

Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

**Een algoritme voor het prijzen van
Amerikaanse opties met behulp van
regressie- en variantie reductietechnieken.**

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

**BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE**

door

RAOUL ROEST

**Delft, Nederland
November 2017**

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

“Een algoritme voor het prijzen van Amerikaanse opties met behulp van regressie- en variantie reductietechnieken.”

RAOUL ROEST

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr.ir. L.E. Meester

Overige commissieleden

prof.dr.ir. A.W. Heemink

Drs. E.M. van Elderen

November, 2017

Delft

Samenvatting

In tegenstelling tot een Europese optie, is de prijs van een Amerikaanse opties vaak niet te berekenen met behulp van standaard analysemethoden. Om toch een optieprijs te kunnen bepalen, wordt er gebruik gemaakt van simulatiemethoden. In stochastische modellen, gebaseerd op zogenoemde arbitragevrije prijsbepalingen, is de optieprijs gelijk aan de verdisconteerde verwachtingswaarde van de maximale opbrengst over alle mogelijke uitoefenmomenten van de optie onder de risico-neutrale maat. Het uitoefenmoment waarvoor de verdisconteerde verwachte opbrengst maximaal is, wordt gevonden door een optimale uitoefenstrategie te hanteren. Deze uitoefenstrategie kan worden bepaald met behulp van de continueringswaarden die horen bij de optie. Het bepalen van de prijs van een Amerikaanse optie draait om het vinden van de continueringswaarden. Longstaff & Schwartz [2001] veronderstellen dat de continueringswaarden kunnen worden beschreven door een functie. Het algoritme dat zij beschrijven, maakt gebruik van regressietechnieken voor het bepalen van een functiebenadering van de continueringswaardefunctie. Met behulp van deze functiebenadering kan een ondergrens voor de optieprijs benaderd worden. Omdat het evalueren van de optieprijs relatief veel rekentijd kost, willen we dat de gevonden ondergrens ook relatief nauwkeurig is. Dit motiveert het gebruik van variantie reductie methoden. Bolia et al. [2004] beschrijven in hun artikel een methode die gebruik maakt van *importance sampling* als techniek voor de reductie van de variantie. In een iteratief proces proberen zij een zogenoemde variantie-nul kansmaat te benaderen. Wanneer de optieprijs onder deze kansmaat wordt geëvalueerd, kan de optieprijs met variantie nul worden bepaald. Net als Longstaff & Schwartz [2001] veronderstellen Bolia, Glasserman en Juneja dat zowel de optiewaarde als de continueringswaarden kunnen worden benaderd met een functie. Net als in het algoritme van Longstaff & Schwartz [2001], worden deze functies benaderd aan de hand van regressiemethoden. De optiewaardefunctie kan vervolgens gebruikt worden bij het bepalen van een benadering van de eerder genoemde variantie-nul maat. Met de gevonden benaderde kansmaat kan een nieuwe optiewaarde en continueringswaardefunctie worden benaderd. Intuïtief volgt dat elke iteratie een nauwkeurigere benadering geeft van de continueringswaardefunctie. Wanneer er voldoende iteraties zijn uitgevoerd kan de optieprijs worden geëvalueerd onder de verbeterde strategie. Dit geeft een betere benadering voor de ondergrens van de optieprijs.

In het verslag wordt het algoritme van Bolia et al. [2004] behandeld. Het project kent twee voornamelijke doelen. In de eerste plaats is het project gericht op het doorgronden van het algoritme. Hierbij is het de bedoeling dat het algoritme wordt beschreven voor derdejaars bachelor wiskundestudenten. Vanwege de hoeveelheid en ingewikkelde wiskunde achter het algoritme, is er gekozen om alleen de delen wiskunde te behandelen die noodzakelijk zijn voor het begrip van het algoritme. Het tweede doel binnen het project is het algoritme toepassen. Het verslag wordt dan ook afgesloten met een voorbeeld ter illustratie van het algoritme. In de gevonden resultaten treden discrepanties op met eerder gedaan onderzoek. Uit verschillende testen kan echter geen duidelijke fout in de implementatie van het algoritme worden aangewezen.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	7
1.1	Opties	7
1.1.1	Optiewaarde en optieprijs	7
1.2	Het bepalen van de prijs van een Amerikaanse optie	9
1.2.1	Relaxatie van de continuïteitseis	9
1.2.2	De optimale uitoefenstrategie bepalen	9
1.2.3	Een boven- en ondergrens voor de optieprijs	10
1.3	Het algoritme van Bolia, Glasserman en Juneja	10
2	Simulatie van het onderliggende prijsproces	12
2.1	Brownse beweging	12
2.2	Geometrische Brownse beweging	13
2.3	Simulatie van het prijsproces	14
3	De optieprijs benaderen	15
3.1	Dynamisch programmeerformulering	15
3.2	Een functiebenadering voor de optie- en continueringswaarden	16
3.2.1	Bepalen van de naïeve optieprijs	18
4	Importance sampling	19
4.1	Eigenschappen van het prijsproces	19
4.2	Importance sampling en de variantie-nul kansmaat	20
4.2.1	De variantie-nul maat voor het bepalen van de optieprijs	21
4.3	De benadering van de importance dichtheidsfunctie	22
4.3.1	Basisfuncties kiezen	22
4.4	Iteratief verbeteren van de benaderingsfuncties	23
4.4.1	Bepalen van de optieprijs onder importance sampling	25
5	Resultaten	26
5.1	Resultaten onder naïeve simulatie	26
5.2	Resultaten onder importance sampling	27
5.3	Testen van het geprogrammeerde algoritme	29
5.3.1	Testen van gesimuleerde prijspaden	29
5.3.2	Testen van het benaderingsalgoritme voor de coëfficiënten	29
5.3.3	Het berekenen van de optieprijs	31
5.3.4	Conclusie met betrekking tot de testresultaten	32
	Conclusie	33
	Literatuur	34
	Appendix A Algebraïsche uitwerking van de importance dichtheidsfunctie	35
	Appendix B Tabellen	36

Appendix C R-Code	38
C.1 Optieprijs (naïef)	38
C.1.1 Parameters	38
C.1.2 Simulatiefuncties en opbrengstfuncties	38
C.1.3 Benadering van de continueringswaardefunctie	39
C.1.4 Optieprijs (naïef)	41
C.2 Optieprijs (importance sampling)	42
C.2.1 Parameters	42
C.2.2 Functies ten behoeve van importance sampling	42
C.2.3 Benadering optiewaardefunctie	45
C.2.4 Benadering continueringswaardefunctie (Importance sampling)	46
C.2.5 Benadering optiewaardefunctie (importance sampling)	47
C.2.6 Optieprijs (importance sampling)	48
C.3 Testfuncties	49

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Opties

Een optie is een verhandelbaar recht op een bezit. De optiehouder is de partij die de optie in het bezit heeft. De partij die de optie verkoopt heet de optieschrijver. Wanneer de optiehouder het recht heeft om het onderliggende bezit te kopen heet dit een call-optie. Het recht om het bezit te verkopen, wordt een put-optie genoemd. We zeggen dat de optie wordt uitgeoefend, wanneer de optiehouder besluit het onderliggende bezit te kopen of te verkopen (afhankelijk van het soort optie). De prijs waarvoor het bezit verhandeld mag worden wordt vooraf afgesproken. Deze prijs heet de uitoefenprijs. Een optie heeft een afgesproken looptijd, dit is de periode waarin de optie uitgeoefend mag worden.

Het aantal momenten waarop de optie uitgeoefend kan worden is afgesproken. Een optie die alleen aan het eind van zijn looptijd kan worden uitgeoefend, heet een Europese optie. Een Bermuda optie is een optie, die op een vast aantal afgesproken momenten uitgeoefend kan worden. Wanneer een optie op ieder willekeurig moment kan worden uitgeoefend, heet deze optie een Amerikaanse optie.

Opties worden afgesloten over zogenoemde *assets*, dit wordt in het Nederlands vaak vertaald met *activa*. De deelgroep van activa waar dit prijsalgoritme zich op richt, worden *financial assets* genoemd. Dit zijn specifieke immateriële activa die een waarde of eigendom representeren. Voorbeelden hiervan zijn: aandelen, obligaties en opties. Vaak worden opties op aandelen geschreven. In het verslag zullen we dan ook de term "aandeel" gebruiken als verwijzing naar het woord financial asset. Hoewel dit duidelijk geen correcte vertaling van het Engelse woord 'financial asset' is, zijn aandelen wel een representatie van deze specifieke deelgroep. Ook sluiten aandelen goed aan op onze interpretatie van financial assets.

1.1.1 Optiewaarde en optieprijs

De waarde van een optie hangt af van de opbrengst die het uitoefenen van de optie genereert. De optieprijs is het bedrag dat twee partijen afspreken te betalen voor de optie. De opbrengst op tijdstip t die verkregen wordt wanneer de optie op dit tijdstip wordt uitgeoefend, heet de intrinsieke waarde (of uitoefenwaarde) van de optie op tijdstip t . In stochastische modellen, gebaseerd op zogenaamde arbitrage-vrije prijsbepalingen, is de optieprijs gelijk aan de verdisconteerde verwachtingswaarde van de maximale opbrengst van de optie onder de risico-neutrale maat. Door te verdisconteren worden de uitbetalingen op verschillende tijdstippen uitgedrukt in hun contante waarden op één tijdstip. De verdiscontering wordt gedaan aan de hand van de risico-neutrale rente.

