Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

De convolutie stelling van Titchmarsh

(Engelse titel: Titchmarsh's Convolution Theorem)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

LISANNE SPEK

Delft, Nederland
Augustus 2017

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

“De convolutie stelling van Titchmarsh”

(Engelse titel: “Titchmarsh’s Convolutin Theorem)”

LISANNE SPEK

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr.ir. M.C. Veraar

Overige commissieleden

Dr. ir. G.N.J.C. Bierkens

Dr. B. van den Dries

Augustus, 2017

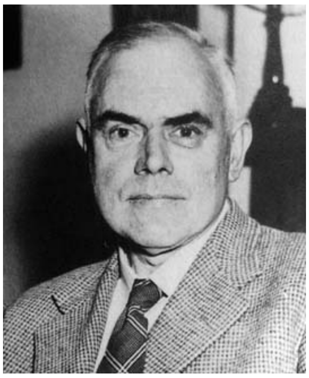
Delft

Inhoudsopgave

1 Titchmarsh

Edward Charles "Ted" Titchmarsh is geboren op 1 juni 1899 in Newbury, Berkshire in Engeland. Zijn ouders, Edward en Caroline Titchmarsh, hadden drie kunnen, waarvan hij zelf de middelste was. Zijn vader was dominee van Newbury en later van Sheffield. Dit is waar Titchmarsh naar school ging. hij heeft later geschreven dat het op deze school was dat hij erachter kwam dat wiskunde voor hem was weggelegd, en is zich er daardoor in gaan specialiseren. Dit heeft er voor gezorgd dat hij in december 1916, op 17 jarige leeftijd, een studiebeurs voor wiskunde aan het Balliol College in Oxford won. Hij begon zijn studie wiskunde hier een jaar later in oktober 1917. Door de eerste wereld oorlog heeft hij echter zijn studie na één kwaartaal al moeten onderbreken om zich bij de Royal Engineers te voegen. Hij is heermee uitgezonden naar Frankrijk. Ruim een jaar na de oorlog, in 1919, is hij weer begonnen aan zijn studie. Hij werd begeleid door J. W. Russell.
G. D. Hardy heeft een grote invloed op hem gehad. Titchmarsh heeft van hem geleerd wat wiskundige analyse is en zich door hem toegewijd aan de pure wiskunde. Ook hield Hardy elke maandagavond een bijeenkomst waarin ze diepe wiskundige discussies hadden. Een van de andere aanwezigen hierbij was Mary Cartwright, de eerste vrouwelijke wiskundige die genomineerd werd voor de Royal Society. Het hielp ook dat Titchmarsh een gedeelde passie had met Hardy, cricket.
Titchmarsh is in 1922 geslaagd met een First Class diploma en won meerdere beursen voor zijn voortreffelijke werk. Voor zijn doctoraat is hij een jaar later gaan werken aan de universiteit in Londen, zijn verbinding met Oxford is hiermee echter nog niet verbroken. Hij heeft in det jaar zelfs ook de Prize Fellowship aan het Magdalen College Oxford gewonnen, welke hij voor 7 jaar heeft gehouden. Naast college geven en doctoraat studenten begeleiden heeft hij tijdens zijn tijd in Londen ook onderzoeken van hoge kwaliteit geplubliceerd. Ook heeft hij het toezicht over Mary Cartwright tijdens haar doctoraat overgenomen in de tijd dat Hardy weg was.
In 1925 is hij getrouwd met Kathleen Blomfield en samen hebben ze drie dochters gekregen. In 1929 volgde Titcharsch Charles Burkill op als voorzitter van de pure wiskunde in Liverpool. Hier heeft hij twee jaar gezeten voor hij verder ging in Oxford, hij nam de plek van Hardy over. In Oxford was het de leerstoel van de meetkunde, Titchmarsh is hier 30 jaar gebleven, maar hoefde geen college te geven in de meetkunde. het werk van Titchmarsh was in de analyse, en hij weigerde zelfs om college te geven over andere onderwerpen van de wiskunde. Zijn eerste onderzoek ging

over Fourier reeksen, waar hij nieuwe ontdekkingen in heeft gedaan. Hier heeft hij in 1937 het boek "Introduction to the Theory of Fourier Integrals" over geschreven. Daarna is hij gaan werken aan integralen, in het bijzonder de Riemann-zèta-functie. Hij heeft hier twee werken voor gepubliceerd, "The Zeta-Function of Riemann" in 1930 en ruim twee jaar later, in 1951, "The Theory of the Riemann Zeta-Function." De laatste werd een toonaangevend boek in de reële en complexe functietheorie en is vele malen vertaald. Na 1939 heeft hij veel gewerkt aan functie expansie en eigenfuncties van differentiaalvergelijkingen, wat erg belangrijk was voor de kwantumveldentheorie. Dit heeft hij veelal verwerkt in zijn boek "Eigenfunction Expansion Associated with Second-Order Differential Equations", waarvan het eerste deel uitkwam in 1946 en het tweede deel in 1958. Ook heeft hij in 1948 "Mathematics for the General Reader" geschreven.



Titchmarsh heeft in zijn Carrière vele prijzen gewonnen. In 1931 is hij verkozen tot 'Fellow of the Royal Society', en hij was voorzitter van de Londen Mathematical Society van 1945 tot 1947. Verder heeft hij de 'De Morgan Medal', 1953, de 'Sylvester Medal', 1955, en de 'Senior Berwick Prize, 1956, gewonnen. 18 januari 1963 is hij op 63 jarige leeftijd overleden in Oxford, Engeland.

