beweren dat $p \in B_A \subseteq \phi[A]$. Er geldt dat $p = \mathscr{F}_a$ voor een zekere $a \in A$, dus $A \in \mathscr{F}_a = p$ en $p \in B_A$. Stel nu dat $q \in B_A$, dan geldt dat $A \in q$. Omdat ϕ surjectief is geldt ook dat $q = \mathscr{F}_x$ voor een zekere $x \in X$. Als $x \in X \setminus A$ dan zou volgen dat $X \setminus A \in q$ en dus dat $A \notin q$, een tegenspraak. Dus $x \in A$ en $q = \mathscr{F}_x = \phi(x) \in \phi[A]$. Als nu $U \subseteq X$ een open verzameling is, dan kunnen we $U = \bigcup \mathcal{A}$ schrijven, met $\mathcal{A} \subseteq CO(X)$, want X is nuldimensionaal. Er volgt nu dat $\phi[U] = \phi[\bigcup \mathcal{A}] = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \phi[A]$, dus $\phi[U]$ is open en ϕ is open. We concluderen dat ϕ een homeomorfisme is, en dat $X \simeq S(CO(X))$. $\square$

De volgende stap is om morfismen van Boolese algebra's $f : (X, \mathscr{B}_X) \to (Y, \mathscr{B}_Y)$ functorieel te liften naar het niveau van Stoneruimten $f_* : S(\mathscr{B}_X) \to S(\mathscr{B}_Y)$. Als dit is gelukt dan beginnen de zaken wel erg te lijken op wat we in deelparagraaf 3.1 hebben gedaan: we hebben dan namelijk alweer een functor gecreëerd naar de compacte Hausdorff topologische ruimten. We zullen hierna dan ook in staat zijn om te bewijzen dat als X een verzameling is, en als we X uitrusten met de discrete topologie, dan geldt dat $\beta X \simeq S(\mathcal{P}(X))$.

Stelling 3.13. *Zijn X en Y verzamelingen en zijn $\mathscr{B}_X$ en $\mathscr{B}_Y$ Boolese algebra's op X respectievelijk Y. Zij $f : X \to Y$ een morfisme van Boolese algebra's. Dan bestaat er een continue functie $f_* : S(\mathscr{B}_X) \to S(\mathscr{B}_Y)$ zodat de toekenning $f \mapsto f_*$ functorieel is. Dat wil zeggen.*

1. $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{S(\mathscr{B}_X)}$.
2. $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$.

Bewijs. Zij p een ultrafilter op X beperkt tot $\mathscr{B}_X$. We laten zien dat $q = \{A \in \mathscr{B}_Y : f^{-1}[A] \in p\}$ een ultrafilter op Y beperkt tot $\mathscr{B}_Y$ is. Eerst verifiëren we dat q een filter op Y beperkt tot $\mathscr{B}_Y$ is. Het feit dat $q \subseteq \mathscr{B}_Y$ is duidelijk. Er geldt dat $f^{-1}[Y] = X \in p$, dus $Y \in q$. Verder geldt dat $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset \notin p$, dus $\emptyset \notin q$. Veronderstel dat $A \in q$ en $B \in q$. Dan geldt dat $f^{-1}[A] \in p$ en $f^{-1}[B] \in p$, dus $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] \in p$ en $A \cap B \in q$. Als laatste: Als $A \in q$ en $B \in \mathscr{B}_Y$ is zodat $A \subseteq B$, dan geldt dat $f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[B]$. Omdat f een morfisme van Boolese algebra's is geldt dat $f^{-1}[B] \in \mathscr{B}_X$, ook geldt dat $f^{-1}[A] \in p$, want $A \in q$. Dus $f^{-1}[B] \in p$. We concluderen dat $B \in q$ en dat q een filter op Y beperkt tot $\mathscr{B}_Y$ is. Om te laten zien dat q een ultrafilter is laten we zien dat q aan punt 2 van Stelling 2.20 voldoet. Stel dus dat $A \in \mathscr{B}_Y$. Dan geldt dat $f^{-1}[A] \in \mathscr{B}_X$. Omdat p een ultrafilter op X beperkt tot $\mathscr{B}_X$ is volgt nu dat $f^{-1}[A] \in p$ of $X \setminus f^{-1}[A] \in p$. In het eerste geval zien we dat $A \in q$ en in het tweede geval geldt dat $Y \setminus A \in q$, want $f^{-1}[Y \setminus A] = X \setminus f^{-1}[A]$. We kunnen dus de volgende functie definiëren.

$$\begin{aligned} f_* : S(\mathscr{B}_X) &\to S(\mathscr{B}_Y) \\ p &\mapsto \{A \in \mathscr{B}_Y : f^{-1}[A] \in p\}. \end{aligned}$$

We gaan eerst aantonen dat f_* continu is. Laat hiertoe $A \in \mathscr{B}_Y$ en laat B_A een element van de basis voor de topologie van $S(\mathscr{B}_Y)$ zijn. Er geldt dat

$$\begin{aligned} f_*^{-1}[B_A] &= \{p \in S(\mathscr{B}_X) : f_*(p) \in B_A\} \\ &= \{p \in S(\mathscr{B}_X) : A \in f_*(p)\} \\ &= \{p \in S(\mathscr{B}_X) : f^{-1}[A] \in p\} \\ &= B_{f^{-1}[A]}. \end{aligned}$$

Omdat f een morfisme van Boolese algebra's is geldt dat $f^{-1}[A] \in \mathscr{B}_X$. Dus $B_{f^{-1}[A]}$ is een element van de basis voor de topologie van $S(\mathscr{B}_X)$ en f_* is continu.

Er resteert aan te tonen dat de toekenning $f \mapsto f_*$ functorieel is. Eerst laten we zien dat $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{S(\mathscr{B}_X)}$. Omdat we een expliciete beschrijving voor f_* hebben is dit echter geen kunst: voor $p \in S(\mathscr{B}_X)$ geldt dat $(\mathrm{id}_X)_*(p) = \{A \in \mathscr{B}_X : \mathrm{id}_X^{-1}[A] \in p\} = \{A \in \mathscr{B}_X : A \in p\} = p$. Als $g : (Y, \mathscr{B}_Y) \to (Z, \mathscr{B}_Z)$ nog een morfisme van Boolese ruimten is, dan geldt voor $p \in S(\mathscr{B}_X)$ dat

$$\begin{aligned} (g \circ f)_*(p) &= \{A \in \mathscr{B}_Z : (g \circ f)^{-1}[A] \in p\} \\ &= \{A \in \mathscr{B}_Z : f^{-1}[g^{-1}[A]] \in p\} \\ &= \{A \in \mathscr{B}_Z : g^{-1}[A] \in f_*(p)\} \\ &= g_*(f_*(p)). \end{aligned}$$

We concluderen dat $f \mapsto f_*$ functorieel is. $\square$

We hebben nu dus een functor van de Boolese ruimten naar de compacte Hausdorff topologische ruimten geconstrueerd. Als we een verzameling uitrusten met de Boolese algebra $\mathscr{B} = \mathcal{P}(X)$, dan is $S(\mathscr{B})$ niets anders dan de ruimte van alle ultrafilters op X; een beperking tot de gehele machtsverzameling is helemaal geen beperking. In Voorbeeld 2.10 hebben we gezien dat $\mathscr{F}_x = \{A \subseteq X : x \in A\}$ een ultrafilter is voor elke $x \in X$. Er bestaat dus een natuurlijke injectie

$$\begin{aligned} \iota : X &\to S(\mathscr{B}) \\ x &\mapsto \mathscr{F}_x. \end{aligned}$$

Als we X ook nog uitrusten met de discrete topologie, dan is X volledig regulier en is ι automatisch continu. We beweren dat $(\iota, S(\mathscr{B}))$ in dit geval de Čech-compactificatie van de discrete ruimte X is, en dat de afbeelding van Stelling 3.13 precies de afbeelding van Stelling 3.3 is.

Gevolg 3.14. *Zij X een verzameling. Rust X uit met de discrete topologie $\tau = \mathcal{P}(X)$ en met de Boolese algebra $\mathcal{P}(X)$. Definieer $\iota : X \to S(\mathcal{P}(X))$ als $\iota(x) = \mathscr{F}_x$. Dan is $(\iota, S(\mathcal{P}(X)))$ de Čech-compactificatie van (X, τ). Daarnast is het zo dat, als Y nog een discrete topologische ruimte is, als $f : X \to Y$ een (automatisch continue) functie is en als $f_* : S(\mathcal{P}(X)) \to S(\mathcal{P}(Y))$ is zoals in Stelling 3.13, dan geldt dat $f_* \circ \iota_X = \iota_Y \circ f$.*

Bewijs. Wegens Lemma 3.11 is de Stoneruimte $S(\mathcal{P}(X))$ compact Hausdorff. Verder is ι automatisch continu, want X is discreet. We gaan verifiëren dat $(\iota, S(\mathcal{P}(X)))$ aan de universele eigenschap voldoet. Zij dus K een compacte Hausdorff ruimte en zij $f : X \to K$ een (automatisch continue) functie. We gaan een continue functie $\overline{f} : S(\mathcal{P}(X)) \to K$ construeren zodat $\overline{f} \circ \iota = f$. Laat hiertoe $f_* : S(\mathcal{P}(X)) \to S(\mathcal{P}(K))$ de continue functie zijn van Stelling 3.13. De Stoneruimte $S(\mathcal{P}(K))$ is de ruimte van alle ultrafilters op K. Omdat K compact Hausdorff is geldt dat elk ultrafilter naar een uniek punt in K convergeert. De functie $\lim : S(\mathcal{P}(K)) \to K$ die elk ultrafilter stuurt naar het unieke punt waarnaar het convergeert is dus welgedefinieerd.

We gaan laten zien dat lim continu is. Laat hiertoe $U \subseteq K$ een open verzameling zijn en zij $p \in \lim^{-1}[U] \subseteq S(\mathcal{P}(K))$. We gaan een basiselement B_A vinden, met $A \subseteq K$ een welgekozen deelverzameling, zodat $p \in B_A \subseteq \lim^{-1}[U]$. Omdat $p \in \lim^{-1}[U]$ geldt dat $\lim(p) \in U$. Er geldt dat K compact Hausdorff is, dus K is regulier. Er bestaat dus een open verzameling $V \subseteq K$ zodat $\lim(p) \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. We nemen $A = V$ en we beweren dus dat $p \in B_V \subseteq \lim^{-1}[U]$. Omdat V een omgeving is van $\lim(p)$ geldt, per definitie van convergentie van een filter, dat $V \in p$. Dus inderdaad, $p \in B_V$. Stel nu dat $q \in B_V$, dan geldt dat $V \in q$ en omdat $V \subseteq \overline{V}$ volgt dat $\overline{V} \in q$. Omdat $\overline{V}$ gesloten is volgt nu dat $\lim(q) \in \overline{V} \subseteq U$. We zien dat $q \in \lim^{-1}[U]$. We concluderen dat $p \in B_V \subseteq \lim^{-1}[U]$ en dat $\lim^{-1}[U]$ open is in $S(\mathcal{P}(K))$. Dus lim is continu.

Er volgt dat de samenstelling $\overline{f} = \lim \circ f_* : S(\mathcal{P}(X)) \to K$ continu is. Er resteert dus slechts nog te bewijzen dat $\overline{f} \circ \iota = \lim \circ f_* \circ \iota = f$. Laat hiertoe $x \in X$ en laat $U \subseteq K$ een omgeving zijn van $f(x)$. Dan geldt dat $x \in f^{-1}[U]$, dus $U \in f_*(\mathscr{F}_x) = f_* \circ \iota(x)$. We concluderen dat het ultrafilter $f_* \circ \iota(x)$ convergeert naar $f(x)$, dus $\lim \circ f_* \circ \iota(x) = f(x)$.

Als laatste bewijzen we dat de afbeelding van Stelling 3.13 precies de afbeelding van Stelling 3.3 is. Zij dus Y nog een discrete topologische ruimte, zij $f : X \to Y$ een (automatisch continue) functie en zij $x \in X$. Laat $f_* : S(\mathcal{P}(X)) \to S(\mathcal{P}(Y))$ zoals in Stelling 3.13. De uitspraak dat $x \in f^{-1}[A]$ dan en slechts dan als $f(x) \in A$ vertaalt zich precies naar het feit dat $f_*(\mathscr{F}_x) = \mathscr{F}_{f(x)}$. Er geldt dus inderdaad dat $f_* \circ \iota_X = \iota_Y \circ f$. Omdat $(\iota_X, S(\mathcal{P}(X)))$ en $(\iota_Y, S(\mathcal{P}(Y)))$ de Čech-compactificaties zijn van X en Y, en omdat Stelling 3.3 garandeert dat er maar één continue functie bestaat die aan deze eigenschap voldoet, geldt dat $f_* : S(\mathcal{P}(X)) \to S(\mathcal{P}(Y))$ precies de functie uit Stelling 3.3 is. □

We hebben nu dus een andere manier om naar $\beta\mathbb{N}$ te kijken. Namelijk als Stoneruimte van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, oftewel, de ruimte van alle ultrafilters op $\mathbb{N}$. Als $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een functie is dan hebben we nu ook een expliciete beschrijving van de functie $f_* : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$, gegeven door $f_*(p) = \{A \subseteq \mathbb{N} : f^{-1}[A] \in p\}$. Om deze functie nog beter te begrijpen volgt een laatste lemma.

Lemma 3.15. *Zijn X en Y discrete topologische ruimten, $f : X \to Y$ een functie, $p \in S(\mathcal{P}(X)) \simeq \beta X$ en $q \in S(\mathcal{P}(Y)) \simeq \beta Y$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

1. *$q = f_*(p)$.*
2. *Voor elke $Q \in q$ geldt $f^{-1}[Q] \in p$.*
3. *Voor elke $P \in p$ geldt $f[P] \in q$.*

Bewijs. <u>$1 \implies 2.$</u> Dit is duidelijk: als $q = f_*(p)$ dan geldt ook $q \subseteq f_*(p)$.

<u>$2 \implies 3.$</u> Zij $P \in p$. Dan geldt dat $f^{-1}[f[P]] \in p$, want $P \subseteq f^{-1}[f[P]]$. Er volgt nu dat $X \setminus f^{-1}[f[P]] = f^{-1}[Y \setminus f[P]] \notin p$. Contrapositie leert ons dat $Y \setminus f[P] \notin q$. Uit Stelling 2.20 volgt nu dat $f[P] \in q$.

<u>$3 \implies 1.$</u> Eerst tonen we aan dat $f_*(p) \subseteq q$. Veronderstel hiertoe dat $A \subseteq Y$ zo is dat $f^{-1}[A] \in p$. Dan geldt dat $f[f^{-1}[A]] \in q$. Omdat $f[f^{-1}[A]] \subseteq A$ volgt nu dat $A \in q$. Nu laten we zien dat $q \subseteq f_*(p)$. Stel dus dat $A \in q$. Dan geldt dat $Y \setminus A \notin q$. Omdat $f[X \setminus f^{-1}[A]] = f[f^{-1}[Y \setminus A]] \subseteq Y \setminus A$ volgt nu dat $f[X \setminus f^{-1}[A]] \notin q$. Contrapositie leert ons dat $X \setminus f^{-1}[A] \notin p$ en omdat p een ultrafilter is volgt nu uit Stelling 2.20 dat $f^{-1}[A] \in p$. $\square$

4 De Rudin-Keislerorde

Nu we weten wat $\beta\mathbb{N}$ is gaan we deze ruimte van wat structuur voorzien. Dit doen we met een partiële orde, deze partiële orde zullen we in deze deelparagraaf definiëren. Als we dit gedaan hebben dan richten we ons in de rest van de scriptie op het vraagstuk of deze orde misschien stiekem totaal is. Dit vraagstuk gaan we negatief beantwoorden: eerst vinden we twee onvergelijkbare elementen in de partiële orde, met een lichte aanpassing van het argument kunnen we vervolgens $\mathfrak{c}$ paarsgewijs onvergelijkbare elementen vinden en als laatste gebruiken we een topologische strategie om er $2^{\mathfrak{c}}$ te vinden.

Zoals besproken in paragraaf 3.1 induceert elke functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een continue functie $f_* : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$. Op haar plaats induceert deze toekenning een preorde op $\beta\mathbb{N}$. Deze preorde is als volgt gedefinieerd. Voor $p, q \in \beta\mathbb{N}$ zeggen we dat $p \preceq q$ dan en slechts dan als aan het volgende voldaan wordt.

$$\text{Er bestaat een functie } f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ zó dat } p = f_*(q).$$

Het in Stelling 3.3 bewezen feit dat de toekenning $f \mapsto f_*$ functorieel is vertaalt zich precies naar de uitspraak dat deze definitie een geldige preorde levert. Inderdaad: voor elke $p \in \beta\mathbb{N}$ geldt dat $p = \mathrm{id}_{\beta\mathbb{N}}(p) = (\mathrm{id}_{\mathbb{N}})_*(p)$, dus $p \preceq p$. Als nu $p \in \beta\mathbb{N}$, $q \in \beta\mathbb{N}$ en $r \in \beta\mathbb{N}$ zo zijn dat $p \preceq q$ en $q \preceq r$, dan zijn er $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodat $p = f_*(q)$ en $q = g_*(r)$. Er volgt dat $p = f_* \circ g_*(r) = (f \circ g)_*(r)$. Dus $p \preceq r$. In Lemma 2.3 hebben we gezien dat $\preceq$ dan een partiële orde induceert op $\beta\mathbb{N}/{\sim}$, waarbij $p \sim q$ betekent dat $p \preceq q$ en $q \preceq p$. Er is een natuurlijke manier om de ruimte $\beta\mathbb{N}/{\sim}$ op te vatten, deze is namelijk gelijk aan $T(\beta\mathbb{N})$. Om dit aan te tonen gaan we laten zien dat de volgende uitspraken equivalent zijn.

1. $p \preceq q$ en $q \preceq p$.
2. Er is een bijectie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodat $p = f_*(q)$.
3. p en q zijn van hetzelfde type.

Om de equivalentie van deze uitspraken aan te tonen hebben we een aantal lemma's nodig. In het lemma dat volgt karakteriseren we de geïsoleerde punten van $\beta\mathbb{N}$.

Lemma 4.1. *De punten van $\iota[\mathbb{N}]$ zijn precies de geïsoleerde punten van $\beta\mathbb{N}$.*

Bewijs. Zij $p \in \iota[\mathbb{N}]$. Dan geldt dat $p = \mathscr{F}_n$ voor een zekere $n \in \mathbb{N}$. We gaan laten zien dat $\{p\} = B_{\{n\}} = \{q \in \beta\mathbb{N} : \{n\} \in q\}$. Het feit dat $\{n\} \in \mathscr{F}_n = p$ is duidelijk. Stel nu dat q een ultrafilter op $\mathbb{N}$ is zodat $\{n\} \in q$. We gaan aantonen dat $p = q$. Stel eerst dat $A \in p = \mathscr{F}_n$. Dan geldt dat $n \in A$ en dus dat $\{n\} \subseteq A$. Omdat q een filter is volgt dat $A \in q$. Stel nu dat $A \in q$. Dan volgt dat $A \cap \{n\} \in q$ en dus in het bijzonder dat $A \cap \{n\} \neq \emptyset$, dus $n \in A$ en $A \in \mathscr{F}_n = p$. We concluderen dat $p = q$ en dat $\{p\} = B_{\{n\}}$. Dus $\{p\}$ is een basiselement en daarmee open.

Andersom: stel dat $p \in \beta\mathbb{N}$ geïsoleerd is. Dan is $\{p\}$ een basiselement en bestaat er dus een $A \subseteq \mathbb{N}$ zodat $\{p\} = B_A = \{q \in \beta\mathbb{N} : A \in q\}$. We gaan aantonen dat A één element heeft. Om een tegenspraak uit te lokken veronderstellen we dat $a \in A$ en $b \in A$ twee verschillende elementen zijn. Dan zijn $\mathscr{F}_a$ en $\mathscr{F}_b$ twee verschillende ultrafilters zo dat $A \in \mathscr{F}_a$ en $A \in \mathscr{F}_b$. Maar p is het enige ultrafilter zodat $A \in p$, dus dit is een tegenspraak.

We concluderen dat $A = \{n\}$ voor een zekere $n \in \mathbb{N}$, en p voldoet aan $\{n\} \in p$. Hieruit volgt dat $p = \mathscr{F}_n$ en dus dat $p \in \iota[\mathbb{N}]$. □

Voor de volgende lemma's introduceren we de volgende notatie: als $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een functie is, dan schrijven we $D_f = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = n\}$ voor alle dekpunten van f.

Lemma 4.2 (Het Lemma van de Drie Verzamelingen)**.** *Zij A een verzameling en $f : A \to A$ een functie. Laat $X = A \setminus D_f$. Dan bestaan er drie paarsgewijs disjuncte deelverzamelingen $X_1 \subseteq X$, $X_2 \subseteq X$ en $X_3 \subseteq X$ zó dat $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X$ en $f[X_i] \cap X_i = \emptyset$ voor elke $i = 1, 2, 3$.*

Bewijs. We gaan X_1, X_2 en X_3 met behulp van het Lemma van Zorn maken. Laat $\mathscr{P} \subseteq (\mathcal{P}(X))^3$ alle drietallen verzamelingen (X_1, X_2, X_3) zijn die aan de volgende eisen voldoen.

1. $X_i \cap X_j = \emptyset$ als $i \neq j$.
2. $f[X_i] \cap X_i = \emptyset$ voor $i = 1, 2, 3$.
3. $f[X_1 \cup X_2 \cup X_3] \subseteq X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup D_f$

We rusten $\mathscr{P}$ uit met een partiële orde door te zeggen dat $(X_1, X_2, X_3) \leq (Y_1, Y_2, Y_3)$ als $X_i \subseteq Y_i$ voor elke $i = 1, 2, 3$. We gaan laten zien dat $\mathscr{P}$ voldoet aan de eisen die nodig zijn om het Lemma van Zorn toe te passen. Ten eerste geldt dat $(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in \mathscr{P}$, dus $\mathscr{P}$ is niet leeg. Laat $\mathcal{K} \subseteq \mathscr{P}$ een keten zijn. Zeg $\mathcal{K} = \{(X_1^\alpha, X_2^\alpha, X_3^\alpha) : \alpha \in \mathcal{I}\}$. Voor $i = 1, 2, 3$ laat $X_i = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} X_i^\alpha \subseteq X$. We gaan laten zien dat $(X_1, X_2, X_3) \in \mathscr{P}$.

1. Stel $i \neq j$ en $x \in X_i$. Dan is er een $\alpha \in \mathcal{I}$ zodat $x \in X_i^\alpha$. Laat $\beta \in \mathcal{I}$ arbitrair. Omdat $\mathcal{K}$ een keten is geldt ofwel dat $X_l^\alpha \subseteq X_l^\beta$ voor $l = 1, 2, 3$, of dat $X_l^\beta \subseteq X_l^\alpha$ voor $l = 1, 2, 3$. In het eerste geval zien we dat $X_i^\alpha \cap X_j^\beta \subseteq X_i^\beta \cap X_j^\beta = \emptyset$, en in het tweede geval zien we ook dat $X_i^\alpha \cap X_j^\beta \subseteq X_i^\alpha \cap X_j^\alpha = \emptyset$. Er geldt dus dat $x \notin X_j^\beta$. Dus $x \notin \bigcup_{\beta \in \mathcal{I}} X_j^\beta = X_j$. We concluderen dat $X_i \cap X_j = \emptyset$.
2. Stel $i \in \{1, 2, 3\}$ en $x \in X_i$. Dan is er weer een $\alpha \in \mathcal{I}$ zodat $x \in X_i^\alpha$. Laat $\beta \in \mathcal{I}$ arbitrair. Omdat $\mathcal{K}$ een keten is geldt dan ofwel dat $X_i^\alpha \subseteq X_i^\beta$, of dat $X_i^\beta \subseteq X_i^\alpha$. In het eerste geval zien we meteen dat $X_i^\alpha \cap f[X_i^\beta] \subseteq X_i^\beta \cap f[X_i^\beta] = \emptyset$. In het tweede geval moeten we eerst opmerken dat $f[X_i^\beta] \subseteq f[X_i^\alpha]$, dus $X_i^\alpha \cap f[X_i^\beta] \subseteq X_i^\alpha \cap f[X_i^\alpha] = \emptyset$. Hoe dan ook, $x \notin f[X_i^\beta]$. Dus $x \notin \bigcup_{\beta \in \mathcal{I}} f[X_i^\beta] = f[\bigcup_{\beta \in \mathcal{I}} X_i^\beta] = f[X_i]$. We concluderen dat $X_i \cap f[X_i] = \emptyset$.
3. Zij $x \in X_1 \cup X_2 \cup X_3$. Dan is er een $i \in \{1, 2, 3\}$ en een $\alpha \in \mathcal{I}$ zodat $x \in X_i^\alpha$. We zien dat $f(x) \in X_1^\alpha \cup X_2^\alpha \cup X_3^\alpha \cup D_f \subseteq X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup D_f$. Dus $f[X_1 \cup X_2 \cup X_3] \subseteq X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup D_f$.

We concluderen dat $(X_1, X_2, X_3) \in \mathscr{P}$. Het is duidelijk dat (X_1, X_2, X_3) een bovengrens van $\mathcal{K}$ is. Dus elke keten in $\mathscr{P}$ heeft een bovengrens en wegens het Lemma van Zorn bezit $\mathscr{P}$ een maximaal element. Laat (X_1, X_2, X_3) een maximaal element zijn. We gaan aantonen dat $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X$. Omdat het drietal al aan punten 1 en 2 voldoet is (X_1, X_2, X_3) dan zoals we willen. Om een tegenspraak uit te lokken veronderstellen we dat er een $x \in X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup X_3)$ bestaat. We gaan de baan van x onder f beschouwen: laat $x_0 = x$ en voor $n \in \mathbb{N}$ laat $x_{n+1} = f(x_n)$. We gaan elementen van de baan van x onder f toevoegen aan de verzamelingen

X_1, X_2 en X_3. Op deze manier creëren verzamelingen $Y_1 \subseteq X$, $Y_2 \subseteq X$ en $Y_3 \subseteq X$ zodat $X_1 \subsetneq Y_1$, en zodat $(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathscr{P}$. Dit spreekt echter de maximaliteit van (X_1, X_2, X_3) tegen. Om dit te doen gaan we een aantal gevallen onderscheiden.

Geval 1: de baan van x onder f belandt in $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ of in D_f. Preciezer geformuleerd: er bestaat een $N \in \mathbb{N}$ zodat $x_N \in X_1 \cup X_2 \cup X_3$, of $x_N \in D_f$. Laat in dit geval N minimaal zijn met deze eigenschap. Per veronderstelling geldt dat $x_0 = x \in X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup X_3) \subseteq A \setminus D_f$, dus moet gelden dat $N > 0$. Ingeval $x_N \in X_1 \cup X_2 \cup X_3$ stellen we zonder beperking der algemeenheid dat $x_N \in X_2$. We gaan enkel het punt x_{N-1} toevoegen, en wel als volgt:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \cup \{x_{N-1}\}, \\ Y_2 &= X_2, \\ Y_3 &= X_3. \end{aligned}$$

We tonen aan dat $(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathscr{P}$. Omdat we N minimaal hebben genomen geldt dat $x_{N-1} \notin D_f$, Y_1 is dus inderdaad een deelverzameling van X (we hebben niet per ongeluk een dekpunt toegevoegd).

1. Het is duidelijk dat $Y_2 \cap Y_3 = X_2 \cap X_3 = \emptyset$. Omdat N minimaal is geldt dat $x_{N-1} \notin X_1 \cup X_2 \cup X_3$, dit verifieert dat Y_1 disjunct is van Y_2 en Y_3.

2. Het is duidelijk dat $f[Y_2] \cap Y_2 = f[Y_3] \cap Y_3 = \emptyset$. Laat $y \in Y_1$. We tonen aan dat $f(y) \notin Y_1$. In het geval dat $y = x_{N-1}$ dan is $f(y) = x_N$. Er geldt dus ofwel dat $f(y) \in X_2$ of dat $f(y) \in D_f$, in beide gevallen zien we dat $f(y) \notin X_1$. Omdat $y = x_{N-1}$ zelf geen dekpunt is geldt ook dat $f(y) \notin \{x_{N-1}\}$, dus $f(y) \notin Y_1$. Dan nu het geval dat $y \in X_1$. Uit punt 2 volgt dat $f(y) \notin X_1$ en uit punt 3 volgt dat $f(y) \in X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup D_f$. Omdat $x_{N-1} \notin X_1 \cup X_2 \cup X_3$ en $x_{N-1} \notin D_f$ zien we nu dat $f(y) \notin \{x_{N-1}\}$. Dus $f(y) \notin Y_1$ en $f[Y_1] \cap Y_1 = \emptyset$.

3. Stel $y \in Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$, als $y \in X_1 \cup X_2 \cup X_3$ dan geldt dat $f(y) \in X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup D_f \subseteq Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup D_f$. Als $y = x_{N-1}$ dan geldt dat $f(y) \in X_2 \cup D_f \subseteq Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup D_f$.

We concluderen dat $(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathscr{P}$. Er geldt echter dat $x_{N-1} \in Y_1 \setminus X_1$, dus $X_1 \subsetneq Y_1$. Dit spreekt de maximaliteit van (X_1, X_2, X_3) tegen.

Geval 2: de baan van x onder f blijft altijd in $X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup X_3)$. Met andere woorden: voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $x_n \in X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup X_3)$. Nu gaan we nog wat subgevallen van elkaar moeten onderscheiden.

Subgeval 2.1: $\mathbb{N} \to X : n \mapsto x_n$ is injectief. In dit geval stellen we

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \cup \{x_n : n \text{ even}\}, \\ Y_2 &= X_2 \cup \{x_n : n \text{ oneven}\}, \\ Y_3 &= X_3. \end{aligned}$$

We zullen weer aantonen dat $(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathscr{P}$. Omdat elk element x_n per veronderstelling een element van X is zijn Y_1, Y_2 en Y_3 inderdaad deelverzamelingen van X (we hebben weer niet per ongeluk een dekpunt toegevoegd).

1. We weten al dat X_1, X_2 en X_3 paarsgewijs disjunct zijn, omdat $n \mapsto x_n$ injectief is zijn $\{x_n : n \text{ even}\}$ en $\{x_n : n \text{ oneven}\}$ ook disjunct. Omdat $x_n \notin X_1 \cup X_2 \cup X_3$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ zijn de verzamelingen kruislings ook disjunct. Dat wil zeggen: $\{x_n : n \text{ even}\}$ is disjunct van X_1, X_2 en X_3, en $\{x_n : n \text{ oneven}\}$ is disjunct van X_1, X_2 en X_3. We concluderen dat Y_1, Y_2 en Y_3 paarsgewijs disjunct zijn.

2. Het feit dat $f[Y_3] \cap Y_3 = \emptyset$ is duidelijk. Stel dat $y \in Y_1$, we tonen aan dat $f(y) \notin Y_1$. In het geval dat $y \in X_1$ dan geldt wegens punt 2 dat $f(y) \notin X_1$. Vanwege punt 3 geldt dat $f(y) \in X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup D_f$. Omdat $x_n \notin X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup D_f$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ zien we dat $f(y) \notin \{x_n : n \text{ even}\}$. We concluderen dat $f(y) \notin Y_1$. Dan nu het geval dat $y = x_n$ voor een zeker even getal n. Dan geldt dat $f(y) = x_{n+1}$ en $n+1$ is oneven, dus $f(y) \in Y_2$ en we hebben al gezien dat Y_1 en Y_2 disjunct zijn. Dus $f(y) \notin Y_1$. We concluderen dat $f[Y_1] \cap Y_1 = \emptyset$. Het bewijs dat $f[Y_2] \cap Y_2 = \emptyset$ gaat precies op dezelfde manier.

3. Zij $y \in Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$. Als $y \in X_1 \cup X_2 \cup X_3$ dan geldt dat $f(y) \in X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup D_f \subseteq Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup D_f$. Anders is $y = x_n$ voor een zekere $n \in \mathbb{N}$, dan geldt dat $f(y) = x_{n+1} \in Y_1 \cup Y_2 \subseteq Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup D_f$.

We concluderen dat $(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathscr{P}$. Er geldt echter dat $x_0 \in Y_1 \setminus X_1$, dus $X_1 \subsetneq Y_1$. Dit spreekt weer de maximaliteit van (X_1, X_2, X_3) tegen. Als $n \mapsto x_n$ *niet* injectief is, dan zijn er dus $n \in \mathbb{N}$ en $m \in \mathbb{N}$ met $n < m$ zodat $x_n = x_m$. Als we $l = m - n > 0$ stellen dan zien we dat $x_n = x_{n+l}$. Er zijn dus $n \in \mathbb{N}$ en $l \in \mathbb{N}$ zodat $x_n = x_{n+l}$. We laten $n_0 \in \mathbb{N}$ en $l_0 > 0$ minimaal zijn met deze eigenschap. Merk op dat x_{n_0} nu een dekpunt is van de geïtereerde functie f^{l_0}. Hieruit volgt dat $\mathbb{N}_{\geq n_0} \to X : n \mapsto x_n$ l_0-periodiek is. Omdat $f|_X$ dekpuntvrij is (per constructie van X) geldt dat $l_0 > 1$.

Subgeval 2.2: l_0 is even. In dit geval stellen we

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \cup \{x_{n_0+n} : n \in \{0 \dots l_0 - 1\} \text{ even}\}, \\ Y_2 &= X_2 \cup \{x_{n_0+n} : n \in \{0 \dots l_0 - 1\} \text{ oneven}\}, \\ Y_3 &= X_3. \end{aligned}$$

We gaan weer laten zien dat $(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathscr{P}$. De verzamelingen Y_1, Y_2 en Y_3 zijn weer deelverzamelingen van X.

1. We gaan laten zien dat $\{x_{n_0+n} : n \in \{0 \dots l_0 - 1\} \text{ even}\}$ en $\{x_{n_0+n} : n \in \{0 \dots l_0 - 1\} \text{ oneven}\}$ disjunct zijn. Laat hiertoe $n \in \{0 \dots l_0 - 1\}$ even en $m \in \{0 \dots l_0 - 1\}$ oneven. We willen laten zien dat $x_{n_0+n} \neq x_{n_0+m}$ dus om een tegenspraak uit te lokken stellen we dat $x_{n_0+n} = x_{n_0+m}$. Stel zonder beperking der algemeenheid dat $n < m$, dan zien we dat $x_{n_0} = x_{n_0+m-n}$. Maar $0 < m - n \leq l_0 - 1 < l_0$, dus dit spreekt de minimaliteit van l_0 tegen. We concluderen dat $\{x_{n_0+n} : n \in \{0 \dots l_0 - 1\} \text{ even}\}$ en $\{x_{n_0+n} : n \in \{0 \dots l_0 - 1\} \text{ oneven}\}$ disjunct zijn. Uit de beredenering in subgeval 2.1 volgt nu dat Y_1, Y_2 en Y_3 paarsgewijs disjunct zijn.

2. Het is duidelijk dat $f[Y_3] \cap Y_3 = \emptyset$. Stel $y \in Y_1$. Als $y \in X_1$ dan volgt uit dezelfde beredenering als in subgeval 2.1 dat $f(y) \notin Y_1$. Dus stel dat $y = x_{n_0+n}$ voor een zekere $n \in \{0 \dots l_0 - 1\}$ even. Omdat l_0 even is, is $l_0 - 1$ oneven. Er geldt dus dat $0 \leq n \leq l_0 - 2$. We zien dat $f(y) = x_{n_0+n+1}$ met $n + 1 \in \{0 \dots l_0 - 1\}$ oneven. Dus $f(y) \in Y_2$ en omdat Y_1 en Y_2 disjunct zijn volgt dat $y \notin Y_1$. We concluderen dat $f[Y_1] \cap Y_1 = \emptyset$. Stel nu dat $y \in Y_2$. In het geval dat $y \in X_2$ dan werkt de beredenering in subgeval 2.1 om te concluderen dat $f(y) \notin Y_2$. Dus stel dat $y = x_{n_0+n}$ voor een zekere $n \in \{0 \dots l_0 - 1\}$ oneven. Als $n < l_0 - 1$ dan is $n + 1 \in \{0 \dots l_0 - 1\}$ even, dus $f(y) = x_{n_0+n+1} \in Y_1$ en $f(y) \notin Y_2$. In het geval dat $n = l_0 - 1$ dan zien we dat $f(y) = x_{n_0+n+1} = x_{n_0+l_0} = x_{n_0} \in Y_1$ en dus wederom $f(y) \notin Y_2$. We concluderen dat $f[Y_2] \cap Y_2 = \emptyset$.

3. Dit gaat op dezelfde manier als in subgeval 2.1. Merk alleen op dat als $n \in \{0 \dots l_0 - 2\}$ dan geldt dat $n+1 \in \{0 \dots l_0 - 1\}$, dus $f(x_{n_0+n}) = x_{n_0+n+1} \in Y_1 \cup Y_2 \subseteq Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup D_f$. In het geval dat $n = l_0 - 1$ dan geldt dat $f(x_{n_0+n}) = x_{n_0+n+1} = x_{n_0+l_0} \in Y_1 \subseteq Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 \cup D_f$.

Wederom geldt dus dat $(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathscr{P}$ en dat $X_1 \subsetneq Y_1$.

Subgeval 2.3: l_0 is oneven. Dit is het geval dat de 'drie' in het Lemma van de Drie Verzamelingen zet. Tot nu toe hebben we de derde verzameling nog helemaal niet hoeven gebruiken, maar dit gaan we nu wel echt moeten doen. We stellen

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \cup \{x_{n_0}\}, \\ Y_2 &= X_2 \cup \{x_{n_0+n} : n \in \{1 \dots l_0 - 1\} \text{ even}\}, \\ Y_3 &= X_3 \cup \{x_{n_0+n} : n \in \{1 \dots l_0 - 1\} \text{ oneven}\}. \end{aligned}$$

We gaan opnieuw aantonen dat $(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathscr{P}$. Dat Y_1, Y_2 en Y_3 geen dekpunten bevatten is duidelijk.

1. Het bewijs dat $\{x_{n_0}\}$, $\{x_{n_0+n} : n \in \{1 \dots l_0 - 1\} \text{ even}\}$ en $\{x_{n_0+n} : n \in \{1 \dots l_0 - 1\} \text{ oneven}\}$ paarsgewijs disjunct zijn gaat op dezelfde manier als in subgeval 2.2: als er $n \in \{1 \dots l_0 - 1\}$ even en $m \in \{1 \dots l_0 - 1\}$ oneven zijn zodat ofwel $x_{n_0} = x_{n_0+n}$, ofwel $x_{n_0} = x_{n_0+m}$, ofwel $x_{n_0+n} = x_{n_0+m}$, dan kan je altijd een $0 < l < l_0$ vinden zodat $x_{n_0} = x_{n_0+l}$, en dit spreekt minimaliteit van l_0 tegen. In het eerste geval neem je $l = n$, in het tweede geval $l = m$ en in het derde geval $l = n - m$ of $l = m - n$ (afhangend van of $n > m$ of $m > n$). Uit de beredenering in subgeval 2.1 volgt nu dat Y_1, Y_2 en Y_3 paarsgewijs disjunct zijn.