Het bepalen van zogenaamde arbitrage-vrije prijzen van opties en andere derivaten wordt in de standaardmodellen gedaan met behulp van zogenaamde replicerende portfolio's. Dit zijn portfolio's die precies de uitbetaling van het derivaat reproduceren en dus (op elk moment) evenveel waard moeten zijn als het derivaat. Anders is er een zogenaamde *arbitrage opportunity*, een handelsstrategie waarmee zonder risico op verlies met positieve kans winst gemaakt wordt, iets wat uitgesloten moet worden. Bij het analyseren van deze uitkomsten blijkt dat de prijs van het derivaat geschreven kan worden als verwach-

ting van de verdisconteerde opbrengst onder een kunstmatig te definiëren kansmaat, de zogenaamde risico-neutrale maat. De details van de achterliggende wiskunde zijn vrij eenvoudig in het discrete-tijd model, ook wel het binomiale model genoemd, en te vinden in paragraaf 1.1 en 1.2 van [Shreve, 2004b]. De continue-tijd theorie is veel moeilijker te begrijpen vanwege de continue-tijd stochastische procestheorie en te vinden in paragraaf 5.2 van [Shreve, 2004a]. De prijs van een call-optie met uitoefenprijs K kan zo uitgedrukt worden als $\tilde{\mathbb{E}}(\dots)$, waarbij $\tilde{\mathbb{E}}$ de onder de risico-neutrale maat genomen verwachting is. In het gehele verslag wordt de verwachtingswaarde genomen onder de risico-neutrale maat. Om overbodig moeilijke notatie te voorkomen hanteren we de notatie \mathbb{E} voor de verwachting onder de risico-neutrale maat.

Om een beter inzicht te krijgen in het bepalen van optiepreizen, volgt een eenvoudig prijsprobleem. We bekijken de prijs van een Europese put-optie met uitoefenprijs K en looptijd T . Veronderstel dat deze optie is afgesloten over een onderliggend aandeel, waarvan het prijsproces wordt beschreven door het stochastisch proces $\{X(t) : 0 \leq t \leq T\}$. De opbrengst van de put-optie op tijdstip t wordt gegeven door:

$$(K - X(t))^+ = \begin{cases} K - X(t) & K \geq X(t) \\ 0 & K < X(t) \end{cases} . \quad (1)$$

Hoewel de intrinsieke waarde van een optie negatief kan zijn, wordt in een wiskundig model de intrinsieke waardefunctie vaak beperkt tot een niet-negatieve functie. Wanneer de opbrengst van een optie negatief is, wordt de optie niet uitgeoefend. De opbrengst van de optie is nu nul. Dit verantwoordt de keuze voor een niet-negatieve functie. Zij $\{r(t) : 0 \leq t \leq T\}$ het renteproces over het gegeven interval. De verdiscontering wordt beschreven door:

$$\exp\left(-\int_0^T r(t) dt\right). \quad (2)$$

Voor het prijzen van deze Europese put-optie gaan we uit van een constante rente r . Het prijsprobleem van de Europese put-optie komt nu neer op het bepalen van:

$$\mathbb{E}(g_T(X(T))), \quad (3)$$

waarbij $g_t(X(t)) = e^{-rt}(K - X(t))^+$. De prijs van een Europese optie kan worden gevonden met behulp van het Black-Scholes model. In het algemeen is het niet mogelijk de prijs van een optie te bepalen middels dergelijke analysemethoden. Vaak wordt geprobeerd een benadering voor de verwachtingswaarde te vinden met behulp van simulatiemethoden. We bepalen de oplossing van het bovenstaande prijsprobleem aan de hand van simulatiemethoden. Zij x_{t_i} de realisatie van het stochastisch proces $\{X(t)\}$ op tijdstip t_i voor $i \in \{0, \dots, N\}$ en $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. De verzameling realisaties $\{x_{t_i} : i \in \{0, \dots, N\}\}$ van het proces $\{X(t)\}$ wordt een realisatie van het (prijs)pad genoemd. Veronderstel M gesimuleerde paden van het proces $\{X(t) : 0 \leq t \leq T\}$. Met x_{m,t_i} verwijzen we naar de m -de realisatie op tijdstip t_i . We kunnen de verdisconteerde verwachtingswaarde uit (3) nu schatten door het bepalen van:

$$\frac{1}{M} \sum_{m \leq M} g_T(x_{m,T}). \quad (4)$$

1.2 Het bepalen van de prijs van een Amerikaanse optie

1.2.1 Relaxatie van de continuïteitseis

Zoals in de vorige paragraaf besproken is, worden veel prijsproblemen met betrekking tot opties benadert met behulp van simulaties. Hierbij wordt het prijsverloop van een onderliggend aandeel gesimuleerd aan de hand van een model. Het is echter niet mogelijk een continu proces daadwerkelijk over continue-tijd te simuleren. Dit brengt een probleem met zich mee voor het prijzen van Amerikaanse opties. Deze opties kunnen namelijk, zoals eerder besproken, op ieder willekeurig moment binnen de looptijd worden uitgeoefend. Om toch een benadering te vinden voor de optieprijs, wordt de looptijd van de optie opgedeeld in N intervallen. Deze intervallen hoeven niet noodzakelijk even groot te zijn. De opdeling van de looptijd T in N intervallen geeft $N + 1$ momenten waarop de optie uitgeoefend kan worden. Er ontstaat zo een Bermuda prijsprobleem. De limiet in $N \rightarrow \infty$ van dit prijsprobleem geeft de oplossing voor het prijsprobleem van de bijbehorende Amerikaanse optie. Wanneer N groot gekozen wordt, vinden we dus een betere benadering van de werkelijke waarde van de bijbehorende Amerikaanse optie. Glasserman [2004] geeft aan dat Amerikaanse opties sub-optimaal zijn op dividenddagen. Dit geeft een indicatie voor de keuze van de intervallen.

1.2.2 De optimale uitoefenstrategie bepalen

Voor zowel Amerikaanse als Bermuda opties zijn er meerdere momenten mogelijk waarop de optie uitgeoefend kan worden. De waarde van de optie is dan de verdisconteerde opbrengst van de optie op het optimale uitoefenmoment. Om de prijs van een Amerikaanse of Bermuda optie te vinden, zijn we dus op zoek naar het uitoefenmoment waarvoor de optie de hoogste verdisconteerde opbrengst geeft. Zij $\{t_i : i \in \{0, \dots, N\}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T\}$ een verzameling mogelijke uitoefenmomenten. Veronderstel dat we de prijs van een optie willen bepalen aan de hand van een verzameling $\{x_{t_i, m} : 0 \leq t_i \leq T, m \leq M\}$ bekende realisaties van een onderliggend aandeelproces. Voor ieder prijspad afzonderlijk, zijn we op zoek naar het uitoefenmoment waarop de verdisconteerde opbrengst van de optie het grootst is. We bekijken het uitoefenmoment t_i op een prijspad uit de gegeven verzameling. De huidige verdisconteerde opbrengst van de optie is bekend, dit is namelijk te bepalen met behulp van de intrinsieke waarde van de optie op dit tijdstip. Om te kunnen bepalen of het verstandig is de optie uit te oefenen, willen we weten wat de verdisconteerde opbrengst van de optie is op de tijdstippen $\{t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, T\}$. De verwachte verdisconteerde opbrengst van de optie, gegeven dat de optie nog niet is uitgeoefend tot en met tijdstip t_i , wordt de continueringswaarde van de optie genoemd. Wanneer de continueringswaarde van de optie op ieder tijdstip bekend is, kunnen we bepalen of en wanneer we de optie uitoefenen. Het prijzen van Amerikaanse en Bermuda opties draait om het vinden van de continueringswaarden die horen bij de optie. Wanneer de continueringswaarden bekend zijn, kan er een stopregel worden geformuleerd. Deze regel bepaald met behulp van informatie uit de reeds bekende tijdstippen en de continueringswaarden het uitoefenmoment waarop de verdisconteerde opbrengst van de optie maximaal is. Dit tijdstip is het optimale uitoefenmoment. Het optimale uitoefenmoment is precies het moment waarop de verdisconteerde intrinsieke waarde groter of gelijk is aan de continueringswaarde.

1.2.3 Een boven- en ondergrens voor de optieprijs

Het is vrij eenvoudig een bovengrens voor de optieprijs te bepalen. Veronderstel een verzameling $\{x_{m,t_i} : m \leq M, 0 \leq t_i \leq T, i \in \{0, 1, \dots, N\}\}$ realisaties van het onderliggende aandeel met uitoefenmomenten $\{t_i : i \in \{0, \dots, N\}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N\}$. Door het berekenen van:

$$\frac{1}{M} \sum_{m \leq M} \max_{0 \leq t_i \leq T} (K - x_{m,t_i}) \quad (5)$$

vinden we een bovengrens voor de optieprijs. In werkelijkheid is het niet mogelijk om het uitoefenmoment zo te kiezen. Dit vereist namelijk kennis van de toekomstige prijs van het aandeel. De verdisconteerde opbrengst van de optie onder deze uitoefenstrategie is dus groter of gelijk aan de verdisconteerde opbrengst onder een toelaatbare strategie.