2 Definities

Voordat we verder gaan me de stelling van Titchmarsh en het bewijs hebbben we eerst een aantal definities en stellingen nodig die we zo gaan gebruiken.

Definitie 1. *Laat $u, v \in L^1(\mathbb{R})$. De convolutie van u en v is een nieuwe functie $u * v$ met als voorschrift*

$$(u * v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(s)v(t-s)\,\mathrm{d}s.$$

De convolutie is goed gedefiniëerd, zie Korevaar (2011).

Stelling 1 (Ongelijkheid van Young). *Neem aan dat $f \in L^p(\mathbb{R})$ en $g \in L^q(\mathbb{R})$ en $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ met $1 \leq p, q, r \leq \infty$. Dan*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Definitie 2. *Zij V een vectorruimte en $T \in \mathcal{L}(V)$. Als M een deelruimte is van V met de eigenschap $T(M) \subseteq M$, dan heet M invariant onder T. Oftewel, voor elke $v \in M$ volgt $T(v) \in M$.*

Definitie 3. *Zij $D \in \mathbb{R}$, en $f : D \to \mathbb{R}$ een functie. Dan noemen we $supp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f \neq 0\}}$ de drager van f.*

Definitie 4. *Zij (X, Σ, μ) een maatruimte. Een functie is $f = 0$ bijna overal als $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0$. We noteren dit als b.o.*

Definitie 5. *Een verzameling P is een π-systeem als:*

- *P is niet leeg,*
- *Als A,$B \in P$, dan $A \cap B$ in P.*

Definitie 6. *Zij D een verzameling van deelverzamelingen van S, dan is D een d-systeem als:*

- *$S \in D$,*
- *Als A, $B \in D$, dan $A \backslash B$ in D,*
- *Als $A_1, A_2, ...$ een rij van deelverzamelingen van D is met $A_n \subseteq A_{n+1}$ voor alle $n \geq 1$, dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in D$.*

Stelling 2 (Integraalregel Leibniz). *Zij $f(x, t)$ een functie zodat $f(x, t)$ en zijn partiële afgeleide $f_x(x, t)$ beide contine zijn in t en x in een deel van het (x, t)-vlak, waaronder $a(x) \leq t \leq b(x)$, $x_0 \leq x \leq x_1$. Neem verder aan* *dat* $a(x)$ *en* $b(s)$ *beide continu zijn en beide continue afgeleiden hebben op* $x_0 \leq x \leq x_1$. *Dan geldt er voor* $x_0 \leq x \leq x_1$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x,b(x))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}b(x) - f(x,a(x))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

3 De stelling van Titchmarsh

In zijn artikel 'The zeros of certain integral functions' definieerde Titchmarsh de volgende stelling:

Stelling 1. *Laat f en g integreerbare functies zijn op het interval (0,2T). Als de convolutie*

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{voor bijna alle } 0 \le t \le 2T$$

Dan zijn er positieve getallen α en β met $\alpha + \beta \geq 2T$ waarvoor geldt dat $f = 0$ b.o. op $(0, \alpha)$ en $g = 0$ b.o op $(0, \beta)$.

Het artikel is verschenen op 14 mei 1925, en verscheen in 1926 in Proceedings of the London Mathematical Society. Hij bewees de stelling met behulp van analytische en harmonische functies. We zullen echter een meer elementair bewijs bekijken, die alleen maar gebruikt met van de stelling van Fubini en de formule van Parseval.

4 De omgekeerde stelling

Om een idee te krijgen van de stelling, zullen we eerst kijken naar het omgekeerde en het bewijs hiervan.

Stelling 2. *Laat f en g integreerbare functies zijn op het interval (0,2T). Als er positieve getallen α en β bestaan met $f = 0$ b.o. op $(0, \alpha)$ en $g = 0$ b.o. op $(0, \beta)$ en $\alpha + \beta = 2T$. Dan*

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{voor } 0 \le t \le 2T$$

Bewijs. Zij $t \in (0, 2T)$ vast. Zij $x \in (0, 2T)$ willekeurig. Er zijn nu twee opties:
$x \in (0, \beta)$, in dit geval zijn we klaar, want er geldt $g = 0$.
$x \notin (0, \beta)$. Er geldt nu niet $g = 0$, dus willen we laten zien dat $f = 0$. Dit komt er op neer dat $t - x \in (0, \alpha)$. $t - x > 0$ is triviaal. Er rest ons te bewijzen dat $t - x < \alpha$, ofwel $t < \alpha + x$. En dit geldt vanwege: $t < 2T = \alpha + \beta < \alpha + x$. □

5 Bewijs van de stelling van Titchmarsh

We zullen gaan kijken naar het bewijs van Raouf Doss. Deze is in 1988 verschenen in Proceedings of the American Mathematical Society. Voor dit bewijs is een stuk meer wiskunde nodig dan voor het bewijs wat we net hebben gezien.

Bewijs. We kunnen nu met behulp van deze lemma's de stelling van Titchmarsh bewijzen. Met de hoofdstelling van de integraalrekening kunnen we aannemen dat $\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s = F(x) - F(0) = F(x)$ voor F de primitieve van f. Ook nemen we aan dat $\int_0^u f(u-x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Dus er geldt ook zeker $\int_0^t \int_0^u f(u-x)g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u = 0$. Verder zijn beide functie's f en g integreerbaar, dus volgt er met Fubini

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \int_0^u f(u-x)g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^t \int_x^t f(u-x)g(x)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^t g(x)\left(\int_x^t f(u-x)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^t g(x)\left(F(t-x) - F(0)\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^t F(t-x)g(x)\,\mathrm{d}x = F * g(t) \end{aligned}$$

Dit geeft dus $F * g(t) =$ voor $t \in (0, 2T)$. Nemen we nu $G(x) = \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s$, dan volgt hieruit weer op dezelfde manier $F * G(t) = 0$ voor $t \in (0, 2T)$. Voordat we verder kunnen hebben we eerst drie lemma's nodig.