2. Als $y \in X_i$ dan kan je telkens de beredenering uit subgeval 2.1 gebruiken om te concluderen dat $f(y) \notin Y_i$. Dit geval gaan we dus niet telkens opnieuw opschrijven. Om te bewijzen dat bijvoorbeeld $f[Y_1] \cap Y_1 = \emptyset$ gaan we dus alléén maar aantonen dat $f(x_{n_0}) \notin Y_1$. Dit is natuurlijk duidelijk, want $f(x_{n_0}) = x_{n_0+1} \in Y_3$. Zij $n \in \{1 \dots l_0 - 1\}$ even. Als $n < l_0 - 1$ dan geldt dat $n + 1 \in \{1 \dots l_0 - 1\}$ oneven is, dus $f(x_{n_0+n}) = x_{n_0+n+1} \in Y_3$ en $f(x_{n_0+n}) \notin Y_2$. In het geval dat $n = l_0 - 1$ dan geldt dat $f(x_{n_0+n}) = x_{n_0+l_0} = x_{n_0} \in Y_1 \subseteq X \setminus Y_2$. We concluderen dat $f[Y_2] \cap Y_2 = \emptyset$. Als laatste: als $n \in \{1 \dots l_0 - 1\}$ oneven is, dan geldt dat $n < l_0 - 1$, want l_0 is oneven. Dus $n + 1 \in \{l \dots l_0 - 1\}$ is even en $f(x_{n_0+n}) = x_{n_0+n+1} \in Y_2 \subseteq X \setminus Y_3$. We concluderen dat $f[Y_3] \cap Y_3 = \emptyset$.

3. Dit gaat net zoals in subgeval 2.2.

We zien wederom dat $(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathscr{P}$ en $X_1 \subsetneq Y_1$. In elk mogelijk geval kunnen we dus $(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathscr{P}$ vinden zodat $X_1 \subsetneq Y_1$. Dit spreekt echter maximaliteit van (X_1, X_2, X_3) tegen. We concluderen dat $X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup X_3) = \emptyset$ en dus $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$. Omdat $(X_1, X_2, X_3) \in \mathscr{P}$ is het trio ook paarsgewijs disjunct en geldt voor $i = 1, 2, 3$ dat $f[X_i] \cap X_i = \emptyset$. De verzamelingen X_1, X_2 en X_3 zijn dus precies zoals we wilden. □

Lemma 4.3. *Zij $p \in \beta\mathbb{N}$ en $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een functie. Dan zijn de volgende uitspraken waar.*

1. *Als $f_*(p) = p$ dan geldt dat $D_f \in p$*
2. *Als er een $A \in p$ bestaat zodat $f|_A : A \to \mathbb{N}$ injectief is, dan is er een bijectie $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodat $f_*(p) = g_*(p)$.*

Bewijs. 1. Veronderstel dat $D_f \notin p$. Laat $X = \mathbb{N} \setminus D_f$. Omdat p een ultrafilter is volgt dat $X \in p$. Uit het Lemma van de Drie Verzamelingen volgt dat er $X_1 \subseteq X$, $X_2 \subseteq X$ en $X_3 \subseteq X$ paarsgewijs disjunct zijn zo dat $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X$ en $f[X_i] \cap X_i = \emptyset$ voor elke $i = 1, 2, 3$. Omdat p een ultrafilter is, $X \in p$ en wegens Stelling 2.20 bestaat er dan een $i \in \{1, 2, 3\}$ zodat $X_i \in p$. Met Lemma 3.15 zien we dat $f[X_i] \in f_*(p) = p$. Maar dan zou volgen dat $X_i \cap f[X_i] = \emptyset \in p$. Een tegenspraak. We concluderen dat $D_f \in p$.

2. We gaan twee gevallen onderscheiden: het geval waarin A eindig is en het geval waarin A oneindig is. Stel eerst dat A eindig is. Dan is $f[A]$ ook eindig, dus $|\mathbb{N} \setminus A| = \aleph_0 = |\mathbb{N} \setminus f[A]|$. Er bestaat dus een bijectie $h : \mathbb{N} \setminus A \to \mathbb{N} \setminus f[A]$. Verder is p een elementair ultrafilter. Inderdaad: schrijf $A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \in p$, omdat p een ultrafilter is en A eindig is, volgt uit Stelling 2.20 dat er een $a \in A$ bestaat zodat $\{a\} \in p$. We zien dat $p = \mathscr{F}_a$. Definieer

$$
\begin{aligned}
g &: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
n &\mapsto \begin{cases} f(n) & n \in A \\ h(n) & n \in \mathbb{N} \setminus A. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Omdat g stuksgewijs bijectief is, is g een bijectie. Verder geldt dat $f_*(p) = f_*(\mathscr{F}_a) = \mathscr{F}_{f(a)} = \mathscr{F}_{g(a)} = g_*(\mathscr{F}_a) = g_*(p)$.

Veronderstel nu dat A oneindig is. Neem dan $A_0 \subseteq A$ en $A_1 \subseteq A$ disjunct zodat $A = A_0 \cup A_1$ en $|A| = |A_0| = |A_1|$. Wegens Stelling 2.20 geldt dat $A_0 \in p$ of $A_1 \in p$. Zonder beperking der algemeenheid stellen we dat $A_0 \in p$. Er geldt dat $A_1 = A \setminus A_0 \subseteq \mathbb{N} \setminus A_0$ en, omdat $f|_A$ injectief is, geldt dat $f[A_1] = f[A \setminus A_0] \subseteq f[A] \setminus f[A_0] \subseteq \mathbb{N} \setminus f[A_0]$. Omdat $f|_A$ injectief is geldt ook dat $f[A_1]$ oneindig is. We concluderen dat $\mathbb{N} \setminus A_0$ en $\mathbb{N} \setminus f[A_0]$ allebei oneindig zijn. Dus $|\mathbb{N} \setminus A_0| = \aleph_0 = |\mathbb{N} \setminus f[A_0]|$ en er bestaat een bijectie $h : \mathbb{N} \setminus A_0 \to \mathbb{N} \setminus f[A_0]$. Definieer

$$
\begin{aligned}
g &: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
n &\mapsto \begin{cases} f(n) & n \in A_0 \\ h(n) & n \in \mathbb{N} \setminus A_0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Wederom is g stuksgewijs bijectief en daarmee een bijectie. We gaan laten zien dat $f_*(p) = g_*(p)$. Laat hiertoe $B \in p$. We gaan laten zien dat $f[B] \in g_*(p)$. Uit Lemma 3.15 volgt dan dat $f_*(p) = g_*(p)$. Omdat $A_0 \in p$ geldt dat $A_0 \cap B \in p$. We hebben g zo gemaakt dat $f = g$ op A_0, dus $f[A_0 \cap B] = g[A_0 \cap B] \in g_*(p)$. Omdat $f[A_0 \cap B] \subseteq f[B]$ volgt nu dat $f[B] \in g_*(p)$, zoals gewenst. $\square$

Stelling 4.4. *Zijn $p \in \beta\mathbb{N}$ en $q \in \beta\mathbb{N}$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

1. *$p \preceq q$ en $q \preceq p$.*
2. *Er is een bijectie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodat $p = f_*(q)$.*
3. *p en q zijn van hetzelfde type.*

Bewijs. $\underline{1 \implies 2.}$ Stel dat $p \in \beta\mathbb{N}$ en $q \in \beta\mathbb{N}$ zo zijn dat $p \preceq q$ en $q \preceq p$. Dan zijn er $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodat $p = g_*(q)$ en $q = h_*(p)$. Er volgt dat $(h \circ g)_*(q) = h_* \circ g_*(q) = q$. Uit onderdeel 1 van Lemma 4.3 volgt dat $D_{h \circ g} \in q$. Er geldt ook dat $g|_{D_{h \circ g}} : D_{h \circ g} \to \mathbb{N}$ injectief is: als $n \in D_{h \circ g}$ en $m \in D_{h \circ g}$ zo zijn dat $g(n) = g(m)$, dan geldt dat $n = h \circ g(n) = h \circ g(m) = m$. Onderdeel 2 van Lemma 4.3 geeft ons nu een bijectie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zo dat $f_*(q) = g_*(q) = p$.

2 $\implies$ 1 en 3. Zijn $p \in \beta\mathbb{N}$ en $q \in \beta\mathbb{N}$ en stel er is een bijectie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodat $p = f_*(q)$. Dit verifieert onmiddellijk dat $p \preceq q$. Omdat de toekenning $f \mapsto f_*$ functorieel is, geldt dat $f_* : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ een autohomeomorfisme is, en dat $(f^{-1})_* = (f_*)^{-1}$. Dit verifieert dat p en q van hetzelfde type zijn. Verder geldt dat $q = (f_*)^{-1}(p) = (f^{-1})_*(p)$. Dit laat zien dat $q \preceq p$.

3 $\implies$ 2. Stel $p \in \beta\mathbb{N}$ en $q \in \beta\mathbb{N}$ zijn van hetzelfde type. Dan is er een autohomeomorfisme $f : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ zodat $p = f(q)$. Wegens Lemma 4.1 geldt dat $f[\iota[\mathbb{N}]] = \iota[\mathbb{N}]$. Immers, bij een homeomorfisme geldt dat $p \in \beta\mathbb{N}$ geïsoleerd is dan en slechts dan als $f(p) \in \beta\mathbb{N}$ geïsoleerd is. Er volgt dat $f \circ \iota : \mathbb{N} \to \iota[\mathbb{N}]$ een welgedefinieerde en bijectieve functie is. Er geldt dat $\iota : \mathbb{N} \to \iota[\mathbb{N}]$ bijectief is. Er bestaat dus een inverse ι^{-1}. We zien dat $\iota^{-1} \circ f \circ \iota : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een bijectie is waarvoor geldt dat $(\iota^{-1} \circ f \circ \iota)_* = f$. In het bijzonder geldt dus dat $p = (\iota^{-1} \circ f \circ \iota)_*(q)$. □

Definitie 4.5 (De Rudin-Keislerorde)**.** Wegens Stelling 4.4 en Lemma 2.3 induceert de preorde $\preceq$ een partiële orde op $T(\beta\mathbb{N})$. Deze orde heeft een naam: **De Rudin-Keislerorde**. Deze orde is als volgt gedefinieerd. Voor $[p], [q] \in T(\beta\mathbb{N})$ geldt dat $[p] \leq_{\mathbf{RK}} [q]$ dan en slechts dan als aan het volgende voldaan wordt.

$$\text{Er bestaat een functie } f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ zó dat } p = f_*(q).$$

5 Twee onvergelijkbare elementen

Nu we de Rudin-Keislerorde op $T(\beta\mathbb{N})$ hebben geconstrueerd, is het tijd om deze nader te onderzoeken. We zullen de aandacht leggen op de vraag of de Rudin-Keislerorde totaal is of niet. Oftewel, of er onvergelijkbare elementen zijn in de Rudin-Keislerorde. Wegens Lemma 2.4 volstaat het om te zoeken naar onvergelijkbare elementen in de preorde op $\beta\mathbb{N}$ waardoor de Rudin-Keislerorde wordt geïnduceerd. Het is gebleken dat er wel onvergelijkbare elementen in deze preorde zijn. De volgende drie paragrafen van deze scriptie worden besteed aan het construeren van deze onvergelijkbare elementen. In deze paragraaf zullen we eerst twee onvergelijkbare elementen maken. Vervolgens gaan we in paragrafen 6 respectievelijk 7 verzamelingen van kardinaliteit $\mathfrak{c}$ respectievelijk $2^{\mathfrak{c}}$ maken waarin elementen onderling onvergelijkbaar zijn.

De oplettende lezer zal opmerken dat deze en de volgende paragraaf niets aan de scriptie lijken toe te voegen. Als je namelijk $2^{\mathfrak{c}}$ onderling onvergelijkbare elementen hebt gevonden, dan kan je daar twee (of $\mathfrak{c}$) elementen van kiezen, en dan heb je twee (of $\mathfrak{c}$) onvergelijkbare elementen gevonden. Het doel van deze paragrafen is echter niet alleen om de onvergelijkbare elementen te maken, maar vooral om bekend te raken met het gereedschap en de technieken die worden gebruikt om de onvergelijkbare elementen te construeren. Dit zijn namelijk vruchtbare technieken en stukken gereedschap in de studie naar $\beta\mathbb{N}$.

5.1 Onder CH

Deze paragraaf is opgedeeld in twee deelparagrafen. In deze veronderstellen we de Continuümhypothese, en zullen we dit gebruiken om twee onvergelijkbare elementen te construeren. In de tweede deelparagraaf zullen we aantonen dat het ook zonder de Continuümhypothese kan. Het plan zal zijn om $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ te welordenen. Aangezien $\left|2^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right| \leq \left|(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}\right| = \left|2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\right| = \left|2^{\mathbb{N}}\right|$, zijn er continuüm veel functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$. Wegens de Welordeningsstelling van Zermelo kunnen $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dus welordenen als $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f_\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : 0 \leq \eta < \mathfrak{c}\}$. Met transfiniete recursie bouwen we twee stijgende rijen filters $\{\mathscr{F}_\eta\}_{0\leq\eta<\mathfrak{c}}$ en $\{\mathscr{G}_\eta\}_{0\leq\eta<\mathfrak{c}}$ op $\mathbb{N}$. Met de constructie zorgen we dat aan de volgende eis voldaan wordt.

$$\text{Voor elke } 0 \leq \eta < \mathfrak{c} \text{ zijn er } X \in \mathscr{F}_{\eta+1} \text{ en } Y \in \mathscr{G}_{\eta+1} \text{ zó dat } \mathbb{N} \setminus f_\eta^{-1}[X] \in \mathscr{G}_{\eta+1} \text{ en } \mathbb{N} \setminus f_\eta^{-1}[Y] \in \mathscr{F}_{\eta+1}. \qquad (*)$$

Transfiniete recursie bestaat uit drie onderdelen: De nul constructie, de opvolger stap en de limiet ordinaal constructie. Met de constructie willen we ervoor zorgen dat op elk stadium η, de filters $\mathscr{F}_\eta$ en $\mathscr{G}_\eta$ door een aftelbare filterbasis worden voortgebracht, en dat het Fréchet filter is bevat in $\mathscr{F}_\eta$ en $\mathscr{G}_\eta$. Dit zorgt er namelijk voor dat geen van beiden ooit een ultrafilter wordt. Een vrij ultrafilter kan namelijk niet door een aftelbare filterbasis worden voortgebracht. Daarnaast kunnen $\mathscr{F}_\eta$ en $\mathscr{G}_\eta$ ook niet elementaire ultrafilters zijn, want ze bevatten het Fréchet filter. Omdat we nooit op een ultrafilter stuiten, kunnen we altijd verzamelingen blijven toevoegen die eis $(*)$ zullen vervullen. Dit laten we zien in Lemma 5.2.

De nul constructie vormt geen probleem, we kunnen namelijk $\mathscr{F}_0 = \mathscr{G}_0$ het Fréchet filter nemen. De limiet ordinaal constructie is ook niet ingewikkeld. Als η een limiet ordinaal is, dan stellen we

$$\mathscr{F}_\eta = \bigcup_{\lambda<\eta} \mathscr{F}_\lambda \qquad \mathscr{G}_\eta = \bigcup_{\lambda<\eta} \mathscr{G}_\lambda.$$

Op dit moment is het nog niet duidelijk waarom $\mathscr{F}_\eta$ en $\mathscr{G}_\eta$ door een aftelbare filterbasis worden voortgebracht. Dit is waar we de Continuümhypothese zullen gebruiken en dit zal worden bewezen in Stelling 5.3. Het volgt uit het feit dat η, onder de Continuümhypothese, een aftelbaar ordinaal is. Voor de opvolger stap moeten we iets harder werken. We moeten er namelijk ook nog voor zorgen dat aan eis $(*)$ voldaan wordt. Hiervoor hebben we de volgende twee lemma's nodig.

Lemma 5.1. *Zij $\mathscr{F}$ een filter op $\mathbb{N}$ dat het Fréchet filter bevat en dat door een aftelbare filterbasis wordt voortgebracht. Dan wordt $\mathscr{F}$ door een strikt dalende aftelbare filterbasis voortgebracht.*

Bewijs. Laat $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een filterbasis voor $\mathscr{F}$ zijn. We beweren dat $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$. Immers, als er een $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ zou bestaan, dan geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$ dat $\{x\} \subseteq F_n$. Contrapositie levert dat $\mathbb{N} \setminus F_n \subseteq \mathbb{N} \setminus \{x\}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Omdat $\mathscr{F}$ het Fréchet filter bevat geldt dat $\mathbb{N} \setminus \{x\} \in \mathscr{F}$, dus er is een $n \in \mathbb{N}$ zodat $F_n \subseteq \mathbb{N} \setminus \{x\}$. Nu volgt echter dat $(\mathbb{N} \setminus F_n) \cup F_n = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{x\}$. Een tegenspraak. We concluderen dat $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$.

Voor $n \in \mathbb{N}$, definieer $F'_n = \bigcap_{i=0}^{n} F_i$. Omdat $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i = \emptyset$, zal de rij $(F'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nooit constant worden. Inderdaad, als er een $N \in \mathbb{N}$ is zodat $F'_n = F'_N$ voor alle $n \geq N$, dan zou gelden dat $\bigcap_{i=1}^{N} F_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i = \emptyset$, maar dit spreekt tegen dat $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een filterbasis is. Door kopieën in de rij $(F'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weg te gooien vinden we zo een strikt dalende rij die ook een filterbasis is voor $\mathscr{F}$. $\square$

Lemma 5.2. *Stel dat $\mathscr{F} = \langle F_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{G} = \langle G_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ filters op $\mathbb{N}$ zijn die het Fréchet filter bevatten en door een aftelbare filterbasis worden voortgebracht. Stel verder dat $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een functie is. Dan is er een $X \subseteq \mathbb{N}$ zodat $\{X \cap F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\{(\mathbb{N} \setminus f^{-1}[X]) \cap G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ filterbases op $\mathbb{N}$ zijn.*

Bewijs. Wegens Lemma 5.1 kunnen we er zonder beperking der algemeenheid vanuit gaan dat $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt dalend zijn. Om deze reden volstaat het om ervoor te zorgen dat $X \cap F_n \neq \emptyset$ en $(\mathbb{N}\setminus f^{-1}[X]) \cap G_n \neq \emptyset$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Neem een rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met $x_n \in F_n \setminus F_{n+1}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Stel $A = \{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $B = \{x_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Omdat $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dalend is, geldt dat $A \cap F_n \neq \emptyset$ en $B \cap F_n \neq \emptyset$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Ook zijn A en B disjunct. Zij $n \in \mathbb{N}$ arbitrair, dan is het zo dat

$$((\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]) \cap G_n) \cup ((\mathbb{N} \setminus f^{-1}[B]) \cap G_n) = (\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A \cap B]) \cap G_n = G_n \neq \emptyset.$$

Dus ofwel $(\mathbb{N}\setminus f^{-1}[A]) \cap G_n \neq \emptyset$, of $(\mathbb{N}\setminus f^{-1}[B]) \cap G_n \neq \emptyset$. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dus of dat $(\mathbb{N}\setminus f^{-1}[A]) \cap G_n \neq \emptyset$, of dat $(\mathbb{N} \setminus f^{-1}[B]) \cap G_n \neq \emptyset$. Of deze eigenschap voor A of voor B geldt lijkt echter niet uniform in n, maar dat is het stiekem wel. Als er namelijk een $N \in \mathbb{N}$ is zodat $(\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]) \cap G_N = \emptyset$, dan geldt voor elke $n \geq N$ ook dat $(\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]) \cap G_n = \emptyset$, want $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is dalend. In dit geval geldt dat $(\mathbb{N} \setminus f^{-1}[B]) \cap G_n \neq \emptyset$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ en kunnen we $X = B$ nemen. In het geval dat $(\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]) \cap G_n \neq \emptyset$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, dan kunnen we $X = A$ nemen. $\square$

Stelling 5.3 (CH). *Er bestaan stijgende rijen filters $\{\mathscr{F}_\eta\}_{0\leq\eta<\mathfrak{c}}$ en $\{\mathscr{G}_\eta\}_{0\leq\eta<\mathfrak{c}}$ die aan eis $(*)$ voldoen.*

Bewijs. We gaan $\{\mathscr{F}_\eta\}_{0\leq\eta<\mathfrak{c}}$ en$\{\mathscr{G}_\eta\}_{0\leq\eta<\mathfrak{c}}$ met transfiniete recursie maken. Voor de constructie bij een opvolger ordinaal willen we graag Lemma 5.2 gebruiken. Om deze reden moeten we ervoor zorgen dat op elk stadium η geldt dat het Fréchet filter is bevat in $\mathscr{F}_\eta$ en $\mathscr{G}_\eta$, en dat deze filters door een aftelbare filterbasis worden voortgebracht. We gaan met transfiniete inductie bewijzen dat dit altijd het geval is.

Het geval $\eta = 0$. Laat $\mathscr{F}$ het Fréchet filter zijn. We nemen $\mathscr{F}_0 = \mathscr{G}_0 = \mathscr{F}$. Het is duidelijk dat het Fréchet filter is bevat in $\mathscr{F}_0$ en $\mathscr{G}_0$. Er resteert aan te tonen dat $\mathscr{F}$ door een aftelbare filterbasis wordt voortgebracht. Schrijf hiertoe $[\mathbb{N}]^{<\omega} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ eindig}\}$. Dan is er, per definitie van het Fréchet filter, een bijectie $\mathscr{F} \to [\mathbb{N}]^{<\omega} : A \to \mathbb{N} \setminus A$. Dus $|\mathscr{F}| = |[\mathbb{N}]^{<\omega}|$. Maar $[\mathbb{N}]^{<\omega} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{A \subseteq \mathbb{N} : |A| = n\}$ is een aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen en daarmee aftelbaar. Dus $\mathscr{F}$ is aftelbaar en $\mathscr{F} = \langle \mathscr{F} \rangle$ wordt voortgebracht door een aftelbare filterbasis.

De opvolger stap. Zij $0 \leq \eta < \mathfrak{c}$ en stel dat we filters $\mathscr{F}_\eta$ en $\mathscr{G}_\eta$ hebben, waar het Fréchet filter in is bevat en die worden voortgebracht door aftelbare filterbases. Zeg $\mathscr{F}_\eta = \langle F_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{G}_\eta = \langle G_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$. Twee toepassingen van Lemma 5.2 geven ons $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ zodat $\{X \cap (\mathbb{N} \setminus f_\eta^{-1}[Y]) \cap F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\{Y \cap (\mathbb{N} \setminus f_\eta^{-1}[X]) \cap G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ filterbases zijn. Stel $\mathscr{F}_{\eta+1} = \langle X \cap (\mathbb{N} \setminus f_\eta^{-1}[Y]) \cap F_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{G}_{\eta+1} = \langle Y \cap (\mathbb{N} \setminus f_\eta^{-1}[X]) \cap G_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$. Als $A \in \mathscr{F}_\eta$, dan is er een $n \in \mathbb{N}$ zodat $F_n \subseteq A$. Dan geldt dat $X \cap (\mathbb{N} \setminus f_\eta^{-1}[Y]) \cap F_n \subseteq F_n \subseteq A$. Dus $A \in \mathscr{F}_{\eta+1}$. Er geldt dus dat $\mathscr{F}_\eta \subseteq \mathscr{F}_{\eta+1}$ en dat het Fréchet filter bevat is in $\mathscr{F}_{\eta+1}$. Om dezelfde reden is het Fréchet filter bevat in $\mathscr{G}_{\eta+1}$. Het is ook duidelijk dat $\mathscr{F}_{\eta+1}$ en $\mathscr{G}_{\eta+1}$ door aftelbare filterbases worden voortgebracht, en dat aan eis $(*)$ voldaan wordt.

Het limiet ordinaal geval. Stel $0 \leq \eta < \mathfrak{c}$ is een limiet ordinaal, en voor elke $\lambda < \eta$ hebben we filters $\mathscr{F}_\lambda$ en $\mathscr{G}_\lambda$ die het Fréchet filter bevatten en die door aftelbare filterbases worden voortgebracht. Zeg $\mathscr{F}_\lambda = \langle F_n^\lambda \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{G}_\lambda = \langle G_n^\lambda \rangle_{n\in\mathbb{N}}$. Stel $\mathscr{F}_\eta = \bigcup_{\lambda<\eta} \mathscr{F}_\lambda$ en $\mathscr{G}_\eta = \bigcup_{\lambda<\eta} \mathscr{G}_\lambda$. Het is duidelijk dat $\mathscr{F}_\eta$ en $\mathscr{G}_\eta$ het Fréchet filter bevatten. Merk op dat

$$\mathscr{F}_\eta = \left\langle \bigcup_{\lambda<\eta} \{F_n^\lambda\}_{n\in\mathbb{N}} \right\rangle.$$

Immers, $A \subseteq \mathbb{N}$ zit in beide filters dan en slechts dan als er een $\lambda < \eta$ en een $n \in \mathbb{N}$ is zodat $F_n^\lambda \subseteq A$. Maar $\eta < \mathfrak{c}$, en omdat we de Continuümhypothese hebben verondersteld volgt dat η aftelbaar is. Dus $\bigcup_{\lambda<\eta} \{F_n^\lambda\}_{n\in\mathbb{N}}$ is een aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen en daarmee aftelbaar. Dus $\mathscr{F}_\eta$ wordt door een aftelbare filterbasis voortgebracht. Uit dezelfde beredenering volgt dat $\mathscr{G}_\eta$ door een aftelbare filterbasis wordt voortgebracht. □

Gevolg 5.4. *Er zijn $p \in \beta\mathbb{N}$ en $q \in \beta\mathbb{N}$ zodat $p \not\leq q$ en $q \not\leq p$.*

Bewijs. Laat $\{\mathscr{F}_\eta\}_{0\leq\eta<\mathfrak{c}}$ en $\{\mathscr{G}_\eta\}_{0\leq\eta<\mathfrak{c}}$ de rijen filters van Stelling 5.3 zijn. Omdat het stijgende rijen van filters zijn, zijn het ketens van filters. Dan zijn $\bigcup_{\eta<\mathfrak{c}} \mathscr{F}_\eta$ en $\bigcup_{\eta<\mathfrak{c}} \mathscr{G}_\eta$ wegens Lemma 2.16 weer filters. Middels Stelling 2.17 verkrijgen we dan ultrafilters $p, q \in \beta\mathbb{N}$ zodat $\bigcup_{\eta<\mathfrak{c}} \mathscr{F}_\eta \subseteq p$ en $\bigcup_{\eta<\mathfrak{c}} \mathscr{G}_\eta \subseteq q$. We zullen aantonen dat $p \not\leq q$ en $q \not\leq p$. Dat wil zeggen, dat voor elke functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ geldt dat $p \neq f_*(q)$ en $q \neq f_*(p)$. Neem $0 \leq \eta < \mathfrak{c}$ zodat $f = f_\eta$. Neem dan $X \in \mathscr{F}_{\eta+1} \subseteq p$ en $Y \in \mathscr{G}_{\eta+1} \subseteq q$ zoals in eis $(*)$. Uit het feit dat $\mathbb{N} \setminus f^{-1}[X] \in \mathscr{G}_{\eta+1} \subseteq q$ volgt dat $f^{-1}[X] \notin q$. Immers, als $f^{-1}[X]$ wel een element van q zou zijn, dan zou volgen dat $\emptyset = f^{-1}[X] \cap (\mathbb{N} \setminus f^{-1}[X]) \in q$. We zien nu dat $X \notin f_*(q)$. Er volgt dat $p \neq f_*(q)$. Uit hetzelfde argument volgt dat $q \neq f_*(p)$. □

5.2 Zonder CH

In de vorige deelparagraaf hebben we, onder de Continuümhypothese, twee onvergelijkbare elementen in de Rudin-Keislerorde gevonden. Dit hebben we gedaan door twee stijgende rijen filters te construeren die voldeden aan eis $(*)$. Onder de Continuümhypothese konden we ervoor zorgen dat we nooit op een ultrafilter stuitten door ervoor te zorgen dat ze door aftelbare filterbases werden voortgebracht. In deze deelparagraaf gaan we twee onvergelijkbare elementen in de Rudin-Keislerorde construeren zonder de Continuümhypothese. Het bewijs dat we zullen geven is te danken aan K. Kunen [Kun72]. We gaan wederom stijgende rijen filters maken die voldoen aan eis $(*)$. Om ervoor te zorgen dat we tijdens de transfiniete recursie niet per ongeluk een ultrafilter maken hebben we een stuk gereedschap nodig: onafhankelijke verzamelingen.

Definitie 5.5. Zij X een verzameling. Een familie deelverzamelingen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ is **onafhankelijk** als, voor elke eindige deelfamilies $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ en $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ met $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ geldt dat

$$\bigcap \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{G} \neq \emptyset.$$

Definitie 5.6. Zij X een verzameling en $\mathscr{F}$ een filter op X. Een familie deelverzamelingen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ is **onafhankelijk van het filter** $\mathscr{F}$ als, voor elke eindige deelfamilies $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ en $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ met $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, en elke $F \in \mathscr{F}$, geldt dat

$$F \cap \bigcap \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{G} \neq \emptyset.$$

Het plan is om op elk stadium η van de transfiniete recursie een oneindige familie verzamelingen $\mathcal{A}_\eta \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bij te houden die onafhankelijk is van zowel $\mathscr{F}_\eta$ als $\mathscr{G}_\eta$. Dan stuiten we nooit op een ultrafilter; neem een $A \in \mathcal{A}_\eta$. Er geldt dat $A \cap \bigcap \emptyset \setminus \bigcup \{A\} = A \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Uit contrapositie volgt dat $A \notin \mathscr{F}$. Maar er geldt ook dat $(X \setminus A) \cap \bigcap \{A\} \setminus \bigcup \emptyset = (X \setminus A) \cap A = \emptyset$. Uit contrapositie volgt nu dat $X \setminus A \notin \mathscr{F}$. Wegens Stelling 2.20 is dit bij een ultrafilter echter onmogelijk. We gaan weer $\mathscr{F}_0 = \mathscr{G}_0$ het Fréchet filter nemen. We zullen dus eerst een grote familie verzamelingen onafhankelijk van het Fréchet filter moeten construeren. Om precies te zijn, we gaan een familie deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ maken onafhankelijk van het Fréchet filter van kardinaliteit $\mathfrak{c}$. Dit doen we met behulp van een familie functies van grote schommeling.

Definitie 5.7. Zijn X en Y verzamelingen. Een familie functies $\mathscr{L} \subseteq X^Y$ is **van grote schommeling** als deze aan de volgende eigenschap voldoet: zijn $f_0 \dots f_k \in \mathscr{L}$ verschillende elementen van $\mathscr{L}$ en zijn $x_0 \dots x_k \in X$ (niet noodzakelijk verschillende) elementen van X. Dan bestaat er een $y \in Y$ zodat $f_i(y) = x_i$ voor elke $i = 0 \dots k$. Met andere woorden, $\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}\{x_i\} \neq \emptyset$.

We gaan laten zien dat voor elke verzameling X met $2 \leq |X| \leq \aleph_0$ een familie van grote schommeling $\mathscr{L} \subseteq X^{\mathbb{N}}$ van kardinaliteit $\mathfrak{c}$ bestaat. Het bewijs dat volgt is een aangepaste versie van een bewijs van Hausdorff [Hau36]. Op zijn plaats had Hausdorff een bewijs van G. Fichtenholz en L. Kantorovitch drastisch versimpeld [FK34]. Hausdorff maakte een familie functies met een iets andere eigenschap: een familie wezenlijk verschillende functies. Het idee om alle functies op eindige deelverzamelingen te bekijken, in plaats van alleen alle eindige deelverzamelingen zoals Hausdorff deed, komt uit het boek The Theory of Ultrafilters [CN74].

Stelling 5.8. *Zij X een verzameling met $2 \leq |X| \leq \aleph_0$. Dan is er een familie van grote schommeling $\mathscr{L} \subseteq X^{\mathbb{N}}$ van kardinaliteit $\mathfrak{c}$*

Bewijs. We gaan niet direct een familie van grote schommeling van functies van $\mathbb{N}$ naar X maken. In plaats daarvan maken we een familie functies van grote schommeling $\mathscr{L} \subseteq X^J$ van een andere aftelbaar oneindige verzameling J naar X met kardinaliteit $\mathfrak{c}$. Er is dus een bijectie $f : \mathbb{N} \to J$. Het is eenvoudig na te gaan dat

$$\{g \circ f : g \in \mathscr{L}\} \subseteq X^{\mathbb{N}}$$

ook van grote schommeling, en ook van kardinaliteit $\mathfrak{c}$ is. De verzameling J die we gaan gebruiken is als volgt.

$$J = \bigsqcup_{N \in [\mathbb{N}]^{<\omega}} X^{\mathcal{P}(N)} = \{(N, g) : N \in [\mathbb{N}]^{<\omega}, g : \mathcal{P}(N) \to X\}.$$

Hier is $[\mathbb{N}]^{<\omega} = \{N \subseteq \mathbb{N} : N \text{ eindig}\}$. Als $N \subseteq \mathbb{N}$ eindig is dan is $\mathcal{P}(N)$ ook eindig, dus $X^{\mathcal{P}(N)}$ is niet leeg en aftelbaar. We hebben al gezien dat $[\mathbb{N}]^{<\omega}$ aftelbaar is. Dus J is een aftelbaar oneindige disjuncte vereniging van niet lege aftelbare verzamelingen. Er volgt dat J aftelbaar oneindig is. We gaan een familie functies van grote schommeling van J naar X maken met kardinaliteit $\mathfrak{c}$. Definieer hiertoe

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\to X^J \\ A &\mapsto \begin{pmatrix} f_A : J & \to X \\ (N,g) & \mapsto g(A \cap N) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

We kennen dus aan elke (ook oneindige) deelverzameling $A \subseteq \mathbb{N}$ de functie $f_A : J \to X$ toe die een paar (N,g), met $N \subseteq \mathbb{N}$ eindig en $g : \mathcal{P}(N) \to X$, naar $g(A \cap N)$ toe stuurt.

We gaan aantonen dat deze toekenning injectief is. Laat hiertoe $A \subseteq \mathbb{N}$ en $B \subseteq \mathbb{N}$ verschillende deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ zijn. Neem zonder beperking der algemeenheid aan dat er een $n \in A \setminus B$ bestaat. Neem $N = \{n\}$. Omdat $2 \leq |X|$ zijn er twee verschillende elementen x_0 en x_1 in X. Definieer

$$\begin{aligned} g : \mathcal{P}(N) &\to X \\ \emptyset &\mapsto x_0 \\ \{n\} &\mapsto x_1. \end{aligned}$$

Dan geldt dat

$$f_A((N,g)) = g(A \cap N) = g(\{n\}) = x_1 \neq x_0 = g(\emptyset) = g(B \cap N) = f_B((N,f)).$$

Dus $f_A \neq f_B$. Er volgt dat $\mathscr{L} = \{f_A : A \subseteq \mathbb{N}\} \subseteq X^J$ van kardinaliteit $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$ is.

Er resteert aan te tonen dat $\mathscr{L}$ van grote schommeling is. Laat hiertoe $f_0 \ldots f_k \in \mathscr{L}$ verschillend zijn en laat $x_0 \ldots x_k \in X$. Laat $A_0 \ldots A_k \subseteq \mathbb{N}$ de (uniek bepaalde) verschillende deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ zijn zodat $f_i = f_{A_i}$ voor $i = 0 \ldots k$. Voor elke $i,j \in \{0 \ldots k\}$ met $i < j$ bestaat er dan een $a_{i,j} \in A_i \triangle A_j$. Definieer $N = \{a_{i,j}\}_{(i,j) \in \binom{k+1}{2}}$. Het is duidelijk dat $A_i \cap N \neq A_j \cap N$ als $i \neq j$. Maar dan is er een functie $g : \mathcal{P}(N) \to X$ zodat $g(A_i \cap N) = x_i$ voor $i = 0 \ldots k$. Dit paar $(N,g) \in J$ verifieert dat $\mathscr{L}$ van grote schommeling is. Inderdaad: $f_i((N,g)) = f_{A_i}((N,g)) = g(A_i \cap N) = x_i$ voor $i = 0 \ldots k$. $\square$

Met behulp van deze familie van grote schommeling zijn we in staat om een familie onafhankelijke deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ van kardinaliteit $\mathfrak{c}$ te maken. Deze familie kunnen we vervolgens ombouwen tot een familie deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ die onafhankelijk is van het Fréchet filter, en kardinaliteit $\mathfrak{c}$ heeft.

Gevolg 5.9. *Er bestaat een familie onafhankelijke deelverzamelingen $\mathcal{A}$ van $\mathbb{N}$ van kardinaliteit $\mathfrak{c}$.*

Bewijs. Laat $X = \{x_0, x_1\}$ een verzameling met twee verschillende elementen zijn. Wegens Stelling 5.8 bestaat er een familie $\mathscr{L} \subseteq X^{\mathbb{N}}$ van grote schommeling met kardinaliteit $\mathfrak{c}$. Definieer

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &\to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ f &\mapsto f^{-1}\{x_0\}. \end{aligned}$$

Deze toekenning is injectief: laat $f \in \mathscr{L}$ en $g \in \mathscr{L}$ verschillende functies zijn. Omdat $\mathscr{L}$ van grote schommeling is bestaat er dan een $n \in \mathbb{N}$ zodat $f(n) = x_0$ en $g(n) = x_1$. We zien dat $n \in f^{-1}\{x_0\}$ maar $n \notin g^{-1}\{x_0\}$, dus $f^{-1}\{x_0\} \neq g^{-1}\{x_0\}$. We concluderen dat $\mathcal{A} = \{f^{-1}\{x_0\} : f \in \mathscr{L}\}$ van kardinaliteit $\mathfrak{c}$ is.

Er resteert aan te tonen dat $\mathcal{A}$ onafhankelijk is. Laat hiertoe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ en $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ eindig zodat $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$. Zeg $\mathcal{F} = \{f_i^{-1}\{x_0\}\}_{i=1}^{n}$ en $\mathcal{G} = \{g_j^{-1}\{x_0\}\}_{j=1}^{m}$ met $f_1 \dots f_n, g_1 \dots g_m \in \mathscr{L}$ allemaal verschillende functies. Omdat $\mathscr{L}$ van grote schommeling is bestaat er een $n \in \mathbb{N}$ zodat $f_i(n) = x_0$ voor $i = 1 \dots n$ en $g_j(n) = x_1$ voor $j = 1 \dots m$. Er geldt nu dat

$$n \in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}\{x_0\} \setminus \bigcup_{j=1}^{m} g_j^{-1}\{x_0\} = \bigcap \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{G} \neq \emptyset.$$

□

Gevolg 5.10. *Er bestaat een familie deelverzamelingen van* $\mathbb{N}$ *met kardinaliteit* $\mathfrak{c}$ *onafhankelijk van het Fréchet filter.*

Bewijs. Laat $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ de familie onafhankelijke verzamelingen van kardinaliteit $\mathfrak{c}$ zijn die we in Gevolg 5.9 hebben geconstrueerd. Om $\mathcal{A}$ om te bouwen tot een familie verzamelingen onafhankelijk van het Fréchet filter hebben we een functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nodig zodat $f^{-1}\{n\}$ oneindig is voor elke $n \in \mathbb{N}$. Neem bijvoorbeeld $f = (0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4 \dots)$. Laat nu $\mathcal{A}' = \{f^{-1}[A] : A \in \mathcal{A}\}$.