Een optieschrijver wil zijn opties verkopen. Wanneer hij een te hoge prijs voor zijn opties hanteert, zal hij geen opties verkopen. Bij een te lage prijs maakt de optieschrijver verlies op zijn opties. De daadwerkelijke optieprijs volgt uit de exacte verdisconteerde verwachtingswaarde van de maximale opbrengst. Deze is, zoals eerder besproken, niet te bepalen voor Amerikaanse opties. We proberen dus een scherpe benadering te vinden met behulp van een zo sterk mogelijke uitoefenstrategie. Met deze uitoefenstrategie kan een scherpe ondergrens voor de optieprijs worden gevonden. Bolia et al. [2004] beschrijven in hun artikel een methode waarmee een scherpe ondergrens voor de optieprijs kan worden gevonden.

1.3 Het algoritme van Bolia, Glasserman en Juneja

De methode die Bolia et al. [2004] beschrijven, voor het vinden van een scherpe ondergrens voor de optieprijs, is een uitbreiding van het algoritme van Longstaff & Schwartz [2001]. Dit algoritme beschrijft hoe, met behulp van regressietechnieken, een ondergrens voor de prijs van een Amerikaanse optie kan worden gevonden. Longstaff & Schwartz [2001] veronderstellen dat de continueringswaarden kunnen worden beschreven met een functie. Door deze functie te benaderen, is het mogelijk de continueringswaarde op tijdstip t te schatten aan de hand van de prijs van het onderliggende aandeel op dit tijdstip. Voor de benadering van de continueringswaardefunctie wordt een lineaire combinatie van basisfuncties gekozen. Het algoritme start met het simuleren van initiële paden. Door gebruik te maken van deze initiële paden worden met behulp van de kleinste-kwadratenmethode de coëfficiënten van de benaderingsfunctie bepaald. De gevonden benadering van de continueringswaardefunctie wordt vervolgens gebruikt om een stopregel te bepalen. Aan de hand van nieuw gesimuleerde paden kan nu een benadering van de optieprijs worden gevonden. Deze gevonden prijs is een ondergrens voor de optieprijs.

Het artikel van Bolia et al. [2004] beschrijft een verbeterde methode aan de hand van het algoritme van Longstaff & Schwartz [2001]. Met deze verbeterde methode kan een scherpere ondergrens worden gevonden voor de optieprijs. Het algoritme bepaalt de coëfficiënten van de benaderingsfunctie met een hogere nauwkeurigheid. Deze hogere nauwkeurigheid wordt behaald door gebruik te maken van de zogenoemde importance sampling techniek. Deze techniek wordt als volgt gebruikt. In een iteratief proces wordt geprobeerd een benadering te vinden van een kunstmatige kansmaat. Onder deze kansmaat kunnen steekproeven worden genomen die een relatief kleine variantie hebben. De coëfficiënten van de benaderingsfunctie kunnen onder deze kansmaat met een hogere nauwkeurigheid worden bepaald. Met de nieuw gevonden benadering van de continueringswaardefunctie kan een scherpere ondergrens voor de optieprijs worden gevonden.

Dit verslag behandelt het algoritme van Bolia et al. [2004] en de benodigde theorie. In hoofdstuk 2 wordt de benodigde theorie besproken omtrent het model voor aandeleprijzen. In hoofdstuk 3 wordt het algoritme van Longstaff & Schwartz [2001] besproken aan de hand van het artikel van Bolia et al. [2004]. Hoofdstuk 4 behandelt het algoritme van Bolia et al. [2004]. Hierbij wordt ook de nodige theorie van Markovprocessen behandeld. Ter afsluiting wordt een voorbeeld behandeld. Dit is hetzelfde voorbeeld als Bolia et al. [2004] behandelen. In dit hoofdstuk worden ook de resultaten beschreven die zijn gevonden met behulp van simulaties.

Hoofdstuk 2

Simulatie van het onderliggende prijsproces

Het standaardmodel voor het prijsverloop van een aandeel is de geometrische Brownse beweging. Een geometrische Brownse beweging is een stochastisch proces dat gedefinieerd is met behulp van de Brownse beweging. We bekijken deze stochastische processen aan de hand van de uitwerking beschreven in hoofdstuk 3 van [Glasserman, 2004].

2.1 Brownse beweging

Zij $N(\mu, \sigma^2)$ de normale verdeling met verwachtingswaarde μ en variantie σ^2 . Een stochastisch proces $\{W(t) : 0 \leq t \leq T\}$ heet een standaard Brownse beweging op het interval $[0, T]$ als:

1. $W(0) = 0$
2. $t \rightarrow W(t)$ met kans één een continue functie op het gehele interval is.
3. $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$
4. Voor alle k en $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k \leq T$ geldt dat $W(t_{i-1}) - W(t_i)$ voor $i = 1, \dots, k$ onafhankelijk zijn.

Uit punt 3 en 4 volgt dat wanneer het interval wordt gepartitioneerd in disjuncte subintervallen (t_{i-1}, t_i) voor $i \in \{1, \dots, k\}$, de stochasten $W(t_i)$ voor $i \in \{1, \dots, k\}$ onafhankelijk normaal verdeeld zijn met verwachtingswaarde nul en variantie t_i . Dit worden ook wel de onafhankelijke aangroeiingen van het proces genoemd. Er volgt direct dat het proces $\{W(t)\}$ een Markovproces is. Het proces $\{B(t) : 0 \leq t \leq T\}$ beschreven door:

$$B(t) = B(0) + \mu t + \sigma W(t), \quad (6)$$

wordt een Brownse beweging met initiële waarde $B(0)$ genoemd en is de oplossing van de stochastische differentiaalvergelijking

$$dB(t) = \mu dt + \sigma dW(t). \quad (7)$$

De parameter μ heet de drift van het proces. De parameter σ wordt de diffusiecoëfficiënt van het proces genoemd. Zij het interval $[0, T]$ gepartitioneerd in disjuncte subintervallen (t_{i-1}, t_i) voor $i \in \{1, \dots, k\}$, de stochasten $B(t_i)$ voor $i \in \{1, \dots, k\}$ zijn onafhankelijk en normaal verdeeld met verwachting $B(0) + \mu t_i$ en variantie $\sigma^2 t_i$. Dit maakt het simuleren van een Brownse beweging relatief eenvoudig. Een verzameling $\{b_t : 0 \leq t \leq T\}$ realisaties van het proces $\{B(t)\}$ wordt een pad genoemd.

2.2 Geometrische Brownse beweging

Een stochastisch proces $\{S(t) : 0 \leq t \leq T\}$ heet een geometrische Brownse beweging wanneer het proces $\{\log(S(t))\}$ een Brownse beweging beschrijft. De parameters van de bijbehorende Brownse beweging worden gevonden door een uitwerking van het lemma van Itô. Laat $f(B(t)) = S(0) \exp(B(t)) = S(t)$. Met behulp van het lemma van Itô volgt er:

$$\begin{aligned}
 dS(t) &= f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(B(t))dt \\
 &= S(0) \exp(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S(0) \exp(B(t))dt \\
 &= S(0) \exp(B(t)) \left(\mu dt + \sigma dW(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 dt \right) \\
 &= S(t) \left((\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW(t) \right).
 \end{aligned} \tag{8}$$

We vinden dat $\frac{dS(t)}{S(t)} = (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW(t)$, ofwel:

$$d\log(S(t)) = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t). \tag{9}$$

Met behulp van vergelijkingen (6) en (7) vinden we dat het proces $\{S(t)\}$ met initiële waarde $S(0)$ beschreven kan worden door:

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right). \tag{10}$$

Hoewel de parameters μ en σ niet respectievelijk de drift en de diffusie van de Brownse beweging behorende bij het proces $\{S(t)\}$ zijn, zullen we er wel op deze manier naar refereren. Voor iedere $0 \leq t \leq T$ geldt dat de stochast $W(t)$ normaal verdeeld is met verwachting nul en variantie t . Zij $Z(t) \sim N \left(\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t, \sigma^2 t \right)$. Door gebruik te maken van de bovenstaande uitdrukking volgt hieruit:

$$S(t) = S(0) \exp(Z(t)). \tag{11}$$

Dit is een bekende verdeling en wordt de lognormale verdeling genoemd. Een stochast Y heet lognormaal verdeeld met parameters μ en σ^2 wanneer $Y = \exp(Z)$ met $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$. De dichtheidsfunctie van een lognormaal verdeelde stochast met parameters μ en σ^2 wordt gegeven door

$$f(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(y) - \mu}{\sigma}\right)^2} \mathbb{1}_{y \geq 0}(y). \tag{12}$$

Hierbij noteren we $\mathbb{1}_A$ voor de indicatorfunctie werkend op de verzameling $A = \{y : y \in \mathbb{R} \ y \geq 0\}$, deze wordt gegeven door:

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in A \\ 0 & \text{als } x \notin A \end{cases}. \tag{13}$$

2.3 Simulatie van het prijsproces

We simuleren de geometrische Brownse beweging aan de hand van het Markovproces $\{W(t) : 0 \leq t \leq T\}$. Eerst partitioneren we het interval $[0, T]$ in N subintervallen (t_{i-1}, t_i) voor $i \in \{1, \dots, N+1\}$. Zoals eerder besproken geldt voor het proces $\{W(t)\}$ dat $W(t_i) - W(t_{i-1}) \sim N(0, t_i - t_{i-1})$. Zij Z_i een realisatie van de stochast $Z \sim N(0, 1)$. Een realisatie $w(t_i)$ van het proces $\{W(t)\}$ wordt gegeven door:

$$w(t_i) = w(t_{i-1}) + \sqrt{(t_i - t_{i-1})}Z_i. \quad (14)$$

Met behulp van vergelijking (11) vinden we dat de realisaties $s(t_i)$ van het proces $\{S(t)\}$ nu worden beschreven door:

$$s(t_i) = s(t_{i-1}) \exp \left(\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t_i - t_{i-1}) + \sigma \sqrt{(t_i - t_{i-1})}Z_i \right). \quad (15)$$

Ook hier wordt een verzameling $\{s_t : 0 \leq t \leq T\}$ realisaties een (prijs)pad genoemd.