Lemma 1. *Zij $f \in L^1(0, 2T)$ op $(0, \alpha)$. Als $\int_0^x f(s)\mathrm{d}s = 0 \;\; \forall x \in (0, \alpha)$, dan $f = 0$ b.o. op $(0, \alpha)$.*

Bewijs. Definieer $\mu(A) = \int_A f(t)\ \mathrm{d}t$ voor A Borel meetbaar. We hebben $\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s = 0 \quad \forall x \in (0, \alpha)$, dus volgt $\mu(I) = 0$ voor alle intervallen I. Namelijk $\int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^b f(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^a f(s)\,\mathrm{d}s = 0$ voor intervallen $(a, b) \in (0, \alpha)$. Dynkin's lemma zegt het volgende:

> Als P een π-systeem is en D een d-systeem met P $\subseteq$ D, dan $\sigma\{P\} \subseteq D$.

We nemen voor P de verzameling {I: I een interval}. Duidelijk is dat P niet leeg is. En de doorsnede van twee intervallen zal ook altijd weer een interval zijn. Dus dit is inderdaad een π systeem.
Voor D nemen we de Borel-meetbare deelverzamelingen $A \in S$ met $\mu(A) =$

0. S $= (0, 2\pi)$, en dit is een interval, dus zeker S $\in$ D. Neem $A, B \in S$, dan mogen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $A \subset B$, dan $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$, dus als A,B $\in$ D volgt A\B $\in$ D. Neem nu een rij $\{A_n\}$ met $\mu(A_n) = 0$ voor alle n, en $A_n \subseteq A_{n+1}$. Er geldt

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty A_n\right) \leq \sum_1^\infty \mu(A_n) = \sum_1^\infty 0 = 0$$

Dus is D een d-systeem. Nu volgt met het lemma van Dynkin dat $\sigma\{P\} \subseteq D$. En de verzamelingen van alle intervallen brengt alle meetbare verzamelingen voort. Dus we krijgen $\mu(A) = 0$ voor alle Borel meetbare A in $(0, 2\pi)$.
Neem de verzameling $B = \{x \in (0, \alpha) : f(x) \geq 0\}$. Dit is een Borel meetbare verzameling, dus er volgt $\int_B f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ en hieruit $f = 0$. Op dezelfde manier volgt het voor $B = \{x \in (0, \alpha) : f(x) \leq 0\}$. En dus volgt er $f = 0$ b.o. op $(0, \alpha)$. $\square$

Nu mogen we aannemen dat f, g meerdere malen continu differentiëerbaar zijn, en dus gelden onder anderen de vergelijkingen $f' * g(t) = 0$ en $g(0) = 0$.

Lemma 2. *Neem aan dat $h \in L^1(0, 2T)$ en dat*

$$\left| \int_0^{2t} e^{2n(t-x)} h(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq C_t n^{-1/2}$$

voor $0 \leq t \leq T$ en alle $n \in \{1, 2, ...\}$ met C_t onafhankelijk van n. Dan $h = 0$ op $(0, T)$.

Bewijs. Er geldt

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 - e^{-e^{2n(t-x)}}\right] = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < t, \\ 0 & t < x \leq 2t. \end{cases}$$

Omdat $|1 - e^{-e^{2n(t-x)}}| \leq 1 \;\; \forall n$ en 1 integreerbaar is op $(0, 2T)$ volgt met de gedomineerde convergentie stelling:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2t} \left[1 - e^{-e^{2n(t-x)}}\right] h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t 1 \cdot h(x)\,\mathrm{d}x + \int_t^{2t} 0 \cdot h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t h(x)\,\mathrm{d}x$$

Ook weten we dat

$$e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$$

Dit geeft voor vaste t en n

$$e^{-e^{2n(t-x)}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-e^{2n(t-x)})^k}{k!} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} e^{2nk(t-x)}$$

Hiermee krijgen we

$$1 - e^{-e^{2n(t-x)}} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} e^{2nk(t-x)} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} e^{2nk(t-x)}$$

En dus zal $-\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} e^{2nk(t-x)}$ uniform convergeren naar $1 - e^{-e^{2nk(t-x)}}$ als $N \to \infty$. Dit invullen geeft

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{2t} \left[1 - e^{-e^{2n(t-x)}}\right] h(x) \, \mathrm{d}x \right| &= \lim_{N \to \infty} \left| \int_0^{2t} \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} e^{2nk(t-x)} h(x) \, \mathrm{d}x \right| \\
&= \lim_{N \to \infty} \left| \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{2t} e^{2nk(t-x)} h(x) \, \mathrm{d}x \right| \\
&= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \left| \int_0^{2t} e^{2nk(t-x)} h(x) \, \mathrm{d}x \right| \\
&\leq \limsup_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} C_t (nk)^{-1/2} \\
&\leq C_t n^{-1/2} \limsup_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \\
&= C_t n^{-1/2} e
\end{aligned}$$

Er volgt:

$$\left| \int_0^t h(x) \, \mathrm{d}x \right| = \left| \lim_{n \to \infty} \int_0^{2t} \left[1 - e^{-e^{2n(t-x)}}\right] h(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \lim_{n \to \infty} C_t n^{-1/2} e = 0.$$