De toekenning $\mathcal{A} \to \mathcal{A}' : A \to f^{-1}[A]$ is injectief. Immers, als $A \in \mathcal{A}$ en $B \in \mathcal{A}$ verschillend zijn, dan is $A \bigtriangleup B$ niet leeg. Er volgt nu dat $f^{-1}[A] \bigtriangleup f^{-1}[B] = f^{-1}[A \bigtriangleup B] \neq \emptyset$. Dus $f^{-1}[A]$ en $f^{-1}[B]$ zijn verschillend. We concluderen dat $\mathcal{A}'$ kardinaliteit $\mathfrak{c}$ heeft.

Als laatste moet worden bewezen dat $\mathcal{A}'$ onafhankelijk is van het Fréchet filter. Laat hiertoe $\mathcal{F}', \mathcal{G}' \subseteq \mathcal{A}'$ eindig en disjunct. Laat $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ en $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ de (uniek bepaalde) eindige disjuncte deelfamilies van $\mathcal{A}$ zijn zodat $\mathcal{F}' = \{f^{-1}[F] : F \in \mathcal{F}\}$ en $\mathcal{G}' = \{f^{-1}[G] : G \in \mathcal{G}\}$. Dan geldt dat $\bigcap \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{G} \neq \emptyset$. Neem een $n \in \bigcap \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{G}$. Er volgt nu dat

$$f^{-1}\{n\} \subseteq f^{-1}\left[\bigcap \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{G}\right] = \bigcap \mathcal{F}' \setminus \bigcup \mathcal{G}'.$$

Omdat $f^{-1}\{n\}$ oneindig is, is $\bigcap \mathcal{F}' \setminus \bigcup \mathcal{G}'$ ook oneindig. Stel nu dat F een element van het Fréchet filter is. Dan geldt dat $\mathbb{N} \setminus F$ eindig is, dus

$$F \cap \bigcap \mathcal{F}' \setminus \bigcup \mathcal{G}' = \left(\bigcap \mathcal{F}' \setminus \bigcup \mathcal{G}'\right) \setminus (\mathbb{N} \setminus F)$$

is oneindig. In het bijzonder is bovenstaande verzameling niet leeg. □

Het is nu tijd om, zonder de Continuümhypothese, rijen filters $\{\mathscr{F}_\eta\}_{0 \leq \eta < \mathfrak{c}}$ en $\{\mathscr{G}_\eta\}_{0 \leq \eta < \mathfrak{c}}$ te construeren die aan eis $(*)$ voldoen. We doen dit weer met transfiniete recursie. Tijdens de transfiniete recursie gaan we voor elk ordinaal getal $0 \leq \eta < \mathfrak{c}$ filters $\mathscr{F}_\eta$ en $\mathscr{G}_\eta$ maken, en tegelijkertijd een familie deelverzamelingen $\mathcal{A}_\eta$ bijhouden die onafhankelijk is van zowel $\mathscr{F}_\eta$ en $\mathscr{G}_\eta$, en oneindig groot is. Gevolg 5.10 rechtvaardigt de keuze om de transfiniete recursie te beginnen bij het Fréchet filter. Als η een limiet ordinaal is, en we voor elke $\lambda < \eta$ al filters $\mathscr{F}_\lambda$ en $\mathscr{G}_\lambda$ hebben, en een oneindige familie $\mathcal{A}_\lambda$ die onafhankelijk is van $\mathscr{F}_\lambda$ en $\mathscr{G}_\lambda$, dan stellen we

$$\mathscr{F}_\eta = \bigcup_{\lambda < \eta} \mathscr{F}_\lambda \qquad \mathscr{G}_\eta = \bigcup_{\lambda < \eta} \mathscr{G}_\lambda \qquad \mathcal{A}_\eta = \bigcap_{\lambda < \eta} \mathcal{A}_\lambda.$$

Het feit dat $\mathcal{A}_\eta$ met deze toekenning onafhankelijk is van $\mathscr{F}_\eta$ en $\mathscr{G}_\eta$ is eenvoudig aan te tonen. Maar dat $\mathcal{A}_\eta$ oneindig, of überhaupt niet leeg is, is op dit moment nog helemaal niet duidelijk. Hiervoor gaan we de opvolger stap moeten gebruiken. Om de opvolger stap te ondersteunen volgen drie lemma's.

Lemma 5.11. *Zij $\mathscr{F}$ een filter op X en $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ onafhankelijk van $\mathscr{F}$ en zij $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ een deelfamilie. Laat $\mathcal{B}^* = \{X \setminus B : B \in \mathcal{B}\}$. Dan zijn $\mathscr{F} \cup \mathcal{B}$ en $\mathscr{F} \cup \mathcal{B}^*$ filtersubbases, en $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ is onafhankelijk van zowel $\langle \mathscr{F} \cup \mathcal{B} \rangle$ als $\langle \mathscr{F} \cup \mathcal{B}^* \rangle$.*

Bewijs. Eerst gaan we aantonen dat $\mathscr{F} \cup \mathcal{B}$ een filtersubbasis is. Laat hiertoe $\vartheta \subseteq \mathscr{F} \cup \mathcal{B}$ eindig. We kunnen ϑ schrijven als $\vartheta = (\mathscr{F} \cap \vartheta) \cup (\mathcal{B} \cap \vartheta)$. Noem $F = \bigcap (\mathscr{F} \cap \vartheta) \in \mathscr{F}$ en noem $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cap \vartheta$. Omdat $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ eindig is, geldt dat $\bigcap \vartheta = F \cap \bigcap \mathcal{B}' \neq \emptyset$. Het bewijs dat $\mathscr{F} \cup \mathcal{B}^*$ een filtersubbasis is gaat op analoge wijze, alleen dan nemen we $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} : X \setminus B \in \vartheta\}$ en krijgen we $\bigcap \vartheta = F \cap \bigcap \emptyset \setminus \bigcup \mathcal{B}' \neq \emptyset$.

Nu gaan we aantonen dat $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ onafhankelijk is van $\langle \mathscr{F} \cup \mathcal{B} \rangle$. Stel $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ en $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ zijn eindig en zodat $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$. Om een tegenspraak uit te lokken, stel dat er een $\vartheta \subseteq \mathscr{F} \cup \mathcal{B}$ eindig is zodat $\bigcap \vartheta \cap \bigcap \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{G} = \emptyset$. Laat weer $F = \bigcap (\mathscr{F} \cap \vartheta) \in \mathscr{F}$ en $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cap \vartheta$. Dan zien we dat

$$F \cap \bigcap \mathcal{B}' \cap \bigcap \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{G} = F \cap \bigcap (\mathcal{B}' \cup \mathcal{F}) \setminus \bigcup \mathcal{G} = \emptyset.$$

Maar $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ en $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, dus $\mathcal{B}' \cup \mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$ zijn nog steeds disjuncte (en eindige) deelfamilies van $\mathcal{A}$. Dus bovenstaande spreekt tegen dat $\mathcal{A}$ onafhankelijk is van $\mathscr{F}$. Het bewijs dat $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ onafhankelijk is van $\langle \mathscr{F} \cup \mathcal{B}^* \rangle$ gaat analoog. Maar dan nemen we $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} : X \setminus B \in \vartheta\}$ en voegen we deze toe aan $\mathcal{G}$ in plaats van $\mathcal{F}$. □

Lemma 5.12. *Zij X een verzameling, $\mathscr{F}$ een filter op X en $\mathcal{A}$ een familie deelverzamelingen van X onafhankelijk van $\mathscr{F}$. Zijn verder $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ en $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ zodat $\mathcal{G} \cap \mathcal{F} = \emptyset$. Laat $\mathcal{G}^* = \{X \setminus G : G \in \mathcal{G}\}$. Dan geldt dat $\mathscr{F} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{G}^*$ een filtersubbasis is, en dat $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$ onafhankelijk is van $\langle \mathscr{F} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{G}^* \rangle$.*

Bewijs. Één toepassing van Lemma 5.11 levert dat $\mathscr{F} \cup \mathcal{F}$ een filtersubbasis is en dat $\mathcal{A} \setminus \mathcal{F}$ onafhankelijk is van $\langle \mathscr{F} \cup \mathcal{F} \rangle$. Omdat $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ geldt dat $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}$, we kunnen dus nog een keer Lemma 5.11 toepassen om het resultaat te verkrijgen. □

Lemma 5.13 (Kunen)**.** *Laat $\mathscr{F}$ en $\mathscr{G}$ filters op $\mathbb{N}$ zijn en veronderstel dat $\mathcal{A}$ een oneindige familie deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ is die onafhankelijk is van zowel $\mathscr{F}$ als $\mathscr{G}$. Laat $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dan zijn er filters $\mathscr{F}^+ \supseteq \mathscr{F}$ en $\mathscr{G}^+ \supseteq \mathscr{G}$ en een deelfamilie $\mathcal{A}^- \subseteq \mathcal{A}$ zodat $\mathcal{A}^-$ onafhankelijk is van $\mathscr{F}^+$ en $\mathscr{G}^+$, $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^-$ eindig is en er een $X \in \mathscr{F}^+$ bestaat zodat $\mathbb{N} \setminus f^{-1}[X] \in \mathscr{G}^+$.*

Bewijs. Kies een $A \in \mathcal{A}$ vast. We gaan drie gevallen onderscheiden.

Geval 1: $\mathscr{G} \cup \{\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]\}$ vormt een filtersubbasis, en $\mathcal{A} \setminus \{A\}$ is onafhankelijk van $\langle \mathscr{G} \cup \{\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]\} \rangle$. In dit geval nemen we $\mathcal{A}^- = \mathcal{A} \setminus \{A\}$, $\mathscr{F}^+ = \langle \mathscr{F} \cup \{A\} \rangle$ en $\mathscr{G}^+ = \langle \mathscr{G} \cup \{\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]\} \rangle$. Per veronderstelling is $\mathcal{A}^-$ onafhankelijk van $\mathscr{G}^+$, wegens Lemma 5.11 is $\mathscr{F} \cup \{A\}$ een filtersubbasis, en is $\mathcal{A}^-$ onafhankelijk van $\mathscr{F}^+$. Ook is $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^- = \{A\}$ duidelijk eindig. Als we $X = A$ stellen dan zien we ook duidelijk dat $\mathbb{N} \setminus f^{-1}[X] = \mathbb{N} \setminus f^{-1}[A] \in \langle \mathscr{G} \cup \{\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]\} \rangle = \mathscr{G}^+$.

Geval 2: $\mathscr{G} \cup \{\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]\}$ vormt een filtersubbasis, maar $\mathcal{A} \setminus \{A\}$ is niet onafhankelijk van $\langle \mathscr{G} \cup \{\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]\} \rangle$. Dan zijn er $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \setminus \{A\}$ en $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A} \setminus \{A\}$ eindig en disjunct zodat er een eindige deelfamilie $\vartheta \subseteq \mathscr{G} \cup \{\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]\}$ bestaat waarvoor geldt dat

$$\bigcap \vartheta \cap \bigcap \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{G} = \emptyset.$$

Noem $G = \bigcap(\mathscr{G} \cap \vartheta) \in \mathscr{G}$. In het geval dat $\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A] \in \vartheta$ is het zo dat $\bigcap \vartheta = G \cap (\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A])$. In het geval dat $\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A] \notin \vartheta$ dan geldt dat $\bigcap \vartheta = G$. In beide gevallen zien we dat $G \cap (\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]) \subseteq \bigcap \vartheta$. Dus

$$G \cap (\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]) \cap \bigcap \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{G} = \emptyset.$$

We zien dat $G \cap \bigcap \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{G} \subseteq f^{-1}[A]$. Laat $\mathcal{G}^* = \{\mathbb{N} \setminus G : G \in \mathcal{G}\}$. Wegens Lemma 5.12 is $\mathscr{G} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{G}^*$ een filtersubbasis. Noem $\mathscr{G}^+ = \langle \mathscr{G} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{G}^* \rangle$. Nu geldt dat

$$G \cap \bigcap \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{G} = G \cap \bigcap \mathcal{F} \cap \bigcap \mathcal{G}^* \in \mathscr{G}^+.$$

Er volgt dat $f^{-1}[A] = \mathbb{N} \setminus f^{-1}[\mathbb{N} \setminus A] \in \mathscr{G}^+$. We nemen dus $X = \mathbb{N} \setminus A$. Verder nemen we $\mathscr{F}^+ = \langle \mathscr{F} \cup \{\mathbb{N} \setminus A\} \rangle$ en $\mathcal{A}^- = \mathcal{A} \setminus (\mathcal{F} \cup \mathcal{G} \cup \{A\})$. Uit Lemma 5.11 volgt dat $\mathcal{A}^-$ onafhankelijk is van $\mathscr{F}^+$ en uit Lemma 5.12 volgt dat $\mathcal{A}^-$ onafhankelijk is van $\mathscr{G}^+$. Het is ook duidelijk dat $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}^- = \mathcal{F} \cup \mathcal{G} \cup \{A\}$ eindig is.

Geval 3: $\mathscr{G} \cup \{\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]\}$ vormt geen filtersubbasis. Dan is er een eindige deelfamilie $\vartheta \subseteq \mathscr{G} \cup \{\mathbb{N} \setminus f^{-1}[A]\}$ zodat $\bigcap \vartheta = \emptyset$. In dit geval kunnen we $\mathcal{F} = \mathcal{G} = \emptyset \subseteq \mathcal{A} \setminus \{A\}$ nemen en het bewijs van geval 2 kopiëren.

□

Stelling 5.14 (Kunen)**.** *Er bestaan stijgende rijen filters* $\{\mathscr{F}_\eta\}_{0 \leq \eta < \mathfrak{c}}$ *en* $\{\mathscr{G}_\eta\}_{0 \leq \eta < \mathfrak{c}}$ *die aan eis* $(*)$ *voldoen.*

Bewijs. We gaan $\{\mathscr{F}_\eta\}_{0 \leq \eta < \mathfrak{c}}$ en $\{\mathscr{G}_\eta\}_{0 \leq \eta < \mathfrak{c}}$ met transfiniete recursie maken. Tegelijkertijd maken we een dalende rij $\{\mathcal{A}_\eta\}_{0 \leq \eta < \mathfrak{c}}$ van families deelverzamelingen van $\mathbb{N}$. Op elk stadium van de recursie zorgen we dat $\mathcal{A}_\eta$ oneindig is, en onafhankelijk van zowel $\mathscr{F}_\eta$ als $\mathscr{G}_\eta$. Om ervoor te zorgen dat $\mathcal{A}_\eta$ oneindig is bij een limiet ordinaal, zullen we tijdens de opvolger stap moeten garanderen dat $\mathcal{A}_\eta \setminus \mathcal{A}_{\eta+1}$ eindig is. We gaan ook nodig hebben dat $\mathcal{A}_0$ van kardinaliteit $\mathfrak{c}$ is. Met Lemma 5.13 en Gevolg 5.10 zullen deze zaken echter geen problemen vormen.

Het geval $\eta = 0$. We nemen $\mathscr{F}_0 = \mathscr{G}_0$ het Fréchet filter, en $\mathcal{A}_0$ de familie van Gevolg 5.10.

De opvolger stap. Zij $0 \leq \eta < \mathfrak{c}$ en stel dat we filters $\mathscr{F}_\eta$ en $\mathscr{G}_\eta$ hebben, en een oneindige familie $\mathcal{A}_\eta$ die onafhankelijk is van $\mathscr{F}_\eta$ en $\mathscr{G}_\eta$. Twee toepassingen van Lemma 5.13 leveren filters $\mathscr{F}_{\eta+1} \supseteq \mathscr{F}_\eta$ en $\mathscr{G}_{\eta+1} \supseteq \mathscr{G}_\eta$, en een deelfamilie $\mathcal{A}_{\eta+1} \subseteq \mathcal{A}_\eta$ zodat $\mathcal{A}_{\eta+1}$ onafhankelijk is van $\mathscr{F}_{\eta+1}$ en $\mathscr{G}_{\eta+1}$, $\mathcal{A}_\eta \setminus \mathcal{A}_{\eta+1}$ eindig is en er $X \in \mathscr{F}_{\eta+1}$ en $Y \in \mathscr{G}_{\eta+1}$ bestaan zodat $\mathbb{N} \setminus f_\eta^{-1}[X] \in \mathscr{G}_{\eta+1}$ en $\mathbb{N} \setminus f_\eta^{-1}[Y] \in \mathscr{F}_{\eta+1}$. Omdat $\mathcal{A}_\eta \setminus \mathcal{A}_{\eta+1}$ eindig is en $\mathcal{A}_\eta$ oneindig, is $\mathcal{A}_{\eta+1}$ nog steeds oneindig. Het is duidelijk dat met deze constructie aan eis $(*)$ volaan wordt.

Het limiet ordinaal geval. Stel $0 \leq \eta < \mathfrak{c}$ is een limiet ordinaal en voor elke $0 \leq \lambda < \eta$ hebben we filters $\mathscr{F}_\lambda$ en $\mathscr{G}_\lambda$ en een oneindige familie $\mathcal{A}_\lambda$ die onafhankelijk is van zowel $\mathscr{F}_\lambda$ als $\mathscr{G}_\lambda$. Dan stellen we

$$\mathscr{F}_\eta = \bigcup_{\lambda < \eta} \mathscr{F}_\lambda \qquad \mathscr{G}_\eta = \bigcup_{\lambda < \eta} \mathscr{G}_\lambda \qquad \mathcal{A}_\eta = \bigcap_{\lambda < \eta} \mathcal{A}_\lambda.$$

Eerst tonen we aan dat $\mathcal{A}_\eta$ onafhankelijk is van $\mathscr{F}_\eta$ en $\mathscr{G}_\eta$. Stel hiertoe dat $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}_\eta$ en $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}_\eta$ eindig zijn zodat $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$. Zij $F \in \mathscr{F}_\eta$ arbitrair. Dan is er een $\lambda < \eta$ zodat $F \in \mathscr{F}_\lambda$. Omdat $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}_\eta \subseteq \mathcal{A}_\lambda$ geldt dan dat $F \cap \bigcap \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{G} \neq \emptyset$. Uit dezelfde beredenering volgt dat $\mathcal{A}_\eta$ onafhankelijk is van $\mathscr{G}_\eta$.

Nu gaan we laten zien dat $\mathcal{A}_\eta$ oneindig is. We zorgen er met onze constructie voor dat $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda < \eta}$ dalend is. Dit feit samen met bovenstaande constructie bij een limiet ordinaal zorgen dat de volgende formule waar is.

$$\mathcal{A}_\eta = \bigcap_{\lambda < \eta} \mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}_0 \setminus \left(\bigcup_{\lambda < \eta} \mathcal{A}_\lambda \setminus \mathcal{A}_{\lambda+1} \right).$$

Voor het bewijs van deze formule, merk ten eerste op dat

$$\mathcal{A}_0 \setminus \left(\bigcup_{\lambda<\eta} \mathcal{A}_\lambda \setminus \mathcal{A}_{\lambda+1} \right) = \bigcap_{\lambda<\eta} \mathcal{A}_0 \setminus (\mathcal{A}_\lambda \setminus \mathcal{A}_{\lambda+1}) = \bigcap_{\lambda<\eta} (\mathcal{A}_0 \setminus \mathcal{A}_\lambda) \cup (\mathcal{A}_0 \cap \mathcal{A}_{\lambda+1}) = \bigcap_{\lambda<\eta} (\mathcal{A}_0 \setminus \mathcal{A}_\lambda) \cup \mathcal{A}_{\lambda+1}.$$

Het volstaat dus om het volgende aan te tonen.

$$\bigcap_{\lambda<\eta} \mathcal{A}_\lambda = \bigcap_{\lambda<\eta} (\mathcal{A}_0 \setminus \mathcal{A}_\lambda) \cup \mathcal{A}_{\lambda+1}.$$

Van links naar rechts is eenvoudig. Zij $A \in \bigcap_{\lambda<\eta} \mathcal{A}_\lambda$ en zij $0 \leq \lambda < \eta$ arbitrair. Omdat η een limiet ordinaal is geldt dat $\lambda + 1 < \eta$, er volgt dat $A \in \mathcal{A}_{\lambda+1} \subseteq (\mathcal{A}_0 \setminus \mathcal{A}_\lambda) \cup \mathcal{A}_{\lambda+1}$. Dus $A \in \bigcap_{\lambda<\eta}(\mathcal{A}_0 \setminus \mathcal{A}_\lambda) \cup \mathcal{A}_{\lambda+1}$. De andere kant op doen we met transfiniete inductie. Stel dat $A \in \bigcap_{\lambda<\eta}(\mathcal{A}_0 \setminus \mathcal{A}_\lambda) \cup \mathcal{A}_{\lambda+1}$. Met transfiniete inductie gaan we bewijzen dat $A \in \mathcal{A}_\lambda$ voor elke $\lambda < \eta$. We weten dat $A \in (\mathcal{A}_0 \setminus \mathcal{A}_0) \cup \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_0$, dit bewijst het basis geval. Stel nu dat $A \in \mathcal{A}_\lambda$ voor een zekere $\lambda < \eta$. Dan geldt dat $A \notin \mathcal{A}_0 \setminus \mathcal{A}_\lambda$, we weten ook dat $A \in (\mathcal{A}_0 \setminus \mathcal{A}_\lambda) \cup \mathcal{A}_{\lambda+1}$, dus $A \in \mathcal{A}_{\lambda+1}$. Veronderstel als laatste dat $\lambda < \eta$ een limiet ordinaal is en dat $A \in \mathcal{A}_\sigma$ voor elke $\sigma < \lambda$, dan volgt dat $A \in \bigcap_{\sigma<\lambda} \mathcal{A}_\sigma = \mathcal{A}_\lambda$. We concluderen dat

$$\mathcal{A}_\eta = \mathcal{A}_0 \setminus \left(\bigcup_{\lambda<\eta} \mathcal{A}_\lambda \setminus \mathcal{A}_{\lambda+1} \right).$$

Maar $\mathcal{A}_\lambda \setminus \mathcal{A}_{\lambda+1}$ is eindig, en dus aftelbaar, voor elke $\lambda < \eta$. Dus

$$\left| \bigcup_{\lambda<\eta} \mathcal{A}_\lambda \setminus \mathcal{A}_{\lambda+1} \right| \leq \eta \cdot \aleph_0 \leq \eta \cdot \eta = \eta < \mathfrak{c}.$$

We gooien dus strikt minder dan $\mathfrak{c}$ elementen weg uit de oorspronkelijke familie $\mathcal{A}_0$ die van kardinaliteit $\mathfrak{c}$ is. Er volgt dat $\mathcal{A}_\eta$ van kardinaliteit $\mathfrak{c}$ is (anders kan $\mathfrak{c}$ worden verkregen als vereniging van twee kardinaliteiten strikt kleiner dan $\mathfrak{c}$). Dus $\mathcal{A}_\eta$ is oneindig. □

Gevolg 5.15. *Er zijn $p \in \beta\mathbb{N}$ en $q \in \beta\mathbb{N}$ zodat $p \not\lesssim q$ en $q \not\lesssim p$.*

Bewijs. Zie het bewijs van Gevolg 5.4 □

6 $\mathfrak{c}$ onvergelijkbare elementen

In de vorige paragraaf hebben we twee elementen van $\beta\mathbb{N}$ gevonden die onvergelijkbaar zijn in de Rudin-Keisler preorde. In deze paragraaf gebruiken we de technieken en de stukken gereedschap die we hebben opgebouwd om een deelverzameling $\mathcal{Y} \subseteq \beta\mathbb{N}$ van kardinaliteit $\mathfrak{c}$ te maken waarin voor elk tweetal $p, q \in \mathcal{Y}$ met $p \neq q$ geldt dat p en q onvergelijkbaar zijn. We gaan voor elke $0 \leq \alpha < \mathfrak{c}$ een stijgende rij filters $\{\mathscr{F}_\eta^\alpha\}_{0 \leq \eta < \mathfrak{c}}$ maken die een eis vervullen die analoog is aan eis $(*)$.

We gaan de rijen filters $\{\mathscr{F}_\eta^\alpha\}_{0 \leq \eta < \mathfrak{c}}$ weer met transfiniete recursie maken. Een eerste (doodlopende) poging om de opvolger stap te beschrijven zou als volgt kunnen zijn: stel we hebben $\mathscr{F}_\eta^\alpha$ voor elke $\alpha < \mathfrak{c}$, en een familie $\mathcal{A}_\eta$ die onafhankelijk is van $\mathscr{F}_\eta^\alpha$ voor elke α. Loop dan alle paren (α, β) met $\alpha < \beta < \mathfrak{c}$ langs en breidt $\mathscr{F}_\eta^\alpha$ en $\mathscr{F}_\eta^\beta$ uit met Lemma 5.13. Aan het eind stellen we voor elke $\alpha < \mathfrak{c}$ het filter $\mathscr{F}_{\eta+1}^\alpha$ gelijk aan de vereniging van alle uitbreidingen die $\mathscr{F}_\eta^\alpha$ is ondergaan. We stellen $\mathcal{A}_{\eta+1}$ gelijk aan de doorsnede van alle uitdunningen die $\mathcal{A}_\eta$ tijdens dit proces is ondergaan. Het klopt dat $\mathcal{A}_{\eta+1}$ nu onafhankelijk is van $\mathscr{F}_{\eta+1}^\alpha$ voor elke $\alpha < \mathfrak{c}$. Maar onthou dat $\mathcal{A}_{\eta+1}$ ook nog oneindig moet zijn. Dit is waar het mis kan gaan; er zijn namelijk $\binom{\mathfrak{c}}{2} = \mathfrak{c}$ paren (α, β) met $\alpha < \beta < \mathfrak{c}$. We hebben dus $\mathfrak{c}$ keer eindig veel verzamelingen uit $\mathcal{A}_\eta$ weggegooid. Omdat $\mathcal{A}_\eta \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ heeft deze hoogstens kardinaliteit $\mathfrak{c}$. Aan het einde van dit proces kan $\mathcal{A}_{\eta+1}$ dus eindig of zelfs leeg zijn.

De oplossing is om te accepteren dat we niet de volgorde waarin we de functies langsgaan kunnen bepalen: in plaats van $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ te welordenen, welordenen we $\binom{\mathfrak{c}}{2} \times \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Hier is $\binom{\mathfrak{c}}{2} = \{(\alpha, \beta) : 0 \leq \alpha < \beta < \mathfrak{c}\}$. De kardinaliteit van deze verzameling is $\binom{\mathfrak{c}}{2} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}$. We kunnen hem dus welordenen als $\binom{\mathfrak{c}}{2} \times \mathbb{N}^\mathbb{N} = \{(\alpha_\eta, \beta_\eta, f_\eta) : 0 \leq \eta < \mathfrak{c}\}$. We gaan dus nog steeds alle paren (α, β) met $\alpha < \beta < \mathfrak{c}$ en elke functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ langs, en we gaan er met de opvolger stap voor zorgen dat aan eis $(**)$ voldaan wordt. Maar de volgorde waarin we de functies langslopen is volledig overgelaten aan de Welordeningsstelling van Zermelo. Met transfiniete recursie maken we voor elke $0 \leq \alpha < \mathfrak{c}$ een stijgende rij filters $\{\mathscr{F}_\eta^\alpha\}_{0 \leq \eta < \mathfrak{c}}$ zodat aan de volgende eis voldaan wordt.

$$\text{Voor elke } 0 \leq \eta < \mathfrak{c} \text{ zijn er } X \in \mathscr{F}_{\eta+1}^{\alpha_\eta} \text{ en } Y \in \mathscr{F}_{\eta+1}^{\beta_\eta} \text{ zó dat } \mathbb{N} \setminus f_\eta^{-1}[X] \in \mathscr{F}_{\eta+1}^{\beta_\eta} \text{ en } \mathbb{N} \setminus f_\eta^{-1}[Y] \in \mathscr{F}_{\eta+1}^{\alpha_\eta}. \quad (**)$$

Stelling 6.1. *Voor elke $0 \leq \alpha < \mathfrak{c}$ is er een stijgende rij filters $\{\mathscr{F}_\eta^\alpha\}_{0 \leq \eta < \mathfrak{c}}$ zodat aan eis $(**)$ voldaan wordt.*

Bewijs. We gaan de rijen filters met transfiniete recursie maken. We gaan tegelijkertijd een oneindige familie $\mathcal{A}_\eta \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bijhouden die onafhankelijk is van $\mathscr{F}_\eta^\alpha$ voor elke $\alpha < \mathfrak{c}$. Dit zorgt ervoor dat we Lemma 5.13 kunnen blijven gebruiken tijdens de opvolger stap. Het feit dat voor elke $0 \leq \eta < \mathfrak{c}$ geldt dat $\mathcal{A}_\eta$ oneindig is, en onafhankelijk van $\mathscr{F}_\eta^\alpha$ voor elke $0 \leq \alpha < \mathfrak{c}$, bewijzen we met transfiniete inductie.

Het geval $\eta = 0$. Voor elke $0 \leq \alpha < \mathfrak{c}$ nemen we $\mathscr{F}_0^\alpha$ het Fréchet filter. We nemen $\mathcal{A}_0$ de familie van Gevolg 5.10.

De opvolger stap. Stel $0 \leq \eta < \mathfrak{c}$ en voor elke $0 \leq \alpha < \mathfrak{c}$ hebben we een filter $\mathscr{F}_\eta^\alpha$ en we hebben een oneindige familie $\mathcal{A}_\eta \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ onafhankelijk van al deze filters. Pas dan twee keer Lemma 5.13 toe op $\mathscr{F}_\eta^{\alpha_\eta}$, $\mathscr{F}_\eta^{\beta_\eta}$ en f_η om filters $\mathscr{F}_{\eta+1}^{\alpha_\eta} \supseteq \mathscr{F}_\eta^{\alpha_\eta}$ en $\mathscr{F}_{\eta+1}^{\beta_\eta} \supseteq \mathscr{F}_\eta^{\beta_\eta}$ te verkrijgen, en een familie $\mathcal{A}_{\eta+1} \subseteq \mathcal{A}_\eta$ die onafhankelijk is van $\mathscr{F}_{\eta+1}^{\alpha_\eta}$ en $\mathscr{F}_{\eta+1}^{\beta_\eta}$, waarvoor verder geldt dat $\mathcal{A}_\eta \setminus \mathcal{A}_{\eta+1}$ eindig is. Het is duidelijk dat $\mathcal{A}_{\eta+1}$ dan weer oneindig is. Voor alle $0 \leq \alpha < \mathfrak{c}$ ongelijk aan α_η of β_η laten we het filter onveranderd. We stellen dus $\mathscr{F}_{\eta+1}^\alpha = \mathscr{F}_\eta^\alpha$. Het eenvoudige feit dat deelfamilies van een onafhankelijke familie wederom onafhankelijk zijn verifieert nu dat $\mathcal{A}_{\eta+1}$ onafhankelijk is van $\mathscr{F}_{\eta+1}^\alpha$ voor elke $0 \leq \alpha < \mathfrak{c}$.

Het limiet ordinaal geval. Zij $0 \leq \eta < \mathfrak{c}$ een limiet ordinaal en stel dat we voor elke $\lambda < \eta$ en $0 \leq \alpha < \mathfrak{c}$ een filter $\mathscr{F}_\lambda^\alpha$ en een oneindige familie $\mathcal{A}_\lambda$ hebben zó dat: voor elke $\lambda < \eta$ is $\mathcal{A}_\lambda$ onafhankelijk van $\mathscr{F}_\lambda^\alpha$ voor elke $0 \leq \alpha < \mathfrak{c}$. Voor elke $0 \leq \alpha < \mathfrak{c}$ stellen we dan $\mathscr{F}_\eta^\alpha = \bigcup_{\lambda<\eta} \mathscr{F}_\lambda^\alpha$, en we stellen $\mathcal{A}_\eta = \bigcap_{\lambda<\eta} \mathcal{A}_\lambda$. Het bewijs dat $\mathcal{A}_\eta$ oneindig is, en dat deze onafhankelijk is van $\mathscr{F}_\eta^\alpha$ voor elke $0 \leq \alpha < \mathfrak{c}$ gaat precies zoals in het bewijs van Stelling 5.14. □

Gevolg 6.2. *Er is een deelverzameling $\mathcal{Y} \subseteq \beta\mathbb{N}$ van kardinaliteit $\mathfrak{c}$ waarin elementen onderling onvergelijkbaar zijn in de Rudin-Keislerorde.*

Bewijs. Voor elke $0 \leq \alpha < \mathfrak{c}$, laat $\{\mathscr{F}_\eta^\alpha\}_{0\leq\eta<\mathfrak{c}}$ zijn zoals in Stelling 6.1. Laat p_α een ultrafilter zijn dat $\bigcup_{\eta<\mathfrak{c}} \mathscr{F}_\eta^\alpha$ uitbreidt en stel $\mathcal{Y} = \{p_\alpha : 0 \leq \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq \beta\mathbb{N}$. We tonen aan dat als $\alpha < \beta < \mathfrak{c}$, dan geldt dat $p_\alpha \not\leq p_\beta$ en $p_\beta \not\leq p_\alpha$. Dit laat zien dat de toekenning $\alpha \mapsto p_\alpha$ injectief is, en dat $\mathcal{Y}$ dus inderdaad van kardinaliteit $\mathfrak{c}$ is, en het laat zien dat elementen van $\mathcal{Y}$ onderling onvergelijkbaar zijn. Veronderstel dus dat $\alpha < \beta < \mathfrak{c}$, en laat $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een functie zijn. Neem $0 \leq \eta < \mathfrak{c}$ zodat $(\alpha, \beta, f) = (\alpha_\eta, \beta_\eta, f_\eta)$. Neem $X \in \mathscr{F}_{\eta+1}^{\alpha_\eta} \subseteq p_\alpha$ en $Y \in \mathscr{F}_{\eta+1}^{\beta_\eta} \subseteq p_\beta$ zoals in eis $(**)$. Dan geldt dat $f^{-1}[X] \notin p_\beta$ en $f^{-1}[Y] \notin p_\alpha$. Er volgt dat $p_\alpha \neq f_*(p_\beta)$ en $p_\beta \neq f_*(p_\alpha)$. We concluderen dat p_α en p_β onvergelijkbaar zijn. □

7 $2^{\mathfrak{c}}$ onvergelijkbare elementen

In paragraaf 5 hebben we twee onvergelijkbare elementen in de Rudin-Keislerorde op $\beta\mathbb{N}$ gevonden. In paragraaf 6 overtroffen we dit resultaat door er $\mathfrak{c}$ te vinden. In deze paragraaf gaan we onszelf weer overtreffen door $2^{\mathfrak{c}}$ paarsgewijs onvergelijkbare elementen te vinden. Als we dit gedaan hebben dan is er geen ruimte meer om nog meer onvergelijkbare elementen te vinden; de kardinaliteit van $\beta\mathbb{N}$ is namelijk gelijk aan $2^{\mathfrak{c}}$. We gaan de $2^{\mathfrak{c}}$ onvergelijkbare elementen in twee stappen vinden: eerst veronderstellen we dat $\mathbf{CH}_{\mathfrak{c}}$ niet waar is, in dit geval geldt dus dat $\mathfrak{c}^+ < 2^{\mathfrak{c}}$. S. Shelah [SR78] merkte op dat we dit samen met het feit dat $|\beta\mathbb{N}| = 2^{\mathfrak{c}}$ kunnen gebruiken om het Lemma van de vrije verzameling toe te passen, dit geeft ons dan meteen onze $2^{\mathfrak{c}}$ onvergelijkbare elementen. Vervolgens veronderstellen we dat $\mathbf{CH}_{\mathfrak{c}}$ wel waar is. Er geldt dan dus dat $\mathfrak{c}^+ = 2^{\mathfrak{c}}$ en om deze reden volstaat het om $\mathfrak{c}^+$ onderling onvergelijkbare elementen te vinden. We gaan dit doen met een topologische aanpak.

7.1 Onder $\neg\,\mathbf{CH}_{\mathfrak{c}}$

We nemen aan dat $\mathbf{CH}_{\mathfrak{c}}$ onwaar is. Er geldt nu dus dat $\mathfrak{c}^+ < 2^{\mathfrak{c}}$. Zoals al eerder vermeld is gaan we dit feit gebruiken om het Lemma van de vrije verzameling toe te passen. Het Lemma van de vrije verzameling is het antwoord op een vraag die S. Ruziewicz in 1936 stelde [Ruz36]. De vraag werd in 1961 door A. Hajnal beantwoord en dit resultaat is bekend geraakt als het Lemma van de vrije verzameling [Haj61]. We zullen niet het bewijs van het lemma geven, in plaats daarvan refereren we aan het artikel van Hajnal.

Lemma 7.1 (Het Lemma van de vrije verzameling)**.** *Zij X een oneindige verzameling met $|X| = \alpha$ en zij $\beta < \alpha$ een kardinaalgetal kleiner dat α. Als $F : X \to \mathcal{P}(X)$ voldoet aan*

1. *Voor elke $x \in X$ geldt dat $x \notin F(x)$.*
2. *Voor elke $x \in X$ geldt dat $|F(x)| < \beta$.*

Dan bestaat er een $Y \subseteq X$ zodat $|Y| = \alpha$ en als $x, y \in Y$, dan geldt dat $x \notin F(y)$ en $y \notin F(x)$.