Het simuleren van aandelprijzen wordt gedaan door simulatie van een geometrische Brownse beweging onder de risico-neutrale maat. Veronderstel een constante risico-vrije rente r en constante volatiliteit σ voor het prijsproces van een aandeel. [Glasserman, 2004, p.96] laat zien dat het proces $\{S(t) : 0 \leq t \leq T\}$ onder de risico-neutrale maat gesimuleerd kan worden door vergelijking (15) met parameters $\mu = r$ en σ . Hierbij geldt dat de verdiscontering tot tijdstip $t_0 = 0$ nu vastligt en wordt beschreven door $D(t) = e^{-rt}$.

In het gehele verslag gaan we uit van een constante rente en volatiliteit. Het simuleren van prijspaden van aandelen met tijdsafhankelijke rente en volatiliteit is ook mogelijk. Dit wordt beschreven in [Glasserman, 2004, p.80].

Hoofdstuk 3

De optieprijs benaderen

3.1 Dynamisch programmeerformulering

Veronderstel een optie met uitoefenmomenten $0, 1, \dots, N$. Zij $n \in \{0, 1, \dots, N\}$. Het prijsproces van het aandeel waarover de optie is afgesloten wordt gegeven door het Markovproces $\{X_n : n \leq N\}$ met $X_n = S(\sum_{i=0}^n \Delta t_i)$. Hierbij geldt dat $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ voor $i \in \{0, \dots, n\}$ en $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$. Zij χ de continue toestandsruimte die hoort bij het Markovproces $\{X_n\}$. De intrinsieke waardefunctie van de optie op tijdstip n wordt gegeven door de niet-negatieve functie $g_n : \chi \rightarrow \mathbb{R}^+$. De verdiscontering tot tijdstip $t_0 = 0$ wordt geabsorbeerd in de functie g_n . Zij $x \in \chi$ een mogelijke aandeelprijs binnen het prijsproces. We schrijven respectievelijk $J_n(x)$ en $Q_n(x)$ voor de optiewaarde en de continueringswaarde op tijdstip n , gegeven dat de optie nog niet uitgeoefend is voor tijdstip n . Zij $T_n = \{n, n+1, \dots, N\}$ een verzameling uitoefenmomenten. Zoals eerder besproken wordt de optie uitgeoefend op het eerste tijdstip n^* waarvoor geldt dat de verdisconteerde intrinsieke waarde groter of gelijk is aan de continueringswaarde. Hierbij mag geen gebruik worden gemaakt van informatie op latere tijdstippen $\{n^* + 1, \dots, N\}$. Dit geeft een toelaatbare uitoefenstrategie. We noteren $\tau_n \in T_n$ voor het eerste uitoefenmoment in T_n onder de stopconditie. Ofwel:

$$\tau_n = \min(i \in T_n : g_i(X_i) \geq Q_i(X_i)) \quad (16)$$

De optiewaarde op tijdstip n , gegeven dat de optie niet uitgeoefend is voor tijdstip n , wordt nu gegeven door

$$J_n(x) = \mathbb{E}(g_{\tau_n}(X_{\tau_n}) | X_n = x) \quad (17)$$

Merk op dat per definitie, zoals beschreven in Bolia et al. [2004], de optiewaarde op tijdstip n , gegeven dat de optie niet eerder uitgeoefend is, wordt gegeven door het supremum over alle uitoefenmomenten $\tau \in T_n$ van de verwachte verdisconteerde intrinsieke waarden. Hierbij geldt dat τ een stoptijd is. Het begrip stoptijd heeft een formele definitie in de stochastische procestheorie. De belangrijke eigenschap van een stoptijd, die wordt gebruikt in optieprijsproblemen, is dat de gebeurtenis $\{\tau = n\}$ niet afhangt van toekomstige informatie van het proces. De gebeurtenis $\{\tau = n\}$ moet dus bepaald kunnen worden aan de hand van X_0, \dots, X_n . Dit geeft hetzelfde resultaat als het evalueren van de verwachte intrinsieke waarde onder stopconditie (16). Om overbodig moeilijke wiskundige theorieën te voorkomen kiezen we voor de alternatieve definitie van de optiewaarde $J_n(x)$, zoals gegeven in (17).

De optiewaarde $J_n(x)$, voor $n \in \{0, 1, \dots, N\}$, wordt gevonden met behulp van vergelijkingen (16) en (17). Op tijdstip N is de optiewaarde, gegeven dat de optie nog niet is uitgeoefend tot tijdstip N , gelijk aan de verdisconteerde intrinsieke waarde van de optie op tijdstip N . Op tijdstip $N - 1$ vinden we dat de optiewaarde $J_{N-1}(x)$ gelijk is aan het maximum van de verdisconteerde intrinsieke waarde op tijdstip $N - 1$ en de verwachte optiewaarde op tijdstip N . In het algemeen vinden we dat de optiewaarde op tijdstip n , wanneer de optie nog niet is uitgeoefend tot tijdstip n , gegeven wordt door het maximum van de verdisconteerde intrinsieke waarde op tijdstip n en de verwachte optiewaarde op tijdstip $n + 1$. Dit geeft de volgende recursie:

$$\begin{cases} J_N(x) &= g_N(x) \\ J_n(x) &= \max(g_n(x), \mathbb{E}(J_{n+1}(X_{n+1}) | X_n = x)) \end{cases} \quad (18)$$

De continueringswaarde op tijdstip n is de verwachte optiewaarde op tijdstip $n + 1$ en wordt gegeven door:

$$Q_n(x) = \mathbb{E}(J_{n+1}(X_{n+1})|X_n = x). \quad (19)$$

We kunnen de optiewaarde $J_n(x)$ dus uitdrukken als:

$$J_n(x) = \max(g_n(x), Q_n(x)). \quad (20)$$

De continueringswaardefuncties kunnen met een soort gelijke recursie gevonden worden. Wanneer de optie niet op tijdstip N uitgeoefend wordt, verloopt de optie zonder waarde. De continueringswaarde op tijdstip N is dus 0. Op tijdstip $N - 1$ is de continueringswaarde de verwachte verdisconteerde intrinsieke waarde op tijdstip N . Op tijdstip $N - 2$ is de continueringswaarde gelijk aan het verwachte maximum van de verdisconteerde intrinsieke waarde op tijdstip $N - 1$ en de verwachte optiewaarde op tijdstip N (ofwel de continueringswaarde op tijdstip $N - 1$). Generalisatie geeft dat de continueringswaarde op tijdstip n gelijk is aan het verwachte maximum van de intrinsieke waarde op tijdstip $n + 1$ en de continueringswaarde op tijdstip $n + 1$. Dit beschrijft de volgende recursie:

$$\begin{cases} Q_{N-1}(x) &= \mathbb{E}(g_N(X_N)|X_{N-1} = x) \\ Q_n(x) &= \mathbb{E}(\max(g_{n+1}(X_{n+1}), Q_{n+1}(X_{n+1}))|X_n = x). \end{cases} \quad (21)$$

Veronderstel nu dat de initiële verdeling van het proces $\{X_n\}$ een puntmassa is in het punt x_0 . Zij $\tau^* \in T_0$ het optimale uitoefenmoment, gevonden met stopconditie (16). Wanneer $n < \tau^*$ vinden we met behulp van vergelijking (20) dat op tijdstip n de optiewaarde en de continueringswaarde aan elkaar gelijk zijn. Er geldt dat $J_0(x_0)$ gelijk is aan de optieprijs (dit volgt uit vergelijking 17). In het bijzonder geldt ook voor $\tau^* > 0$ dat:

$$J_0(x_0) = Q_0(x_0). \quad (22)$$

We vinden dus dat onder deze voorwaarden $Q_0(x_0)$ een benadering geeft voor de optieprijs.

3.2 Een functiebenadering voor de optie- en continueringswaarden

Een manier om de continueringswaarden te schatten, is door gebruik te maken van regressietechnieken. Bolia et al. [2004] beschrijven in hun artikel een methode die gebruik maakt van de kleinste-kwadratenmethode. Veronderstel dat er een functie bestaat die de continueringswaarden beschrijft en welke benaderd kan worden door een lineaire combinatie van basisfuncties. Zij $K \in \mathbb{N}$. We schrijven

$$\tilde{Q}(x, r_n) = \sum_{k \leq K} \phi_k(x) r_n(k) \quad (23)$$

voor de benadering van $Q_n(x)$, waarbij $\phi_k : \chi \rightarrow \mathbb{R}$ en $r_n \in \mathbb{R}^K$.