En dus volgt er met Lemma 1 dat $h(x) = 0$ b.o. $(0, T)$. $\square$

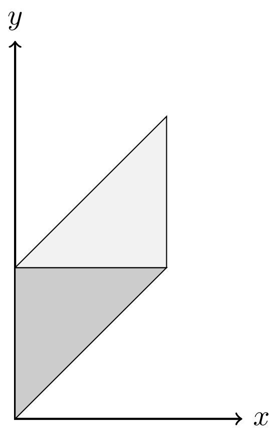
Bewijs. We nemen $t \leq T$ en gaan de volgende integraal op twee manieren berekenen

$$I_t = \int\int_{\triangle \cup \triangle'} e^{n(2t-y)} e^{-iky} f(y-x) g(x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Lemma 3. *Zij $f, g \in C^2([0, 2T])$ en $f(0) = f'(0) = 0$. Als $f * g(t) = 0$ voor $t \in (0, 2T)$, dan $f(x)g(x) = 0$ voor alle $x \in (0, T)$.*

Met $\triangle$ de driehoek $0 \leq x \leq y$, $0 \leq y \leq 2t$ en $\triangle'$ de driehoek $2t \leq y \leq 4t$, $y - 2t \leq x \leq 2t$. Zoals te zien in Figuur 1. We krijgen voor $\triangle \cup \triangle'$ het parallelogram $x \leq y \leq 2t + x$, $0 \leq x \leq 2t$. Met Fubini krijgen we

$$I_t = \int_0^{2t} \left[\int_x^{x+2t} e^{n(2t-y)} e^{-iky} f(y-x) g(x) \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$



Figuur 1: De driehoeken $\triangle$, donkergrijs, en $\triangle'$, lichtgrijs.

$$= \int_0^{2t} \left[\int_x^{x+2t} e^{n(2t-y)} e^{-iky} f(y-x)\,\mathrm{d}y \right] g(x)\,\mathrm{d}x$$

We kijken nu alleen naar de binnenste integraal en nemen hierin $y = x + u$, dit geeft

$$\int_0^{2t} e^{n(2t-(x+u))} e^{-ik(x+u)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{2t} e^{n(t-u)} e^{-iku} f(u)\,\mathrm{d}u \cdot e^{n(t-x)} \cdot e^{-ikx}.$$

En dus

$$\begin{aligned} I_t &= \int_0^{2t} \left[\int_0^{2t} e^{n(t-u)} e^{-iku} f(u)\,\mathrm{d}u \cdot e^{n(t-x)} e^{-ikx} \right] g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{2t} e^{n(t-u)} e^{-iku} f(u)\,\mathrm{d}u \cdot \int_0^{2t} e^{n(t-x)} e^{-ikx} g(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Aan de andere kant weten we ook dat $\int\int_\triangle e^{n(2t-y)} e^{-iky} f(y-x) g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$ aangezien we aannemen dat $f * g(y) = \int_0^y f(y-x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. En dus

$$\begin{aligned} I_t &= \int\int_{\triangle'} e^{n(2t-y)} e^{-iky} f(y-x) g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{2t}^{4t} \left[\int_{y-2t}^{2t} e^{n(2t-y)} e^{-iky} f(y-x) g(x)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \\ &= \int_{2t}^{4t} e^{n(2t-y)} e^{-iky} \left[\int_{y-2t}^{2t} f(y-x) g(x)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \\ &= \int_{2t}^{4t} e^{n(2t-y)} e^{-iky} h_t(y) \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Met $h_t(y) = \int_{y-2t}^{2t} f(y-x)g(x)\,\mathrm{d}x$. En dus

$$h_t(2t) = \int_0^{2t} f(2t-x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad h_t(4t) = \int_{2t}^{2t} f(4t-x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

We willen nu deze laatste uitdrukking voor I_t partiëel integreren. Hiervoor nemen we $\phi(y) = e^{n(2t-y)}e^{-iky}$ en $\Psi(y) = h_t(y)$. Dan krijgen we $\Phi(y) = -(n+ik)^{-1}e^{n(2t-y)}e^{-iky}$ en $\psi(y) = h_t'(y)$. Dit kan omdat $h_t(y)$ een convolutie is en we hebben gezien dat deze differentiëerbaar zijn. Dit geeft

$$
\begin{aligned}
I_t &= \Big[h_t(y) \cdot -(n+ik)^{-1}e^{n(2t-y)}e^{-iky}\Big]_{2t}^{4t} - \int_{2t}^{4t} -(n+ik)^{-1}e^{n(2t-y)}e^{-iky}h_t'(y)\,\mathrm{d}y \\
&= (n+ik)^{-1}\int_{2t}^{4t} e^{n(2t-y)}e^{-iky}h_t'(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

We hebben eerder gezien dat $f(y-x)g(x)$ en zijn partiële afgeleiden continu zijn. Ook is het duidelijk dat $4t$ en $2t$ continu zijn. Dus we kunnen de integraal regel van Leibniz toepassen en krijgen

$$
\begin{aligned}
h_t'(y) &= \left(\int_{y-2t}^{2t} f(y-x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)' \\
&= \int_{y-2t}^{2t} f'(y-x)g(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}(2t)}{\mathrm{d}y}f(y-2t)g(2t) - \frac{\mathrm{d}(y-2t)}{\mathrm{d}y}f(2t)g(y-2t) \\
&= \int_{y-2t}^{2t} f'(y-x)g(x)\,\mathrm{d}x - f(2t)g(y-2t)
\end{aligned}
$$