Bewijs. [Haj61] □

We willen het Lemma van de vrije verzameling toepassen met $X = \beta\mathbb{N}$, $\alpha = 2^{\mathfrak{c}}$ en $\beta = \mathfrak{c}^+$. We hebben dus nodig dat $|\beta\mathbb{N}| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Lemma 7.2. $|\beta\mathbb{N}| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Bewijs. We zien $\beta\mathbb{N} \simeq S(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ als de verzameling van alle ultrafilters op $\mathbb{N}$. Omdat $\beta\mathbb{N} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ geldt dat $|\beta\mathbb{N}| \leq 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\mathfrak{c}}$. Het volstaat dus om te bewijzen dat $|\beta\mathbb{N}| \geq 2^{\mathfrak{c}}$. Neem een onafhankelijke familie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ van kardinaliteit $\mathfrak{c}$. We gaan injectief aan elke deelfamilie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ een ultrafilter toekennen. Definieer voor een deelfamilie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ de familie $\mathcal{S}_{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \{A \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}\}$. De onafhankelijkheid van $\mathcal{A}$ vertaalt zich naar de uitspraak dat $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ aan de eindige doorsnede eigenschap voldoet: als $\vartheta \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ eindig is, laat dan $\mathcal{F} = \vartheta \cap \mathcal{B}$ en

$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{A}\backslash\mathcal{B} : \mathbb{N}\backslash A \in \vartheta\}$. Dan geldt dat $\mathcal{F}\cap\mathcal{G} = \emptyset$, want $\mathcal{A}\cap\mathcal{A}\backslash\mathcal{B} = \emptyset$. Ook geldt dat $\vartheta \subseteq \mathcal{F}\cup\{\mathbb{N}\backslash B : B \in \mathcal{G}\}$, want als $A \in \vartheta$ en $A \notin \mathcal{F} = \vartheta \cap \mathcal{B}$ dan geldt dat $A \notin \mathcal{B}$. Omdat $A \in \vartheta \subseteq \mathcal{S}_\mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \{A \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}\}$ volgt nu dat $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. Dus $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{G}$ en $A \in \{\mathbb{N} \setminus B : B \in \mathcal{G}\}$. We concluderen dat

$$\emptyset \neq \bigcap \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{G} = \bigcap(\mathcal{F} \cup \{\mathbb{N} \setminus B : B \in \mathcal{G}) \subseteq \bigcap \vartheta$$

en $\bigcap \vartheta$ is niet leeg. Wegens de Ultrafilterstelling bestaat er nu voor elke $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ een ultrafilter $p_\mathcal{B}$ op $\mathbb{N}$ zodat $\mathcal{S}_\mathcal{B} \subseteq p_\mathcal{B}$. We beweren dat de toekenning $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \to \beta\mathbb{N} : \mathcal{B} \mapsto p_\mathcal{B}$ injectief is. Stel hiertoe dat $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ en $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ twee verschillende deelfamilies van $\mathcal{A}$ zijn en stel zonder beperking der algemeenheid dat er een $A \in \mathcal{B}\backslash\mathcal{C}$ bestaat. Dan geldt dat $A \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}_\mathcal{B} \subseteq p_\mathcal{B}$, dus $A \in p_\mathcal{B}$. Ook geldt dat $\mathbb{N} \setminus A \in \{B \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus B \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C}\} \subseteq \mathcal{S}_\mathcal{C} \subseteq p_\mathcal{C}$, dus $\mathbb{N} \setminus A \in p_\mathcal{C}$. Er volgt dat $A \notin p_\mathcal{C}$, dus $p_\mathcal{B} \neq p_\mathcal{C}$ en de toekenning is injectief. We concluderen dat $|\beta\mathbb{N}| \geq |\mathcal{P}(\mathcal{A})| = 2^\mathfrak{c}$, zoals gewenst. □

Gevolg 7.3 ($\neg$**CH**$_\mathfrak{c}$)**.** *Er is een deelverzameling $\mathcal{Y} \subseteq \beta\mathbb{N}$ van kardinaliteit $2^\mathfrak{c}$ waarin elementen onderling onvergelijkbaar zijn in de Rudin-Keislerorde.*

Bewijs. We definiëren de volgende functie.

$$\begin{aligned} F : \beta\mathbb{N} &\to \mathcal{P}(\beta\mathbb{N}) \\ p &\mapsto \{q \in \beta\mathbb{N} : q \prec p\} \end{aligned}$$

Dan geldt dat $p \notin F(p)$ voor elke $p \in \beta\mathbb{N}$. Ook geldt voor elke $p \in \beta\mathbb{N}$ dat

$$|F(p)| \leq |\{q \in \beta\mathbb{N} : q \preceq p\}| = |\{f_*(p) : f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}| \leq |\mathbb{N}^\mathbb{N}| = \mathfrak{c} < \mathfrak{c}^+.$$

Omdat we veronderstellen dat **CH**$_\mathfrak{c}$ niet waar is geldt dat $\mathfrak{c}^+ < 2^\mathfrak{c} = |\beta\mathbb{N}|$. Het Lemma van de vrije verzameling geeft ons een deelverzameling $\mathcal{Y} \subseteq \beta\mathbb{N}$ zodat $|\mathcal{Y}| = 2^\mathfrak{c}$ en als $p, q \in \mathcal{Y}$, dan geldt dat $p \notin F(q)$ en $q \notin F(p)$. In deze verzameling zijn elementen onderling onvergelijkbaar in de Rudin-Keislerorde: als $p \in \mathcal{Y}$ en $q \in \mathcal{Y}$ verschillende punten zijn, dan geldt dat $p \not\prec q$, want $p \notin F(q)$. Omdat $p \neq q$ volgt nu dat $p \not\preceq q$, op dezelfde manier volgt dat $q \not\preceq p$. □

7.2 Onder CH$_\mathfrak{c}$

We zijn, op de discussie na, bij de laatste deelparagraaf van de scriptie beland. In deze deelparagraaf maken we het bewijs af dat er $2^\mathfrak{c}$ onvergelijkbare elementen in de Rudin-Keislerorde op $\beta\mathbb{N}$ bestaan. We hebben het al bewezen als **CH**$_\mathfrak{c}$ niet waar is. We gaan het nu dus bewijzen onder de veronderstelling dat **CH**$_\mathfrak{c}$ wel waar is. Er geldt dus dat $2^\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^+$ en het volstaat om $\mathfrak{c}^+$ onvergelijkbare elementen te vinden. Om dit te doen gebruiken we een topologische strategie, we volgen paragraaf 4 van het artikel 'β**N**' van A. Dow [Dow98].

Laat $\mathscr{L} = \{f_* : f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\} \subseteq \beta\mathbb{N}^{\beta\mathbb{N}}$. Twee punten $p \in \beta\mathbb{N}$ en $q \in \beta\mathbb{N}$ zijn nu onvergelijkbaar in de Rudin-Keislerorde als $q \in \beta\mathbb{N}\backslash\{f(p)\}$ en $q \in \beta\mathbb{N}\backslash f^{-1}\{p\}$ voor elke $f \in \mathscr{L}$. Het plan zal dus zijn om een onvergelijkbare deelverzameling $\mathcal{Y} \subseteq \beta\mathbb{N}$ bij te houden zodat $\beta\mathbb{N} \setminus \{f(p)\}$ en $\beta\mathbb{N} \setminus f^{-1}\{p\}$ 'dikke' verzamelingen zijn voor elke $p \in \mathcal{Y}$ en elke $f \in \mathscr{L}$. Dit gaat ervoor zorgen dat, als $|\mathcal{Y}| < \mathfrak{c}^+$, we altijd een nieuw punt q kunnen toevoegen zodat $\mathcal{Y} \cup \{q\}$ nog steeds onvergelijkbaar is. We gaan een topologische notie van 'dik' gebruiken, namelijk: $G_{<\kappa}$-dicht.

Definitie 7.4. Zij κ een oneindig kardinaalgetal en (X,τ) een topologische ruimte. Een deelverzameling $A \subseteq X$ die kan worden geschreven als doorsnede van minder dan κ open deelverzamelingen van X heet een **$G_{<\kappa}$-verzameling**. Dat wil zeggen, A is een $G_{<\kappa}$-verzameling dan en slechts dan als er een familie $\mathcal{U} \subseteq \tau$ van open verzamelingen bestaat zodat $|\mathcal{U}| < \kappa$ en $A = \bigcap \mathcal{U}$.

Lemma 7.5. *Zij κ een oneindig kardinaalgetal en (X,τ) een topologische ruimte. Dan is de familie van alle $G_{<\kappa}$-verzamelingen een basis voor een topologie.*

Bewijs. Neem $\mathcal{U} = \emptyset \subseteq \tau$. Er geldt dat $X = \bigcap \emptyset$ en uiteraard geldt dat $|\emptyset| = 0 < \kappa$. Dus X is een $G_{<\kappa}$-verzameling en de familie van alle $G_{<\kappa}$-verzamelingen overdekt X. Als $A \subseteq X$ en $B \subseteq X$ allebei $G_{<\kappa}$-verzamelingen zijn, schrijf dan $A = \bigcap \mathcal{U}_A$ en $B = \bigcap \mathcal{U}_B$ met $\mathcal{U}_A \subseteq \tau$ en $\mathcal{U}_B \subseteq \tau$ zodat $|\mathcal{U}_A| < \kappa$ en $|\mathcal{U}_B| < \kappa$. Er volgt dat $A \cap B = \bigcap \mathcal{U}_A \cap \bigcap \mathcal{U}_B = \bigcap(\mathcal{U}_A \cup \mathcal{U}_B)$, en $|\mathcal{U}_A \cup \mathcal{U}_B| < \kappa$, dus $A \cap B$ is een $G_{<\kappa}$-verzameling en voor elke $x \in A \cap B$ bestaat er een $G_{<\kappa}$-verzameling $C = A \cap B$ zodat $x \in C \subseteq A \cap B$. $\square$

Als (X,τ) een topologische ruimte is dan brengen alle $G_{<\kappa}$-verzamelingen dus een nieuwe topologie op X voort. Deze topologie noteren we als $\tau_{<\kappa}$. Elke open verzameling is natuurlijk een $G_{<\kappa}$-verzameling, dus $\tau \subseteq \tau_{<\kappa}$. Een verzameling die open is in de topologie voortgebracht door $G_{<\kappa}$-verzamelingen noemen we **$G_{<\kappa}$-open**, op vergelijkbare wijze noemen we een verzameling die dicht is in de door $G_{<\kappa}$-verzamelingen voortgebrachte topologie **$G_{<\kappa}$-dicht**. Als $A \subseteq X$ een deelverzameling is dan commuteert het nemen van de $G_{<\kappa}$-topologie met het nemen van de deelruimtetopologie.

Lemma 7.6. *Zij (X,τ) een topologische ruimte en zij $A \subseteq X$ een deelverzameling. Dan geldt dat $(\tau|_A)_{<\kappa} = (\tau_{<\kappa})|_A$.*

Bewijs. Eerst doen we de richting $(\tau|_A)_{<\kappa} \subseteq (\tau_{<\kappa})|_A$. Stel dus dat $U \subseteq A$ een deelverzameling van A is die voldoet aan $U = \bigcap \mathcal{F}$ met $\mathcal{F} \subseteq \tau|_A$ en $|\mathcal{F}| < \kappa$. Voor elke $F \in \mathcal{F}$ bestaat er dan een $G_F \in \tau$ zodat $F = G_F \cap A$. Stel $\mathcal{G} = \{G_F : F \in \mathcal{F}\} \subseteq \tau$. Er geldt dat $|\mathcal{G}| \leq |\mathcal{F}| < \kappa$, dus $\bigcap \mathcal{G} \in \tau_{<\kappa}$. Ook geldt dat $U = \bigcap \mathcal{F} = A \cap \bigcap \mathcal{G}$, dus $U \in (\tau_{<\kappa})|_A$. We zien dat een basis voor de topologie $(\tau|_A)_{<\kappa}$ bevat is in $(\tau_{<\kappa})|_A$, dus de hele topologie $(\tau|_A)_{<\kappa}$ is bevat in $(\tau_{<\kappa})|_A$.

Nu andersom. We weten dat als $\mathcal{B}$ een basis voor de topologie $\mathcal{T}$ is, dan is $\{A \cap B : B \in \mathcal{B}\}$ een basis voor de deelruimtetopologie $\mathcal{T}|_A$. Dus de verzamelingen van de vorm $A \cap \bigcap \mathcal{G}$, met $\mathcal{G} \subseteq \tau$ en $|\mathcal{G}| < \kappa$, vormen een basis voor $(\tau_{<\kappa})|_A$. Laat $U = A \cap \bigcap \mathcal{G}$ zo een verzameling zijn en stel $\mathcal{F} = \{A \cap G : G \in \mathcal{G}\} \subseteq \tau|_A$. Er geldt dat $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{G}| < \kappa$ en dat $U = A \cap \bigcap \mathcal{G} = \bigcap \mathcal{F}$, dus $U \in (\tau|_A)_{<\kappa}$. We zien weer dat een basis voor de topologie $(\tau_{<\kappa})|_A$ bevat is in $(\tau|_A)_{<\kappa}$, dus $(\tau_{<\kappa})|_A \subseteq (\tau|_A)_{<\kappa}$. $\square$

In plaats van om direct in $\beta\mathbb{N}$ te werken, gaan we onze resultaten voor algemene topologische ruimten formuleren. Dit doen we om twee redenen, ten eerste maakt het de zaken wat ordelijker, maar een nog belangrijkere reden is dat we onze resultaten helemaal niet direct op $\beta\mathbb{N}$ kunnen toepassen. In plaats daarvan zullen we de resultaten toepassen op een slim gekozen deelruimte van $\beta\mathbb{N}$. We gaan namelijk een aantal eisen stellen aan de topologische ruimten waarmee we gaan werken, en aan één van deze eisen voldoet $\beta\mathbb{N}$ niet. Het is een beetje inefficiënt om bij elk lemma opnieuw al deze eisen op te sommen, vandaar introduceren we de volgende definitie.

Definitie 7.7. Zij κ een oneindig kardinaalgetal. Een topologische ruimte X noemen we **κ-goed** als aan de volgende drie eisen wordt voldaan.

1. X is compact en Hausdorff.
2. $\chi(x) \geq \kappa$ voor elke $x \in X$.
3. Er is een basis $\mathcal{B} \subseteq CO(X)$ voor de topologie van X zodat $|\mathcal{B}| \leq \kappa$.

Wegens punt 3 is een κ-goede topologische ruimte in het bijzonder nuldimensionaal.

Als we aan het einde de resultaten die we gaan boeken willen toepassen op $\beta\mathbb{N}$, dan zullen we nodig hebben dat $\beta\mathbb{N}$ $\mathfrak{c}$-goed is. Dit is echter niet het geval, $\beta\mathbb{N}$ heeft namelijk wegens Lemma 4.1 geïsoleerde punten, en een geïsoleerd punt heeft karakter $1 < \mathfrak{c}$. We lossen dit op door een deelruimte $X \subseteq \beta\mathbb{N}$ te construeren waarin elk punt wél karakter minstens $\mathfrak{c}$ heeft, en binnen deze deelruimte gaan we onze onvergelijkbare elementen vinden. Dit introduceert echter een nieuw probleem. Het hoeft namelijk niet zo te zijn dat elke functie $f \in \mathscr{L} \subseteq \beta\mathbb{N}^{\beta\mathbb{N}}$ ook automatisch een functie van X naar X is. Het kan namelijk zo zijn dat $f(p) \in \beta\mathbb{N} \setminus X$ voor een zekere $p \in X$. Om dit probleem op te lossen introduceren we de notie van een partiële functie. Merk namelijk op dat als we f beperken tot $X \cap f^{-1}[X]$, dan beeldt f natuurlijk wel af in X, maar nu hoeft f niet meer gedefinieerd te zijn op heel X. Zo een functie noemen we een partiële functie.

Definitie 7.8. Zij X een topologische ruimte. Als $K \subseteq X$ een deelruimte is van X, en $f : K \to X$ is continu, dan heet het paar (K, f) een **partiële functie op** X.

Definitie 7.9. Zij $\mathscr{L}$ een collectie partiële functies op de topologische ruimte X. Een deelverzameling $Y \subseteq X$ is **$\mathscr{L}$-onvergelijkbaar** als voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ en voor elk paar verschillende punten $x, y \in Y$ geldt dat $x \in K$ impliceert dat $y \neq f(x)$.

We verkeren ons nu in de volgende situatie: we hebben een oneindig kardinaalgetal κ, een κ-goede topologische ruimte X en een collectie partiële functies $\mathscr{L}$ op X zodat $|\mathscr{L}| \leq \kappa$. Ons doel is om een $\mathscr{L}$-onvergelijkbare deelverzameling $Y \subseteq X$ te vinden van kardinaliteit κ^+. Dit gaan we doen door voor elke $y \in Y$ en elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ ervoor te zorgen dat $X \setminus \{f(y)\}$ $G_{<\kappa}$-dicht is als $y \in K$, en dat $X \setminus f^{-1}\{y\}$ altijd $G_{<\kappa}$-dicht is. Omdat we eisen dat X κ-goed is geldt al dat $X \setminus \{f(y)\}$ automatisch $G_{<\kappa}$-dicht is. Dit bewijzen we in de twee benedenstaande lemma's.

Lemma 7.10. *Zij X een κ-goede topologische ruimte en zij $x \in X$. Als $\mathcal{U}$ een familie omgevingen van x is zodat $|\mathcal{U}| < \kappa$, dan geldt dat $\bigcap \mathcal{U} \neq \{x\}$.*

Bewijs. Om een tegenspraak uit te lokken veronderstellen we dat $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$. Kies voor elke $U \in \mathcal{U}$ een clopen $G_U \subseteq X$ zodat $x \in G_U \subseteq U$ en laat $\mathcal{G} = \{G_U : U \in \mathcal{U}\}$. Dit kan omdat X nuldimensionaal is. Er geldt ook dat $\bigcap \mathcal{G} = \{x\}$. We beweren dat

$$\mathcal{B}_x = \left\{ \bigcap \vartheta : \vartheta \subseteq \mathcal{G} \text{ eindig} \right\}$$

een lokale basis in x is. Laat U een open omgeving van x zijn. Dan is $X \setminus U$ een gesloten deelverzameling van de compacte ruimte X en daarmee compact. Er geldt dat $X \setminus U \subseteq X \setminus \{x\} = X \setminus \bigcap \mathcal{G} = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} X \setminus G$.

We zien dat $\{X \setminus G : G \in \mathcal{G}\}$ een open overdekking van $X \setminus U$ is. Er bestaat dus een eindige deeloverdekking $\{X \setminus G : G \in \vartheta\} \subseteq \{X \setminus G : G \in \mathcal{G}\}$ zodat $X \setminus U \subseteq \bigcup_{G \in \vartheta} X \setminus G$. Door complement te nemen zien we nu dat $x \in \bigcap \vartheta \subseteq U$. We concluderen dat $\mathcal{B}_x$ een lokale basis is in x. Maar $|\mathcal{B}_x| \leq |[\mathcal{G}]^{<\omega}|$. Als $\mathcal{G}$ eindig is, dan geldt dat $[\mathcal{G}]^{<\omega}$ ook eindig is dus volgt dat $|\mathcal{B}_x| < \kappa$ omdat κ een oneindig kardinaal getal is. In het geval dat $\mathcal{G}$ oneindig is dan volgt dat $|\mathcal{B}_x| \leq |[\mathcal{G}]^{<\omega}| = |\mathcal{G}| \leq |\mathcal{U}| < \kappa$. Dus $\mathcal{B}_x$ is een lokale basis in x met een kardinaliteit kleiner dan κ. Dit spreekt echter tegen dat $\chi(x) \geq \kappa$. We concluderen dat $\bigcap \mathcal{U} \neq \{x\}$. □

Lemma 7.11. *Zij X een κ-goede topologische ruimte en zij $x \in X$, dan is $X \setminus \{x\}$ een $G_{<\kappa}$-dichte verzameling.*

Bewijs. Zij $A \subseteq X$ een niet lege $G_{<\kappa}$-verzameling. Zeg $A = \bigcap \mathcal{U}$ met $\mathcal{U}$ een familie open verzamelingen zodat $|\mathcal{U}| < \kappa$. Neem een $y \in A = \bigcap \mathcal{U}$. Dan is elke $U \in \mathcal{U}$ een omgeving van y en geldt wegens Lemma 7.10 dat $A = \bigcap \mathcal{U} \neq \{y\}$. Dus A bestaat uit minstens twee punten en $A \cap X \setminus \{x\} \neq \emptyset$. □

Bovenstaande lemma garandeert dat $X \setminus \{f(y)\}$ altijd $G_{<\kappa}$-dicht is voor een partiële functie (K, f) en een $y \in K$. We gaan er echter ook nog voor moeten zorgen dat $X \setminus f^{-1}\{y\}$ een $G_{<\kappa}$-dichte verzameling is. Hier gaat het echte werk in zitten, om ons een beetje te helpen volgt een handige definitie.

Definitie 7.12. Zij X een κ-goede topologische ruimte en $\mathscr{L}$ een collectie partiële functies op X. We definiëren $\mathcal{O}(\mathscr{L}, X) \subseteq X$ als alle punten punten $x \in X$ zodat voor elke partiële functie $(K, f) \in \mathscr{L}$ en voor elke niet lege $G_{<\kappa}$-verzameling $A \subseteq X$ geldt dat $A \cap X \setminus f^{-1}\{x\} \neq \emptyset$. In symbolen:

$$x \in \mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall (K, f) \in \mathscr{L} \;\; \forall A \subseteq X \text{ niet leeg en } G_{<\kappa} : A \cap X \setminus f^{-1}\{x\} \neq \emptyset.$$

Met andere woorden: $\mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$ zijn precies de punten $x \in X$ zodat $X \setminus f^{-1}\{x\}$ een $G_{<\kappa}$-dichte verzameling is voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$. De verzameling $\mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$ is dus een vruchtbare plek om te zoeken naar onvergelijkbare elementen. Onze hoop is dan ook dat $\mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$ een 'dikke' verzameling is. Je voelt de bui nu misschien al hangen: we gaan aantonen dat $\mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$ een $G_{<\kappa}$-dichte verzameling is. Dit doen we door een heleboel $G_{<\kappa}$-open en $G_{<\kappa}$-dichte verzamelingen te vinden zodat de doorsnede van al deze verzamelingen bevat is in $\mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$. Vervolgens kunnen we een uitbreiding van de Categoriestelling van Baire gebruiken om te concluderen dat $\mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$ $G_{<\kappa}$-dicht is. Klassiek luidt (een versie van) de Categoriestelling van Baire als volgt: als X een compacte en nuldimensionale ruimte is, dan is de doorsnede van aftelbaar veel open en dichte verzamelingen weer dicht. Wij gaan deze stelling echter uitbreiden naar de volgende uitspraak: als κ een 'mooi' kardinaalgetal is, en als X compact en nuldimensionaal is, dan is de doorsnede van maximaal κ veel $G_{<\kappa}$-open en $G_{<\kappa}$-dichte deelverzamelingen weer $G_{<\kappa}$-dicht. De precieze definitie van een 'mooi' kardinaalgetal is een regulier kardinaalgetal en luidt als volgt.

Definitie 7.13. Zij κ een oneindig kardinaalgetal. κ heet **regulier** als elke vereniging van minder dan κ verzamelingen, allemaal met een kardinaliteit kleiner dan κ, weer kardinaliteit kleiner dan κ heeft. Dat wil zeggen: als $\mathcal{U}$ een familie verzamelingen is met $|\mathcal{U}| < \kappa$, en zodat $|U| < \kappa$ voor elke $U \in \mathcal{U}$, dan geldt dat $|\bigcup \mathcal{U}| < \kappa$. Een oneindig kardinaalgetal dat niet regulier is heet **singulier**.

Voorbeeld 7.14. $\aleph_0$ is regulier, want een eindige vereniging van eindige verzamelingen is weer eindig. Ook is $\aleph_1$ regulier, want een aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen is weer aftelbaar. In het algemeen is het opvolger kardinaal κ^+ voor elk oneindig kardinaal κ regulier. Inderdaad: stel $\mathcal{U}$ is een familie verzamelingen zodat $|\mathcal{U}| < \kappa^+$ en $|U| < \kappa^+$ voor elke $U \in \mathcal{U}$. Dan geldt dat $|\mathcal{U}| \leq \kappa$ en $|U| \leq \kappa$ voor elke $U \in \mathcal{U}$, dus

$$\left|\bigcup \mathcal{U}\right| \leq \sum_{U \in \mathcal{U}} |U| \leq \sum_{U \in \mathcal{U}} \kappa = |\mathcal{U}| \cdot \kappa \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa < \kappa^+.$$

7.2.1 Het reguliere geval

We gaan er vanuit dat κ een regulier kardinaalgetal is. In dit geval hebben we een uitbreiding van de Categoriestelling van Baire tot onze beschikking. Deze gaan we nu bewijzen.

Stelling 7.15 (Een uitbreiding van de Categoriestelling van Baire)**.** *Zij κ een regulier kardinaalgetal en zij X een compacte en nuldimensionale topologische ruimte. Zij $\mathcal{A}$ een familie van $G_{<\kappa}$-open en $G_{<\kappa}$-dichte deelverzamelingen van X zodat $|\mathcal{A}| \leq \kappa$. Dan is $\bigcap \mathcal{A}$ een $G_{<\kappa}$-dichte verzameling.*

Bewijs. We tellen $\mathcal{A} = \{A_\eta : \eta < \kappa\}$ surjectief af. Zij A een niet lege $G_{<\kappa}$-open verzameling. We moeten aantonen dat $A \cap \bigcap_{\eta<\kappa} A_\eta \neq \emptyset$. Hiertoe bewijzen we, met transfiniete inductie, dat er voor elke $\eta < \kappa$ een $x_\eta \in X$ en een collectie clopen verzamelingen $\mathcal{C}_\eta \subseteq CO(X)$ met $|\mathcal{C}_\eta| < \kappa$ bestaan zó dat $x_\eta \in \bigcap \mathcal{C}_\eta \subseteq A \cap \bigcap_{\lambda<\eta} A_\lambda$ en zodat $\{\bigcap \mathcal{C}_\eta : \eta < \kappa\}$ een dalende rij verzamelingen is.

Het geval $\eta = 0$. We hebben verondersteld dat A niet leeg is. Er bestaat dus een $x_0 \in A$. Omdat A een $G_{<\kappa}$-open verzameling is bestaat er nu een $G_{<\kappa}$-verzameling K zodat $x_0 \in K \subseteq A$. Zeg $K = \bigcap \mathcal{U}$, waarbij $\mathcal{U}$ een familie opens is zodat $|\mathcal{U}| < \kappa$. Kies voor elke $U \in U$ een clopen $C_U \subseteq X$ zodat $x_0 \in C_U \subseteq U$. Dit kan omdat X nuldimensionaal is. Stel $\mathcal{C}_0 = \{C_U : U \in \mathcal{U}\}$. Er geldt nu dat $|\mathcal{C}_0| \leq |\mathcal{U}| < \kappa$, en dat $x_0 \in \bigcap \mathcal{C}_0 \subseteq \bigcap \mathcal{U} = K \subseteq A = A \cap \bigcap \emptyset = A \cap \bigcap_{\lambda<0} A_\lambda$.

De opvolger stap. Stel dat we al een $x_\eta \in X$ en een familie $\mathcal{C}_\eta \subseteq CO(X)$ van kardinaliteit kleiner dan κ hebben zodat $x_\eta \in \bigcap \mathcal{C}_\eta \subseteq A \cap \bigcap_{\lambda<\eta} A_\lambda$. Omdat elk element van $\mathcal{C}_\eta$ open is geldt dat $\bigcap \mathcal{C}_\eta$ een $G_{<\kappa}$-verzameling is. Omdat A_η een $G_{<\kappa}$-dichte verzameling volgt is nu dat $\bigcap \mathcal{C}_\eta \cap A_\eta \neq \emptyset$. Neem een $x_{\eta+1} \in \bigcap \mathcal{C}_\eta \cap A_\eta$. De verzamelingen $\bigcap \mathcal{C}_\eta$ en A_η zijn allebei $G_{<\kappa}$-open, dus hun doorsnede $\bigcap \mathcal{C}_\eta \cap A_\eta$ is $G_{<\kappa}$-open er er bestaat een $G_{<\kappa}$-verzameling K zodat $x_{\eta+1} \in K \subseteq \bigcap \mathcal{C}_\eta \cap A_\eta$. Zeg $K = \bigcap \mathcal{U}$ met $\mathcal{U}$ een familie open verzamelingen zodat $|\mathcal{U}| < \kappa$. Neem voor elke $U \in \mathcal{U}$ een clopen $C_U \subseteq X$ zodat $x_{\eta+1} \in C_U \subseteq U$ en stel $\mathcal{C}_{\eta+1} = \{C_U : U \in \mathcal{U}\}$. Dit kan omdat X nuldimensionaal is. Er geldt nu dat $x_{\eta+1} \in \bigcap \mathcal{C}_{\eta+1} \subseteq \bigcap \mathcal{U} = K \subseteq \bigcap \mathcal{C}_\eta \cap A_\eta$. Ten eerste zien we dat $\bigcap \mathcal{C}_{\eta+1} \subseteq \bigcap \mathcal{C}_\eta$, dus we zorgen er inderdaad voor dat de rij verzamelingen $\{\bigcap \mathcal{C}_\eta : \eta < \kappa\}$ dalend wordt. Omdat $\bigcap \mathcal{C}_\eta \subseteq A \cap \bigcap_{\lambda<\eta} A_\lambda$ geldt ook dat $x_{\eta+1} \in \bigcap \mathcal{C}_{\eta+1} \subseteq \left(A \cap \bigcap_{\lambda<\eta} A_\lambda\right) \cap A_\eta = A \cap \bigcap_{\lambda<\eta+1} A_\lambda$.

Het limiet ordinaal geval. Zij $\eta < \kappa$ een limiet ordinaal en stel dat we voor elke $\lambda < \eta$ een $x_\lambda \in X$ en een $\mathcal{C}_\lambda \subseteq CO(X)$ hebben zodat $|\mathcal{C}_\lambda| < \kappa$ en $x_\lambda \in \bigcap \mathcal{C}_\lambda \subseteq A \cap \bigcap_{\alpha<\lambda} A_\alpha$. Laat $\mathcal{C}_\eta = \bigcup_{\lambda<\eta} \mathcal{C}_\lambda$. Omdat $\eta < \kappa$, $|\mathcal{C}_\lambda| < \kappa$ voor elke $\lambda < \eta$ en omdat κ regulier is volgt dat $|\mathcal{C}_\eta| < \kappa$. Er geldt duidelijk dat $\bigcap \mathcal{C}_\eta \subseteq \bigcap \mathcal{C}_\lambda$ voor elke $\lambda < \eta$, dus we maken de rij verzamelingen $\{\bigcap \mathcal{C}_\eta : \eta < \kappa\}$ dalend. Ook geldt dat $\bigcap \mathcal{C}_\eta \subseteq A \cap \bigcap_{\lambda<\eta} A_\lambda$. Inderdaad: als $x \in \bigcap \mathcal{C}_\eta$, dan geldt voor elke $\lambda < \eta$ dat $x \in \bigcap \mathcal{C}_\lambda$. Door $\lambda = 0$ te nemen zien we dat $x \in \bigcap \mathcal{C}_0 \subseteq A$, dus $x \in A$. Als $\lambda < \eta$ dan geldt wegens het feit dat η een limiet ordinaal is ook dat $\lambda + 1 < \eta$. Dus $x \in \bigcap \mathcal{C}_{\lambda+1} \subseteq A \cap \bigcap_{\alpha<\lambda+1} A_\alpha \subseteq A_\lambda$ en $x \in A_\lambda$. We concluderen dat $x \in A \cap \bigcap_{\lambda<\eta} A_\lambda$. Onze bewering is dat

$\mathcal{C}_\eta$ aan de eindige doorsnede eigenschap voldoet. Laat dus $\vartheta \subseteq \mathcal{C}_\eta$ eindig zijn. Dan zijn er $\lambda_1 \dots \lambda_n < \eta$ zodat $\vartheta \subseteq \mathcal{C}_{\lambda_1} \cup \dots \cup \mathcal{C}_{\lambda_n}$. Stel $\lambda = \max\{\lambda_1 \dots \lambda_n\} < \eta$. Omdat $\{\bigcap \mathcal{C}_\lambda : \lambda < \eta\}$ dalend is geldt dat

$$\bigcap \mathcal{C}_\lambda \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap \mathcal{C}_{\lambda_i} \subseteq \bigcap \vartheta.$$

Wegens de inductiehypothese bestaat er een $x_\lambda \in \bigcap \mathcal{C}_\lambda$, dus $\bigcap \vartheta$ is niet leeg. C_η bestaat uit clopen verzamelingen, dus elk element van $\mathcal{C}_\eta$ is gesloten. Compactheid leert ons nu dat $\bigcap \mathcal{C}_\eta$ niet leeg is. Er bestaat dus een $x_\eta \in \bigcap \mathcal{C}_\eta \subseteq A \cap \bigcap_{\lambda<\eta} A_\lambda$.

We hebben nu dus voor elke $\eta < \kappa$ een $x_\eta \in X$ en een collectie clopen verzamelingen $\mathcal{C}_\eta \subseteq CO(X)$ met $|\mathcal{C}_\eta| < \kappa$ zó dat $x_\eta \in \bigcap \mathcal{C}_\eta \subseteq A \cap \bigcap_{\lambda<\eta} A_\lambda$ en zodat $\{\bigcap \mathcal{C}_\eta : \eta < \kappa\}$ een dalende rij verzamelingen is. We stellen $\mathcal{C} = \bigcup_{\eta<\kappa} \mathcal{C}_\eta$. Uit precies dezelfde beredenering als bij het limiet ordinaal geval volgt dat $\bigcap \mathcal{C}$ niet leeg is en dat $\bigcap \mathcal{C} \subseteq A \cap \bigcap_{\eta<\kappa} A_\kappa$. Dus $A \cap \bigcap_{\eta<\kappa} A_\eta$ is niet leeg en $\bigcap_{\eta<\kappa} A_\eta = \bigcap \mathcal{A}$ is $G_{<\kappa}$-dicht. $\square$

Nu we dit Categoriestelling-intermezzo achter de rug hebben kunnen we ons weer richten op ons oorspronkelijke doel. We hadden voor een κ-goede topologische ruimte X en voor een collectie partiële functies $\mathscr{L}$ op X de verzameling $\mathcal{O}(\mathscr{L}, X) \subseteq X$ gedefinieerd als alle punten $x \in X$ zodat $X \setminus f^{-1}\{x\}$ voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ een $G_{<\kappa}$-dichte verzameling is. De punten van $\mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$ zijn dus goede punten om aan een $\mathscr{L}$-onvergelijkbare verzameling toe te voegen. We gaan beargumenteren dat we een collectie van maximaal κ veel $G_{<\kappa}$-open en $G_{<\kappa}$-dichte verzameling kunnen vinden zodat de doorsnede van al deze verzamelingen bevat is in $\mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$. We introduceren hiertoe nog een handige definitie.

Definitie 7.16. Zij X een κ-goede topologische ruimte, zij (K, f) een partiële functie op X en zij $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ een familie deelverzamelingen van X. We definiëren $\mathcal{O}^{\mathcal{B}}_{(K,f)} \subseteq X$ als alle punten $x \in X$ zodat $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ en $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ impliceert dat $\bigcap \mathcal{A} \cap X \setminus f^{-1}\{x\} \neq \emptyset$. in symbolen:

$$x \in \mathcal{O}^{\mathcal{B}}_{(K,f)}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} : \bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset \implies \bigcap \mathcal{A} \cap X \setminus f^{-1}\{x\} \neq \emptyset.$$

Nu we deze definitie gegeven hebben kunnen we ons plan toelichten om een $\mathscr{L}$-onvergelijkbare verzameling $Y \subseteq \mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$ te vinden van kardinaliteit κ^+, gegeven dat $|\mathscr{L}| \leq \kappa$. Het idee is om, als $Y \subseteq \mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$ kardinaliteit $\leq \kappa$ heeft en $\mathscr{L}$-onvergelijkbaar is, een nieuw punt $x \in \mathcal{O}(\mathscr{L}, X) \setminus Y$ te vinden zodat $Y \cup \{x\}$ weer $\mathscr{L}$-onvergelijkbaar is. Als we nu κ^+ vaak een punt blijven toevoegen dan komen we uit op een $\mathscr{L}$-onvergelijkbare verzameling van kardinaliteit κ^+ (dit maken we hard met transfiniete recursie). Om ervoor te zorgen dat x een *nieuw* punt is (dat wil zeggen $x \notin Y$), en dat $Y \cup \{x\}$ weer $\mathscr{L}$-onvergelijkbaar is, dat is het probleem niet zozeer: verzamelingen van de vorm $X \setminus \{y\}$ en $X \setminus \{f(y)\}$ met $y \in Y$ en $(K, f) \in \mathscr{L}$ zijn wegens Lemma 7.11 $G_{<\kappa}$-dicht. Omdat $Y \subseteq \mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$ zijn verzamelingen van de vorm $X \setminus f^{-1}\{y\}$ met $y \in Y$ en $(K, f) \in \mathscr{L}$ ook $G_{<\kappa}$-dicht. Het is ook niet moeilijk in te zien dat al dit soort verzamelingen open, en daarmee $G_{<\kappa}$-open zijn. Als we al deze verzameling doorsnijden dan krijgen we wegens de uitbreiding van de Categoriestelling van Baire een $G_{<\kappa}$-dichte, en dus in het bijzonder een niet lege verzameling. Een punt x uit deze verzameling zit niet in Y, want $x \in X \setminus \{y\}$ voor elke $y \in Y$, en om dezelfde reden zit x ook niet in $\{f(y)\}$ of $f^{-1}\{y\}$ voor een $y \in Y$ en een $(K, f) \in \mathscr{L}$. Dus $Y \cup \{x\}$ is weer $\mathscr{L}$-onvergelijkbaar. De moeilijkheid zit hem er echter in om ervoor te zorgen dat x weer in $\mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$ terecht komt. Dit hebben we nodig want we willen weer dat $Y \cup \{x\} \subseteq \mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$. Dit doen we door maximaal κ $G_{<\kappa}$-open en $G_{<\kappa}$-dichte verzamelingen te vinden waarvan de doorsnede bevat is in $\mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$. Dit gaat in twee stappen. In Lemma's 7.17 en 7.18 laten we zien dat als $\mathscr{B} \subseteq CO(X)$ een Boolese algebra is met $|\mathscr{B}| < \kappa$, dan kunnen we een $G_{<\kappa}$-open en $G_{<\kappa}$-dichte verzameling vinden die bevat is in $\mathcal{O}^{\mathscr{B}}_{(K,f)}$. Vervolgens laten we in Lemma 7.19 zien dat we, als κ regulier is, met maximaal κ Boolese algebra's in $\mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$ kunnen belanden.