We starten met het simuleren van M prijspaden van het onderliggende prijsproces $\{X_n : n \leq N\}$ zoals besproken in hoofdstuk 2. De m -de realisatie op tijdstip n van het proces $\{X_n\}$ wordt aangeduid met $x_{m,n}$. Door gebruik te maken van de dynamisch programmeerformulering uit de vorige paragraaf vinden we parameters r_0, \dots, r_{N-1} voor de benadering

van de continueringswaardefunctie via een recursie. De vector r_{N-1} kan worden gevonden door het oplossen van het kleinste-kwadratenprobleem:

$$\arg \min_r \sum_{m \leq M} \left(g_N(x_{m,N}) - \tilde{Q}(x_{m,N-1}, r) \right)^2. \quad (24)$$

Hierbij is *arg min* de operator die de gevolgde uitdrukking minimaliseert over de aan-gegeven vector. Door gebruik te maken van de benaderingsfunctie $\tilde{Q}(\cdot, r_{N-1})$ voor de functie $Q_{N-1}(\cdot)$ en stopconditie (16), kunnen we voor elk pad het uitoefenmoment op tijdstip $N - 1$ bepalen gegeven $X_{N-1} = x_{m,N-1}$. Noem dit uitoefenmoment $\tau_{m,N-2}$. In het algemeen wordt het uitoefenmoment $\tau_{m,n} \in T_{n+1}$ gegeven door

$$\tau_{m,n} = \begin{cases} n + 1 & \text{als } g_{n+1}(x_{m,n+1}) \geq \tilde{Q}(x_{m,n+1}, r_{n+1}) \\ \tau_{m,n+1} & \text{als } g_{n+1}(x_{m,n+1}) < \tilde{Q}(x_{m,n+1}, r_{n+1}) \end{cases}. \quad (25)$$

De vector r_n is nu de oplossing van het kleinste-kwadratenprobleem

$$\arg \min_r \sum_{m \leq M} \left(g_{\tau_{m,n}}(x_{m,\tau_{m,n}}) - \tilde{Q}(x_{m,n}, r) \right)^2. \quad (26)$$

Met de gevonden benaderingen voor de continueringswaarden kan een uitoefenstrategie ontwikkeld worden. Deze uitoefenstrategie kan vervolgens gebruikt worden om een ondergrens voor de optieprijs te bepalen. Bolia et al. [2004] noemen de optieprijs gevonden met deze strategie de *naïeve* optieprijs. Later in deze paragraaf wordt besproken hoe deze prijs gevonden kan worden. Deze methode voor het bepalen van de optieprijs is analoog aan de methode die wordt gebruikt in het algoritme van Longstaff & Schwartz [2001].

Om een nauwkeurigere benadering voor de optieprijs te vinden, maken Bolia, Glasserman en Juneja gebruik van een techniek genaamd importance sampling. Deze techniek wordt in hoofdstuk 4 besproken. Om deze techniek toe te kunnen passen hebben we ook een benadering nodig voor de functie J_n . Veronderstel dat de functie J_n ook benaderd kan worden door een lineaire combinatie van de basisfuncties uit (23). We schrijven:

$$\tilde{J}_n(x, s_n) = \sum_{k \leq K} \phi_k s_n(k) \quad (27)$$

met $s_n \in \mathbb{R}^K$, voor de benadering van de waarde $J_n(x)$. Ook hier kunnen we de parameters s_0, \dots, s_N vinden met behulp van de dynamisch programmeerformulering uit de vorige paragraaf. De vector s_N is te vinden met behulp van de niet-negatieve kleinste-kwadratenoplossing van

$$s_N = \arg \min_{s \geq 0} \sum_{m \leq M} \left(g_N(x_{m,N}) - \tilde{J}(x_{m,N}, s) \right)^2. \quad (28)$$

Voor het uitvoeren van importance sampling is het belangrijk dat de coëfficiënten s_0, \dots, s_N niet negatief zijn. Dit zal in hoofdstuk 4 worden besproken. Vanwege deze eis is er gekozen voor de niet-negatieve variant van de kleinste-kwadratenmethode. Voor het benaderen van de coëfficiënten s_0, \dots, s_{N-1} wordt gebruik gemaakt van de eerder gevonden benadering van de continueringswaardefunctie. Met behulp van deze benaderingsfunctie kunnen de uitoefenmomenten $\tau_{m,n-1} \in T_n$ worden bepaald. De vector s_n is nu de oplossing van het niet-negatieve kleinste-kwadratenprobleem:

$$s_n = \arg \min_{s \geq 0} \sum_{m \leq M} \left(g_{\tau_{m,n-1}}(x_{m,\tau_{m,n-1}}) - \tilde{J}(x_{m,n}, s) \right)^2. \quad (29)$$

Merk op dat $\tau_{m,n-1}$ een benadering is van het optimale uitoefenmoment over de tijdstippen n, \dots, N . Bij een nauwkeurigere benadering van de parameters van \tilde{Q} vinden we dus ook een nauwkeurigere benadering van $\tau_{m,n}$. Vanwege de beperkte informatie over het optimale uitoefenmoment geeft $g_{\tau_{m,n}}(x_{m,\tau_{m,n}})$ een aannemelijke benadering voor $Q_n(x_{m,n})$. Dit volgt uit de vergelijkingen (17) en (19). Evenzo geldt dit voor $g_{\tau_{m,n-1}}(\tau_{m,n-1})$ als benadering voor de optiewaarde $J_n(x_{m,n})$.

3.2.1 Bepalen van de naïeve optieprijs

Met behulp van de gevonden continueringswaarden kan nu een ondergrens voor de optieprijs benaderd worden. We starten met het genereren van nieuwe realisaties $\{x_{m,n} : m \leq M, n \leq N\}$ van het onderliggende prijsproces $\{X_n : n \leq N\}$ onder de originele kansmaat P . Met behulp van de stopconditie en de continueringswaarden kunnen we voor ieder m -de pad het uitoefeningsmoment bepalen, waarop de optie volgens de gevonden strategie de maximale opbrengst genereert. We noemen dit uitoefeningsmoment $\tau_m^* \in T_0$. De optieprijs kan nu benaderd worden via de ondergrens gegeven door:

$$\frac{1}{M} \sum_{m \leq M} g_{\tau_m^*}(x_{m,\tau_m^*}). \quad (30)$$

Hoofdstuk 4

Importance sampling

Importance sampling is een techniek waarmee de variantie van een stochast kan worden gereduceerd. De techniek maakt gebruik van een kunstmatige dichtheidsfunctie die de importance dichtheid wordt genoemd. Sommige uitkomsten hebben meer invloed op de te bepalen schatting dan andere. Met behulp van de importance dichtheid kan een weegfactor worden gevonden die een juiste weging toekent aan een realisatie van een stochast. Bolia et al. [2004] gebruiken importance sampling om een zogenoemde variantienul maat te benaderen. Onder deze theoretische maat kan de optieprijs exact bepaald worden.

4.1 Eigenschappen van het prijsproces

De importance-samplingtechniek wordt toegepast op het Markovproces $\{X_n : n \leq N\}$ waarbij $S(\sum_{i=0}^n \Delta t_i) = X_n$ met $i \in \{0, \dots, n\}$. Zoals in hoofdstuk 2 besproken, is dit een Markovproces in discrete tijd met continue toestandsruimte χ . In tegenstelling tot een Markovproces met discrete toestandsruimte wordt de toestandsovergang in de continue toestandsruimte beschreven door een overgangsdichtheid. Zij f_n de overgangsdichtheidsfunctie van toestand X_n naar toestand X_{n+1} .

Zij Z_1, \dots, Z_n een rijtje standaard normaal verdeelde stochasten. Met behulp van vergelijking (11) vinden we dat de verdeling van X_{n+1} wordt beschreven door

$$X_{n+1} = X_n \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t_n + \sigma\sqrt{\Delta t_n}Z_n\right) \quad (31)$$

met $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$. We definiëren $\hat{\mu}_{n,x} = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_n + \log(x)$ en $\hat{\sigma}^2 = \Delta t_n\sigma^2$. Zij $\hat{Z}_n(x) \sim N(\hat{\mu}_{n,x}, \hat{\sigma}^2)$. De verdeling van X_{n+1} gegeven $X_n = x$ wordt nu beschreven door:

$$X_{n+1} = \exp\left(\hat{Z}_n(x)\right) \quad (32)$$

met overgangsdichtheidsfunctie

$$f_n(x, y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\hat{\sigma}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(y) - \hat{\mu}_{n,x}}{\hat{\sigma}}\right)^2} \mathbb{1}_{y>0}(y). \quad (33)$$

De verdeling van X_0 is een puntmassa in het punt x_0 . Veronderstel het rijtje meetbare deelverzamelingen A_1, \dots, A_n in de sigma-algebra die hoort bij de kansruimte χ . Er geldt dat:

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n | X_0 = x_0) = \int_{A_1} \dots \int_{A_n} f_0(x_0, x_1) \dots f_{n-1}(x_{n-1}, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (34)$$

Hieruit volgt dat de simultane dichtheidsfunctie van het proces $\{X_n : n \leq N\}$ wordt gegeven door $f_0(x_0, x_1) \dots f_{n-1}(x_{n-1}, x_n)$. Zij $h : \chi \rightarrow \mathbb{R}$ nu een meetbare functie. De verwachtingswaarde van $h(X_{n+1})$, gegeven $X_0 = x_0$, is de integraal:

$$\mathbb{E}(h(X_{n+1}) | X_0 = x_0) = \int_{A_1} \dots \int_{A_n} \int_{\chi} h(x_n) f_0(x_0, x_1) \dots f_{n-1}(x_{n-1}, x_n) f_n(x_n, x_{n+1}) dx_1 \dots dx_{n+1}. \quad (35)$$

4.2 Importance sampling en de variantie-nul kansmaat

Voor het uitvoeren van importance sampling zijn we op zoek naar een importance dichtheidsfunctie. De keuze van deze functie bepaalt hoe de variantie van de stochast onder de kunstmatige kansmaat wordt beïnvloed. Veronderstel een continue stochast Y met dichtheidsfunctie f . Zij h een meetbare functie. De verwachtingswaarde onder de kansmaat P (niet noodzakelijk de risico-neutrale maat) wordt gegeven door:

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \int_{\Omega} h(Y)dP = \int_{\mathbb{R}} h(y)f(y)dy. \quad (36)$$

Voor het uitvoeren van importance sampling, kiezen we een dichtheidsfunctie f^* , waarvoor geldt dat

$$f(y) > 0 \iff f^*(y) > 0. \quad (37)$$

De verwachtingswaarde in (36) onder de maat P kan worden omgeschreven naar een verwachtingswaarde onder een nieuwe kansmaat P^* die hoort bij de dichtheidsfunctie f^* . Door binnen de integraal te vermenigvuldigen met $\frac{f^*(y)}{f(y)}$ wordt de verwachtingswaarde onder de kansmaat P^* gegeven door:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(Y)) &= \int_{\mathbb{R}} h(y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}} h(y)f(y)\frac{f^*(y)}{f^*(y)}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(y)\frac{f(y)}{f^*(y)}f^*(y)dy = \int_{\Omega} h(Y)\frac{f(Y)}{f^*(Y)}dP^* \\ &= \mathbb{E}^* \left(h(Y)\frac{f(Y)}{f^*(Y)} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

De verhouding $\frac{f(Y)}{f^*(Y)}$ wordt de aannemelijkheidsverhouding (ofwel likelihood ratio) genoemd.