We hebben eerder gezien dat onder andere geldt dat $f' * g(t) = 0$ en $g(0) = 0$, dus we krijgen

$$
\begin{aligned}
h_t'(2t) &= \int_0^{2t} f'(y-x)g(x)\,\mathrm{d}x - f(2t)g(0) = 0 \\
h_t'(4t) &= \int_{2t}^{2t} f'(y-x)g(x)\,\mathrm{d}x - f(2t)g(2t) = -f(2t)g(2t)
\end{aligned}
$$

Nog een keer partiëel integreren geeft

$$
I_t = (n+ik)^{-2}e^{-2tn}e^{-i4tk}f(2t)g(2t) + (n+ik)^{-2}\int_{2t}^{4t} e^{n(2t-y)}e^{-iky}h_t''(y)\,\mathrm{d}y
$$

Met $|e^{n(2t-y)}e^{-iky}| \leq 1$ voor $y \in (0, 2t)$ en we mogen aannemen $|f(x)g(x)| \leq M$ voor $x \in (0, 2T)$, $|h_t''(y)| \leq M$ voor $t \in (0, 2T)$, $y \in (2t, 4t)$ met M een constante. Dit omdat $f(x)g(x)$ en $h_t''(y)$ beide continue functies zijn op een eindig interval, en daarom begrensd zijn op dit interval. We nemen voor M de hoogste waarde van deze twee grenzen, die begrensd dan beide functies. Dit geeft

$$
\begin{aligned}
|I_t| &= \left|(n+ik)^{-2}e^{-2tn}e^{-i4tk}f(2t)g(2t) + (n+ik)^{-2}\int_{2t}^{4t} e^{n(2t-y)}e^{-iky}h_t''(y)\,\mathrm{d}y\right| \\
&= |(n+ik)|^{-2}\left|e^{-2tn}e^{-i4tk}f(2t)g(2t) + \int_{2t}^{4t} e^{n(2t-y)}e^{-iky}h_t''(y)\,\mathrm{d}y\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq |(n+ik)|^{-2}\left(\left|e^{-2tn}e^{-i4tk}f(2t)g(2t)\right| + \left|\int_{2t}^{4t} e^{n(2t-y)}e^{-iky}h_t''(y)\,\mathrm{d}y\right|\right)\\
&\leq |(n+ik)|^{-2}\left(M + \int_{2t}^{4t} M\,\mathrm{d}y\right)\\
&= |(n+ik)|^{-2}(M+2tM) = |(n+ik)|^{-2}C
\end{aligned}
$$

Met C een constante. We voegen nu de twee manieren van de integraal berekenen samen en we krijgen

$$
\left|\int_0^{2t} e^{n(t-u)}e^{-iku}f(u)\,\mathrm{d}u\right| \cdot \left|\int_0^{2t} e^{n(t-x)}e^{-ikx}g(x)\,\mathrm{d}x\right| = |I_t| \leq |n+ik|^{-2}C.
$$

We willen nu de gepolariseerde identiteit van Parseval toepassen. Die is als volgt:

$$
\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2t} r\bar{s}\right| = \left|\sum_p \hat{r}(p)\overline{\hat{s}(p)}\right| \leq \sum_p \hat{r}(p)\hat{s}(p).
$$

Waarin $\hat{s}(p) = \int_0^1 s(x)e^{-2\pi ipx}\,\mathrm{d}x$ de Fourier-transformaties is van een functie s. Neem nu $\alpha = e^{n(t-x)}f(x)$ en $\beta = e^{n(t-x)}g(x)$, dan krijgen we

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha}(p) &= \frac{1}{2t}\int_0^{2t} f(x)e^{n(t-x)}e^{\frac{2\pi}{2t}ikx}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(2tx)e^{n(t-2tx)}e^{2\pi ikx}\,\mathrm{d}x\\
\hat{\beta}(p) &= \frac{1}{2t}\int_0^{2t} g(x)e^{n(t-x)}e^{\frac{2\pi}{2t}ikx}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(2tx)e^{n(t-2tx)}e^{2\pi ikx}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

We vullen dit in in de identiteit van Parseval en dit geeft

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi\cdot 2t}\int_0^{2t} e^{2n(t-x)}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|\\
&\qquad= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^1 e^{2n(t-2tx)}f(2tx)g(2tx)\,\mathrm{d}x\right|\\
&\qquad= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2t}\alpha\overline{\beta}\right|\\
&\qquad\leq \sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|\hat{\alpha}(p)\hat{\beta}(p)\right|\\
&\qquad= \sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|\int_0^1 f(2tx)e^{n(t-2tx)}e^{2\pi ikx}\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 g(2tx)e^{n(t-2tx)}e^{2\pi ikx}\,\mathrm{d}x\right|\\
&\qquad= \sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{2t}\int_0^{2t} f(x)e^{n(t-x)}e^{\frac{2\pi}{2t}ikx}\,\mathrm{d}x\cdot\frac{1}{2t}\int_0^{2t} g(x)e^{n(t-x)}e^{\frac{2\pi}{2t}ikx}\,\mathrm{d}x\right|\\
&\qquad= \frac{1}{4t^2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left|\int_0^{2t} f(x)e^{n(t-x)}e^{\frac{2\pi}{2t}ikx}\,\mathrm{d}x\right|\cdot\left|\int_0^{2t} g(x)e^{n(t-x)}e^{\frac{2\pi}{2t}ikx}\,\mathrm{d}x\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{4t^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} |n + ik_p|^{-2}\, C \\
&\leq n^{-1/2} \frac{1}{4t^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} |n + ik_p|^{-3/2}\, C \leq n^{-1/2} C_t
\end{aligned}
$$