Lemma 7.17 (Dow)**.** *Zij X een κ-goede topologische ruimte. Zij verder Y een topologische ruimte met* $\mathrm{wt}(Y) < \kappa$ *en $f : Y \to X$ continu, dan is $f[Y]$ niet $G_{<\kappa}$-dicht in X.*

Bewijs. We willen aantonen dat $f[Y]$ *niet* $G_{<\kappa}$-dicht is. We gaan dus een niet lege $G_{<\kappa}$-verzameling $A \subseteq X$ maken zodat $A \cap f[Y] = \emptyset$. Kies een $x \in f[Y]$ vast. Kies verder een basis $\mathcal{B}$ voor de topologie van Y met $|\mathcal{B}| < \kappa$. Deze bestaat omdat $\mathrm{wt}(Y) < \kappa$. Laat $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}$ alle basiselementen $B \in \mathcal{B}$ zijn zodat er een omgeving U_B van x bestaat waarvoor geldt dat $f[B] \cap U_B = \emptyset$. Kies voor elke $B \in \mathcal{B}^*$ zo een U_B, laat $\mathcal{U} = \{U_B : B \in \mathcal{B}^*\}$ en laat $F = \bigcap \mathcal{U}$. Omdat $|\mathcal{U}| \leq |\mathcal{B}^*| \leq |\mathcal{B}| < \kappa$ is F nu $G_{<\kappa}$. Merk op dat $F \cap f[B] = \emptyset$ voor elke $B \in \mathcal{B}^*$. Wegens Lemma 7.10 geldt dat $F = \bigcap \mathcal{U} \neq \{x\}$. Er is dus een $y \in F$ ongelijk aan x. Omdat X Hausdorff is bestaat er nu een open verzameling $G \subseteq X$ zodat $y \in G$ maar $x \notin G$. Omdat X nuldimensionaal is bestaat er een clopen $C \subseteq X$ zodat $y \in C \subseteq G$. We zien dat $C \cap F$ niet leeg is, want $y \in C \cap F$, maar $x \notin C \cap F$. Omdat κ oneindig is en C open geldt dat $C \cap F$ nog steeds een $G_{<\kappa}$-verzameling is. Stel $A = C \cap F$. We gaan laten zien dat $A \cap f[Y] = \emptyset$. Omdat C open is en f continu geldt dat $f^{-1}[C]$ open is in Y. Voor elke $z \in f^{-1}[C]$ bestaat er dus een $B \in \mathcal{B}$ zodat $z \in B \subseteq f^{-1}[C]$. We zien dat $f[B] \subseteq C$. Als we $U_B = X \setminus C$ stellen dan zien we dat U_B een open omgeving van x is zodat $f[B] \cap U_B = \emptyset$ (onthou dat C clopen is en dat $x \notin C$). Er geldt dus dat $B \in \mathcal{B}^*$ en daarmee dat $F \cap f[B] = \emptyset$. Omdat $z \in B$ zien we nu dat $f(z) \notin F$. We concluderen dat $\emptyset = f[f^{-1}[C]] \cap F = f[Y] \cap C \cap F = f[Y] \cap A$, zoals gewenst. □

Lemma 7.18 (Dow)**.** *Zij X een κ-goede topologische ruimte, zij (K, f) een partiële functie op X met $K \subseteq X$ compact en zij $\mathscr{B} \subseteq CO(X)$ een Boolese algebra met $|\mathscr{B}| < \kappa$. Dan bestaat er een $G_{<\kappa}$-open en $G_{<\kappa}$-dichte verzameling $A \subseteq \mathcal{O}^{\mathscr{B}}_{(K,f)}$.*

Bewijs. We gaan de volgende uitspraak aantonen: als $Q = \bigcap \mathcal{C}$ een niet lege verzameling is, met $\mathcal{C} \subseteq CO(X)$ een familie clopen verzamelingen zodat $|\mathcal{C}| < \kappa$, dan is $Q \setminus \mathcal{O}^{\mathscr{B}}_{(K,f)}$ niet $G_{<\kappa}$-dicht in de deelruimtetopologie van Q. Eerst laten we zien dat we hier inderdaad het lemma mee bewijzen. Stel dus dat de uitspraak waar is, laat $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(X)$ de familie van alle niet lege deelverzamelingen Q zijn zodat $Q = \bigcap \mathcal{C}$, met $\mathcal{C} \subseteq CO(X)$ een familie clopen verzamelingen zodat $|\mathcal{C}| < \kappa$. Voor elke $Q \in \mathcal{Q}$ bestaat er dan een niet lege verzameling $A_Q \subseteq Q$ die $G_{<\kappa}$-open is in de deelruimtetopologie van Q waarvoor geldt dat $A_Q \cap Q \setminus \mathcal{O}^{\mathscr{B}}_{(K,f)} = \emptyset$. Wegens Lemma 7.6 is er dan een $T_Q \subseteq X$ die $G_{<\kappa}$-open is in de topologie van X zodat $A_Q = Q \cap T_Q$. Omdat Q zelf ook $G_{<\kappa}$-open is in de topologie van X volgt dat A_Q een $G_{<\kappa}$-open verzameling is in de topologie van X. Omdat $A_Q \subseteq Q$ en $A_Q \cap Q \setminus \mathcal{O}^{\mathscr{B}}_{(K,f)} = \emptyset$ volgt dat $A_Q \subseteq \mathcal{O}^{\mathscr{B}}_{(K,f)}$. We stellen $A = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} A_Q$. Deze A is dan precies zoals we willen: elke A_Q is bevat in $\mathcal{O}^{\mathscr{B}}_{(K,f)}$, dus $A \subseteq \mathcal{O}^{\mathscr{B}}_{(K,f)}$. A is een vereniging van $G_{<\kappa}$-open verzamelingen en daarmee $G_{<\kappa}$-open. Er resteert aan te tonen dat A $G_{<\kappa}$-dicht is (in de topologie van X). Zij dus S een niet lege $G_{<\kappa}$-verzameling. Stel $S = \bigcap \mathcal{U}$ met $\mathcal{U}$ een familie open verzamelingen zodat $|\mathcal{U}| < \kappa$. Neem een $x \in S$ en voor elke $U \in \mathcal{U}$ een $C_U \in CO(X)$ zodat $x \in C_U \subseteq U$. Dit kan omdat X nuldimensionaal is. Laat $\mathcal{C} = \{C_U : U \in \mathcal{U}\}$ en laat $Q = \bigcap \mathcal{C}$. Dan geldt dat $x \in Q \subseteq S$, dus Q is niet leeg en omdat $|\mathcal{C}| \leq |\mathcal{U}| < \kappa$ bestaat A_Q. Deze verzameling is per definitie niet leeg. Verder geldt dat $A_Q \subseteq Q \subseteq S$ en natuurlijk dat $A_Q \subseteq A$. We zien dat $A_Q \subseteq S \cap A$, dus $S \cap A$ is niet leeg en A is $G_{<\kappa}$-dicht.

We gaan dus de uitspraak aan het begin van het bewijs aantonen. Laat $Q = \bigcap \mathcal{C}$ niet leeg, met $\mathcal{C} \subseteq CO(X)$ zodat $|\mathcal{C}| < \kappa$. We moeten bewijzen dat $Q \setminus \mathcal{O}^{\mathscr{B}}_{(K,f)}$ niet $G_{<\kappa}$-dicht is in de deelruimtetopologie van Q. We gaan dit doen met Lemma 7.17, hier hebben we echter voor nodig dat Q (met de deelruimtetopologie) een κ-goede topologische ruimte is. Dit laten we dus eerst zien

1. Een deelruimte van een Hausdorff topologische ruimte is altijd Hausdorff, die krijgen we dus cadeau. Verder is Q de doorsnede van gesloten verzamelingen, dus Q is gesloten in de compacte ruimte X en daarmee compact.

2. Zij $x \in Q$ en stel om een tegenspraak uit te lokken dat er een lokale basis $\mathcal{B}_x$ in x voor de deelruimtetopologie van Q bestaat zodat $|\mathcal{B}_x| < \kappa$. Laat $\mathcal{B}_Q = \{\bigcap \vartheta : \vartheta \subseteq \mathcal{C} \text{ eindig}\}$. We beweren dat $\mathcal{B}_Q$ een uitwendige basis in Q voor de topologie van X is. Inderdaad: als G open is in X en $Q \subseteq G$ dan geldt dat $X \setminus G \subseteq X \setminus Q = X \setminus \bigcap \mathcal{C} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} X \setminus C$. De verzameling $X \setminus G$ is gesloten in de compacte ruimte X en daarmee compact. We zien dat $\{X \setminus C : C \in \mathcal{C}\}$ een open overdekking is van $X \setminus G$ (want elke $C \in \mathcal{C}$ is clopen), dus is er een eindige deeloverdekking $\{X \setminus C : C \in \vartheta\}$ met $\vartheta \subseteq \mathcal{C}$ eindig. Door weer complement te nemen zien we nu dat $Q \subseteq \bigcap \vartheta \subseteq G$ en $\mathcal{B}_Q$ is een uitwendige basis in Q voor de topologie van X.

   Laat nu $B \in \mathcal{B}_x$. Dan is $Q \setminus B$ gesloten in Q en omdat Q gesloten is in X volgt dat $Q \setminus B$ gesloten is in X, er geldt ook dat $x \notin Q \setminus B$. Omdat X compact en Hausdorff is is X regulier, er bestaan dus $U_B \subseteq X$ en $V_B \subseteq X$ disjunct, open in X en zodat $x \in U_B$ en $Q \setminus B \subseteq V_B$. Laat nu $\mathcal{B}^*_x = \{U_B \cap H : B \in \mathcal{B}_x \text{ en } H \in \mathcal{B}_Q\}$. Onze bewering is dat $\mathcal{B}^*_x$ een lokale basis voor x in de topologie van X is. Laat dus $G \subseteq X$ open in X zodat $x \in G$. Dan is $G \cap Q$ open in de deelruimtetopologie van Q en $x \in G \cap Q$. Er bestaat dus een $B \in \mathcal{B}_x$ zodat $x \in B \subseteq G \cap Q$. Omdat $Q \setminus B \subseteq V_B$ en $B \subseteq G \cap Q \subseteq G$ geldt dat $Q \subseteq V_B \cup G$. Omdat $\mathcal{B}_Q$ een uitwendige basis in Q voor de topologie van X is en omdat $V_B \cup G$ open is in X bestaat er nu een $H \in \mathcal{B}_Q$ zodat $Q \subseteq H \subseteq V_B \cup G$. Omdat V_B en U_B disjunct zijn volgt nu dat $x \in U_B \cap H \subseteq G$. We concluderen dat $\mathcal{B}^*_x$ een lokale basis in x voor de topologie van X is. Er geldt echter dat $|\mathcal{B}^*_x| \leq |\mathcal{B}_x \times \mathcal{B}_Q| \leq |\mathcal{B}_x| \cdot |[\mathcal{C}]^{<\omega}| < \kappa$.

   Er geldt echter dat het karakter van x in de topologie van X minstens κ is, want X is κ-goed, dus een lokale basis in x met een kardinaliteit kleiner dan κ kan helemaal niet bestaan. We zijn dus op een tegenspraak uitgekomen. We concluderen dat de lokale basis $\mathcal{B}_x$ in x voor de deelruimtetopologie van Q niet kan bestaan. Dus het karakter van x in de deelruimtetopologie van Q is ook minstens κ.

3. Omdat X κ-goed is bestaat er een basis $\mathcal{B} \subseteq CO(X)$ voor de topologie van X zodat $|\mathcal{B}| \leq \kappa$. Nu is $\mathcal{B}' = \{B \cap Q : B \in \mathcal{B}\} \subseteq CO(Q)$ een basis voor de deelruimtetopologie van Q waarvoor geldt dat $|\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}| \leq \kappa$.

Nu we weten dat Q κ-goed is, gaan we de topologische ruimte Y met $\mathrm{wt}(Y) < \kappa$ maken, en een continue functie $g : Y \to Q$ zodat $Q \setminus \mathcal{O}^{\mathscr{B}}_{(K,f)} \subseteq g[Y]$. Uit Lemma 7.17 volgt dan dat $g[Y]$ niet $G_{<\kappa}$-dicht is in Q en dan zien we dat $Q \setminus \mathcal{O}^{\mathscr{B}}_{(K,f)}$ niet $G_{<\kappa}$-dicht is in Q. Laat hiertoe $S(\mathscr{B})$ de Stoneruimte van $\mathscr{B}$ zijn en laat $Y \subseteq S(\mathscr{B})$ alle ultrafilters $p \in S(\mathscr{B})$ beperkt tot $\mathscr{B}$ zijn zodat $f[\bigcap p \cap K] = \{x_p\}$ een singleton is met $x_p \in Q$. Dit geeft ons meteen de functie

$$\begin{aligned} g : Y &\to Q \\ p &\mapsto x_p. \end{aligned}$$

We geven Y de deelruimtetopologie. Merk op dat $\mathcal{B} = \{B_A \cap Y : A \in \mathscr{B}\}$, met $B_A = \{q \in S(\mathscr{B}) : A \in q\}$ een basiselement voor de topologie van $S(\mathscr{B})$, een basis is voor de topologie van Y waarvoor geldt dat $|\mathcal{B}| \leq |\mathscr{B}| < \kappa$. Dus $\mathrm{wt}(Y) < \kappa$. We gaan laten zien dat g continu is. Onthou hiertoe dat $\{Q \cap C : C \in CO(X)\}$ een basis is voor de deelruimtetopologie van Q (want X is nuldimensionaal). We hoeven dus alleen voor deze verzamelingen te verifiëren dat het inverse beeld onder g open is in Y. Laat dus $C \subseteq X$ clopen en laat $p \in g^{-1}[Q \cap C]$. Dan geldt dat $f[\bigcap p \cap K] = \{x_p\} = \{g(p)\} \subseteq Q \cap C \subseteq C$ en er volgt dat $\bigcap p \cap K \subseteq f^{-1}[C]$. Door complement te nemen in K volgt dat $K \setminus f^{-1}[C] \subseteq \bigcup\{K \setminus P : P \in p\}$. We hebben verondersteld dat K compact is, omdat C open is in X en omdat $f : K \to X$ continu is volgt dat $K \setminus f^{-1}[C]$ gesloten is in K en omdat K compact is volgt dat $K \setminus f^{-1}[C]$ compact is. Onthou dat $p \in Y \subseteq S(\mathscr{B})$ een ultrafilter beperkt tot $\mathscr{B}$ is, elk element $P \in p$ is dus een element van $\mathscr{B} \subseteq CO(X)$. Dus elke $P \in p$ is gesloten in X en $K \setminus P = K \cap (X \setminus P)$ is open in K voor elke $P \in p$. We zien dat $\{K \setminus P : P \in p\}$ een open (in K) overdekking van de compacte verzameling $K \setminus f^{-1}[C]$ is. Er zijn dus $P_1 \dots P_n \in p$ zodat $K \setminus f^{-1}[C] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K \setminus P_i$. Door weer complement te nemen in K zien we dat $K \cap \bigcap_{i=1}^{n} P_i \subseteq K \cap f^{-1}[C] = f^{-1}[C]$. Laat $P = \bigcap_{i=1}^{n} P_i \subseteq X$, omdat p is gesloten onder het nemen van eindige doorsneden (want p is een filter) geldt dat $P \in p$. Ook zien we nu dat $K \cap P \subseteq f^{-1}[C]$ en dus dat $f[K \cap P] \subseteq C$. We beweren dat $p \in Y \cap B_P \subseteq g^{-1}[Q \cap C]$. Hier is $B_P = \{q \in S(\mathscr{B}) : P \in q\}$ het basiselement voor de topologie van $S(\mathscr{B})$ dat hoort bij de verzameling $P \in p \subseteq \mathscr{B}$. Het feit dat $p \in Y \cap B_P$ is duidelijk: we weten dat $p \in g^{-1}[Q \cap C] \subseteq Y$ en dat $P \in p$. Stel nu dat $q \in Y \cap B_P$. Dan geldt dus dat $P \in q$ en dat $f[\bigcap q \cap K] = \{x_q\}$ een singleton is in Q (per definitie van Y). Omdat $P \in q$ geldt dat $\bigcap q \cap K \subseteq P \cap K$ en nu volgt dat $\{x_q\} = f[\bigcap q \cap K] \subseteq f[P \cap K] \subseteq C$. Dus $x_q = g(q) \in C$, per de definitie van Y en g geldt ook dat $x_q = g(q) \in Q$, dus $q \in g^{-1}[Q \cap C]$. Er geldt dus inderdaad dat $p \in Y \cap B_P \subseteq Y \cap g^{-1}[C]$. Omdat B_P een basiselement in de Stoneruimte $S(\mathscr{B})$ is, is $Y \cap B_P$ een basiselement voor de deelruimtetopologie van Y. Dus $g^{-1}[Q \cap C]$ is open in Y en g is continu.

Uit Lemma 7.17 volgt nu dat $g[Y]$ niet $G_{<\kappa}$-dicht is in Q. Er resteert slechts nog aan te tonen dat $Q \setminus \mathcal{O}^{\mathscr{B}}_{(K,f)} \subseteq g[Y]$, dan volgt namelijk dat $Q \setminus \mathcal{O}^{\mathscr{B}}_{(K,f)}$ niet $G_{<\kappa}$-dicht is in Q, en dit is wat we wilden bewijzen. Zij dus $x \in Q \setminus \mathcal{O}^{\mathscr{B}}_{(K,f)}$. Dan geldt dat $x \in Q$, en er is een deelfamilie $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{B}$ zodat $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ en $\bigcap \mathcal{A} \cap X \setminus f^{-1}\{x\} = \emptyset$, dus $\bigcap \mathcal{A} \subseteq f^{-1}\{x\}$. Neem een $y \in \bigcap \mathcal{A}$. Dan geldt dat $y \in f^{-1}\{x\} \subseteq f^{-1}[X] = K$, dus $f(y)$ is gedefinieerd en gelijk aan x. Laat $\mathscr{F}_y = \{F \in \mathscr{B} : y \in F\}$. Uit dezelfde beredenering als in Voorbeeld 2.10 volgt dat $\mathscr{F}_y$ een ultrafilter op X beperkt tot $\mathscr{B}$ is, dus $\mathscr{F}_y \in S(\mathscr{B})$. We gaan laten zien dat $\mathscr{F}_y \in Y$, en dat $g(\mathscr{F}_y) = x$. Merk hiertoe op dat voor elke $A \in \mathcal{A}$ geldt dat $y \in A$ en dat $A \in \mathscr{B}$. Dus $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{F}_y$ en $\bigcap \mathscr{F}_y \subseteq \bigcap \mathcal{A} \subseteq f^{-1}\{x\}$. Er volgt dat $f[\bigcap \mathscr{F}_y \cap K] \subseteq \{x\}$. Omdat $y \in \bigcap \mathscr{F}_y \cap K$ en omdat $f(y) = x$ geldt ook dat $x \in f[\bigcap \mathscr{F}_y \cap K]$. Dus $f[\bigcap \mathscr{F}_y \cap K] = \{x\}$ is een singleton met $x \in Q$ en er geldt dat $\mathscr{F}_y \in Y$ en $g(\mathscr{F}_y) = x$. We concluderen dat $x \in g[Y]$ en dat $Q \setminus \mathcal{O}^{\mathscr{B}}_{(K,f)} \subseteq g[Y]$. Omdat $g[Y]$ niet $G_{<\kappa}$-dicht is volgt nu dat $Q \setminus \mathcal{O}^{\mathscr{B}}_{(K,f)}$ niet $G_{<\kappa}$-dicht is. We hebben dus de uitspraak aan het begin van het bewijs aangetoond en daarmee het lemma bewezen. $\square$

Lemma 7.19. *Stel dat κ regulier is. Zij X een κ-goede topologische ruimte en zij $\mathscr{L}$ een collectie partiële functies op X. Omdat X κ-goed is bestaat er een basis $\mathcal{B} \subseteq CO(X)$ voor de topologie van X met $|\mathcal{B}| \leq \kappa$. Tel $\mathcal{B} = \{B_\eta : \eta < \kappa\}$ surjectief af en definieer voor elke $\eta < \kappa$ de familie $\mathcal{B}_\eta = \{B_\lambda : \lambda \leq \eta\}$. Dan geldt dat*

$$\bigcap_{(K,f) \in \mathscr{L}} \bigcap_{\eta < \kappa} \mathcal{O}^{\mathscr{B}(\mathcal{B}_\eta)}_{(K,f)} \subseteq \mathcal{O}(\mathscr{L}, X).$$

Hier is $\mathscr{B}(\mathcal{B}_\eta)$ de Boolese algebra voortgebracht door $\mathcal{B}_\eta$.

Bewijs. Veronderstel dat $x \in \bigcap_{(K,f) \in \mathscr{L}} \bigcap_{\eta < \kappa} \mathcal{O}^{\mathscr{B}(\mathcal{B}_\eta)}_{(K,f)}$, laat $(K,f) \in \mathscr{L}$ arbitrair en laat A een arbitraire niet lege $G_{<\kappa}$-verzameling zijn. Zeg $A = \bigcap \mathcal{U}$ met $\mathcal{U}$ een collectie open verzamelingen zodat $|\mathcal{U}| < \kappa$. Neem een $y \in \bigcap \mathcal{U}$ en kies voor elke $U \in \mathcal{U}$ een $B_U \in \mathcal{B}$ zodat $y \in B_U \subseteq U$. Stel $\mathcal{B}' = \{B_U : U \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{B}$. Dan geldt dat $y \in \bigcap \mathcal{B}' \subseteq \bigcap \mathcal{U} = A$ en dat $|\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{U}| < \kappa$. We beweren dat er een $\eta < \kappa$ bestaat zodat $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}_\eta$. Inderdaad: voor elke $B \in \mathcal{B}'$ bestaat er een $\lambda < \kappa$ zodat $B = B_\lambda$. Kies voor elke $B \in \mathcal{B}'$ zo een λ en laat $\Lambda = \{\lambda : B \in \mathcal{B}'\}$.

Er geldt dat $|\Lambda| \leq |\mathcal{B}'| < \kappa$. Omdat κ regulier is volgt dat $\sup \Lambda \leq |\sqcup_{\lambda\in\Lambda} \lambda| < \kappa$. We kunnen dus $\eta = \sup \Lambda$ nemen. Zij nu $B \in \mathcal{B}'$. Dan is er per constructie een $\lambda \in \Lambda$ zodat $B = B_\lambda$, en omdat $\lambda \leq \sup \Lambda = \eta$ zien we nu dat $B = B_\lambda \in \mathcal{B}_\eta$, dus $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}_\eta$. Er volgt dat $\mathcal{B}' \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{B}_\eta)$ een deelfamilie van $\mathscr{B}(\mathcal{B}_\eta)$ is die niet leeg is (want $y \in \bigcap \mathcal{B}'$). Wegens de definitie van $\mathcal{O}^{\mathscr{B}(\mathcal{B}_\eta)}_{(K,f)}$ volgt er nu dat $\bigcap \mathcal{B}' \cap X \setminus f^{-1}\{x\} \neq \emptyset$. Omdat $\bigcap \mathcal{B}' \subseteq A$ is het dan zo dat $A \cap X \setminus f^{-1}\{x\} \neq \emptyset$, dus $x \in \mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$. □

Stelling 7.20 (Dow)**.** *Zij $\kappa > \aleph_0$ een regulier kardinaalgetal. Zij X een κ-goede topologische ruimte, $\mathscr{L}$ een collectie partiële functies op X zodat $|\mathscr{L}| \leq \kappa$ en zodat K compact is voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$. Zij verder $Y \subseteq \mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$ zodat $|Y| \leq \kappa$. Dan bestaat er een $x \in \mathcal{O}(\mathscr{L}, X) \setminus Y$ zó dat voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ en voor elke $y \in Y$ geldt dat $x \notin f^{-1}\{y\}$, en $x \neq f(y)$ als $y \in K$.*

Bewijs. Neem een basis $\mathcal{B} \subseteq CO(X)$ voor de topologie van X zodat $|\mathcal{B}| \leq \kappa$ en tel $\mathcal{B} = \{B_\eta : \eta < \kappa\}$ surjectief af, de basis $\mathcal{B}$ bestaat omdat we hebben verondersteld dat X κ-goed is. Definieer voor elke $\eta < \kappa$ de deelfamilie $\mathcal{B}_\eta = \{B_\lambda : \lambda \leq \eta\} \subseteq \mathcal{B}$. Dan geldt dat $|\mathcal{B}_\eta| \leq |\eta + 1| < \kappa$. Uit Lemma 3.7 volgt nu dat $|\mathscr{B}(\mathcal{B}_\eta)| \leq \max\{\aleph_0, |\mathcal{B}_\eta|\} < \kappa$. Omdat $CO(X)$ een Boolese algebra is en omdat $\mathcal{B}_\eta \subseteq \mathcal{B} \subseteq CO(X)$ volgt dat $\mathscr{B}(\mathcal{B}_\eta) \subseteq CO(X)$. We hebben verondersteld dat K compact is voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$, uit Lemma 7.18 volgt dat er voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ en voor elke $\eta < \kappa$ een $G_{<\kappa}$-open en $G_{<\kappa}$-dichte verzameling $A^\eta_{(K,f)} \subseteq \mathcal{O}^{\mathscr{B}(\mathcal{B}_\eta)}_{(K,f)}$ bestaat.

Omdat X Hausdorff is, zijn singletons gesloten. Er volgt dat $X \setminus \{y\}$ open is voor elke $y \in Y$, dat $X \setminus \{f(y)\}$ open is voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ en $y \in K \cap Y$ en dat $X \setminus f^{-1}\{y\}$ open is voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ en $y \in Y$. Omdat de topologie van X is bevat in de $G_{<\kappa}$-topologie zijn al deze verzamelingen dus $G_{<\kappa}$-open. Per definitie van $\mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$ is $X \setminus f^{-1}\{y\}$ telkens $G_{<\kappa}$-dicht en wegens Lemma 7.11 zijn de verzamelingen $X \setminus \{y\}$ en $X \setminus \{f(y)\}$ telkens $G_{<\kappa}$-dicht. Benedenstaande familie verzamelingen bestaat dus uit $G_{<\kappa}$-open en $G_{<\kappa}$-dichte verzamelingen.

$$\begin{aligned}
\Sigma = &\left\{A^\eta_{(K,f)} : (K, f) \in \mathscr{L} \text{ en } \eta < \kappa\right\} \\
&\cup \{X \setminus \{y\} : y \in Y\} \\
&\cup \{X \setminus \{f(y)\} : (K, f) \in \mathscr{L} \text{ en } y \in Y \cap K\} \\
&\cup \left\{X \setminus f^{-1}\{y\} : (K, f) \in \mathscr{L} \text{ en } y \in Y\right\}.
\end{aligned}$$

Ook is de kardinaliteit van Σ kleiner of gelijk aan κ, inderdaad:

$$\begin{aligned}
|\Sigma| &\leq |\mathscr{L}| \cdot \kappa + |Y| + \sum_{(K,f)\in\mathscr{L}} |Y \cap K| + |\mathscr{L} \times Y| \\
&\leq \kappa \cdot \kappa + \kappa + \sum_{(K,f)\in\mathscr{L}} |Y| + \kappa \cdot \kappa \\
&= \kappa + |\mathscr{L} \times Y| \leq \kappa + \kappa \cdot \kappa = \kappa.
\end{aligned}$$

Met de uitbreiding van de Categoriestelling van Baire mogen we nu concluderen dat $\bigcap \Sigma$ een $G_{<\kappa}$-dichte verzameling is. In het bijzonder is $\bigcap \Sigma$ niet leeg, neem dus een $x \in \bigcap \Sigma$, deze x is dan precies zoals we willen. Inderdaad: κ is regulier dus uit Lemma 7.19 volgt dat

$$\bigcap \Sigma \subseteq \bigcap_{(K,f)\in\mathscr{L}} \bigcap_{\eta<\kappa} A^\eta_{(K,f)} \subseteq \bigcap_{(K,f)\in\mathscr{L}} \bigcap_{\eta<\kappa} \mathcal{O}^{\mathscr{B}(\mathcal{B}_\eta)}_{(K,f)} \subseteq \mathcal{O}(\mathscr{L}, X),$$

dus $x \in \mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$. Omdat $x \in X \setminus \{y\}$ voor elke $y \in Y$ volgt nu dat $x \in \mathcal{O}(\mathscr{L}, X) \setminus Y$. Het feit dat $x \notin \{f(y)\}$ als $(K, f) \in \mathscr{L}$ en $y \in K \cap Y$ en dat $x \notin f^{-}\{y\}$ voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ en $y \in Y$ komt natuurlijk doordat x telkens in het complement van zulke verzamelingen zit. $\square$

Gevolg 7.21. *Zij $\kappa > \aleph_0$ een regulier kardinaalgetal en zij X een κ-goede topologische ruimte. Zij verder $\mathscr{L}$ een collectie partiële functies zodat $|\mathscr{L}| \leq \kappa$ en zodat K compact is voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$. Dan bestaat er een $\mathscr{L}$-onvergelijkbare deelverzameling $Y \subseteq X$ van kardinaliteit κ^+.*

Bewijs. We gaan met transfiniete recursie voor elke $\eta < \kappa^+$ een verzameling $Y_\eta \subseteq \mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$ maken zodat $\{Y_\eta : \eta < \kappa^+\}$ wordt welgeordend door $\subseteq$ en zodat het ordetype van Y_η gelijk is aan η voor elke $\eta < \kappa^+$. Daarnaast zorgen we er op elk stadium van de recursie natuurlijk voor dat Y_η $\mathscr{L}$-onvergelijkbaar is. Aan het einde stellen we $Y = \bigcup_{\eta < \kappa^+} Y_\eta$.

Het geval $\eta = 0$. Stel $Y_0 = \emptyset$.

De opvolger stap. Zij $\eta < \kappa^+$ een ordinaalgetal en veronderstel dat we een $\mathscr{L}$-onvergelijkbare verzameling $Y_\eta \subseteq \mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$ hebben zodat het ordetype van Y_η gelijk is aan η. Omdat het ordetype van Y_η gelijk is aan $\eta < \kappa^+$ geldt dat $|Y_\eta| \leq \kappa$. Wegens Stelling 7.20 bestaat er dan een $x \in \mathcal{O}(\mathscr{L}, X) \setminus Y_\eta$ zodat voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ en voor elke $y \in Y_\eta$ geldt dat $x \notin f^{-1}\{y\}$, en $x \neq f(y)$ als $y \in K$. Stel $Y_{\eta+1} = Y_\eta \cup \{x\}$. Dan is het ordetype van $Y_{\eta+1}$ gelijk aan $\eta + 1$. Ook is $\mathcal{Y}_{\eta+1}$ $\mathscr{L}$-onvergelijkbaar. Inderdaad: zij $(K, f) \in \mathscr{L}$ en stel dat $s \in Y_{\eta+1}$ en $t \in Y_{\eta+1}$ verschillend zijn en dat $s \in K$. Dan zijn er drie mogelijkheden: ofwel $s, t \in Y_\eta$, nu volgt dat $t \neq f(s)$ uit de inductiehypothese, in het geval dat $s = x$ en $t \in Y_\eta$ volgt dat $t \neq f(s)$ want $s = x \notin f^{-1}\{t\}$. In het laatste geval waarin $t = x$ en $s \in Y_\eta$ dan geldt dat $t = x \neq f(s)$ want $s \in Y_\eta$ en $s \in K$.

Het limiet ordinaal geval. Zij η een limiet ordinaal. Stel dat we voor elke $\lambda < \eta$ een $\mathscr{L}$-onvergelijkbare verzameling $Y_\lambda \subseteq \mathcal{O}(\mathscr{L}, X)$ hebben zodat het ordetype van Y_λ gelijk is aan λ. Stel dan $Y_\eta = \bigcup_{\lambda < \eta} Y_\lambda$. Nu geldt dat het ordetype gelijk is aan η, en dat Y_η $\mathscr{L}$-onvergelijkbaar is: als $(K, f) \in \mathscr{L}$ en als $s \in Y_\eta$ en $t \in Y_\eta$ verschillend zijn zodat $s \in K$, dan zijn er $\lambda_1 < \eta$ en $\lambda_2 < \eta$ zodat $s \in Y_{\lambda_1}$ en $t \in Y_{\lambda_2}$. Neem $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\} < \eta$. Dan geldt dat $s, t \in Y_\lambda$ en dus geldt dat $t \neq f(s)$.

Nu we de verzamelingen $\{Y_\eta : \eta < \kappa^+\}$ hebben kunnen we $Y = \bigcup_{\eta < \kappa^+} Y_\eta$ stellen. Omdat het ordetype van Y_η altijd gelijk is aan η geldt dat $|Y| = \kappa^+$. Uit dezelfde beredenering als bij het limiet ordinaal geval volgt dat als $(K, f) \in \mathscr{L}$ en als $s \in Y$ en $t \in Y$ verschillend zijn zodat $s \in K$, dan geldt dat $t \neq f(s)$. Dus Y is $\mathscr{L}$-onvergelijkbaar. $\square$

We willen graag Gevolg 7.21 toepassen op een $\mathfrak{c}$-goede deelruimte $X \subseteq \beta\mathbb{N}$. Voor elke $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ stellen we dan $K_f = X \cap f_*^{-1}[X]$ en we stellen $\mathscr{L} = \{(K_f, f_*|_{K_f}) : f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$. Dan geldt dat $|\mathscr{L}| \leq \left|\mathbb{N}^\mathbb{N}\right| = \mathfrak{c}$, dus Gevolg 7.21 geeft ons nu $\mathfrak{c}^+$ $\mathscr{L}$-onvergelijkbare elementen in X. Helaas, was het maar zo eenvoudig. In Gevolg 7.21 eisen we van het kardinaalgetal κ dat het regulier is. We hebben dus nodig dat $\mathfrak{c}$ regulier is. Is dit zo? Het antwoord is: misschien. De veronderstelling dat $\mathfrak{c}$ regulier is is onafhankelijk van verzamelingenleer. We kunnen dus niet zonder extra verzamelingtheoretische beperkingen concluderen dat $\mathfrak{c}$ regulier is. We gaan dus eerst nog iets moeten verzinnen voor het geval dat κ singulier is.

7.2.2 Het singuliere geval

We gaan het singuliere geval bewijzen door herhaaldelijk onze resultaten voor het reguliere geval toe te passen. Hiervoor gaan we ons singuliere kardinaalgetal κ benaderen met een stijgende rij reguliere kardinaalgetallen $\{\kappa_\eta : \eta < \sigma\}$. Vervolgens construeren we voor elke $\eta < \sigma$ een κ_η-goede topologische ruimte X_η die X ook op een zekere manier benaderen. Wat we precies bedoelen met topologische ruimten die elkaar benaderen maken we hard met een constructie die bekend staat als een invers systeem.

Definitie 7.22. Zij σ een limiet ordinaal en stel dat we voor elke $\eta < \sigma$ een topologische ruimte X_η hebben, en voor elke $\eta \leq \eta' < \sigma$ hebben we een continue functie $g_\eta^{\eta'} : X_{\eta'} \to X_\eta$ zodat $g_\eta^\eta = \mathrm{id}_{X_\eta}$ voor elke $\eta < \sigma$ en $g_{\eta^*}^\eta \circ g_\eta^{\eta'} = g_{\eta^*}^{\eta'}$ voor elke $\eta^* \leq \eta \leq \eta' < \sigma$. In dit geval noemen we $\{X_\eta, g_\eta^{\eta'}\}$ een **invers systeem**, de functies $g_\eta^{\eta'}$ heten de **verbindingsfuncties**. De **inverse limiet** van $\{X_\eta, g_\eta^{\eta'}\}$ noteren we als $\lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta$ en is gedefinieerd als alle punten $(x_\eta)_{\eta<\sigma} \in \prod_{\eta<\sigma} X_\eta$ zodat $x_\eta = g_\eta^{\eta'}(x_{\eta'})$ voor elke $\eta \leq \eta' < \sigma$.

Lemma 7.23. *Zij κ een singulier kardinaalgetal. Dan bestaat er een limiet ordinaal σ en een strikt stijgende rij reguliere kardinaalgetallen $\{\kappa_\eta : \eta < \sigma\}$ zodat $\sup_{\eta<\sigma} \kappa_\eta = \kappa$ en $\kappa_\eta > \aleph_0$ voor elke $\eta < \sigma$.*

Bewijs. Laat σ het ordinaalgetal zijn zodat $\kappa = \aleph_\sigma$. Als $\sigma = \sigma' + 1$ een opvolger ordinaal zou zijn dan zou volgen dat $\kappa = \aleph_\sigma = \aleph_{\sigma'}^+$ een opvolger kardinaal is, dus dan zou volgen dat κ regulier is en we hebben juist verondersteld dat κ singulier is. Dus σ is een limiet ordinaal. Voor elke $\eta < \sigma$ stel $\kappa_\eta = \aleph_{\eta+1}$. Dan is elke κ_η regulier, want $\kappa_\eta = \aleph_\eta^+$ is een opvolger kardinaal, ook geldt duidelijk dat $\{\kappa_\eta : \eta < \sigma\}$ strikt stijgend is en dat $\kappa_\eta \geq \kappa_0 = \aleph_1 > \aleph_0$ voor elke $\eta < \sigma$. Ook zien we dat $\sup_{\eta<\sigma} \kappa_\eta = \sup_{\eta<\sigma} \aleph_{\eta+1} = \sup_{\eta<\sigma} \aleph_\eta = \aleph_\sigma = \kappa$. $\square$

We verkeren ons nu in de volgende situatie: we hebben een singulier kardinaalgetal κ, een κ-goede topologische ruimte en een collectie partiële functies $\mathscr{L}$ op X zodat $|\mathscr{L}| \leq \kappa$. We nemen een rij reguliere kardinaalgetallen $\{\kappa_\eta : \eta < \sigma\}$ zoals in Lemma 7.23 en we willen een invers systeem $\{X_\eta, g_\eta^{\eta'}\}$ maken zodat elke X_η κ_η-goed is en zodat de inverse limiet homeomorf is aan X. Ook willen we een manier hebben om een partiële functie $(K, f) \in \mathscr{L}$ op X te laten corresponderen met een partiële functie $(\hat{K}, \hat{f})$ op X_η. Als we nu een $\mathscr{L}$-onvergelijkbare verzameling $Y \subseteq X$ hebben met $|Y| \leq \kappa$, dan kunnen we $\mathscr{L}$ en Y schrijven als een stijgende vereniging van verzamelingen die maximaal kardinaliteit κ_η hebben. Vervolgens gaan we werken in X_η, we weten dat deze ruimte κ_η-goed is, en κ_η is regulier. Met de resultaten die we al hebben geboekt kunnen dus telkens in de ruimte X_η een punt x_η vinden die niet in $\{\hat{f}(y)\}$ of $\hat{f}^{-1}\{y\}$ belandt voor zo een corresponderende partiële functie $(\hat{K}, \hat{f})$. We gaan er ook voor zorgen dat $(x_\eta)_{\eta<\sigma} \in \prod_{\eta<\sigma} X_\eta$ een punt van de inverse limiet $\lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta$ is. Dat wil zeggen, dat $x_\eta = g_\eta^{\eta'}(x_{\eta'})$ voor elke verbindingsfunctie $g_\eta^{\eta'}$. Omdat de inverse limiet homeomorf is aan X correspondeert dit met een punt $x \in X$, en dit is het punt dat we aan Y kunnen gaan toevoegen zodat $Y \cup \{x\}$ nog steeds $\mathscr{L}$-onvergelijkbaar is. Voor de constructie van de topologische ruimten $\{X_\eta : \eta < \sigma\}$ gaan we de definitie van een irreducibele afbeelding nodig hebben.

Definitie 7.24. Zijn X en Y topologische ruimten en $f : X \to Y$ een continue functie. f heet **irreducibel** als $f : X \to Y$ surjectief is, en voor elke strikte gesloten deelverzameling $F \subsetneq X$ geldt dat $f|_F : F \to Y$ niet surjectief is.