We zijn geïnteresseerd in de kansmaat die de variantie van $h(Y)\frac{f(Y)}{f^*(Y)}$ tot nul reduceert. De variantie van $h(Y)\frac{f(Y)}{f^*(Y)}$ wordt gegeven door

$$\text{var}^* \left(h(Y)\frac{f(Y)}{f^*(Y)} \right) = \mathbb{E}^* \left(\left(h(Y)\frac{f(Y)}{f^*(Y)} \right)^2 \right) - \left[\mathbb{E}^* \left(h(Y)\frac{f(Y)}{f^*(Y)} \right) \right]^2. \quad (39)$$

Om de variantie te reduceren is het enkel noodzakelijk te kijken naar het tweede moment van $h(Y)\frac{f(Y)}{f^*(Y)}$. Veronderstel dat h niet-negatief is. Uit de integraalvorm van het tweede moment is makkelijk af te leiden dat geldt:

$$\mathbb{E}^* \left(\left(h(Y)\frac{f(Y)}{f^*(Y)} \right)^2 \right) = \mathbb{E} \left(\left(h^2(Y)\frac{f(Y)}{f^*(Y)} \right) \right). \quad (40)$$

Kiezen we nu f^* proportioneel aan fh dan zal de variantie van $h(Y)\frac{f(Y)}{f^*(Y)}$ kleiner worden. Immers zij $f^*(y) = \frac{f(x)h(x)}{a}$ met $a \in \mathbb{R}$. Voor f^* geldt dat $\int_{\mathbb{R}} f^*(x)dx = 1$. Hieruit volgt dat $a = \mathbb{E}(h(Y))$. Voor de variantie van $h(Y)\frac{f(Y)}{f^*(Y)}$ onder de kansmaat P^* vinden we nu dat geldt:

$$\text{var}^* \left(h(Y)\frac{f(Y)}{f^*(Y)} \right) = \mathbb{E} \left(\left(h^2(Y)\frac{f(Y)}{f^*(Y)} \right) \right) - \mathbb{E}(h(Y))^2 = a\mathbb{E}(h(Y)) - \mathbb{E}(h(Y))^2 = 0. \quad (41)$$

Het is uiteraard niet mogelijk om a zo te kiezen, omdat we juist proberen $\mathbb{E}(h(Y))$ te bepalen. Echter geeft dit wel een richting waarin de importance dichtheid gekozen dient te worden. Door de importance dichtheid proportioneel te kiezen, zal de variantie van $h(Y) \frac{f(Y)}{f^*(Y)}$ kleiner worden. De maat P^* die hoort bij de importance dichtheid f^* en variantie nul geeft, noemen we de variantie-nul maat.

4.2.1 De variantie-nul maat voor het bepalen van de optieprijs

We proberen een benadering te vinden voor:

$$Q_n(x) = \mathbb{E}(J_{n+1}(X_{n+1})|X_n = x) = \int_{\mathcal{X}} J_{n+1}(y) f_n(x, y) dy. \quad (42)$$

Om de variantie-nul maat voor de benadering van Q_n te vinden nemen we de importance dichtheid f_n^* proportioneel aan $f_n J_{n+1}$. We kiezen f_n^* zo dat:

$$f_n^*(x, y) = \frac{f_n(x, y) J_{n+1}(y)}{Q_n(x)}. \quad (43)$$

Met behulp van de functie Q_n wordt de functie f^* genormaliseerd tot een dichtheidsfunctie. Aan de hand van vergelijking (38) en de simultane dichtheidsfunctie definiëren we de aannemelijkheidsverhouding:

$$L_n^* = \frac{f_0(x_0, X_1)}{f_0^*(x_0, X_1)} \dots \frac{f_{n-1}(X_{n-1}, X_n)}{f_{n-1}^*(X_{n-1}, X_n)}. \quad (44)$$

Zij P^* de kansmaat die hoort bij de dichtheidsfunctie f^* . We laten zien, door gebruik te maken van vergelijking (17), dat P^* een variantie-nul maat geeft waaronder de optieprijs exact benaderd kan worden. Dit doen we door te laten zien dat

$$L_{\tau^*}^* g_{\tau^*}(X_{\tau^*}) = J_0(x_0), \quad (45)$$

waarbij $\tau^* = \tau_0 \in T_0$ het optimale uitoefeningsmoment is. We bekijken τ^* aan de hand van vergelijking (16). τ^* is een stochast gedefinieerd op een zekere kansruimte Ω . Deze ruimte kunnen we partitioneren door $\bigcup_{k=0}^N \{\tau^* = k\}$. We laten voor alle $k \in \{0, \dots, N\}$ en alle $\omega \in \{\tau^* = k\}$ zien dat:

$$g_k(X_k) L_k^* = J_0(x_0). \quad (46)$$

Bewijs. Zij k en ω willekeurig. De uitdrukking $g_k(X_k) L_k^*$ is te schrijven als:

$$g_k(X_k) L_k^* = \frac{Q_0(x_0)}{J_1(X_1)} \dots \frac{Q_{k-1}(X_{k-1})}{J_k(X_k)} g_k(X_k). \quad (47)$$

Het geval $k = 0$ is triviaal, dus laat $k \in \{1, \dots, N\}$ willekeurig vast. We bekijken $n \in \{0, \dots, k\}$. Er geldt voor $n < k$ dat $Q_n(X_n) = J_n(X_n)$. We vinden dus

$$g_k(X_k) L_k^* = Q_0(x_0) \frac{g_k(X_k)}{J_k(X_k)}. \quad (48)$$

Omdat k het optimale uitoefenmoment is, is de intrinsieke waarde van de optie op het moment k gelijk aan de optiewaarde op het moment $n = k$. Dit is direct te zien in vergelijking (20). Er geldt dus dat $g_k(X_k) L_k^* = Q_0(x_0)$. Omdat $k \in \{1, \dots, N\}$ volgt nu dat:

$$g_k(X_k) L_k^* = Q_0(x_0) = J_0(x_0). \quad (49)$$

Merk op dat de optie volgens de stopconditie (16) altijd uitgeoefend wordt. Immers $Q_N(X_N) = 0$. \square

4.3 De benadering van de importance dichtheidsfunctie

We schrijven \tilde{f}_n voor de benadering van f_n^* . Deze benadering kan, met behulp van vergelijking (43), worden uitgedrukt als:

$$\tilde{f}_n(x, y) = \frac{f_n(x, y) \tilde{J}(y, s_{n+1})}{\int_{\chi} \tilde{J}(y, s_{n+1}), f_n(x, y) dy}. \quad (50)$$

De benadering $\int_{\chi} \tilde{J}(y, s_{n+1}), f_n(x, y) dy$ volgt uit vergelijking (42). Door de lineaire combinatie van basisfuncties uit (27) in te vullen kan $\tilde{f}_n(x, y)$ worden geschreven als:

$$\tilde{f}_n(x, y) = \frac{f_n(x, y) \sum_{k \leq K} \phi_k(y) s_{n+1}(k)}{\int_{\chi} \sum_{k \leq K} \phi_k(y) s_{n+1}(k) f_n(x, y) dy}. \quad (51)$$

We vermenigvuldigen de teller en de noemer met $\int_{\chi} \phi_k(y) f_n(x, y) dy$ en herschikken de uitdrukking.

$$\tilde{f}_n(x, y) = \sum_{k \leq K} \frac{s_{n+1}(k) \int_{\chi} \phi_k(y) f_n(x, y) dy}{\sum_{k \leq K} s_{n+1}(k) \int_{\chi} \phi_k(y) f_n(x, y) dy} \frac{\phi_k(y) f_n(x, y)}{\int_{\chi} \phi_k(y) f_n(x, y) dy}. \quad (52)$$

Veronderstel dat de vectoren s_0, \dots, s_N niet-negatief zijn en dat er een $k \in \{1, \dots, K\}$ bestaat, zodat $s_{n+1}(k)$ groter is dan nul. \tilde{f}_n bevat dan een kansmassafunctie $p_{n,k}(x)$ die wordt gegeven door:

$$p_{n,k}(x) = \frac{s_{n+1}(k) \int_{\chi} \phi_k(y) f_n(x, y) dy}{\sum_{k \leq K} s_{n+1}(k) \int_{\chi} \phi_k(y) f_n(x, y) dy}. \quad (53)$$

We noteren $h_{n,k}$ voor de dichtheidsfunctie die wordt beschreven door:

$$h_{n,k}(x, y) = \frac{\phi_k(y) f_n(x, y)}{\int_{\chi} \phi_k(y) f_n(x, y) dy}. \quad (54)$$

Een juiste keuze voor ϕ_k geeft de mogelijkheid om relatief makkelijk steekproeven te genereren uit de verdeling die hoort bij de dichtheidsfunctie $h_{n,k}$.