Met C_t een constante onafhankelijk van n en $k_p = \frac{2\pi}{2t}p$. Nu volgt met Lemma 2 dat $f(x)g(x) = 0$ voor $x \in (0, T)$. $\square$

Observatie: Voor $\gamma > 0$ voldoet de translatie

$$
f_\gamma(x) = \begin{cases} 0 & x - \gamma < 0, \\ f(x - \gamma) & x - \gamma \geq 0 \end{cases}
$$

aan $f_\gamma * g(t) = \int_0^{2t} f(t - x - \gamma)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ voor $t \in (0, 2T)$. Laat nu $(0, \alpha)$ en $(0, \beta)$ de grootste intervallen zijn waar respectievelijk $f = 0$ b.o. en $g = 0$ b.o. We definiëren voor alle $\alpha > 0$

$$
f_{-\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & x + \alpha > 2T, \\ f(x + \alpha) & x + \alpha \leq 2T \end{cases}
$$

$$
\int_0^t f_{-\alpha}(t - x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t f(t + \alpha - x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{t+\alpha} f(t + \alpha - x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0
$$

voor $t + \alpha \in (0, 2T)$, oftewel $t \in (0, 2T - \alpha)$. Op dezelfde manier volgt dit met $g_{-\beta}$, en dus krijgen we

$$
f_{-\alpha} * g_{-\beta}(t) = \int_0^t f(t+\alpha-x)g(x+\beta)\,\mathrm{d}x = \int_0^{t+\alpha+\beta} f(t+\alpha-x)g(x+\beta)\,\mathrm{d}x = 0
$$

voor alle $t \in (0, 2T - \alpha - \beta)$. Door de observatie krijgen we nu dat

$$
f_{-\alpha+\gamma} * g_{-\beta}(t) = 0 \qquad \text{voor } t \in (0, 2T - \alpha - \beta) \text{ en alle } \gamma > 0.
$$

Maar dan volgt uit lemma 3 dat

$$
f_{-\alpha+\gamma}(x) \cdot g_{-\beta}(x) = 0 \qquad \text{voor alle } x \in \left(0, T - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) \text{ en alle } \gamma > 0.
$$

Neem nu aan dat $2T > \alpha + \beta$ oftewel $2T - \alpha - \beta > 0$. We gaan een tegenspraak afleiden. Uit de definitie van β volgt $\exists\, x_0 \in (0, T - \frac{\alpha+\beta}{2})$ waarvoor geldt $g_{-\beta}(x_0) \neq 0$. Als $0 < \gamma < x_0$, dan krijgen we door het bovenstaande dat $f_{-\alpha+\gamma}(x_0) = 0$, oftewel $f_{-\alpha}(x_0 - \gamma) = 0$. Maar door de keuze van γ volgt nu dat $f_{-\alpha}(u) = 0$ voor $u \in (0, x_0)$, wat betekent dat $f(u) = 0$ voor $u \in (\alpha, x_0 + \alpha)$, maar we hadden aangenomen dat $(0, \alpha)$ het grootste interval was waarop $f = 0$, dus dit is een tegenspraak. Er volgt $\alpha + \beta \geq 2T$ en we zijn klaar.

$\square$

6 Het probleem van Gelfand

Het volgende probleem is in 1938 verschenen in het tijdschrift "Uspekhi Matematicheskikh Nauk", hierin was een lijst met onopgeloste problemen te vinden ingestuurd door verschillende wiskundigen. Dit probleem kwam van Gelfand. En we bekijken de oplossing van B. Ya. Levin.

Probleem 1. *Beschrijf alle gesloten invariante deelruimten van de integratie operator $Ix(t) = \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s$ op de verzameling $L^1(0,a)$ met $a > 0$.*

Bij het oplossen van dit probleem hebben we een andere formulering van de stelling van Titchmarsh nodig dan we net hebben gezien. Namelijk

Stelling 3. *Laat f en g twee integreerbare functies zijn met een compacte drager, met respectievelijk de kleinst dragende intervallen $[a,b]$ en $[c,d]$. Dan is de drager van $f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)\,\mathrm{d}x$ het interval $[a+c, b+d]$.*

Merk op dat deze vorm van de stelling wat zegt over het kleinst dragende interval van de functies, dus de kleinste intervallen waarvoor het complement overal als waarde nul heeft. En de net bewezen versie heeft het over intervallen waarvoor het de functie op de intervallen zelf nul is. Verder is de convolutie translatie invariant. Dat wil zeggen dat $(f * g)_x = f_x * g = f * g_x$. Hieruit volgt dat als we de intervallen verschuiven naar respectievelijk $[a,b]$ en $[c,d]$ waarbij $b = T+a$ en $d = T+c$ er volgt: $f_a * g_b = (f_a * g)_b = (f * g)_{a+b}$. Dus krijgen we

> Laat f en g twee integreerbare functies zijn op het interval [u,v]. Als de convolutie $f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ voor $u \leq t \leq v$. Dan zijn er getallen a, b, c, d met $a + c \leq u$ en $b + d \geq v$ waarvoor geldt $f = 0$ b.o. op $[a,b]$ en $g = 0$ b.o. op $[c,d]$.