De reden dat we de notie van irrducibiliteit hebben geïntroduceerd is omdat het ons in staat stelt om te zorgen dat het karakter van de punten in de topologische ruimten die we gaan construeren altijd minstens κ_η is. We gaan er namelijk voor zorgen dat de ruimten $\{X_\eta : \eta < \sigma\}$ een irreducibele afbeelding $h : X_\eta \to \{0,1\}^{\kappa_\eta}$ toelaten en dit zorgt automatisch dat alle punten in X_η minstens karakter κ_η hebben.

Lemma 7.25. *Zij $\kappa > \aleph_0$ een kardinaal getal, zij X compact en stel dat $h : X \to \{0,1\}^\kappa$ irreducibel is. Dan geldt dat $\chi(x) \geq \kappa$ voor elke $x \in X$.*

Bewijs. We schrijven $\pi_\eta : \{0,1\}^\kappa \to \{0,1\}$ voor de projecties. Laat $x \in X$ arbitrair en stel dat $\mathcal{B}_x$ een lokale basis is in x voor de topologie van X zodat $|\mathcal{B}_x| < \kappa$. Voor elke $\eta < \kappa$ is $\{\pi_\eta(h(x))\}$ open in de discrete ruimte $\{0,1\}$, dus $h^{-1}[\pi_\eta^{-1}\{\pi_\eta(h(x))\}]$ is open in X. Verder geldt natuurlijk dat $x \in h^{-1}[\pi_\eta^{-1}\{\pi_\eta(h(x))\}]$. Voor elke $\eta < \kappa$ bestaat er dus een $B_\eta \in \mathcal{B}_x$ zodat $x \in B_\eta \subseteq h^{-1}[\pi_\eta^{-1}\{\pi_\eta(h(x))\}]$. Door voor elke $\eta < \kappa$ zo een B_η te kiezen definiëren we een functie $\Gamma : \kappa \to \mathcal{B}_x$. Onze bewering is dat er een $B \in \mathcal{B}_x$ bestaat zodat $\Gamma^{-1}\{B\} = \{\eta < \kappa : B_\eta = B\}$ oneindig is. Stel om een tegenspraak uit te lokken dat $\Gamma^{-1}\{B\}$ eindig is voor elke $B \in \mathcal{B}_x$. Dan zou volgen dat $\kappa = |\Gamma^{-1}[\mathcal{B}_x]| = |\bigcup_{B\in\mathcal{B}_x} \Gamma^{-1}\{B\}| \leq \sum_{B\in\mathcal{B}_x} |\Gamma^{-1}\{B\}| \leq |\mathcal{B}_x| \cdot \aleph_0 < \kappa$. Een tegenspraak. Laat dus $B \in \mathcal{B}_x$ zo zijn dat $\{\eta < \kappa : B_\eta = B\}$ oneindig is en laat $\Lambda = \{\eta < \kappa : B_\eta = B\}$. We definiëren de verzameling $\mathbb{P} \subseteq \{0,1\}^\kappa$ als volgt.

$$\mathbb{P} = \{(y_\eta)_{\eta<\kappa} \in \{0,1\}^\kappa : \text{ er bestaat een } \eta \in \Lambda \text{ zodat } y_\eta \neq \pi_\eta(h(x))\}.$$

Eerst tonen we aan dat $\mathbb{P}$ dicht is in $\{0,1\}^\kappa$, vervolgens laten we zien dat $\mathbb{P} \subseteq h[X \setminus B]$. Hieruit zal volgen dat $h|_{X\setminus B} : X \setminus B \to \{0,1\}^\kappa$ surjectief is en dit spreekt de minimaliteit van X tegen.

Om te laten zien dat $\mathbb{P}$ dicht is in $\{0,1\}^\kappa$ nemen we een arbitrair niet leeg basiselement C voor de topologie van $\{0,1\}^\kappa$ en construeren we een element $(y_\eta)_{\eta<\kappa} \in C \cap \mathbb{P}$. Er geldt dus dat $C = \bigcap_{\eta\in\vartheta} \pi_\eta^{-1}[U_\eta]$ voor zekere $\vartheta \subseteq \kappa$ eindig en $U_\eta \subseteq \{0,1\}$ open voor elke $\eta \in \vartheta$. Omdat C niet leeg is geldt dat U_η niet leeg is voor elke $\eta \in \vartheta$. Kies voor elke $\eta \in \vartheta$ een $y_\eta \in U_\eta \subseteq \{0,1\}$. Omdat Λ oneindig is en ϑ eindig, bestaat er een $\eta^* \in \Lambda \setminus \vartheta$. Laat $y_{\eta^*} = 1 - \pi_{\eta^*}(h(x))$ precies het element van $\{0,1\}$ zijn dat $\pi_\eta(h(x))$ *niet* is. Voor elke $\eta < \kappa$ niet in ϑ en ongelijk aan η^* maakt het nu niet meer uit wat we voor y_η kiezen. Laat dus $y_\eta = 0$ als $\eta \in \kappa \setminus (\vartheta \cup \{\eta^*\})$. We beweren dat $(y_\eta)_{\eta<\kappa} \in C \cap \mathbb{P}$. Inderdaad: voor elke $\eta \in \vartheta$ hebben we $y_\eta = \pi_\eta((y_\eta)_{\eta<\kappa})$ in U_η gekozen, dus $(y_\eta)_{\eta<\kappa} \in \bigcap_{\eta\in\vartheta} \pi_\eta^{-1}[U_\eta] = C$. Daarnaast geldt dat $y_{\eta^*} \neq \pi_{\eta^*}(h(x))$, en $\eta^* \in \Lambda$. Dus $(y_\eta)_{\eta<\kappa} \in \mathbb{P}$. We concluderen dat $\mathbb{P}$ dicht is in $\{0,1\}^\kappa$.

Nu gaan we aantonen dat $\mathbb{P} \subseteq h[X \setminus B]$. Stel dus dat $(y_\eta)_{\eta<\kappa} \in \mathbb{P}$. Omdat h surjectief is bestaat er een $z \in X$ zodat $(y_\eta)_{\eta<\kappa} = h(z)$. Stel om een tegenspraak uit te lokken dat $z \in B$, dan geldt dat $z \in B_\eta$ voor elke $\eta \in \Lambda$ (want $B_\eta = B$ voor elke $\eta \in \Lambda$). Omdat $B_\eta \subseteq h^{-1}[\pi_\eta^{-1}\{\pi_\eta(h(x))\}]$ zien we nu dat $\pi_\eta(h(z)) = \pi_\eta(h(x))$ voor elke $\eta \in \Lambda$, oftewel, $y_\eta = \pi_\eta(h(x))$ voor elke $\eta \in \Lambda$ en er volgt dat $(y_\eta)_{\eta<\kappa} \notin \mathbb{P}$. Een tegenspraak. Dus $z \in X \setminus B$ en $(y_\eta)_{\eta<\kappa} \in h[X \setminus B]$.

Omdat $X \setminus B$ gesloten is in X en X compact is volgt dat $X \setminus B$ compact is. Dus $h[X \setminus B]$ is compact in de Hausdorff ruimte $\{0,1\}^\kappa$ en $h[X \setminus B]$ is gesloten in $\{0,1\}^\kappa$. Er volgt dat

$$\{0,1\}^\kappa = \overline{\mathbb{P}} \subseteq \overline{h[X \setminus B]} = h[X \setminus B]$$

en $h|_{X\setminus B} : X \setminus B \to \{0,1\}^\kappa$ is surjectief. Er geldt echter dat $x \in B$, dus B is niet leeg en $X \setminus B \subsetneq X$ is een strikte deelverzameling van X. Ook is $X \setminus B$ gesloten dus dit spreekt de irreducibiliteit van X ten opzicht van h tegen. We concluderen dat de lokale basis $\mathcal{B}_x$ in x met $|\mathcal{B}_x| < \kappa$ niet kan bestaan en dat $\chi(x) \geq \kappa$. □

We gaan tijdens de constructie van de ruimten $\{X_\eta : \eta < \sigma\}$ er dus voor zorgen dat X_η een irreducibele afbeelding $h : X_\eta \to \{0,1\}^{\kappa_\eta}$ toelaat. Tegelijkertijd zorgen we ervoor dat we een manier hebben om een partiële functie $(K, f) \in \mathscr{L}$ te laten corresponderen met een partiële functie $(\hat{K}, \hat{f})$ op X_η. De ruimte X_η gaat de Stoneruimte worden van een zekere Boolese algebra $\mathscr{B}_\eta$ en om een partiële functie (K, f) op X te laten corresponderen met een partiële functie $(\hat{K}, \hat{f})$ op $X_\eta = S(\mathscr{B}_\eta)$ zullen we nodig hebben dat de Boolese algebra $\mathscr{B}_\eta$ gesloten is onder het nemen van inverse beelden onder functies in $\mathscr{L}$. Dat wil zeggen, dat $f^{-1}[B] \in \mathscr{B}_\eta$ voor elke $B \in \mathscr{B}_\eta$ en elke $(K, f) \in \mathscr{L}$.

Lemma 7.26. *Zij X een κ-goede topologische ruimte, zij $\mathscr{L}$ een collectie partiële functies op X zodat K clopen is in X voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$. Dan bestaat er voor elke familie $\mathcal{A} \subseteq CO(X)$ met $|\mathscr{L}| \leq |\mathcal{A}|$ en $\aleph_0 < |\mathcal{A}|$ een Boolese algebra $\mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ op X zó dat*

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A}) \subseteq CO(X)$.
2. $|\mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})| = |\mathcal{A}|$.
3. *Voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ en elke $B \in \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ geldt dat $f^{-1}[B] \in \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$.*

Verder is deze toekenning ordebehoudend, dat wil zeggen dat $\mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A}')$ als $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$.

Bewijs. We maken $\mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ door met recursie aftelbaar vaak herhaaldelijk de inverse beelden toe te voegen. We stellen $\mathscr{C}_0 = \mathscr{B}(\mathcal{A})$ en voor elke $n \in \mathbb{N}$ stellen we $\mathscr{C}_{n+1}$ gelijk aan de Boolese algebra voortgebracht door $\mathscr{C}_n$ samen met alle inverse beelden onder een functie in $\mathscr{L}$, dus $\mathscr{C}_{n+1} = \mathscr{B}(\mathscr{C}_n \cup \{f^{-1}[C] : C \in \mathscr{C}_n \text{ en } (K, f) \in \mathscr{L}\})$. We bewijzen met inductie dat $|\mathscr{C}_n| = |\mathcal{A}|$ en dat $\mathscr{C}_n \subseteq CO(X)$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Er geldt dat $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{A}) = \mathscr{C}_0$, met Lemma 3.7 zien we dat $|\mathcal{A}| \leq |\mathscr{C}_0| \leq \max\{\aleph_0, |\mathcal{A}|\} = |\mathcal{A}|$, dus $|\mathscr{C}_0| = |\mathcal{A}|$. Het feit dat $\mathscr{C}_0 \subseteq CO(X)$ volgt omdat $\mathcal{A} \subseteq CO(X)$ en omdat $CO(X)$ een Boolese algebra is. Stel nu dat $|\mathscr{C}_n| = |\mathcal{A}|$ en dat $\mathscr{C}_n \subseteq CO(X)$. Dan geldt wegens Lemma 3.7 en het feit dat $|\mathscr{C}_n| = |\mathcal{A}| > \aleph_0$ dat

$$|\mathscr{C}_{n+1}| \leq |\mathscr{C}_n| + |\mathscr{C}_n| \cdot |\mathscr{L}| \leq |\mathcal{A}| + |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{A}| = |\mathcal{A}|.$$

Ook geldt dat $\mathscr{C}_n \subseteq \mathscr{C}_{n+1}$, dus $|\mathcal{A}| = |\mathscr{C}_n| \leq |\mathscr{C}_{n+1}|$. We concluderen dat $|\mathscr{C}_{n+1}| = |\mathcal{A}|$. Verder is $f : K \to X$ continu voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$. Omdat elke $C \in \mathscr{C}_n$ wegens de inductiehypothese clopen is in X volgt dat $f^{-1}[C]$ clopen is in K voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ en $C \in \mathscr{C}_n$. Omdat K per veronderstelling clopen is in X volgt dat $f^{-1}[C]$ clopen is in X voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ en $C \in \mathscr{C}_n$. Dus $\mathscr{C}_n \cup \{f^{-1}[C] : C \in \mathscr{C}_n \text{ en } (K, f) \in \mathscr{L}\} \subseteq CO(X)$ en omdat $CO(X)$ een Boolese algebra is volgt nu dat $\mathscr{C}_{n+1} \subseteq CO(X)$. Uit inductie volgt dat $|\mathscr{C}_n| = |\mathcal{A}|$ en dat $\mathscr{C}_n \subseteq CO(X)$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Stel nu $\mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{C}_n$. Het feit dat $\mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ een Boolese algebra is volgt uit het feit dat $\mathscr{C}_n$ een Boolese algebra is voor elke $n \in \mathbb{N}$ en het feit dat $\{\mathscr{C}_n : n \in \mathbb{N}\}$ stijgend is. Er geldt dat $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A}) \subseteq CO(X)$ want $\mathscr{C}_n \subseteq CO(X)$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ en $\mathcal{A} = \mathscr{C}_0 \subseteq \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$. Verder geldt dat $|\mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mathscr{C}_n| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mathcal{A}| = \aleph_0 \cdot |\mathcal{A}| = |\mathcal{A}|$. Omdat $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ geldt ook dat $|\mathcal{A}| \leq |\mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})|$, dus $|\mathcal{A}| = |\mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})|$.

We gaan nu verifiëren dat $\mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ gesloten is onder het nemen van inverse beelden onder functies in $\mathscr{L}$, dat wil zeggen, dat $f^{-1}[B] \in \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ en elke $B \in \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$. Laat dus $(K, f) \in \mathscr{L}$ en $B \in \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ arbitrair. Dan is er een $n \in \mathbb{N}$ zodat $B \in \mathscr{C}_n$, we zien dat $f^{-1}[B] \in \mathscr{C}_{n+1} \subseteq \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$.

Om in te zien dat de toekenning $\mathcal{A} \mapsto \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ ordebehoudend is, merk op dat als $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$, dan geldt $\mathscr{C}_0 \subseteq \mathscr{C}_0'$. Als we veronderstellen dat $\mathscr{C}_n \subseteq \mathscr{C}_n'$ dan volgt dat $\{f^{-1}[C] : C \in \mathscr{C}_n \text{ en } (K, f) \in \mathscr{L}\} \subseteq \{f^{-1}[C] : C \in \mathscr{C}_n' \text{ en } (K, f) \in \mathscr{L}\}$ en dus dat $\mathscr{C}_{n+1} \subseteq \mathscr{C}_{n+1}'$. Uit inductie volgt dat $\mathscr{C}_n \subseteq \mathscr{C}_n'$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ en nu volgt dat $\mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A}')$. $\square$

Lemma 7.27 (Dow)**.** *Zij X een κ-goede topologische ruimte en stel dat $h : X \to \{0,1\}^\kappa$ irreducibel is. Zij $\mathscr{L}$ een collectie partiële functies zodat K clopen is voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$. Dan bestaat er voor elke familie $\mathcal{A} \subseteq CO(X)$ op X met $|\mathscr{L}| \leq |\mathcal{A}|$ en $\aleph_0 < |\mathcal{A}| < \kappa$ een Boolese algebra $\mathscr{B}$ op X zó dat*

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{B} \subseteq CO(X)$.

2. $|\mathscr{B}| = |\mathcal{A}|$.

3. Voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ *en elke* $B \in \mathscr{B}$ *geldt dat* $f^{-1}[B] \in \mathscr{B}$.

4. $\chi(p) \geq |\mathcal{A}|$ *voor elke* $p \in S(\mathscr{B})$.

Verder geldt dat deze toekenning ordebehoudend is.

Bewijs. We stellen $\mathscr{C}_0 = \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$. We gaan nu voor elke $n \in \mathbb{N}$ de Boolese algebra $\mathscr{C}_n$ recursief uitbreiden zodat we aan het einde een Boolese algebra krijgen waarvoor we op natuurlijke wijze een irreducibele afbeelding op de Stoneruimte kunnen definiëren. Om deze continue functie te maken houden we tegelijkertijd een verzameling ordinaalgetallen $\Gamma_n \subseteq \kappa$ bij zodat $|\Gamma_n| = |\mathcal{A}|$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Aan het einde stellen we $\mathscr{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}_n$ en $\Gamma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$ en maken we een irreducibele afbeelding $\overline{h} : S(\mathscr{B}) \to \{0,1\}^\Gamma$. De eigenschappen waaraan $\mathscr{C}_n$ gaat voldoen voor elke $n \in \mathbb{N}$ zijn als volgt.

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{C}_n \subseteq CO(X)$.
2. $|\mathscr{C}_n| = |\mathcal{A}|$.
3. Voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ en elke $B \in \mathscr{C}_n$ geldt dat $f^{-1}[B] \in \mathscr{C}_n$.

De nulhypothese is wegens Lemma 7.26 vervuld. Zij $n \in \mathbb{N}$ en stel dat $\mathscr{C}_n$ aan eisen 1 tot en met 3 voldoet. Zij $B \in \mathscr{C}_n$ niet leeg. Dan is $X \setminus B$ een strikte gesloten deelverzameling van X en dus is $h[X \setminus B]$ niet heel $\{0,1\}^\kappa$. Omdat X compact is is $X \setminus B$ compact, dus is $h[X \setminus B]$ compact in de Hausdorff ruimte $\{0,1\}^\kappa$ en $h[X \setminus B]$ is gesloten in $\{0,1\}^\kappa$. Er volgt dat $\{0,1\}^\kappa \setminus h[X \setminus B]$ niet leeg en open is voor elke niet lege $B \in \mathscr{C}_n$. Dus bestaat er een niet leeg basiselement O_B voor de topologie van $\{0,1\}^\kappa$ zodat $O_B \subseteq \{0,1\}^\kappa \setminus h[X \setminus B]$. Er volgt dat $h^{-1}[O_B] \subseteq B$. Inderdaad: stel dat $x \in X$ zo is dat $h(x) \in O_B$ en stel om een tegenspraak uit te lokken dat $x \in X \setminus B$, dan geldt dat $h(x) \in h[X \setminus B]$ maar ook dat $h(x) \in \{0,1\}^\kappa \setminus h[X \setminus B]$, want $O_B \subseteq \{0,1\}^\kappa \setminus h[X \setminus B]$. Een tegenspraak, we concluderen dat $h^{-1}[O_B] \subseteq B$. Ook is $h^{-1}[O_B]$ niet leeg, want h is surjectief.

O_B is een basiselement voor de producttopologie van $\{0,1\}^\kappa$, dus $O_B = \bigcap_{\lambda\in\gamma_B} \pi_\lambda^{-1}[U_\lambda]$ voor een zekere eindige $\gamma_B \subseteq \kappa$ en $U_\lambda \subseteq \{0,1\}$ open. We stellen $\Gamma_n = \bigcup_{B\in\mathscr{C}_n\setminus\{\emptyset\}} \gamma_B$ en we zien dat $|\Gamma_n| \leq \sum_{B\in\mathscr{C}_n\setminus\{\emptyset\}} \aleph_0 = |\mathscr{C}_n| = |\mathcal{A}|$. Er geldt ook dat $|\mathcal{A}| = |\mathscr{C}_n| \leq |\Gamma_n|$, dus $|\Gamma_n| = |\mathcal{A}|$. We definiëren $\mathscr{C}_n^+$ als

$$\mathscr{C}_n^+ = \mathscr{C}_n \cup \{h^{-1}[\pi_\lambda^{-1}\{i\}] : \lambda \in \Gamma_n \text{ en } i \in \{0,1\}\}.$$

Er geldt dat $|\mathcal{A}| = |\mathscr{C}_n| \leq |\mathscr{C}_n^+| \leq |\mathscr{C}_n| + |\Gamma_n| \cdot 2 = |\mathcal{A}|$. Dus $|\mathscr{C}_n^+| = |\mathcal{A}|$. Ook geldt dat $\mathscr{C}_n^+ \subseteq CO(X)$, want $\{i\}$ is clopen in $\{0,1\}$ voor elke $i \in \{0,1\}$ en elke $\lambda \in \Gamma_n$. Wegens Lemma 7.26 volgt dat de Boolese algebra $\mathscr{C}_{n+1} = \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathscr{C}_n^+)$ voldoet aan eisen 1 tot en met 3.

We hebben nu dus voor elke $n \in \mathbb{N}$ de Boolese algebra $\mathscr{C}_n$ en de verzameling kardinaalgetallen Γ_n die van de niet lege basiselementen vandaan komen. We stellen $\mathscr{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}_n$ en we stellen $\Gamma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$. Merk op dat $\mathscr{B}$ een stijgende verenigingen van Boolese algebra's is en daarmee een Boolese algebra. Omdat $|\Gamma_n| = |\mathcal{A}|$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ en $|\mathcal{A}| > \aleph_0$ volgt dat $|\Gamma| = |\mathcal{A}|$. Ook geldt wegens dezelfde beredenering als in het bewijs van Lemma 7.26 dat $|\mathscr{B}| = |\mathcal{A}|$, dat $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{B} \subseteq CO(X)$ en dat $f^{-1}[B] \in \mathscr{B}$ voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ en $B \in \mathscr{B}$. We hoeven dus alleen nog maar te verifiëren dat elk punt in $S(\mathscr{B})$ karakter minstens $|\mathcal{A}|$ heeft. We definiëren hiertoe een irreducibele afbeelding $\overline{h} : S(\mathscr{B}) \to \{0,1\}^{\Gamma}$. Omdat $|\Gamma| = |\mathcal{A}|$ volgt dan uit Lemma 7.25 dat elk punt in $S(\mathscr{B})$ minstens karakter $|\mathcal{A}|$ heeft.

Zij p een ultrafilter op X beperkt tot $\mathscr{B}$ (dus een element van $S(\mathscr{B})$), als $\lambda \in \Gamma$ dan bestaat er een n zodat $\lambda \in \Gamma_n$ en we zien dat $h^{-1}[\pi_\lambda^{-1}\{i\}] \in \mathscr{C}_n^+ \subseteq \mathscr{B}$. De verzamelingen $h^{-1}[\pi_\lambda^{-1}\{0\}]$ en $h^{-1}[\pi_\lambda^{-1}\{1\}]$ zijn elkaars complement en met Stelling 2.20 zien we nu dat precies één van deze twee verzamelingen een element van p moet zijn. Voor elke $\lambda \in \Gamma$ is dus benedenstaande toekenning welgedefinieerd.

$$\begin{aligned} \overline{h}_\lambda : S(\mathscr{B}) &\to \{0,1\} \\ p &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } h^{-1}[\pi_\lambda^{-1}\{0\}] \in p, \\ 1 & \text{als } h^{-1}[\pi_\lambda^{-1}\{1\}] \in p. \end{cases} \end{aligned}$$

We laten zien dat $\overline{h}_\lambda$ continu is voor elke $\lambda \in \Gamma$. Er geldt dat $\overline{h}_\lambda^{-1}\{0\} = \{p \in S(\mathscr{B}) : h^{-1}[\pi_\lambda^{-1}\{0\}] \in p\}$, maar dit is precies het basiselement B_A voor de topologie van $S(\mathscr{B})$ dat hoort bij de verzameling $A = h^{-1}[\pi_\lambda^{-1}\{0\}]$. Op dezelfde manier zien we dat $\overline{h}_\lambda^{-1}\{1\}$ het basiselement voor de topologie van $S(\mathscr{B})$ is dat hoort bij de verzameling $h^{-1}[\pi_\lambda^{-1}\{1\}]$. Omdat $\{0\}$ en $\{1\}$ de enige niet triviale open verzamelingen van $\{0,1\}$ zijn volgt dat $\overline{h}_\lambda$ continu is. De universele eigenschap van het product leert ons nu dat de volgende functie continu is.

$$\begin{aligned} \overline{h} : S(\mathscr{B}) &\to \{0,1\}^{\Gamma} \\ p &\mapsto (\overline{h}_\lambda(p))_{\lambda \in \Gamma}. \end{aligned}$$

We tonen aan dat $\overline{h}$ irreducibel is. Eerst laten we zien dat $\overline{h}$ surjectief is en vervolgens tonen we aan dat $\overline{h}$ niet meer surjectief is op elke strikte gesloten deelverzameling van $S(\mathscr{B})$.

We bewijzen dat $\overline{h}$ surjectief is. Laat $(y_\lambda)_{\lambda \in \Gamma} \in \{0,1\}^{\Gamma}$ arbitrair. Omdat $h : X \to \{0,1\}^{\kappa}$ surjectief is bestaat er een $x \in X$ zodat $\pi_\lambda(h(x)) = y_\lambda$ voor elke $\lambda \in \Gamma$. Laat $\mathscr{F}_x = \{B \in \mathscr{B} : x \in B\}$. Uit dezelfde beredenering als in Voorbeeld 2.10 volgt dat dit een ultrafilter op X beperkt tot $\mathscr{B}$ is. Omdat $\pi_\lambda(h(x)) = y_\lambda$ voor elke $\lambda \in \Gamma$ volgt dat $x \in h^{-1}[\pi_\lambda^{-1}\{y_\lambda\}]$ voor elke $\lambda \in \Gamma$ en nu zien we dat $h^{-1}[\pi_\lambda^{-1}\{y_\lambda\}] \in \mathscr{F}_x$. Er volgt dat $\overline{h}_\lambda(\mathscr{F}_x) = y_\lambda$ voor elke $\lambda \in \Gamma$ en dus dat $\overline{h}(\mathscr{F}_x) = (y_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$. We concluderen dat $\overline{h}$ surjectief is.

Nu gaan we aantonen dat voor elke strikte gesloten deelverzameling $F \subsetneq S(\mathscr{B})$ de functie $f|_F : F \to \{0,1\}^{\Gamma}$ niet meer surjectief is. Laat dus $F \subsetneq S(\mathscr{B})$ gesloten. Dan is $G = S(\mathscr{B}) \setminus F$ niet leeg en open in $S(\mathscr{B})$. Er is dus niet leeg basiselement voor de topologie van $S(\mathscr{B})$ bevat in G, oftewel, er is een $A \in \mathscr{B}$ zodat $\emptyset \subsetneq B_A \subseteq G$. Omdat $B_A = \{p \in S(\mathscr{B}) : A \in p\}$ niet leeg is is A niet leeg ($\emptyset$ zit in geen enkel ultrafilter). Omdat $A \in \mathscr{B}$ bestaat er een $n \in \mathbb{N}$ zodat $A \in \mathscr{C}_n$ en dus hebben we een niet leeg basiselement $O_A = \bigcap_{\lambda \in \gamma_A} \pi_\lambda^{-1}[U_\lambda]$ voor de topologie van $\{0,1\}^{\kappa}$ gekozen zodat $h^{-1}[O_A] \subseteq A$. We hadden voor elke $n \in \mathbb{N}$ Γ_n gedefinieerd als $\Gamma_n = \bigcup_{B \in \mathscr{C}_n \setminus \{\emptyset\}} \gamma_B$ en we hadden Γ gedefinieerd als $\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$, dus $\gamma_A \subseteq \Gamma$ en O_A is ook een niet leeg basiselement in de topologie van $\{0,1\}^{\Gamma}$. We beweren dat $\overline{h}[F] \subseteq \{0,1\}^{\Gamma} \setminus O_B$. Stel dat $p \in F$ en stel om een tegenspraak uit te lokken dat $\overline{h}(p) \in O_B$. Omdat $p \in S(\mathscr{B})$ geldt dat $p \subseteq \mathscr{B} \subseteq CO(X)$, dus p is een familie van gesloten verzamelingen van X en omdat filters aan de eindige doorsnede eigenschap voldoen volgt uit compactheid van X dat $\bigcap p \neq \emptyset$. Neem een $a \in \bigcap p$. Dan geldt dat $p = \mathscr{F}_a = \{B \in \mathscr{B} : a \in B\}$ en nu volgt dat $h(a) = \overline{h}(\mathscr{F}_a) = \overline{h}(p)$. We concluderen dat $h(a) \in O_B$ en dus dat $a \in h^{-1}[O_B] \subseteq A$. Er volgt dat $p = \mathscr{F}_a \in B_A \subseteq G = X \setminus F$, een tegenspraak. Dus er geldt inderdaad dat $\overline{h}[F] \subseteq \{0,1\}^{\Gamma} \setminus O_B$ en omdat O_B niet leeg is volgt dat $\overline{h}|_F : F \to \{0,1\}^{\Gamma}$ niet surjectief is. Dus $\overline{h} : S(\mathscr{B}) \to \{0,1\}^{\Gamma}$ is irreducibel en wegens Lemma 7.25 heeft elk punt in $S(\mathscr{B})$ karakter minstens $|\Gamma| = |\mathcal{A}|$.

Als laatste onderdeel van het bewijs laten we zien dat de toekenning die we hebben gedefinieerd ordebehoudend is (of in ieder geval ordebehoudend kan zijn). We doen dit met inductie. Stel dat $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$, dan geldt wegens Lemma 7.26 dat $\mathscr{C}_0 = \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A}') = \mathscr{C}'_0$. Zij nu $n \in \mathbb{N}$ en stel dat $\mathscr{C}_n \subseteq \mathscr{C}'_n$. Elk niet leeg element $B \in \mathscr{C}_n$ kunnen we dus ook zien als een niet leeg element van $\mathscr{C}'_n$. Als we voor elk element $B \in \mathscr{C}_n$ dus een keuze maken voor O_B en γ_B dan kunnen we deze zelfde keuze $O'_B = O_B$ en $\gamma'_B = \gamma_B$ gebruiken als we B zien als element van $\mathscr{C}'_n$. Dan geldt dus dat $\Gamma_n \subseteq \Gamma'_n$ en dat

$$\{h^{-1}[\pi_\lambda\{i\}] : \lambda \in \Gamma_n \text{ en } i \in \{0,1\}\} \subseteq \{h^{-1}[\pi_\lambda\{i\}] : \lambda \in \Gamma'_n \text{ en } i \in \{0,1\}\}.$$

Nu volgt dat $\mathscr{C}_n^+ \subseteq \mathscr{C}_n'^+$ en uit Lemma 7.26 volgt dat $\mathscr{C}_{n+1} \subseteq \mathscr{C}'_{n+1}$. Uit inductie volgt dat $\mathscr{C}_n \subseteq \mathscr{C}'_n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, dus $\mathscr{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}'_n = \mathscr{B}'$. □

Met Lemma 7.27 zijn we in staat om de ruimten $\{X_\eta : \eta < \sigma\}$ te maken. Stel dus weer dat we een singulier kardinaalgetal κ en een κ-goede topologische ruimte X hebben, en stel dat $\mathscr{L}$ een collectie partiële functies op X is zodat $|\mathscr{L}| \leq \kappa$ en zodat K clopen is voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$. We nemen een rij reguliere kardinaalgetallen $\{\kappa_\eta : \eta < \sigma\}$ zoals in Lemma 7.23. Tel $\mathscr{L} = \{(K_\lambda, f_\lambda) : \lambda < \kappa\}$ surjectief af. We gaan $\mathscr{L}$ schrijven als een stijgende vereniging van collecties partiële functies waarvan de kardinaliteit maximaal κ_η is. Dit doen we door $\mathscr{L}$ 'af te kappen'. Dit wil zeggen: voor elke $\eta < \sigma$ definiëren we $\mathscr{L}_\eta = \{(K_\lambda, f_\lambda) : \lambda < \kappa_\eta\} \subseteq \mathscr{L}$. Omdat $\sup_{\eta<\sigma} \kappa_\eta = \kappa$ geldt nu dat $\mathscr{L} = \bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{L}_\eta$ en omdat $\{\kappa_\eta : \eta < \sigma\}$ stijgend is, is $\{\mathscr{L}_\eta : \eta < \sigma\}$ stijgend, verder geldt dat $|\mathscr{L}_\eta| \leq \kappa_\eta$. Nu nemen we een basis $\mathcal{B} \subseteq CO(X)$ voor de topologie van X zodat $|\mathcal{B}| \leq \kappa$, deze bestaat omdat X κ-goed is. Tot nu toe hebben we het nog niet hoeven gebruiken maar het feit dat elk punt in X karakter minstens κ heeft garandeert zelfs dat $|\mathcal{B}| = \kappa$. Inderdaad: stel om een tegenspraak uit te lokken dat $|\mathcal{B}| < \kappa$. Neem een $x \in X$, dan is $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ een lokale basis in x zodat $|\mathcal{B}_x| \leq |\mathcal{B}| < \kappa$. Dit spreekt echter tegen dat het karakter van x minstens κ is, dus $|\mathcal{B}| = \kappa$. We gaan nu hetzelfde doen met $\mathcal{B}$ als wat we met $\mathscr{L}$ hebben gedaan: we tellen $\mathcal{B} = \{B_\lambda : \lambda < \kappa\}$ bijectief af en voor elke $\eta < \sigma$ stellen we $\mathcal{B}_\eta = \{B_\lambda : \lambda < \kappa_\eta\}$. Er geldt dat $\mathcal{B} = \bigcup_{\eta<\sigma} \mathcal{B}_\eta$, dat $\{\mathcal{B}_\eta : \eta < \sigma\}$ stijgend is en dat $|\mathcal{B}_\eta| = \kappa_\eta$ voor elke $\eta < \sigma$. Wegens Lemma 7.27 bestaat er nu voor elke $\eta < \sigma$ een Boolese algebra $\mathscr{B}_\eta$ zó dat

1. $\mathcal{B}_\eta \subseteq \mathscr{B}_\eta \subseteq CO(X)$.
2. $|\mathscr{B}_\eta| = |\mathcal{B}_\eta| = \kappa_\eta$.
3. Voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}_\eta$ en elke $B \in \mathscr{B}_\eta$ geldt dat $f^{-1}[B] \in \mathscr{B}_\eta$.
4. $\chi(p) \geq |\mathcal{B}_\eta| = \kappa_\eta$ voor elke $p \in S(\mathscr{B}_\eta)$.

Omdat de toekenning van Lemma 7.27 ordebehoudend is geldt ook dat $\{\mathscr{B}_\eta : \eta < \sigma\}$ stijgend is. We stellen $X_\eta = S(\mathscr{B}_\eta)$.

Lemma 7.28. *Voor elke $\eta < \sigma$ is X_η κ_η-goed.*

Bewijs. We verifiëren de drie punten waaraan X_η moet voldoen.

1. Het feit dat $X_\eta = S(\mathscr{B}_\eta)$ compact en Hausdorff is volgt uit Lemma 3.11.
2. We hebben $\mathscr{B}_\eta$ zo geconstrueerd dat $\chi(p) \geq |\mathscr{B}_\eta| = \kappa_\eta$ voor elke $p \in S(\mathscr{B}_\eta) = X_\eta$.

3. De familie verzamelingen $\{B_A : A \in \mathscr{B}_\eta\}$, met $B_A = \{p \in S(\mathscr{B}_\eta) : A \in p\}$, is een basis van clopen verzamelingen voor de topologie van $S(\mathscr{B}_\eta) = X_\eta$ waarvoor geldt dat de kardinaliteit kleiner of gelijk is aan $|\mathscr{B}_\eta| = \kappa_\eta$.

□

We hebben nu de X_η's, maar we hebben ook nog de verbindingsfuncties $g_\eta^{\eta'} : X_{\eta'} \to X_\eta$ voor $\eta \leq \eta' < \sigma$ nodig. Als $\eta \leq \eta' < \sigma$ dan laten we $\mathrm{id}_\eta^{\eta'} = \mathrm{id}_X : X \to X$ de identiteitsafbeelding op X zijn, we gaan deze functie echter zien als morfisme van Boolese algebra's $\mathrm{id}_\eta^{\eta'} : (X, \mathscr{B}_{\eta'}) \to (X, \mathscr{B}_\eta)$. Het feit dat $\{\mathscr{B}_\eta : \eta < \sigma\}$ stijgend is garandeert dat $\mathrm{id}_\eta^{\eta'}$ voor elke $\eta \leq \eta'$ een morfisme van Boolese algebra's is. Omdat $\mathscr{B}_\eta$ in het algemeen niet gelijk is aan $\mathscr{B}_{\eta'}$ is $\mathrm{id}_\eta^{\eta'}$ *niet* noodzakelijk de identiteit in de categorie van Boolese ruimten. Als we dus de functor van Stelling 3.13 toepassen om de continue functies $g_\eta^{\eta'} = (\mathrm{id}_\eta^{\eta'})_* : X_{\eta'} \to X_\eta$ te verkrijgen dan is het niet zo dat dit altijd weer de identiteitsafbeelding levert. De functorialiteitseigenschappen verifiëren precies voor ons dat $\{X_\eta, g_\eta^{\eta'}\}$ een invers systeem is: voor elke $\eta < \sigma$ geldt namelijk wel dat $\mathrm{id}_\eta^\eta : (X_\eta, \mathscr{B}_\eta) \to (X_\eta, \mathscr{B}_\eta)$ de identiteit in de categorie van Boolese ruimten is, dus $g_\eta^\eta = \mathrm{id}_{X_\eta}$. Als $\eta^* \leq \eta \leq \eta'$ dan geldt dat $\mathrm{id}_{\eta^*}^\eta \circ \mathrm{id}_\eta^{\eta'} = \mathrm{id}_{\eta^*}^{\eta'}$, uit functorialiteit volgt dat $g_{\eta^*}^\eta \circ g_\eta^{\eta'} = g_{\eta^*}^{\eta'}$. Er volgt dat $\{X_\eta, g_\eta^{\eta'}\}$ een invers systeem is. De functies $g_\eta^{\eta'}$ doen niets anders dan een ultrafilter p op X beperkt tot $\mathscr{B}_{\eta'}$ verder beperken tot $\mathscr{B}_\eta$, als $\eta \leq \eta' < \sigma$ en $p \in \mathscr{B}_{\eta'}$ dan geldt namelijk dat

$$g_\eta^{\eta'}(p) = (\mathrm{id}_\eta^{\eta'})_*(p) = \{A \in \mathscr{B}_\eta : \mathrm{id}_X^{-1}[A] \in p\} = \mathscr{B}_\eta \cap p.$$

We gaan laten zien dat $X \simeq \lim_{\sigma \leftarrow \eta} X_\eta$, dit doen we in twee stappen. Eerst tonen we aan dat $\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta = CO(X)$ en vervolgens bewijzen we dat $\lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta \simeq S(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta)$. Het feit dat $X \simeq \lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta$ volgt dan uit Lemma 3.12.

Lemma 7.29. *Er geldt dat* $\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta = CO(X)$.