4.3.1 Basisfuncties kiezen

Zij P_h de kansmaat die hoort bij de verdeling met verdelingsfunctie $h_{n,k}$. Zoals eerder besproken, moet gelden dat $f_n(x, y) > 0$ dan en slechts dan $\tilde{f}_n(x, y) > 0$. Zij $x \in \chi$ gegeven. Uit de dichtheidsfunctie f_n , gegeven in (33), volgt dat $f_n(x, y) \geq 0$ voor alle $y \in \chi$. Voor ϕ_k moet dus ook gelden dat $\phi_k(y) \geq 0$ voor alle $y \in \chi$. Door de vorm van de uitdrukking voor $f_n(x, y)$ ligt het voor de hand om te kiezen voor een functie voor ϕ_k uit de familie van exponentiële functies. Bolia et al. [2004] kiezen voor basisfuncties van de vorm:

$$\phi_k(y) = e^{a \log(y)^2 + b \log(y)}. \quad (55)$$

De keuze voor deze vorm van basisfuncties vereenvoudigd het uitwerken van zowel $f(x, \cdot)\phi_k(\cdot)$ als de bijbehorende integraal. Deze uitwerking is te vinden in (77). De keuze voor parameters a en b heeft invloed op de uitkomst van de integraal $\int_{\chi} \phi_k(y)f(x, y)dy$. Wanneer $a \geq \frac{1}{2\sigma^2}$ wordt gekozen, zien we dat de integraal snel heel groot wordt. Dit volgt uit de uitwerking van $\tilde{\mu}_{n,x}$. Bij een keuze van $a = 0$ volgt dat $\phi_k = y^b$. Er wordt daarom gekozen voor $a < 0$.

4.4 Iteratief verbeteren van de benaderingsfuncties

Met behulp van een iteratief proces kan er een steeds scherpere ondergrens voor de optieprijs gevonden worden. We gebruiken importance sampling om een steeds betere uitoefenstrategie te vinden waaronder we de optieprijs kunnen evalueren. Zij r_0^*, \dots, r_{N-1}^* de gevonden parameters voor de benadering $\hat{Q}(\cdot, r_n^*)$ van Q_n onder importance sampling. Intuïtief zien we dat wanneer we steekproeven nemen uit de importance verdeling, de variantie van $J_{n+1}(X_{n+1})L_{n+1}^*$ kleiner is dan de variantie van X_{n+1} . De benaderingsfunctie $\hat{Q}(\cdot, r_n^*)$ zal een scherpere benadering worden voor Q_n dan de benadering $\tilde{Q}(\cdot, r_n)$. Immers zo is de kansmaat \tilde{P} gekozen. Met behulp van $\hat{Q}(\cdot, r_n^*)$ zullen dus betere benaderingen worden gevonden voor de parameters s_0^*, \dots, s_N^* . Dit zijn de parameters voor de benaderingsfunctie $\hat{J}(\cdot, s_n^*)$, gevonden met behulp van importance sampling. Deze parameters kunnen vervolgens weer gebruikt worden om een betere benadering \tilde{P} voor de variantienul maat P^* te vinden. Bolia et al. [2004] laten zien dat wanneer de functie J_n scherp benaderd kan worden door de functie \hat{J}_n , de bijbehorende kansmaat \tilde{P} een goede benadering is voor de variantie-nul maat P^* .

Elke iteratie begint met het simuleren van prijspaden van het proces $\{X_n\}$ onder de kansmaat \tilde{P} . Hiervoor simuleren we een serie realisaties $\{x_n : n \leq N\}$ uit de dichtheidsfunctie:

$$\tilde{f}_n(x, y) = \sum_{k \leq K} p_{n,k}(x)h_{n,k}(x, y). \quad (56)$$

De realisaties kunnen op de volgende manier worden verkregen. Het proces $\{X_n\}$ heeft als intiële verdeling een puntmassa in het punt x_0 . De waarde x_0 kan gebruikt worden om een steekproef $\hat{K}_1 \in \{1, 2, \dots, K\}$ te nemen uit de verdeling die hoort bij kansmassafunctie $p_{0,k}(x_0)$. Vervolgens is het mogelijk een trekking $\hat{X}_1 \in \chi$ te verrichten uit de verdeling die hoort bij de kansdichtheidsfunctie $h_{n,\hat{K}_1}(x_0, y)$. In het algemeen wordt een steekproef \hat{K}_{n+1} genomen uit de verdeling die hoort bij de kansmassafunctie $p_{n,k}(\hat{X}_n)$. Hierna kan een realisatie \hat{x}_{n+1} gevonden worden door een trekking te doen uit de verdeling die hoort bij de dichtheidsfunctie $h_{n,\hat{K}_{n+1}}(\hat{X}_n, y)$.

We veronderstellen nu M prijspaden $\{x_{m,n} : n \leq N, m \leq M\}$ gesimuleerd onder de kansmaat \tilde{P} . We definiëren de likelihood ratio voor de realisatie van het m -de pad tussen tijdstip n_1 en tijdstip n_2 , door

$$L_{m,n_1,n_2} = \frac{f_{n_1}(x_{m,n_1}, x_{m,n_1+1})}{\tilde{f}_{n_1}(x_{m,n_1}, x_{m,n_1+1})} \dots \frac{f_{n_2-1}(x_{m,n_2-1}, x_{m,n_2})}{\tilde{f}_{n_2-1}(x_{m,n_2-1}, x_{m,n_2})}. \quad (57)$$

De vector r_{N-1}^* is nu de oplossing van het kleinste-kwadratenprobleem:

$$r_{N-1}^* = \arg \min_r \sum_{m \leq M} \left(g_N(x_{m,N})L_{m,N-1,N} - \hat{Q}(x_{m,N-1}, r) \right)^2 L_{m,0,N-1}. \quad (58)$$

Wederom kunnen we met de gevonden vector r_{N-1}^* het uitoefenmoment $\tau_{m,N-2}$ vinden. In het algemeen vinden we $\tau_{m,n}$ met behulp van de benadering $\widehat{Q}(\cdot, r_{n+1}^*)$ en de stopconditie. De vector r_n^* kan nu gevonden worden met de kleinste-kwadratenoplossing

$$\arg \min_r \sum_{m \leq M} \left(g_{\tau_{m,n}}(x_{m,\tau_{m,n}}) L_{m,n,\tau_{m,n}} - \widehat{Q}(x_{m,n}, r) \right)^2 L_{m,0,n}. \quad (59)$$

Deze uitdrukking voor r_n^* wordt gevonden met behulp van de volgende redenering. Merk op dat \tilde{f} een benadering is van f^* en dat $\tau_{m,n}$ een realisatie is van het optimale uitoefenmoment voor het m -de pad over de tijdstippen $n+1, \dots, N$. Veronderstel een realisatie van het optimale uitoefenmoment $\tau_n \in T_{n+1}$ over de momenten $n+1, \dots, N$. Definieer de aannemelijkheidsratio voor de overgang tussen twee toestanden van het proces $\{X_n\}$ door:

$$L_{n_1, n_2}^* = \frac{f_{n_1}(X_{n_1}, X_{n_1+1}) \dots f_{n_2-1}(X_{n_2-1}, X_{n_2})}{\tilde{f}_{n_1}(X_{n_1}, X_{n_1+1}) \dots \tilde{f}_{n_2-1}(X_{n_2-1}, X_{n_2})}. \quad (60)$$

Er is bekend dat

$$Q_n(x) = \mathbb{E}(g_{\tau_n}(X_{\tau_n}) | X_n = x). \quad (61)$$

Zij $A_{n+1}, \dots, A_{\tau_n}$ een rijtje meetbare deelverzamelingen uit de sigma-algebra die hoort bij de kansruimte χ van mogelijke uitkomsten van het prijsproces. Uit $\mathbb{P}(X_{n+1} \in A_{n+1}, \dots, X_{\tau_n} \in A_{\tau_n} | X_n = x)$ volgt dat de simultane dichtheidsfunctie onder de originele kansmaat P wordt gegeven door $f_n(x, x_n) \dots f_{\tau_n-1}(x_{\tau_n-1}, x_{\tau_n})$. Hieruit volgt dat voor $Q_n(x)$ onder de kansmaat \tilde{P} geldt dat:

$$Q_n(x) = \tilde{\mathbb{E}}(g_{\tau_n}(X_{\tau_n}) L_{n,\tau_n}^* | X_n = x). \quad (62)$$

De factor $L_{m,0,n}$ is ter compensatie van de onzuiverheid ter gevolg van importance sampling. Vergelijking (59) volgt nu als de empirische benadering van

$$\arg \min_r \mathbb{E} \left(\left(Q_n(X_n) - \widehat{Q}(X_n, r_n) \right)^2 \right) = \arg \min_r \tilde{\mathbb{E}} \left(\left(Q_n(X_n) - \widehat{Q}(X_n, r_n) \right)^2 L_{0,n}^* \right). \quad (63)$$