Maar dit is hetzelfde als

> Laat f en g twee integreerbare functies zijn op het interval [u,v]. Als er positieve getallen a, b, c, d zijn met $a + c \leq u$ en $b + d \geq v$ waarvoor geldt $\mu(f \neq 0) \neq 0$ op $[a,b]$ of $\mu(g \neq 0) \neq 0$ op $[c,d]$. Dan bestaat er een $a + c \leq t \leq b + d$ waarvoor de convolutie $f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$.

En aangezien de drager is geformuleerd als $supp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f \neq 0\}}$ volgt hieruit de formulering die we willen hebben.
We gaan nu kijken naar de oplossing van het probleem van Gelfand. Neem E een gesloten deelverzameling van $L^1(0,a)$ die invariant is ten opzichte van de integratie operator. Dan definiëren we E_κ als de deelverzameling van E waarvoor geldt dat alle functies hun dragend interval hebben in (κ, a), en dus nog niet voor κ.

Stelling 4. *Elke gesloten deelruimte $E \subset L^1(0,a)$ die invariant is ten opzichte van de integratieoperator I komt overeen met een van de ruimtes E_κ.*

Bewijs. Zij E een gesloten deelverzameling van $L^1(0,a)$ die invariant is met betrekking tot de integratie operator I. We gaan eerst laten zien dat E invariant is ten opzichte van een translatie naar rechts. We definiëren deze translatie als volgt. Zij $x(t) \in E$, dan

$$x_\tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq t \leq \tau \\ x(t-\tau) & \text{als } \tau \leq t \leq a \end{cases}$$

We willen bewijzen dat $x_\tau(t)$ weer tot E behoort. Daarvoor willen we eerst laten zien dat

$$(I^n x)(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} x(s)\,\mathrm{d}s \in E.$$

We bewijzen dit door middel van inductie. Voor $n = 1$ komt het overeen met de integratie operator, en we hadden aangenomen dat E invariant is ten opzichte van de integratie operator. Neem nu aan dat de formule waar is voor n. We laten zien dat deze dan ook waar is voor $n+1$.

$$\begin{aligned} I(I^n x)(t) &= I\left(\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} x(s)\,\mathrm{d}s\right) \\ &= \int_0^\tau \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} x(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\tau \int_s^\tau \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} x(s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^\tau \int_s^\tau \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t\, x(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^\tau \left[\frac{(t-s)^n}{n!}\right]_s^\tau x(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^\tau \frac{(\tau-s)^n}{n!} x(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

En dit is precies de definitie met $n = 1$ op de plek van n, en $t = \tau$. Dus geldt inderdaad

$$(I^n x)(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} x(s)\,\mathrm{d}s \in E \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}.$$

We kunnen nu eindige combinaties nemen van verschillende $n \in \mathbb{N}$. Dit levert polynomen op, en elk polynoom is op deze manier op te bouwen. Dus krijgen we

$$\int_0^t P(t-s)x(s)\,\mathrm{d}s \in E.$$

En dit voor alle polynomen P. Stelling 7.26 van 'Principles of Mathematical Analysis' door Rudin zegt dat de polynomen gedefiniëerd op $[0, a]$ dicht liggen in de continuë functies op $[0, a]$. We beweren nu dat voor alle $\varphi \in C([0, a])$ geldt

$$\int_0^t \varphi(t - s)x(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \varphi(s)x(t - s)\,\mathrm{d}s \in E.$$

Inderdaad, zij $\varphi \in C([0, a])$ en kies een rij polynomen $(p_n)_n$ die uniform convergeren naar ϕ. We weten dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $p_n * x \in E$. Als we aan kunnen tonen dat $p_n * x \to \varphi * x$ in L^1 dan zijn we klaar, want $E \subseteq L^1(0, a)$ is gesloten. En dit klopt inderdaad, namelijk:

$$\begin{aligned} \|p_n * x - \varphi * x\|_{L^1} &= \|(p_n - \varphi) * x\|_{L^1} \\ &\leq \|p_n - \varphi\|_{L^1} \cdot \|x\|_{L^1} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Want we hadden p_n zo gekozen dat $\|p_n - \varphi\|_{L^1} \to 0$. Hierbij maken we gebruik van de ongelijkheid van Young voor convoluties, met p, q, r allemaal gelijk aan 1. Dus hebben we dat de E invariant is ten opzichte van de convolutie met een continuë functie.
Zij $\varepsilon < min(\tau, a - \tau)$ positief, waarin τ de variabele is waarover $x(t)$ is getransleerd, en kies een continue functie $\varphi(t) \geq 0$ zo dat $\varphi(t) = 0$ voor $t \in [0, \tau - \varepsilon] \cup [\tau + \varepsilon, a]$, en

$$\int_0^a \varphi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Dan geldt het volgende

$$\begin{aligned} &\int_0^a \left| \int_0^t \varphi_\varepsilon(s)x(t - s)\,\mathrm{d}s - x_\tau(t) \right| \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\tau-\varepsilon} \left| \int_0^t \varphi_\varepsilon(s)x(t - s)\,\mathrm{d}s - x_\tau(t) \right| \mathrm{d}t \\ &\qquad + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \left| \int_0^t \varphi_\varepsilon(s)x(t - s)\,\mathrm{d}s - x_\tau(t) \right| \mathrm{d}t \\ &\qquad + \int_{\tau+\varepsilon}^{a} \left| \int_0^t \varphi_\varepsilon(s)x(t - s)\,\mathrm{d}s - x_\tau(t) \right| \mathrm{d}t \\ &= \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \left| \int_0^t \varphi_\varepsilon(s)x(t - s)\,\mathrm{d}s - x_\tau(t) \right| \mathrm{d}t \\ &\qquad + \int_{\tau+\varepsilon}^{a} \left| \int_0^t \varphi_\varepsilon(s)x(t - s)\,\mathrm{d}s - x_\tau(t) \right| \mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^\varepsilon |x(t)|\,\mathrm{d}t + \max_{s \in [\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon]} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} |x(t - s)|\,\mathrm{d}t \\ &\qquad + \max_{s \in [\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon]} \int_{\tau+\varepsilon}^{a} |x(t - s) - x(t - \tau)|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