Bewijs. Voor elke $\eta < \sigma$ is $\mathscr{B}_\eta$ bevat in $CO(X)$, dus $\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta \subseteq CO(X)$. Het volstaat dus om te bewijzen dat $CO(X) \subseteq \bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta$. Dit doen we in twee stappen, eerst laten we zien dat $CO(X) \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{B})$ en daarna dat $\mathscr{B}(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathcal{B}_\eta) \subseteq \bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}(\mathcal{B}_\eta)$. Omdat $\mathscr{B}(\mathcal{B}_\eta) \subseteq \mathscr{B}_\eta$ voor elke $\eta < \sigma$ en omdat $\bigcup_{\eta<\sigma} \mathcal{B}_\eta = \mathcal{B}$ volgt dan dat

$$CO(X) \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{B}) = \mathscr{B}\left(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathcal{B}_\eta\right) \subseteq \bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}(\mathcal{B}_\eta) \subseteq \bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta.$$

Stap 1: $CO(X) \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{B})$. Stel $C \subseteq X$ is een clopen verzameling. Omdat $\mathcal{B}$ een basis is voor de topologie van X geldt dat er voor elke $x \in C$ een $B_x \in \mathcal{B}$ bestaat zodat $x \in B_x \subseteq C$. We zien dat $C = \bigcup_{x\in C} B_x$. Omdat C gesloten is in de compacte ruimte X is C compact, er zijn dus $x_1 \dots x_n \in C$ zodat $C = \bigcup_{i=1}^n B_{x_i}$. Omdat $\mathscr{B}(\mathcal{B})$ gesloten is onder het nemen van eindige verenigingen en omdat $\{B_{x_1} \dots B_{x_n}\} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathscr{B}(\mathcal{B})$ volgt dat $C \in \mathscr{B}(\mathcal{B})$.

Stap 2: $\mathscr{B}(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathcal{B}_\eta) \subseteq \bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}(\mathcal{B}_\eta)$. Stel $A \in \mathscr{B}(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathcal{B}_\eta)$. In het bewijs van Lemma 3.7 hebben we gezien dat A dan een eindige combinatie van verenigingen, doorsneden en complementen van elementen uit $\bigcup_{\eta<\sigma} \mathcal{B}_\eta$ is. Er is dus een eindige $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{\eta<\sigma} \mathcal{B}_\eta$ zodat A een combinatie van verenigingen, doorsneden en complementen van elementen uit $\mathcal{A}$ is. Omdat $\mathcal{A}$ eindig is geldt dat $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}_{\eta_i}$ voor zekere $\eta_1 \dots \eta_n < \sigma$. Laat $\eta =$

$\max\{\eta_1 \dots \eta_n\}$. Omdat $\{\mathcal{B}_\eta : \eta < \sigma\}$ stijgend is volgt nu dat $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_\eta$, we zien dat A een eindige combinatie van verenigingen, doorsneden en complementen van elementen uit $\mathcal{B}_\eta$ is, dus $A \in \mathscr{B}(\mathcal{B}_\eta) \subseteq \bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}(\mathcal{B}_\eta)$. $\square$

Lemma 7.30. *Er geldt dat* $\lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta \simeq S(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta)$, *met een homeomorfisme gegeven door*

$$\zeta : S\left(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta\right) \to \lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta$$
$$p \mapsto (\mathscr{B}_\eta \cap p)_{\eta<\sigma}.$$

Bewijs. We gaan eerst de inverse afbeelding $\xi : \lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta \to S(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta)$ maken, vervolgens laten we zien dat ζ welgedefinieerd is. We bewijzen dat ze allebei continu zijn en dat ze elkaars inverse zijn.

Stel $(p_\eta)_{\eta<\sigma} \in \lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta$, dan is elke p_η dus een ultrafilter op X beperkt tot $\mathscr{B}_\eta$ en als $\eta \leq \eta'$ dan geldt dat

$$p_\eta = g_\eta^{\eta'}(p_{\eta'}) = \mathscr{B}_\eta \cap p_{\eta'} \subseteq p_{\eta'}.$$

We zien dat $\{p_\eta : \eta < \sigma\}$ stijgend is. We beweren dat $p = \bigcup_{\eta<\sigma} p_\eta$ een ultrafilter op X beperkt tot $\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta$ is. Voor elke $\eta < \sigma$ geldt dat $\emptyset \notin p_\eta$, dus $\emptyset \notin p$, ook geldt dat $X \in p_0 \subseteq p$, dus $X \in p$. Stel dat $A \in p$ en $B \in p$. Dan zijn er $\eta_1 < \sigma$ en $\eta_2 < \sigma$ zodat $A \in p_{\eta_1}$ en $B \in p_{\eta_2}$. Laat $\eta = \max\{\eta_1, \eta_2\}$, omdat $\{p_\eta : \eta < \sigma\}$ stijgend is geldt dat $A, B \in p_\eta$, dus $A \cap B \in p_\eta \subseteq p$. Stel dat $A \in p$ en $B \in \bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta$ is zodat $A \subseteq B$, dan zijn er $\eta_1 < \sigma$ en $\eta_2 < \sigma$ zodat $A \in p_{\eta_1}$ en $B \in \mathscr{B}_{\eta_2}$. Laat $\eta = \max\{\eta_1, \eta_2\}$, omdat $\{p_\eta : \eta < \sigma\}$ en $\{\mathscr{B}_\eta : \eta < \sigma\}$ stijgend zijn volgt nu dat $A \in p_\eta$ en $B \in \mathscr{B}_\eta$. Omdat $A \subseteq B$ en omdat p_η een filter beperkt tot $\mathscr{B}_\eta$ is volgt nu dat $B \in p_\eta \subseteq p$. Om te laten zien dat p ook een ultrafilter is gebruiken we Stelling 2.20. Zij $A \in \bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta$, dan is er een $\eta < \sigma$ zodat $A \in \mathscr{B}_\eta$. Omdat p_η een ultrafilter beperkt tot $\mathscr{B}_\eta$ is volgt dat $A \in p_\eta$ of $X \setminus A \in p_\eta$, in het eerste geval zien we dat $A \in p$ en in het tweede geval dat $X \setminus A \in p$. Dus $p = \bigcup_{\eta<\sigma} p_\eta$ is een ultrafilter beperkt tot $\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta$ en benedenstaande afbeelding is welgedefinieerd.

$$\xi : \lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta \to S\left(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta\right)$$
$$(p_\eta)_{\eta<\sigma} \mapsto \bigcup_{\eta<\sigma} p_\eta.$$

We laten zien dat ξ continu is. Laat $B_A = \{p \in S(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta) : A \in p\}$ met $A \in \bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta$ een basiselement voor de topologie van $S(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta)$ zijn en laat $(p_\eta)_{\eta<\sigma} \in \xi^{-1}[B_A]$. Dan geldt dat $\bigcup_{\eta<\sigma} p_\eta \in B_A$, dus $A \in \bigcup_{\eta<\sigma} p_\eta$ en er is een $\eta^* < \sigma$ zodat $A \in p_{\eta^*} \subseteq \mathscr{B}_{\eta^*}$. Nu is $B_A^* = \{q \in S(\mathscr{B}_{\eta^*}) : A \in q\}$ een basiselement voor de topologie van $S(\mathscr{B}_{\eta^*}) = X_{\eta^*}$. We beweren dat $(p_\eta)_{\eta<\sigma} \in (\lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta) \cap \pi_{\eta^*}^{-1}[B_A^*] \subseteq \xi^{-1}[B_A]$, hier is $\pi_{\eta^*} : \prod_{\eta<\sigma} X_\eta \to X_{\eta^*}$ de projectieafbeelding. Inderdaad: er geldt dat $\pi_{\eta^*}((p_\eta)_{\eta<\sigma}) = p_{\eta^*}$ en $A \in p_{\eta^*}$, dus $p_{\eta^*} \in B_A^*$ en $(p_\eta)_{\eta<\sigma} \in \pi_{\eta^*}^{-1}[B_A^*]$. Als nu $q = (q_\eta)_{\eta<\sigma} \in (\lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta) \cap \pi_{\eta^*}^{-1}[B_A^*]$ dan geldt dat $\pi_{\eta^*}(q) = q_{\eta^*} \in B_A^*$, dus $A \in q_{\eta^*}$. Omdat $q \in \lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta$ is $\xi(q)$ gedefinieerd, dit wil zeggen dat $\xi(q) = \bigcup_{\eta<\sigma} q_\eta$ een ultrafilter op X beperkt tot $\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta$ is en we zien dat $A \in q_{\eta_*} \subseteq \bigcup_{\eta<\sigma} q_\eta = \xi(q)$. Er volgt dat $\xi(q) \in B_A$. We concluderen dat $(p_\eta)_{\eta<\sigma} \in (\lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta) \cap \pi_{\eta^*}^{-1}[B_A^*] \subseteq \xi^{-1}[B_A]$, dus ξ is continu.

Nu gaan we de afbeelding $\zeta : S(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta) \to \lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta$ maken. Merk hiertoe op dat voor elke η geldt dat $\mathscr{B}_\eta \subseteq \bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta$. We gaan iets soortgelijks doen als toen we de verbindingsfuncties $g_\eta^{\eta'}$ hadden gemaakt: voor elke $\eta < \sigma$ zien we $\mathrm{id}_\eta = \mathrm{id}_X : (X, \bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta) \to (X, \mathscr{B}_\eta)$ als morfisme van Boolese algebra's, de inclusie

$\mathscr{B}_\eta \subseteq \bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta$ garandeert id_η daadwerkelijk een morfisme van Boolese algebra's is, nu nemen we $g_\eta = (\mathrm{id}_\eta)_* : S(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta) \to S(\mathscr{B}_\eta) = X_\eta$ de continue afbeelding van Stelling 3.13. De functies $\{g_\eta : \eta < \sigma\}$ doen nu niets anders dan een ultrafilter p op $\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta$ beperken tot $\mathscr{B}_\eta$, inderdaad: voor $\eta < \sigma$ en $p \in S(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta)$ geldt dat

$$g_\eta(p) = (\mathrm{id}_\eta)_*(p) = \{A \in \mathscr{B}_\eta : \mathrm{id}_X^{-1}[A] \in p\} = \mathscr{B}_\eta \cap p.$$

Voor elke $\eta \leq \eta'$ geldt nu dat $g_\eta^{\eta'} \circ g_{\eta'} = g_\eta$, want als $p \in S(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta)$ dan volgt uit het feit dat $\{\mathscr{B}_\eta : \eta < \sigma\}$ stijgend is dat $g_\eta^{\eta'}(g_{\eta'}(p)) = g_\eta^{\eta'}(\mathscr{B}_{\eta'} \cap p) = \mathscr{B}_\eta \cap (\mathscr{B}_{\eta'} \cap p) = \mathscr{B}_\eta \cap p = g_\eta(p)$. Dit vertaalt zich naar de uitspraak dat $(g_\eta(p))_{\eta<\sigma}$ een element is van $\lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta$ voor elke $p \in S(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta)$. Benedenstaande afbeelding is dus welgedefinieerd.

$$\begin{aligned} \zeta : S\left(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta\right) &\to \lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta \\ p &\mapsto (g_\eta(p))_{\eta<\sigma} = (\mathscr{B}_\eta \cap p)_{\eta<\sigma}. \end{aligned}$$

Voor elke $\eta < \sigma$ is $\pi_\eta \circ \zeta = g_\eta$ continu, dus ζ is continu vanwege de universele eigenschap van het product. Er resteert aan te tonen dat ζ en ξ elkaars inverse zijn.

Eerst bewijzen we dat $\zeta \circ \xi = \mathrm{id}_{\lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta}$. Laat dus $p = (p_\eta)_{\eta<\sigma} \in \lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta$. We beweren dat $\mathscr{B}_{\eta'} \cap (\bigcup_{\eta<\sigma} p_\eta) = p_{\eta'}$ voor elke $\eta' < \sigma$. Inderdaad: als $A \in p_{\eta'}$ dan volgt dat $A \in \mathscr{B}_{\eta'} \cap (\bigcup_{\eta<\sigma} p_\eta)$ omdat $p_{\eta'} \subseteq \mathscr{B}_{\eta'}$ en $p_{\eta'} \subseteq \bigcup_{\eta<\sigma} p_\eta$. Andersom: als $A \in \mathscr{B}_{\eta'} \cap (\bigcup_{\eta<\sigma} p_\eta)$ dan geldt dat $A \in \mathscr{B}_{\eta'}$ en er bestaat een $\eta < \sigma$ zodat $A \in p_\eta$. Als $\eta \leq \eta'$ dan volgt dat $A \in p_\eta = g_\eta^{\eta'}(p_{\eta'}) = p_{\eta'} \cap \mathscr{B}_\eta \subseteq p_{\eta'}$. Als $\eta' \leq \eta$ dan volgt dat $A \in p_\eta \cap \mathscr{B}_{\eta'} = g_{\eta'}^{\eta}(p_\eta) = p_{\eta'}$. In beide gevallen zien we dat $A \in p_{\eta'}$. We concluderen dat $\mathscr{B}_{\eta'} \cap (\bigcup_{\eta<\sigma} p_\eta) = p_{\eta'}$ en nu volgt dat

$$\zeta(\xi(p)) = \zeta\left(\bigcup_{\eta<\sigma} p_\eta\right) = \left(\mathscr{B}_{\eta'} \cap \left(\bigcup_{\eta<\sigma} p_\eta\right)\right)_{\eta'<\sigma} = (p_{\eta'})_{\eta'<\sigma} = p.$$

Dus $\zeta \circ \xi = \mathrm{id}_{\lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta}$.

Nu laten we zien dat $\xi \circ \zeta = \mathrm{id}_{S(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta)}$. Laat dus $p \in S(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta)$. Dan geldt dat

$$\xi(\zeta(p)) = \xi((\mathscr{B}_\eta \cap p)_{\eta<\sigma}) = \bigcup_{\eta<\sigma} (\mathscr{B}_\eta \cap p) = \left(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta\right) \cap p = p.$$

Dus $\xi \circ \zeta = \mathrm{id}_{S(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta)}$ en $\zeta = \xi^{-1}$ is een homeomorfisme. $\square$

Gevolg 7.31. *Er geldt dat $X \simeq \lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta$, met een homeomorfisme gegeven door*

$$\begin{aligned} \psi : X &\to \lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta \\ x &\mapsto (\mathscr{F}_x^\eta)_{\eta<\sigma}, \end{aligned}$$

waarbij $\mathscr{F}_x^\eta = \{A \in \mathscr{B}_\eta : x \in A\}$.

Bewijs. Wegens Lemma 7.29 geldt dat $\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta = CO(X)$. In het bewijs van Lemma 3.12 hebben we gezien dat de volgende functie een homeomorfisme van X naar $S(CO(X)) = S(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta)$ definieert.

$$\begin{aligned}\phi : X &\to S\left(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta\right)\\ x &\mapsto \mathscr{F}_x = \{A \in \bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta : x \in A\}.\end{aligned}$$

Door deze samen te stellen met het homeomorfisme $\zeta : S(\bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{B}_\eta) \to \lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta$ krijgen we ons homeomorfisme $\psi = \zeta \circ \phi : X \to \lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta$, gegeven door

$$\begin{aligned}\psi : X &\to \lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta\\ x &\mapsto (\mathscr{B}_\eta \cap \mathscr{F}_x)_{\eta<\sigma} = (\mathscr{F}_x^\eta)_{\eta<\sigma},\end{aligned}$$

waarbij $\mathscr{F}_x^\eta = \mathscr{B}_\eta \cap \mathscr{F}_x = \{A \in \mathscr{B}_\eta : x \in A\}$. $\square$

Voor elke $\eta < \sigma$ definiëren we nu de continue functie $\overline{g_\eta}$ als de samenstelling van ψ en projectie op de η-de coördinaat:

$$\begin{aligned}\overline{g_\eta} : X &\to X_\eta\\ x &\mapsto \mathscr{F}_x^\eta = \{A \in \mathscr{B}_\eta : x \in A\}.\end{aligned}$$

Nu we het inverse systeem $\{X_\eta, g_\eta^{\eta'}\}$ hebben geconstrueerd en hebben aangetoond dat de inverse limiet inderdaad X is, is het tijd om partiële functies $(K, f) \in \mathscr{L}_\eta$ te laten corresponderen met een partiële functie $(\hat{K}, \hat{f})$ op X_η. Laat dus $(K, f) \in \mathscr{L}_\eta$, punt 3 in Lemma 7.27 vertelt ons dat $f^{-1}[B] \in \mathscr{B}_\eta$ voor elke $B \in \mathscr{B}_\eta$. We gaan de Boolese algebra $\mathscr{B}_\eta$ beperken tot K: stel $\mathscr{B}_\eta|_K = \{K \cap B : B \in \mathscr{B}_\eta\}$, het is eenvoudig na te gaan dat $\mathscr{B}_\eta|_K$ een Boolese algebra op K is, en de uitspraak dat $K \cap f^{-1}[B] = f^{-1}[B] \in \mathscr{B}_\eta$ voor elke $B \in \mathscr{B}_\eta$ en $(K, f) \in \mathscr{L}_\eta$ vertaalt zich nu precies naar de uitspraak dat $f : (K, \mathscr{B}_\eta|_K) \to (X, \mathscr{B}_\eta)$ een morfisme van Boolese algebra's is. De functie f wordt dus functorieel gelift naar een continue functie $f_* : S(\mathscr{B}_\eta|_K) \to S(\mathscr{B}_\eta)$.

Lemma 7.32. *De ruimte $S(\mathscr{B}_\eta|_K)$ kan op natuurlijke manier worden opgevat als deelruimte van $S(\mathscr{B}_\eta)$. Dat wil zeggen: er bestaat een inbedding $i : S(\mathscr{B}_\eta|_K) \to S(\mathscr{B}_\eta)$.*

Bewijs. Stel p is een ultrafilter op K beperkt tot $\mathscr{B}_\eta|_K$. Dan is $\hat{p} = \{B \in \mathscr{B}_\eta : K \cap B \in p\}$ een ultrafilter op X beperkt tot $\mathscr{B}_\eta$. Inderdaad: er geldt dat $\emptyset = K \cap \emptyset \notin p$, dus $\emptyset \notin \hat{p}$, en $K = K \cap X \in p$, dus $X \in \hat{p}$. Als $A \in \hat{p}$ en $B \in \hat{p}$ dan geldt dat $K \cap A \in p$ en $K \cap B \in p$, dus $(K \cap A) \cap (K \cap B) = K \cap (A \cap B) \in p$ en $A \cap B \in \hat{p}$. Als $A \in \hat{p}$ en $B \in \mathscr{B}_\eta$ is zodat $A \subseteq B$, dan geldt dat $K \cap A \in p$, $K \cap B \in \mathscr{B}_\eta|_K$ en $K \cap A \subseteq K \cap B$, dus $K \cap B \in p$ en $B \in \hat{p}$. We concluderen dat $\hat{p}$ een filter op X beperkt tot $\mathscr{B}_\eta$ is. Om te laten zien dat $\hat{p}$ een ultrafilter is gebruiken we Stelling 2.20. Laat $A \in \mathscr{B}_\eta$, dan geldt dat $K \cap A \in \mathscr{B}_\eta|_K$. Omdat p een ultrafilter op K beperkt tot $\mathscr{B}_\eta|_K$ is volgt nu dat $K \cap A \in p$ of $K \setminus (K \cap A) = K \cap (X \setminus A) \in p$. In het eerste geval zien we dat $A \in \hat{p}$ en in het tweede geval zien we dat $X \setminus A \in \hat{p}$. Dus $\hat{p}$ is een ultrafilter op X beperkt tot $\mathscr{B}_\eta$ en dit geeft ons een functie

$$\begin{aligned}i : S(\mathscr{B}_\eta|_K) &\to S(\mathscr{B}_\eta)\\ p &\mapsto \hat{p}.\end{aligned}$$

We laten zien dat i een inbedding is, we tonen dus aan dat 1. i continu is 2. i injectief is en 3. $i : S(\mathscr{B}_\eta|_K) \to i[S(\mathscr{B}_\eta|_K)]$ open is.

1. Zij $\hat{B}_A = \{q \in S(\mathscr{B}_\eta) : A \in q\}$ met $A \in \mathscr{B}_\eta$ een basiselement voor de topologie van $S(\mathscr{B}_\eta)$ en zij $p \in i^{-1}[\hat{B}_A]$. We beweren dat $p \in B_{K\cap A} \subseteq i^{-1}[\hat{B}_A]$, met $B_{K\cap A} = \{r \in S(\mathscr{B}_\eta|_K) : K \cap A \in r\}$ het basiselement voor de topologie van $S(\mathscr{B}_\eta|_K)$ dat hoort bij de verzameling $K \cap A \in \mathscr{B}_\eta|_K$. Omdat $i(p) = \hat{p} \in \hat{B}_A$ geldt dat $A \in \hat{p}$, dus $K \cap A \in p$ en $p \in B_{K\cap A}$. Stel nu dat $r \in B_{K\cap A}$, dan geldt dat $K \cap A \in r$, dus $A \in \hat{r} = i(r)$ en $i(r) \in \hat{B}_A$. We concluderen dat $p \in B_{K\cap A} \subseteq i^{-1}[\hat{B}_A]$, dus $i^{-1}[\hat{B}_A]$ is open en i is continu.

2. Stel $p \in S(\mathscr{B}_\eta|_K)$ en $q \in S(\mathscr{B}_\eta|_K)$ zijn verschillend. Neem zonder beperking der algemeenheid aan dat er een $A \in p \setminus q \subseteq \mathscr{B}_\eta|_K$ bestaat. Wegens de definitie van $\mathscr{B}_\eta|_K$ is er dan een $B \in \mathscr{B}_\eta$ zodat $A = K \cap B$. We zien dat $B \in \hat{p} \setminus \hat{q} = i(p) \setminus i(q)$ en $i(p) \neq i(q)$.

3. Zij $B_A = \{p \in S(\mathscr{B}_\eta|_K) : A \in p\}$ met $A \in \mathscr{B}_\eta|_K$ een basiselement voor de topologie van $S(\mathscr{B}_\eta|_K)$. Dan bestaat er een $B \in \mathscr{B}_\eta$ zodat $A = K \cap B$. We beweren dat $i[B_A] = i[S(\mathscr{B}_\eta|_K)] \cap \hat{B}_B$, met $\hat{B}_B = \{q \in S(\mathscr{B}_\eta) : B \in q\}$ een basiselement voor de topologie van $S(\mathscr{B}_\eta)$. Inderdaad: als $q \in i[B_A]$ dan geldt dat $q = \hat{p}$ voor een zekere $p \in B_A$, we zien dat $A = K \cap B \in p$, dus $B \in \hat{p} = q$ en $q \in \hat{B}_B$. Andersom: als $q \in i[S(\mathscr{B}_\eta|_K)] \cap \hat{B}_B$ dan geldt dat $q = \hat{p}$ met $p \in S(\mathscr{B}_\eta|_K)$ en dat $B \in q = \hat{p}$, we zien dat $A = K \cap B \in p$ en dus geldt dat $p \in B_A$. Omdat $q = \hat{p} = i(p)$ volgt nu dat $q \in i[B_A]$. Dus $i[B_A]$ is open in de deelruimtetopologie van $i[S(\mathscr{B}_\eta|_K)]$ en $i : S(\mathscr{B}_\eta|_K) \to i[S(\mathscr{B}_\eta|_K)]$ is een open afbeelding.

$\square$

Nu zien we hoe we een partiële functie $(K, f) \in \mathscr{L}_\eta$ op X kunnen laten corresponderen met een partiële functie $(\hat{K}, \hat{f})$ op X_η: we schrijven $i : S(\mathscr{B}_\eta|_K) \to S(\mathscr{B}_\eta) = X_\eta$ voor de inbedding en $i^{-1} : i[S(\mathscr{B}_\eta|_K)] \to S(\mathscr{B}_\eta|_K)$ voor de inverse. Nu laten we $\hat{K} = i[S(\mathscr{B}_\eta|_K)] \subseteq X_\eta$ en $\hat{f} = f_* \circ i^{-1} : \hat{K} \to S(\mathscr{B}_\eta) = X_\eta$. We laten $\hat{\mathscr{L}}_\eta = \{(\hat{K}, \hat{f}) : (K, f) \in \mathscr{L}_\eta\}$ de partiële functies op X_η zijn die corresponderen met een partiële functie in $\mathscr{L}_\eta$ op X. Er geldt nu dat $|\hat{\mathscr{L}}_\eta| \le |\mathscr{L}_\eta| \le \kappa_\eta$, omdat X_η κ_η goed is en omdat κ_η regulier is gaan we Stelling 7.20 kunnen toepassen op X_η en $\hat{\mathscr{L}}_\eta$. Merk ook op dat elke $\hat{K}$ het beeld van een compacte ruimte onder een continue functie is, dus $\hat{K}$ is altijd compact (dit eisen we in Stelling 7.20). Om te laten zien dat de toekenning $(K, f) \mapsto (\hat{K}, \hat{f})$ nuttig is voor onze doeleinden tonen we aan dat als $y = f(x)$ voor een zekere functie $(K, f) \in \mathscr{L}_\eta$, dan geldt dat $\overline{g_\eta}(y) = \hat{f}(\overline{g_\eta}(x))$. Als de verzameling $\overline{g_\eta}[Y] \subseteq X_\eta$ dan $\hat{\mathscr{L}}_\eta$-onvergelijkbaar is in de ruimte X_η, dan zijn de punten $Y \subseteq X$ uit de ruimte X $\mathscr{L}_\eta$-onvergelijkbaar.

Lemma 7.33. *Zijn $(K, f) \in \mathscr{L}_\eta$, $x \in K$ en $y \in X$ zodat $y = f(x)$. Dan geldt dat $\overline{g_\eta}(x) \in \hat{K}$ en dat $\overline{g_\eta}(y) = \hat{f}(\overline{g_\eta}(x))$.*

Bewijs. Laat $p = \{A \cap K : A \in \mathscr{B}_\eta \text{ en } x \in A\}$. We gaan eerst aantonen dat p een ultrafilter op K beperkt tot $\mathscr{B}_\eta|_K$ is, dan geldt dus dat $p \in S(\mathscr{B}_\eta|_K)$, vervolgens gaan we zien dat $i(p) = \overline{g_\eta}(x)$ dus kunnen we concluderen dat $\overline{g_\eta}(x) \in i[S(\mathscr{B}_\eta|_K)] = \hat{K}$. Er geldt dat $x \notin \emptyset$, dus $\emptyset = \emptyset \cap K \notin p$, verder geldt dat $x \in X$ en dat $X \in \mathscr{B}_\eta$, dus $K = X \cap K \in p$. Stel dat $A \in p$ en $B \in p$, dan geldt dat $A = A' \cap K$ en $B = B' \cap K$ voor zekere $A' \in \mathscr{B}_\eta$ en $B' \in \mathscr{B}_\eta$ zodat $x \in A'$ en $x \in B'$. We zien dat $x \in A' \cap B'$, verder geldt dat $A \cap B = (A' \cap K) \cap (B' \cap K) = (A' \cap B') \cap K$ en nu volgt dat $A \cap B \in p$. Stel nu dat $A \in p$ en $B \in \mathscr{B}_\eta|_K$ is zodat $A \subseteq B$. Dan zijn er $A' \in \mathscr{B}_\eta$ en $B' \in \mathscr{B}_\eta$ zodat $A = A' \cap K$, $B = B' \cap K$ en $x \in A'$. Omdat we hebben verondersteld dat $x \in K$ volgt nu dat $x \in A' \cap K = A \subseteq B = B' \cap K \subseteq B'$, dus $x \in B'$ en $B = B' \cap K \in p$. We concluderen dat p een filter op K beperkt tot $\mathscr{B}_\eta|_K$ is. Om te laten zien dat p een ultrafilter is gebruiken we Stelling 2.20. Laat $A \in \mathscr{B}_\eta|_K$, dan geldt dat $A = K \cap A'$ voor een zekere $A' \in \mathscr{B}_\eta$.

Er geldt dat $x \in A'$ of $x \in X \setminus A'$. In het eerste geval zien we dat $A = K \cap A' \in p$ en in het tweede geval zien we dat $K \setminus A = K \cap (X \setminus A') \in p$, dus p is inderdaad een ultrafilter op K beperkt tot $\mathscr{B}_\eta|_K$. We kunnen dus de inbedding i toepassen op p, we zien dat

$$i(p) = \hat{p} = \{B \in \mathscr{B}_\eta : K \cap B \in p\} = \{B \in \mathscr{B}_\eta : x \in B\} = \mathscr{F}_x^\eta = \overline{g_\eta}(x).$$

Er volgt dat $\overline{g_\eta}(x) \in i[S(\mathscr{B}_\eta|_K)] = \hat{K}$, en uit de manier waarop we $\hat{f}$ hebben gedefinieerd volgt nu dat

$$\hat{f}(\overline{g_\eta}(x)) = f_*(p) = \{A \in \mathscr{B}_\eta : f^{-1}[A] \in p\} = \{A \in \mathscr{B}_\eta : x \in f^{-1}[A]\} = \{A \in \mathscr{B}_\eta : y = f(x) \in A\} = \mathscr{F}_y^\eta = \overline{g_\eta}(y).$$

$\square$

Gevolg 7.34. *Zijn $(K, f) \in \mathscr{L}_\eta$, $x \in X$ en $y \in X$. Als $x \in f^{-1}\{y\}$ dan volgt dat $\overline{g_\eta}(x) \in \hat{f}^{-1}\{\overline{g_\eta}(y)\}$.*

Bewijs. Omdat $x \in f^{-1}\{y\} \subseteq f^{-1}[X] = K$ zien we dat $f(x)$ gedefinieerd is en gelijk is aan y. Uit Lemma 7.33 volgt nu dat $\overline{g_\eta}(x) \in \hat{K}$ en dat $\hat{f}(\overline{g_\eta}(x)) = \overline{g_\eta}(y)$. Dus $\overline{g_\eta}(x) \in \hat{f}^{-1}\{\overline{g_\eta}(y)\}$. $\square$

We hebben nu alles klaargezet en zijn in staat om, in het singuliere geval, een $\mathscr{L}$-onvergelijkbare verzameling te vinden. Eerst formuleren we de opvolger stap als stelling, vervolgens maken we de verzameling met transfiniete recursie.

Stelling 7.35 (Dow)**.** *Zij κ een singulier kardinaalgetal, zij X een κ-goede topologische ruimte die een irreducibele afbeelding $h : X \to \{0,1\}^\kappa$ toelaat, zij $\mathscr{L}$ een collectie partiële functies op X zodat $|\mathscr{L}| \leq \kappa$ en zodat K clopen is voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$. Stel verder dat $Y \subseteq X$ een deelverzameling van X is zodat $|Y| \leq \kappa$ en dat $\overline{g_\eta}[Y] \subseteq \mathcal{O}(\hat{\mathscr{L}}_\eta, X_\eta)$ voor elke $\eta < \sigma$. Dan bestaat er een $x \in X$ zó dat*

1. *$x \notin Y$.*
2. *$\overline{g_\eta}(x) \in \mathcal{O}(\hat{\mathscr{L}}_\eta, X_\eta)$ voor elke $\eta < \sigma$.*
3. *$x \neq f(y)$ voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ en $y \in K \cap Y$.*
4. *$x \notin f^{-1}\{y\}$ voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ en $y \in Y$.*

Bewijs. We gaan, net zoals we deden met $\mathcal{B}$ en $\mathscr{L}$, de verzameling Y schrijven als stijgende vereniging van verzamelingen met kardinaliteit $\leq \kappa_\eta$. Tel dus $Y = \{y_\lambda : \lambda < \kappa\}$ surjectief af en voor elke $\eta < \sigma$ stellen we $Y_\eta = \{y_\lambda : \lambda < \kappa_\eta\}$. Omdat $\sup_{\eta<\sigma} \kappa_\eta = \kappa$ geldt nu dat $\bigcup_{\eta<\sigma} Y_\eta = Y$, verder is $\{Y_\eta : \eta < \sigma\}$ stijgend, want $\{\kappa_\eta : \eta < \sigma\}$ is stijgend, en voor elke $\eta < \sigma$ geldt dat $|Y_\eta| \leq \kappa_\eta$.

We maken het punt x met transfiniete recursie. We construeren hiertoe voor elke $\eta < \sigma$ een punt $x_\eta \in X_\eta$ zó dat

i. Voor elke $\eta < \sigma$ geldt dat $x_\eta \in \mathcal{O}(\hat{\mathscr{L}}_\eta, X_\eta) \setminus \overline{g_\eta}[Y_\eta]$.

ii. Voor elke $\eta < \sigma$ en elke $(\hat{K}, \hat{f}) \in \hat{\mathscr{L}}_\eta$ geldt dat

   (a) $x_\eta \neq \hat{f}(y)$ als $y \in \overline{g_\eta}[Y_\eta] \cap \hat{K}$.

(b) $x_\eta \notin \hat{f}^{-1}\{y\}$ als $y \in \overline{g_\eta}[Y_\eta]$.

iii. Voor elke $\eta \leq \eta' < \sigma$ geldt dat $x_\eta = g_\eta^{\eta'}(x_{\eta'})$.

Punt iii. vertelt ons dat $(x_\eta)_{\eta<\sigma}$ een element van de inverse limiet $\lim_{\sigma \leftarrow \eta} X_\eta$ is. Vervolgens stellen we $x = \psi^{-1}((x_\eta)_{\eta<\sigma})$, met $\psi : X \to \lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta$ het homeomorfisme uit Gevolg 7.31, en tonen we aan dat x aan de gewenste eigenschappen voldoet.

De transfiniete recursie die we in dit bewijs gaan uitvoeren volgt een andere structuur dan de structuur van de transfiniete recursie constructies die we eerder hebben uitgevoerd. Voorheen verdeelde we de transfiniete recursie op in drie onderdelen: de nulconstructie, de opvolger stap en het limiet ordinaal geval. Nu gaan we al deze onderdelen in één keer uitvoeren.

Zij $\eta < \sigma$ een ordinaalgetal en stel dat we voor elke $\lambda < \eta$ een $x_\lambda \in X_\lambda$ hebben zó dat

i. Voor elke $\lambda < \eta$ geldt dat $x_\lambda \in \mathcal{O}(\hat{\mathscr{L}}_\lambda, X_\lambda) \setminus \overline{g_\lambda}[Y_\lambda]$.

ii. Voor elke $\lambda < \eta$ en elke $(\hat{K}, \hat{f}) \in \hat{\mathscr{L}}_\lambda$ geldt dat

(a) $x_\lambda \neq \hat{f}(y)$ als $y \in \overline{g_\lambda}[Y_\lambda] \cap \hat{K}$.

(b) $x_\lambda \notin \hat{f}^{-1}\{y\}$ als $y \in \overline{g_\lambda}[Y_\lambda]$.

iii. Voor elke $\lambda \leq \lambda' < \eta$ geldt dat $x_\lambda = g_\lambda^{\lambda'}(x_{\lambda'})$.

We willen nu een $x_\eta \in X_\eta$ vinden zodat $x_\eta \in \mathcal{O}(\hat{\mathscr{L}}_\eta, X_\eta) \setminus \overline{g_\eta}[Y_\eta]$, zodat $x_\lambda = g_\lambda^\eta(x_\eta)$ voor elke $\lambda \leq \eta$ en zodat voor elke $(\hat{K}, \hat{f}) \in \hat{\mathscr{L}}_\eta$ en elke $y \in \overline{g_\eta}[Y_\eta]$ geldt dat $x_\eta \notin \hat{f}^{-1}\{y\}$ en $x_\eta \neq \hat{f}(y)$ als $y \in \hat{K}$. Om deze x_η te construeren gaan we het bewijs van Stelling 7.20 nabootsen. Er geldt namelijk dat $\kappa_\eta > \aleph_0$ en dat κ_η regulier is, we hebben $\hat{\mathscr{L}}_\eta$ zo gemaakt dat $|\hat{\mathscr{L}}_\eta| \leq \kappa_\eta$ en dat $\hat{K}$ compact is voor elke $(\hat{K}, \hat{f}) \in \hat{\mathscr{L}}_\eta$. Verder geldt dat $\overline{g_\eta}[Y_\eta] \subseteq \overline{g_\eta}[Y] \subseteq \mathcal{O}(\hat{\mathscr{L}}_\eta, X_\eta)$ en dat $|\overline{g_\eta}[Y_\eta]| \leq |Y_\eta| \leq \kappa_\eta$. Er wordt dus voldaan aan alle eisen in Stelling 7.20. We kunnen echter niet blindelings Stelling 7.20 gaan toepassen, want dan hoeft niet te gelden dat $x_\lambda = g_\lambda^\eta(x_\eta)$ voor elke $\lambda \leq \eta$, we gaan dus echt het bewijs moeten naspelen.

We nemen een basis $\mathcal{B}^\eta \subseteq CO(X_\eta)$ voor de topologie van X_η zodat $|\mathcal{B}^\eta| \leq \kappa_\eta$, deze bestaat omdat we in Lemma 7.28 hebben gezien dat X_η κ_η-goed is. We tellen $\mathcal{B}^\eta = \{B_\alpha : \alpha < \kappa_\eta\}$ surjectief af en voor elke $\alpha < \kappa_\eta$ stellen we $\mathcal{B}_\alpha^\eta = \{B_\gamma : \gamma \leq \alpha\}$. Voor elke $\alpha < \kappa_\eta$ geldt nu dat $|\mathcal{B}_\alpha^\eta| \leq |\alpha + 1| < \kappa_\eta$. Uit Lemma 3.7 volgt dat $|\mathscr{B}(\mathcal{B}_\alpha^\eta)| \leq \max\{\aleph_0, |\mathcal{B}_\alpha^\eta|\} < \kappa_\eta$. Omdat $\mathcal{B}_\alpha^\eta \subseteq CO(X_\eta)$ en omdat $CO(X_\eta)$ een Boolese algebra is volgt dat $\mathscr{B}(\mathcal{B}_\alpha^\eta) \subseteq CO(X_\eta)$. We weten dat $\hat{K}$ compact is voor elke $(\hat{K}, \hat{f}) \in \hat{\mathscr{L}}$, uit Lemma 7.18 volgt dat er voor elke $(\hat{K}, \hat{f}) \in \hat{\mathscr{L}}_\eta$ en voor elke $\alpha < \eta$ een $G_{<\kappa_\eta}$-open en $G_{<\kappa_\eta}$-dichte verzameling $A_{(\hat{K},\hat{f})}^{\eta,\alpha} \subseteq \mathcal{O}_{(\hat{K},\hat{f})}^{\mathscr{B}(\mathcal{B}_\alpha^\eta)}$ bestaat.

Wegens Lemma 7.11, de definitie van $\mathcal{O}(\hat{\mathscr{L}}_\eta, X_\eta)$ en het feit dat de topologie van X_η is bevat in de $G_{<\kappa_\eta}$-topologie van X_η bestaat benedenstaande familie verzamelingen nu uit $G_{<\kappa_\eta}$-open en $G_{<\kappa_\eta}$-dichte verzamelingen.

$$\begin{aligned}\Sigma = &\left\{ A^{\eta,\alpha}_{(\hat{K},\hat{f})} : (\hat{K},\hat{f}) \in \hat{\mathscr{L}}_\eta \text{ en } \alpha < \kappa_\eta \right\} \\ &\cup \{X \setminus \{y\} : y \in \overline{g_\eta}[Y_\eta]\} \\ &\cup \left\{ X \setminus \{f(y)\} : (\hat{K},\hat{f}) \in \hat{\mathscr{L}}_\eta \text{ en } y \in \overline{g_\eta}[Y_\eta] \cap \hat{K} \right\} \\ &\cup \left\{ X \setminus f^{-1}\{y\} : (\hat{K},\hat{f}) \in \hat{\mathscr{L}}_\eta \text{ en } y \in \overline{g_\eta}[Y_\eta] \right\}.\end{aligned}$$

Er geldt dat $|\hat{\mathscr{L}}_\eta| \leq \kappa_\eta$ en dat $|\overline{g_\eta}[Y_\eta]| \leq \kappa_\eta$, dus met dezelfde berekening als in Stelling 7.20 ondervinden we dat $|\Sigma| \leq \kappa_\eta$. Omdat κ_η regulier is volgt nu uit de uitbreiding van de Categoriestelling van Baire dat $\bigcap \Sigma$ $G_{<\kappa_\eta}$-dicht is. Dit is waar we lichtelijk gaan divergeren van het bewijs van Stelling 7.20. Toen namen we op dit stadium namelijk een punt uit $\bigcap \Sigma$ en deed dit punt wat we wilden, we moeten er nu echter ook nog voor zorgen dat ons nieuwe punt x_η voldoet aan $x_\lambda = g^\eta_\lambda(x_\eta)$ voor elke $\lambda \leq \eta$. Omdat $g^\eta_\eta = \mathrm{id}_{X_\eta}$ gaat al automatisch gelden dat $x_\eta = g^\eta_\eta(x_\eta)$, we moeten er dus voor zorgen dat $x_\eta \in \bigcap_{\lambda<\eta}(g^\eta_\lambda)^{-1}\{x_\lambda\}$. Dit is echter helemaal geen kunst, er geldt namelijk dat $\bigcap_{\lambda<\eta}(g^\eta_\lambda)^{-1}\{x_\lambda\}$ een $G_{<\kappa_\eta}$-verzameling is.

We gaan laten zien dat $\bigcap_{\lambda<\eta}(g^\eta_\lambda)^{-1}\{x_\lambda\}$ een $G_{<\kappa_\eta}$-verzameling is. Neem voor elke $\lambda < \eta$ een basis $\mathfrak{b}^*_\lambda$ voor de topologie van X_λ zodat $|\mathfrak{b}^*_\lambda| \leq \kappa_\lambda$ (dit kan omdat X_λ κ_λ-goed is) en stel $\mathfrak{b}_\lambda = \{B \in \mathfrak{b}^*_\lambda : x_\lambda \in B\}$. Dan geldt dat $|\mathfrak{b}_\lambda| \leq |\mathfrak{b}^*_\lambda| \leq \kappa_\lambda < \kappa_\eta$ omdat de rij $\{\kappa_\eta : \eta < \sigma\}$ strikt stijgend is. We beweren dat $\{x_\lambda\} = \bigcap \mathfrak{b}_\lambda$. De inclusie van links naar rechts is duidelijk en de inclusie van rechts naar links volgt omdat X_λ Hausdorff is: als $y \neq x_\lambda$ neem dan $U \subseteq X_\lambda$ en $V \subseteq X_\lambda$ open en disjunct zodat $x_\lambda \in U$ en $y \in V$ en neem een $B \in \mathfrak{b}^*_\lambda$ zodat $x_\lambda \in B \subseteq U$. Omdat $x_\lambda \in B$ zien we dat $B \in \mathfrak{b}_\lambda$. Omdat $y \notin B$ en $\bigcap \mathfrak{b}_\lambda \subseteq B$ volgt dat $y \notin \bigcap \mathfrak{b}_\lambda$. De inclusie $\bigcap \mathfrak{b}_\lambda \subseteq \{x_\lambda\}$ volgt nu uit contrapositie. Dus $\bigcap \mathfrak{b}_\lambda = \{x_\lambda\}$ en

$$\bigcap_{\lambda<\eta}(g^\eta_\lambda)^{-1}\{x_\lambda\} = \bigcap_{\lambda<\eta}(g^\eta_\lambda)^{-1}\left[\bigcap \mathfrak{b}_\lambda\right] = \bigcap_{\lambda<\eta}\bigcap_{B\in\mathfrak{b}_\lambda}(g^\eta_\lambda)^{-1}[B] = \bigcap\left(\bigcup_{\lambda<\eta}\{(g^\eta_\lambda)^{-1}[B] : B \in \mathfrak{b}_\lambda\}\right).$$

Omdat $|\eta| < \aleph_\eta < \aleph_{\eta+1} = \kappa_\eta$, en $|\{(g^\eta_\lambda)^{-1}[B] : B \in \mathfrak{b}_\lambda\}| \leq |\mathfrak{b}_\lambda| < \kappa_\eta$ voor elke $\lambda < \eta$ volgt uit het feit dat κ_η regulier is dat $|\bigcup_{\lambda<\eta}\{(g^\eta_\lambda)^{-1}[B] : B \in \mathfrak{b}_\lambda\}| < \kappa_\eta$. We zien nu dat $\bigcap_{\lambda<\eta}(g^\eta_\lambda)^{-1}\{x_\lambda\}$ een $G_{<\kappa_\eta}$-verzameling is.

Omdat $\bigcap \Sigma$ een $G_{<\kappa_\eta}$-dichte verzameling is volgt nu dat $(\bigcap \Sigma) \cap \left(\bigcap_{\lambda<\eta}(g^\eta_\lambda)^{-1}\{x_\lambda\}\right) \neq \emptyset$. We nemen dus $x_\eta \in (\bigcap \Sigma) \cap \left(\bigcap_{\lambda<\eta}(g^\eta_\lambda)^{-1}\{x_\lambda\}\right)$. Uit dezelfde beredenering als in Stelling 7.20 volgt nu dat $x_\eta \in \mathcal{O}(\hat{\mathscr{L}}_\eta, X_\eta) \setminus \overline{g_\eta}[Y_\eta]$. Ook zien we dat $x_\eta \notin \hat{f}^{-1}\{y\}$ als $(\hat{K},\hat{f}) \in \hat{\mathscr{L}}_\eta$ en $y \in \overline{g_\eta}[Y_\eta]$, en dat $x_\eta \neq \hat{f}(y)$ als $(\hat{K},\hat{f}) \in \hat{\mathscr{L}}_\eta$ en $y \in \overline{g_\eta}[Y_\eta] \cap \hat{K}$. Als laatste geldt dat $g^\eta_\eta = \mathrm{id}_{X_\eta}$, en $x_\eta \in \bigcap_{\lambda<\eta}(g^\eta_\lambda)^{-1}\{x_\lambda\}$, dus $x_\lambda = g^\eta_\lambda(x_\eta)$ voor elke $\lambda \leq \eta$. Dit waren precies de eisen waar x_η aan moest voldoen.

We hebben nu dus voor elke $\eta < \sigma$ een punt $x_\eta \in X_\eta$ zó dat

i. Voor elke $\eta < \sigma$ geldt dat $x_\eta \in \mathcal{O}(\hat{\mathscr{L}}_\eta, X_\eta) \setminus \overline{g_\eta}[Y_\eta]$.

ii. Voor elke $\eta < \sigma$ en elke $(\hat{K},\hat{f}) \in \hat{\mathscr{L}}_\eta$ geldt dat

   (a) $x_\eta \neq \hat{f}(y)$ als $y \in \overline{g_\eta}[Y_\eta] \cap \hat{K}$.

   (b) $x_\eta \notin \hat{f}^{-1}\{y\}$ als $y \in \overline{g_\eta}[Y_\eta]$.

iii. Voor elke $\eta \leq \eta' < \sigma$ geldt dat $x_\eta = g_\eta^{\eta'}(x_{\eta'})$.

Wegens punt iii. geldt dat $(x_\eta)_{\eta<\sigma} \in \lim_{\sigma \leftarrow \eta} X_\eta$. We laten $x = \psi^{-1}((x_\eta)_{\eta<\sigma})$, met $\psi : X \to \lim_{\sigma\leftarrow\eta} X_\eta$ het homeomorfisme van Gevolg 7.31. Deze x is nu precies zoals we willen:

1. Stel om een tegenspraak uit te lokken dat $x \in Y$. Omdat $Y = \bigcup_{\eta<\sigma} Y_\eta$ is er dan een $\eta < \sigma$ zodat $x \in Y_\eta$. Er volgt dat $\overline{g_\eta}(x) = \pi_\eta(\psi(x)) = x_\eta \in \overline{g_\eta}[Y_\eta]$, een tegenspraak.
2. Voor elke $\eta < \sigma$ geldt dat $\overline{g_\eta}(x) = \pi_\eta(\psi(x)) = x_\eta \in \mathcal{O}(\hat{\mathscr{L}}_\eta, X_\eta) \setminus \overline{g_\eta}[Y_\eta] \subseteq \mathcal{O}(\hat{\mathscr{L}}_\eta, X_\eta)$.
3. Zijn $(K, f) \in \mathscr{L}$ en $y \in K \cap Y$ arbitrair. Stel om een tegenspraak uit te lokken dat $x = f(y)$. Omdat $\mathscr{L} = \bigcup_{\eta<\sigma} \mathscr{L}_\eta$ en $Y = \bigcup_{\eta<\sigma} Y_\eta$ zijn er $\eta_1 < \sigma$ en $\eta_2 < \sigma$ zodat $(K, f) \in \mathscr{L}_{\eta_1}$ en $y \in Y_{\eta_2}$. Laat $\eta = \max\{\eta_1, \eta_2\}$. Omdat $\{\mathscr{L}_\eta : \eta < \sigma\}$ en $\{Y_\eta : \eta < \sigma\}$ stijgend zijn volgt nu dat $(K, f) \in \mathscr{L}_\eta$ en $y \in Y_\eta$. We zien dat $y \in K \cap Y_\eta$. Wegens Lemma 7.33 volgt dat $\overline{g_\eta}(y) \in \hat{K} \cap \overline{g_\eta}[Y_\eta]$ en dat $\overline{g_\eta}(x) = x_\eta = \hat{f}(\overline{g_\eta}(y))$. Een tegenspraak, want $(\hat{K}, \hat{f}) \in \hat{\mathscr{L}}_\eta$.
4. Zijn $(K, f) \in \mathscr{L}$ en $y \in Y$ arbitrair. Stel om een tegenspraak uit te lokken dat $x \in f^{-1}\{y\}$. Er zijn weer $\eta_1 < \sigma$ en $\eta_2 < \sigma$ zodat $(K, f) \in \mathscr{L}_{\eta_1}$ en $y \in Y_{\eta_2}$ en er geldt weer dat $(K, f) \in \mathscr{L}_\eta$ en $y \in Y_\eta$ met $\eta = \max\{\eta_1, \eta_2\}$. Met Gevolg 7.34 zien we nu dat $\overline{g_\eta}(x) = x_\eta \in \hat{f}^{-1}\{\overline{g_\eta}(y)\}$. Dit is een tegenspraak, want $(\hat{K}, \hat{f}) \in \hat{\mathscr{L}}_\eta$.

$\square$

Gevolg 7.36. *Zij κ een singulier kardinaalgetal, zij X een κ-goede topologische ruimte die een irreducibele afbeelding $h : X \to \{0, 1\}^\kappa$ toelaat, zij $\mathscr{L}$ een collectie partiële functies op X zodat $|\mathscr{L}| \leq \kappa$ en zodat K clopen is voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$. Dan bestaat er een $\mathscr{L}$-onvergelijkbare deelverzameling $Y \subseteq X$ met $|Y| = \kappa^+$.*

Bewijs. We gaan met transfiniete recursie voor elke $\alpha < \kappa^+$ een verzameling $Y_\alpha \subseteq X$ maken zodat

1. $\{Y_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ wordt welgeordend door $\subseteq$, en het ordetype van Y_α is gelijk aan α voor elke $\alpha < \kappa^+$.
2. $\overline{g_\eta}[Y_\alpha] \subseteq \mathcal{O}(\hat{\mathscr{L}}_\eta, X_\eta)$ voor elke $\alpha < \kappa^+$ en $\eta < \sigma$.
3. Y_α is $\mathscr{L}$-onvergelijkbaar voor elke $\alpha < \kappa^+$.

<u>Het geval $\eta = 0$.</u> Stel $Y_0 = \emptyset$.

<u>De opvolger stap.</u> Zij $\alpha < \kappa^+$ en stel dat we een $\mathscr{L}$-onvergelijkbare verzameling Y_α hebben waarvan het ordetype gelijk is aan α en zodat $\overline{g_\eta}[Y_\alpha] \subseteq \mathcal{O}(\hat{\mathscr{L}}_\eta, X_\eta)$ voor elke $\eta < \sigma$. Omdat het ordetype van Y_α gelijk is aan $\alpha < \kappa^+$ geldt dat $|Y_\alpha| \leq \kappa$. Neem een punt $x \in X$ zoals in Stelling 7.35 met $Y = Y_\alpha$ en stel $Y_{\alpha+1} = Y_\alpha \cup \{x\}$. Omdat $x \notin Y_\alpha$ is het ordetype van $Y_{\alpha+1}$ nu $\alpha + 1$. Omdat $\overline{g_\eta}(x) \in \mathcal{O}(\hat{\mathscr{L}}_\eta, X_\eta)$ voor elke $\eta < \sigma$ geldt dat $\overline{g_\eta}[Y_{\alpha+1}] \subseteq \mathcal{O}(\hat{\mathscr{L}}_\eta, X_\eta)$ voor elke $\eta < \sigma$. We laten zien dat $Y_{\alpha+1}$ $\mathscr{L}$-onvergelijkbaar is. Laat dus $(K, f) \in \mathscr{L}$, laat $s \in Y_{\alpha+1}$ en $t \in Y_{\alpha+1}$ verschillend zijn en stel dat $s \in K$. We gaan drie gevallen onderscheiden. In het geval

dat $s, t \in Y_\alpha$ dan volgt dat $t \neq f(s)$ uit de inductiehypothese. Als $s = x$ en $t \in Y_\alpha$ dan volgt dat $t \neq f(s) = f(x)$ omdat $x \notin f^{-1}\{t\}$. In geval dat $t = x$ en $s \in Y_\alpha$ dan volgt dat $t = x \neq f(s)$ omdat $s \in Y_\alpha \cap K$.

Het limiet ordinaal geval Zij $\alpha < \kappa^+$ een limiet ordinaal en stel dat we voor elke $\gamma < \alpha$ al een verzameling $Y_\gamma \subseteq X$ hebben die aan eisen 1. tot en met 3. voldoen. Laat dan $Y_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} Y_\gamma$. Nu is het ordetype van Y_α gelijk aan α, en voor elke $\eta < \sigma$ geldt dat

$$\overline{g_\eta}[Y_\alpha] = \overline{g_\eta}\left[\bigcup_{\gamma<\alpha} Y_\gamma\right] = \bigcup_{\gamma<\alpha} \overline{g_\eta}[Y_\gamma] \subseteq \mathcal{O}(\hat{\mathscr{L}}_\eta, X_\eta),$$

want $\overline{g_\eta}[Y_\gamma] \subseteq \mathcal{O}(\hat{\mathscr{L}}_\eta, X_\eta)$ voor elke $\gamma < \alpha$. Ook is Y_α $\mathscr{L}$-onvergelijkbaar: als $(K, f) \in \mathscr{L}$ en als $s \in Y_\alpha$ en $t \in Y_\alpha$ verschillend zijn zodat $s \in K$, dan zijn er $\gamma_1 < \alpha$ en $\gamma_2 < \alpha$ zodat $s \in Y_{\gamma_1}$ en $t \in Y_{\gamma_2}$. Laat $\gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2\} < \alpha$. Dan geldt dat $s, t \in Y_\gamma$ en dus geldt dat $t \neq f(s)$.

Nu we de verzamelingen $\{Y_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ hebben kunnen we $Y = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} Y_\alpha$ stellen. Omdat het ordetype van Y_α altijd gelijk is aan α geldt dat $|Y| = \kappa^+$. Uit dezelfde beredenering als bij het limiet ordinaal geval volgt dat als $(K, f) \in \mathscr{L}$ en als $s \in Y$ en $t \in Y$ verschillend zijn zodat $s \in K$, dan geldt dat $t \neq f(s)$. Dus Y is $\mathscr{L}$-onvergelijkbaar. □

7.2.3 De toepassing op $\beta\mathbb{N}$

Nu we een manier hebben gevonden om κ^+ $\mathscr{L}$-onvergelijkbare elementen te vinden in een algemene κ-goede topologische ruimte, is het tijd om dit resultaat toe te passen om $\mathfrak{c}^+$ elementen in $\beta\mathbb{N}$ te vinden die onvergelijkbaar zijn in de Rudin-Keislerorde. Zoals eerder al vermeld is $\beta\mathbb{N}$ zelf niet $\mathfrak{c}$-goed. We gaan dus een deelruimte $X \subseteq \beta\mathbb{N}$ construeren die wel $\mathfrak{c}$-goed is. Omdat we in het singuliere geval eisen dat er een irreducibele afbeelding $h : X \to \{0,1\}^\mathfrak{c}$ bestaat, gaan we hier ook voor zorgen. Uit lemma 7.25 volgt dan meteen dat elk punt in X karakter minstens κ heeft. We nemen een onafhankelijke familie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ van kardinaliteit $\mathfrak{c}$. Deze bestaat wegens Gevolg 5.9. Voor elke $A \in \mathcal{A}$ definiëren we de functie

$$\begin{aligned} h_A : \mathbb{N} &\to \{0,1\} \\ n &\mapsto \begin{cases} 0 & n \in \mathbb{N} \setminus A, \\ 1 & 1 \in A. \end{cases} \end{aligned}$$

We geven $\{0,1\}$ de discrete topologie, omdat $\{0,1\}$ eindig is is de ruimte compact en Hausdorff. Wegens de universele eigenschap van de Čech-compactificatie breidt elke $h_A : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ zich uniek uit naar een continue functie $\overline{h_A} : \beta\mathbb{N} \to \{0,1\}$ zodat $\overline{h_A} \circ \iota = h_A$. In het bewijs van Gevolg 3.14 hebben we gezien dat als we over $\beta\mathbb{N} \simeq S(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ nadenken als alle ultrafilters op $\mathbb{N}$, dan geldt dat $\overline{h_A} = \lim \circ (h_A)_*$, met

$$\begin{aligned} (h_A)_* : S(\mathcal{P}(\mathbb{N})) &\to S(\mathcal{P}(K)) \\ p &\mapsto \{Z \subseteq K : h^{-1}[Z] \in p\}, \end{aligned}$$

en $\lim : S(\mathcal{P}(K)) \to K$ de functie die een ultrafilter p_K op K naar het unieke punt $k \in K$ stuurt zodat $p_K \to k$. Dus $\overline{h_A}(p) = 0$ dan en slechts dan als voor elke omgeving U van 0 geldt dat $h_A^{-1}[U] \in p$. Omdat $\{0\}$ een omgeving is van 0 zien we nu dat $\overline{h_A}(p) = 0$ als $h_A^{-1}\{0\} \in p$. Op vergelijkbare wijze volgt dat $\overline{h_A}(p) = 1$ als

$h_A^{-1}\{1\} \in p$. Uit de manier waarop we h_A gedefinieerd hebben volgt nu dat $\overline{h_A}(p) = 0$ als $\mathbb{N} \setminus A \in p$ en $\overline{h_A}(p) = 1$ als $A \in p$. We definiëren de volgende functie.

$$\begin{aligned} h : \beta\mathbb{N} &\to \{0,1\}^{\mathcal{A}} \\ p &\mapsto (\overline{h_A}(p))_{A \in \mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Voor elke $A \in \mathcal{A}$ schrijven we $\pi_A : \{0,1\}^{\mathcal{A}} \to \{0,1\}$ voor de projectie op de A-de coördinaat. Voor elke $A \in \mathcal{A}$ geldt dat $\pi_A \circ h = h_A$ continu is, uit de universele eigenschap van het product volgt dat h continu is. We beweren dat h surjectief is.

Lemma 7.37. *$h : \beta\mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathcal{A}}$ is surjectief.*

Bewijs. We gaan laten zien dat $h[\iota[\mathbb{N}]]$ dicht is in $\{0,1\}^{\mathcal{A}}$. Laat dus G een niet leeg basiselement voor de topologie van $\{0,1\}^{\mathcal{A}}$ zijn. Er geldt dat $G = \bigcap_{A \in \vartheta} \pi_A^{-1}[U_A]$ met $\vartheta \subseteq \mathcal{A}$ eindig en elke $U_A \subseteq \{0,1\}$ open. Omdat G niet leeg is is U_A niet leeg voor elke $A \in \vartheta$. We mogen er ook zonder beperking der algemeenheid vanuit gaan dat $U_A \neq \{0,1\}$ voor elke $A \in \vartheta$, want als $U_A = \{0,1\}$ dan is $\pi_A^{-1}[U_A] = \{0,1\}^{\mathcal{A}}$, dus als we alle verzamelingen $A \in \vartheta$ met $U_A = \{0,1\}$ weggooien dan verandert dat niets aan de doorsnede $\bigcap_{A \in \vartheta} \pi_A^{-1}[U_A]$. Dus voor elke $A \in \vartheta$ geldt ofwel dat $U_A = \{0\}$, of dat $U_A = \{1\}$. Laat $\mathcal{F} = \{A \in \vartheta : U_A = \{1\}\}$ en $\mathcal{G} = \{A \in \vartheta : U_A = \{0\}\}$. Dan zijn $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ en $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ eindig en geldt dat $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, uit onafhankelijkheid van $\mathcal{A}$ volgt dat $\bigcap \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{G} \neq \emptyset$. Neem dan een $x \in \bigcap \mathcal{F} \setminus \bigcup \mathcal{G}$. Voor elke $A \in \mathcal{F}$ geldt dan $x \in A$ en dus dat $A \in \mathscr{F}_x$. Er volgt dat $\overline{h_A}(\mathscr{F}_x) = 1 \in \{1\} = U_A$. Op vergelijkbare wijze: als $A \in \mathcal{G}$ dan geldt dat $x \notin A$, dus $x \in \mathbb{N} \setminus A$ en $\mathbb{N} \setminus A \in \mathscr{F}_x$. We zien dat $\overline{h_A}(\mathscr{F}_x) = 0 \in \{0\} = U_A$. Voor elke $A \in \vartheta$ geldt dus dat $\overline{h_A}(\mathscr{F}_x) \in U_A$, dus $h(\mathscr{F}_x) = (\overline{h_A}(\mathscr{F}_x))_{A \in \mathcal{A}} \in \bigcap_{A \in \vartheta} \pi_A^{-1}[U_A] = G$ en $h[\iota[\mathbb{N}]] \cap G \neq \emptyset$. We concluderen dat $h[\iota[\mathbb{N}]]$ dicht is in $\{0,1\}^{\mathcal{A}}$. Omdat $\beta\mathbb{N}$ compact is en omdat h continu is geldt dat $h[\beta\mathbb{N}]$ compact is. Omdat $\{0,1\}^{\mathcal{A}}$ Hausdorff is volgt nu dat $h[\beta\mathbb{N}]$ gesloten is in $\{0,1\}^{\mathcal{A}}$. Dus

$$\{0,1\}^{\mathcal{A}} = \overline{h[\iota[\mathbb{N}]]} \subseteq \overline{h[\beta\mathbb{N}]} = h[\beta\mathbb{N}]$$

en h is surjectief. □

Laat $\mathfrak{f} = \{F \subseteq \beta\mathbb{N} : F$ gesloten en $h|_F : F \to \{0,1\}^{\mathcal{A}}$ is surjectief$\}$. We gaan met het Lemma van Zorn laten zien dat er een minimaal element in $\mathfrak{f}$ bestaat (onder de partiële ordening $\subseteq$). Merk op dat $\mathfrak{f}$ wegens Lemma 7.37 niet leeg is. Laat $\mathcal{K} \subseteq \mathfrak{f}$ een keten zijn. Omdat elke $F \in \mathcal{K}$ gesloten is is $\bigcap \mathcal{K}$ gesloten. We laten zien dat $h|_{\bigcap \mathcal{K}} : \bigcap \mathcal{K} \to \{0,1\}^{\mathcal{A}}$ surjectief is. Laat dus $y \in \{0,1\}^{\mathcal{A}}$. We beweren dat $\{h^{-1}\{y\} \cap F : F \in \mathcal{K}\}$ aan de eindige doorsnede eigenschap voldoet. Als $\vartheta \subseteq \mathcal{K}$ eindig is, dan heeft ϑ wegens het feit dat $\mathcal{K}$ totaal geordend is een minimum $F \in \vartheta$ (in de partiële ordening $\subseteq$). Er geldt dat $\bigcap \vartheta = F$, dus $\bigcap_{F \in \vartheta} h^{-1}\{y\} \cap F = h^{-1}\{y\} \cap \bigcap \vartheta = h^{-1}\{y\} \cap F$ en deze verzameling is niet leeg omdat $h|_F : F \to \{0,1\}^{\mathcal{A}}$ surjectief is. Dus $\{h^{-1}\{y\} \cap F : F \in \mathcal{K}\}$ voldoet aan de eindige doorsnede eigenschap. Omdat $\{0,1\}^{\mathcal{A}}$ Hausdorff is is het singleton $\{y\}$ gesloten, dus $\{h^{-1}\{y\} \cap F : F \in \mathcal{K}\}$ is een familie gesloten verzamelingen en de compactheid van $\beta\mathbb{N}$ leert ons nu dat $\bigcap\{h^{-1}\{y\} \cap F : F \in \mathcal{K}\} = h^{-1}\{y\} \cap \bigcap \mathcal{K}$ niet leeg is. Dus $h|_{\bigcap \mathcal{K}} : \bigcap \mathcal{K} \to \{0,1\}^{\mathcal{A}}$ is surjectief. We concluderen dat elke keten in $\mathfrak{f}$ een ondergrens heeft, wegens het Lemma van Zorn bevat $\mathfrak{f}$ nu een minimaal element. Laat $X \in \mathfrak{f}$ een minimaal element zijn. Dan is $X \subseteq \beta\mathbb{N}$ $\mathfrak{c}$-goed.

Lemma 7.38. *X is $\mathfrak{c}$-goed.*

Bewijs. Om te laten zien dat X $\mathfrak{c}$-goed is verifiëren we dat X aan alle drie de eigenschappen voldoet.

1. X is een gesloten deelruimte van de compacte Hausdorff ruimte $\beta\mathbb{N}$, dus X is compact en Hausdorff.
2. Omdat we X minimaal hebben gekozen in de familie van alle gesloten deelverzamelingen F van $\beta\mathbb{N}$ zodat $h|_F : F \to \{0,1\}^{\mathcal{A}}$ surjectief is geldt dat $h|_X : X \to \{0,1\}^{\mathcal{A}}$ irreducibel is. We hebben zojuist gezien dat X compact is dus uit Lemma 7.25 volgt nu dat elk punt in X minstens karakter $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$ moet hebben.
3. We weten dat $\mathcal{B} = \{B_A : A \subseteq \mathbb{N}\}$ een basis is voor de topologie van $S(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \simeq \beta\mathbb{N}$. In het bewijs van Lemma 3.11 hebben we gezien dat $\mathcal{B} \subseteq CO(\beta\mathbb{N})$ ook een clopen basis voor de topologie van $\beta\mathbb{N}$ is. verder geldt dat $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$. Er volgt dat $\mathcal{B}' = \{X \cap B : B \in \mathcal{B}\} \subseteq CO(X)$ een clopen basis is voor de deelruimtetopologie van X waarvoor geldt dat $|\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}| \leq \mathfrak{c}$.

$\square$

Stelling 7.39. *Er is een deelverzameling $\mathcal{Y} \subseteq \beta\mathbb{N}$ van kardinaliteit $\mathfrak{c}^+$ waarin elementen onderling onvergelijkbaar zijn in de Rudin-Keislerorde.*

Bewijs. We gaan werken in de $\mathfrak{c}$-goede deelruimte $X \subseteq \beta\mathbb{N}$ die een irreducibele afbeelding $h : X \to \{0,1\}^{\mathcal{A}} \simeq \{0,1\}^{\mathfrak{c}}$ toelaat. Voor elke $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ stellen we $K_f = X \cap f_*^{-1}[X]$ en we laten $\mathscr{L} = \{(K_f, f_*|_{K_f}) : f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$. Er geldt nu dat $|\mathscr{L}| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$. Verder geldt dat $K_f = X \cap f_*^{-1}[X]$ clopen is in X voor elke $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, omdat X gesloten is in $\beta\mathbb{N}$ volgt nu dat K_f gesloten is in de compacte ruimte $\beta\mathbb{N}$, dus K_f is compact voor elke $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Als $\mathfrak{c}$ regulier is dan geeft Gevolg 7.21 ons nu een $\mathscr{L}$-onvergelijkbare deelverzameling $\mathcal{Y} \subseteq X$ van kardinaliteit $\mathfrak{c}^+$. Als $\mathfrak{c}$ singulier is dan geeft Gevolg 7.36 ons deze verzameling. We laten zien dat elementen in $\mathcal{Y}$ onderling onvergelijkbaar zijn in de Rudin-Keislerorde. Laat dus $p \in \mathcal{Y}$ en $q \in \mathcal{Y}$ verschillend zijn en laat $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een functie zijn. We gaan laten zien dat $q \neq f_*(p)$, we onderscheiden hiertoe twee gevallen. Als $p \in K_f$ dan volgt dat $q \neq f_*(p)$ uit het feit dat $\mathcal{Y}$ $\mathscr{L}$-onvergelijkbaar is. Als $p \notin K_f$ dan geldt dat $p \notin X$ of $f_*(p) \notin X$, omdat $p \in \mathcal{Y} \subseteq X$ volgt nu dat $f_*(p) \notin X$. Omdat $q \in \mathcal{Y} \subseteq X$ geldt nu dat $q \neq f_*(p)$. Door de rollen van p en q om te draaien zien we ook dat $p \neq f_*(q)$. Dus $p \not\leq q$ en $q \not\leq p$. $\square$

8 Discussie en reflectie

We begonnen met deze scriptie aan een zoektocht naar onvergelijkbare elementen in de Rudin-Keislerorde op $\beta\mathbb{N}$, en deze hebben we in groten getale gevonden: eerst vonden we er twee, toen $\mathfrak{c}$ en daarna zelfs $2^{\mathfrak{c}}$. Nu is de maat vol, we zijn er onderweg namelijk ook achter gekomen dat de kardinaliteit van $\beta\mathbb{N}$ gelijk is aan $2^{\mathfrak{c}}$. Het is echter zeker nog niet zo dat alle vragen over de Rudin-Keislerorde beantwoord zijn. Een voorbeeld van zo een onbeantwoorde vraag is de vraag of alle eindige partiële ordening kunnen worden ingebed in de Rudin-Keislerorde. Een eindige partiële orde kan worden ingebed in een kubus (dat wil zeggen: de partieel geordende verzameling $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ met X een eindige verzameling), dus om de vraag positief te beantwoorden volstaat het om elke kubus in de Rudin-Keislerorde in te bedden. Deze vraag is door G. Zwaneveld onderzocht in haar bachelor scriptie [Zwa21]. Het is haar toen gelukt om een ruit van ultrafilters te construeren, dat wil zeggen dat ze de partieel geordende verzameling $(\mathcal{P}(\{0,1\}), \subseteq)$ heeft weten in te bedden in de Rudin-Keislerorde. Tijdens mijn project heb ik ook over deze vraag nagedacht, maar het is helaas niet gelukt om de overige kubussen in de Rudin-Keislerorde in te bedden. De topologische aanpak zou echter wel eens kunnen helpen om de vraag positief te beantwoorden, Zwaneveld liep in haar scriptie namelijk aan tegen wat ze 'speciale verbindingen' noemde, deze speciale verbindingen moesten worden doorbroken maar dit was haar nog niet gelukt. Speciale verbindingen kom je alleen tegen als je de constructie van K. Kunen gebruikt [Kun72], de topologische constructie van A. Dow [Dow98] werkt door een verzameling van maximaal $\mathfrak{c}$ goed gekozen ultrafilters te nemen (deze hoeven niet onderling onvergelijkbaar te zijn), en er een nieuw ultrafilter naast te plakken. Dit maakt het dat je speciale verbindingen nooit tegenkomt. Ik had graag de vraag over de eindige partiële ordeinbeddingen nader hebben onderzocht, maar het project moet een keer ten einde komen (en de scriptie is ook al erg lang geworden).

Zelf heb ik ontzettend genoten van onze zoektocht en ik hoop dat u, de lezer, dit ook heeft gedaan. Voordat ik begon aan dit project was ik al geïntroduceerd aan de Čech-Stone-compactificatie βX, tijdens het topologie college van mijn begeleider K. P. Hart. De constructie die in dit college gegeven werd is dezelfde als in het bewijs van Stelling 3.1. Toen ik voor het eerst deze constructie tot me nam was ik er niet van overtuigd dat ik zo geïnteresseerd zou raken in βX als dat ik uiteindelijk geworden ben. De constructie voelde een beetje ad hoc en ik moest haar een aantal keer doorlopen voordat ik haar doorhad. Nadat ik er achter was gekomen dat βX ook met een universele eigenschap kan worden gekarakteriseerd was ik echter snel verkocht. Het was namelijk ook rond deze periode dat, tijdens een inleidend college in de algebraïsche topologie, mijn interesse in categorietheorie zich begon te ontkiemen. Ik ben nu driekwart jaar verder en ik heb een heel bachelorproject aan tijd en energie gestoken in bekend raken met $\beta\mathbb{N}$. Hier heb ik absoluut geen spijt van; ik heb topologie, categorietheorie en een hele hoop verzamelingenleer bij het project mogen betrekken. Dit zijn drie takken van de theoretische wiskunde waar ik zeer in ben geïnteresseerd dus ik ben hier erg dankbaar voor. Ook wil ik mijn dank betuigen aan de begeleider van mijn project K. P. Hart. Het is meerdere keren voorgekomen dat ik dagenlang ergens op vast zat, en dat, als ik tijdens onze wekelijkse vergadering ernaar vroeg, K. P. er even over nadacht en precies de woorden wist te vinden die mijn ogen deden openen. Samen met K. P. dit project uitvoeren is uitdagend en inspirerend geweest.

Addendum

Het bewijs van Stelling 7.39 bevat een fout die ik pas na het inleveren van mijn scriptie (maar voor het uploaden op de TU Delft repository) heb weten te vinden. In het bewijs claim ik dat $X \cap f_*^{-1}[X]$ clopen is in X. Mijn gedachtegang was: X is clopen in X, dus het inverse beeld $f_*^{-1}[X]$ is clopen in X en er volgt dat $X \cap f_*^{-1}[X]$ clopen is in X. In deze beredenering wordt echter de aanname gemaakt dat $f_*|_X : X \to X$ een continue functie van X naar X is, maar $f_*|_X$ is een functie van X naar $\beta\mathbb{N}$ en er kunnen elementen $x \in X$ zijn zodat $f_*(x) \in \beta\mathbb{N} \setminus X$. De rectificatie van mijn fout is waarschijnlijk te vinden in Lemma 7.26. In dit Lemma wordt een familie clopen verzamelingen $\mathcal{A}$ uitgebreid tot een Boolese algebra $\mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ die afgesloten is onder het nemen van inverse beelden van partiële functies. Omdat de hele ruimte X een element van $\mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ is (per definitie van een Boolese algebra) moet nu gelden dat het domein van alle partiële functies $f^{-1}[X]$ ook in $\mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ moet zitten. Omdat $\mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ bevat moet zijn in de clopen verzamelingen eis ik dat de domeinen van alle partiële functies clopen zijn. Deze eis is te sterk geweest. Het is (waarschijnlijk) mogelijk om deze eis te laten vervallen en, in plaats van te eisen dat $\mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ gesloten is onder het nemen van inverse beelden, het volgende te eisen.

Voor elke $(K, f) \in \mathscr{L}$ en elke $B \in \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ bestaat er een $B^* \in \mathrm{cl}_{\mathscr{L}}(\mathcal{A})$ zó dat $B^* \cap K = f^{-1}[B]$.

Deze eis is (waarschijnlijk) genoeg om partiële functies $f \in \mathscr{L}_\eta$ te laten corresponderen met een partiële functie $\hat{f}$ op X_η, zoals gebeurt op pagina 67 tussen het bewijs van Lemma 7.32 en Lemma 7.33.

Omdat de eis dat de domeinen van partiële functies clopen zijn is vervallen is het voor het bewijs van Stelling 7.39 niet meer nodig dat $K_f = X \cap f_*^{-1}[X]$ clopen is. Dus de fout is gerectificeerd.

Referenties

[Can77] G. Cantor. “Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.” In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84 (1877), p. 242–258.

[Can83] G. Cantor. “Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten”. In: *Mathematische Annalen* 21.4 (1883), p. 545–591.

[Čec37] E. Čech. “On Bicompact Spaces”. In: *Annals of Mathematics* 38.4 (1937), p. 823–844.

[CN74] W. W. Comfort en S. Negrepontis. *The Theory of Ultrafilters*. Springer Berlin Heidelberg, 1974.

[Dow98] A. Dow. “$\beta\mathbf{N}$”. In: *The work of Mary Ellen Rudin*. Deel 705. Annals of the New York Academy of Sciences, 1998, p. 47–66.

[FK34] G. Fichtenholz en L. Kantorovitch. “Sur les opérations linéaires dans l’espace des fonctions bornées”. In: *Studia Mathematica* 5 (1934), p. 69–98.

[Haj61] A. Hajnal. “Proof of a conjecure of S. Ruziewicz”. In: *Fundamenta Mathematicae* 50.2 (1961), p. 123–128.

[Hal74] P. R. Halmos. *Naive Set Theory*. Springer New York, 1974, p. 62–65.

[Hau36] F. Hausdorff. “Über zwei Sätze von G. Fichtenholz und L. Kantorovitch”. In: *Studia Mathematica* 6 (1936), p. 18–19.

[Kun72] K. Kunen. “Ultrafilters and Independent Sets”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 172 (1972), p. 299–306.

[Ruz36] S. Ruziewicz. “Une généralisation d’un théorème de M. Sierpinski”. In: *Publications de l’Institut Mathématique* Tom 5 (1936), p. 23–27.

[SR78] S. Shelah en M. E. Rudin. “Unordered types of ultrafilters”. In: *Topology Proceedings* 3 (1978), p. 199–204.

[Sto37] M. H. Stone. “Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 41.3 (1937), p. 375–481.

[Tyc30] A. Tychonoff. “Über die topologische Erweiterung von Räumen”. In: *Mathematische Annalen* 102 (1930), p. 544–561.

[Zer04] E. Zermelo. “Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann”. In: *Mathematische Annalen* 59 (1904), p. 514–516.

[Zwa21] G. Zwaneveld. “Een ruit van ultrafilters”. Bachelor scriptie. Delft University of Technology, 2021.