En dit voor willekeurig kleine $\varepsilon > 0$, dus neem nu het limiet van ε naar 0, en dan volgt

$$\begin{aligned}\int_0^a \left| \int_0^t \varphi_\varepsilon(s)x(t-s)\,\mathrm{d}s - x_\tau(t) \right| \mathrm{d}t &\leq \int_0^\varepsilon |x(t)|\,\mathrm{d}t + \max_{s\in[\tau-\varepsilon,\tau+\varepsilon]} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} |x(t-s)|\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \max_{s\in[\tau-\varepsilon,\tau+\varepsilon]} \int_{\tau+\varepsilon}^{a} |x(t-s) - x(t-\tau)|\,\mathrm{d}t \\ &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^0 |x(t)|\,\mathrm{d}t + \int_\tau^\tau |x(t-\tau)|\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_\tau^a |x(t-\tau) - x(t-\tau)|\,\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

oftewel

$$\varphi_\varepsilon \cdot x \xrightarrow{L^1} x_\tau.$$

En dus volgt dat E invariant is ten opzichte van de translatie naar rechts. Noem nu κ de grootste ondergrens van de linker eindpunten van de dragende intervallen van functies op E. Neem eerst aan dat $\kappa = 0$. Kies nu met Hahn-Banch, stelling 5.19 uit Rudin (1987), een $f \in L^\infty(0,a)$ waarvoor geldt dat voor alle $y \in E$: $\int_0^a f(t)y(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Het is duidelijk dat het dragende interval van $f(t)$, zeg $[\alpha,\beta]$, bevat zit in $[0,a]$, en omdat we hebben aangenomen dat $\kappa = 0$, bestaat er een functie $x(t) \in E$ met als dragend interval $[\gamma,\delta]$, met $\gamma \in (0,\beta/2)$ en $\delta \in (\gamma,\beta/2)$. We gebruiken nu het feit dat translaties toegestaan zijn en krijgen

$$0 = \int_0^a f(t)x_\tau(t)\,\mathrm{d}t = \int_\tau^a f(t)x(t-\tau)\,\mathrm{d}t$$

voor alle $\tau \in [0,a]$. Als we nu de functies $f(t)$ en $x(t)$ uitbreiden als 0 buiten $[0,a]$, kunnen we dit als volgt schrijven

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)x(t-\tau)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad 0 \leq \tau \leq a.$$

Deze integraal is een convolutie van de functies $f(t)$ en $x(-t)$ met respectievelijk de dragende intervallen $[\alpha,\beta]$ en $[-\delta,-\gamma]$. Met de stelling van Titchmarsh volgt nu dat $\mu\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)x(t-\tau)\,\mathrm{d}t \cap [\alpha-\delta,\beta-\gamma]\right) > 0$. Maar aangezien we hadden dat $0 < \gamma < \beta/2$, hebben we $[\alpha-\delta,\beta-\gamma) \cap [0,a] \neq \emptyset$, en dus volgt een tegenspraak. Dus moet gelden $f \equiv 0$, en daarom komt E overeen met de gehele ruimte $L^1(0,a)$.
Neem nu $\kappa \in (0,a)$. Noteer nu E_κ voor de deelruimte functies op $L^1(0,a)$ die nul zijn op $[0,\kappa]$. We bekijken de afbeelding T_κ die een functie $x(t) \in E_\kappa$ transleert naar een functie $y(t) = x(t+\kappa)$ op het interval $[0,a-\kappa]$. Het is duidelijk dat T_κ een isomorfisme is tussen E_κ en $L^1(0,a-\kappa)$, en dat

deze twee ruimtes dus onder translatie dezelfde structuur behouden. Verder geldt dat $T_\kappa E$ een gesloten deelruimte is van $L^1(0, a - \kappa)$ en invariant is ten opzichte van de operator I. Door de keuze van κ bestaat er nu een functie in $T_\kappa E$ met zijn dragende interval willekeurig dicht bij 0. En nu volgt met hetzelfde argument als in het geval $\kappa = 0$ dat $T_\kappa E = L^1(0, a - \kappa)$, en dus $E = E_\kappa$.

□

Referenties

Doss, R. (1988). An elementary proof of Titchmarsh's convolution theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *104*, 181–184.

JOC/EFR. (2003). *Edward Charles Titchmarsh.* Verkregen van `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Titchmarsh.html`

Korevaar, J. (2011). Fourier analysis and related topics. *Amsterdam, Spring*, *157*, 226–227.

Levin, B. Y. (1996). Lectures on Entire Functions, Translations of Mathematical Monographs, vol. 150. *American Mathematical Society, Providence, RI*, *1*, 996.

Rudin, W. (1987). *Real and complex analysis.* Tata McGraw-Hill Education.

Rudin, W. et al. (1964). *Principles of mathematical analysis* (Dl. 3). McGraw-hill New York.

Titchmarsh, E. C. (1926). The Zeros of Certain Integral Functions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, *25*(2), 283–302.