De parameters r_0^*, \dots, r_{N-1}^* kunnen nu worden gebruikt voor het vinden van de parameters s_0^*, \dots, s_N^* . De vector s_N^* wordt gegeven door

$$s_N^* = \arg \min_{s \geq 0} \sum_{m \leq M} \left(g_N(x_{m,N}) L_{m,N-1,N} - \widehat{J}(x_{m,N}, s) \right)^2 L_{m,0,N}. \quad (64)$$

Door gebruik te maken van $\widehat{Q}(\cdot, r_n^*)$ kan $\tau_{m,n-1}$ worden bepaald. De vector s_n^* wordt gegeven door de niet-negatieve kleinste-kwadratenoplossing:

$$s_n^* = \arg \min_{s \geq 0} \sum_{m \leq M} \left(g_{\tau_{m,n-1}}(x_{m,\tau_{m,n-1}}) L_{m,n,\tau_{m,n-1}} - \widehat{J}(x_{m,n}, s) \right)^2 L_{m,0,n}. \quad (65)$$

Wederom volgt, met behulp van de simultane dichtheidsfunctie, dat voor $J_n(x)$ onder de kansmaat \tilde{P} geldt:

$$J_n(x) = \tilde{\mathbb{E}} \left(g_{\tau_{n-1}}(X_{\tau_{n-1}}) L_{n,\tau_{n-1}} | X_n = x \right). \quad (66)$$

We vinden, door gebruik te maken van de compensatiefactor $L_{m,0,n}$, de empirische benadering van s_n^* gegeven in (65). Om de parameters s_0^*, \dots, s_N^* te kunnen gebruiken in een nieuwe benadering van P^* , vereisen we dat $s_n^* \geq 0$

4.4.1 Bepalen van de optieprijs onder importance sampling

Wanneer er voldoende iteraties zijn uitgevoerd, kan de optieprijs worden bepaald aan de hand van de gevonden benadering $\hat{Q}(\cdot, r_n^*)$ voor Q_n . We genereren eerst M prijspaden onder de kansmaat \tilde{P} . Dit geeft de verzameling $\{x_{m,n} : n \leq N, m \leq M\}$ realisaties van het proces $\{X_n\}$ onder \tilde{P} . Veronderstel voor elk prijspad het optimale uitoefenmoment $\tau_{m,0} \in T_0$. Hierbij kan $\tau_{m,0}$ worden gevonden door:

$$\tau_{m,0} = \min \left(i \in T_0 : g_i(x_{m,i}) \geq \hat{Q}(x_{m,i}, r_i^*) \right). \quad (67)$$

Met behulp van vergelijking (49) vinden we dat een scherpe benadering voor de ondergrens van de optieprijs, welke wordt gegeven door:

$$\frac{1}{M} \sum_{m \leq M} g_{\tau_{m,0}}(x_{m,\tau_{m,0}}) L_{m,0,\tau_{m,0}}. \quad (68)$$

Hoofdstuk 5

Resultaten

We bekijken de werking van het algoritme aan de hand van een voorbeeld. Dit is hetzelfde voorbeeld als Bolia et al. [2004] uitwerken in hun artikel. We proberen de prijs te benaderen van een Amerikaanse put-optie met een looptijd van een jaar. De optie heeft een eendimensionaal onderliggend prijsproces $\{S(t) : 0 \leq t \leq T\}$ zoals uitgewerkt in hoofdstuk 2. Het aandeel keert geen dividend uit. De looptijd van de optie wordt verdeeld in N intervallen van gelijke grootte. We vinden het prijsproces $\{X_n : n \leq N\}$, waarbij $X_n = S(n\Delta t)$ en $\Delta t = \frac{T}{N}$. Zoals in hoofdstuk 4 besproken wordt de dichtheidsfunctie van X_{n+1} , gegeven de waarde $X_n = x$, beschreven door:

$$f(x, y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\hat{\sigma}}} \exp\left(-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} (\log(y) - \hat{\mu}_{n,x})^2\right). \quad (69)$$

Vanwege de gelijke tijdstappen, geldt voor iedere $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ dat de dichtheidsfunctie $f_n(x, y) = f_{n+1}(x, y)$ voor alle $x, y \in \chi$. We kiezen daarom de notatie f voor de dichtheidsfunctie behorende bij de verdeling van X_{n+1} . We veronderstellen een risico-vrije rente $r = 0.06$ en een volatiliteit $\sigma = 0.20$. De uitoefenprijs wordt gelijkgesteld aan 40 bij een initiële aandeelprijs van $X_0 = 36$. Longstaff & Schwartz [2001] vinden dat de optieprijs gelijk is aan 4.478. Deze prijs is berekend aan de hand van een eindige-differentiemethode. Bolia et al. [2004] veronderstellen deze prijs als de 'werkelijke' optieprijs. De basisfuncties ϕ_k met parameters α_{1k} en α_{2k} kiezen we

$$\phi_k(y) = \exp\left(\alpha_{1k} \log^2(y) + \alpha_{2k} \log(y)\right). \quad (70)$$

De parameters (α_1, α_2) voor de basisfuncties kiezen we gelijk aan: $(-1, 0)$, $(-1, 1)$, $(-1, 2)$ en $(-1, 3)$.

5.1 Resultaten onder naïeve simulatie

We starten met het bepalen van een initiële uitoefenstrategie zoals besproken in hoofdstuk 3. De parameters r_0, \dots, r_N worden bepaald aan de hand van M gesimuleerde initiële paden. We bepalen de naïeve optieprijs onder een variërend aantal initiële paden. Tabel 1 geeft de resultaten gevonden door Bolia et al. [2004]. De optieprijs is bepaald onder dezelfde parameters als in het hierboven beschreven voorbeeld. In tabel 2 staan de resultaten gevonden met behulp van mijn simulaties.

Aantal initiële paden	Gemiddelde	95% B.I.
2000	4.471	(4.454, 4.488)
5000	4.481	(4.463, 4.499)
10000	4.485	(4.468, 4.502)
50000	4.475	(4.457, 4.492)

Tabel 1: Resultaten uit [Bolia et al., 2004] voor verschillende aantallen initiële paden. De optieprijs is (aan de hand van simulaties) bepaald voor een Amerikaanse put-optie met bovenstaande parameters. De gemiddelde optieprijs is berekend over 100000 gesimuleerde paden. Verder is een 95% betrouwbaarheidsinterval gegeven.

Aantal initiële paden	Gemiddelde	Standard error
2000	4.441	0.010
5000	4.444	0.009
10000	4.448	0.009
50000	4.453	0.009

Tabel 2: Resultaten van eigen simulaties voor verschillende aantallen initiële paden met behulp van pakket R (zie appendix C.1). De optieprijzen zijn bepaald over 100000 paden.

Uit de gegevens in tabel 1 is af te leiden dat de standard error die Bolia et al. [2004] vinden ongeveer gelijk is aan 0.0087. Met behulp van een t-test vergelijken we de resultaten in tabel 2 met de resultaten in tabel 1. Hierin vinden we geen significante discrepanties. Het valt echter wel op dat alle gemiddelden in tabel 2 kleiner zijn dan de gemiddelden in tabel 1. We besluiten daarom nog een aantal simulaties te doen. We vergelijken de gevonden resultaten met bekende waarden uit [Longstaff & Schwartz, 2001]. De resultaten van eigen simulaties zijn terug te vinden in tabel 9 in appendix B. We zien dat voor 11 van de 12 berekende gemiddelden de optieprijs gevonden met behulp van mijn simulaties lager is dan de bijbehorende optieprijs gegeven in [Longstaff & Schwartz, 2001]. Ook valt op dat alle berekende optieprijzen kleiner zijn dan de bijbehorende prijs berekend met behulp van de eindige-differentiemethode. De gevonden discrepanties geven reden tot het controleren van het geprogrammeerde algoritme. De testmethoden en de gevonden resultaten uit deze testen zijn te vinden in paragraaf 5.3.

5.2 Resultaten onder importance sampling

Voor het uitvoeren van importance sampling starten we wederom met het simuleren van M prijspaden onder de oorspronkelijke kansmaat P die hoort bij de dichtheidsfunctie f . We bepalen parameters r_0, \dots, r_{N-1} en s_0, \dots, s_N die horen bij respectievelijk de geparametriseerde benaderingsfuncties \tilde{Q} en \tilde{J} onder de oorspronkelijke kansmaat P . Vervolgens bepalen we de importance dichtheden $\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_{N-1}$ die horen bij de gevonden parameters. Een algebraïsche uitwerking hiervan is terug te vinden in appendix A. Met behulp van de gevonden dichtheidsfuncties $\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_{N-1}$ kunnen prijspaden worden gesimuleerd onder importance sampling. Deze paden kunnen, volgens het principe besproken in hoofdstuk 4, worden gebruikt om de optieprijs te bepalen. Allereerst worden parameters r_0^*, \dots, r_{N-1}^* vastgesteld. Vervolgens wordt de optieprijs bepaald. Dit is één iteratie uit het algoritme. De resultaten uit deze simulatie en de resultaten gevonden door Bolia et al. [2004] zijn te vinden in de volgende tabellen:

N	X_0	Naïeve benadering	IS benadering
10	36	4.426 (.018)	4.438 (.008)
20	36	4.451 (.018)	4.458 (.008)
50	36	4.455 (.017)	4.475 (.008)
10	50	0.316 (.007)	0.319 (.001)
20	50	0.325 (.007)	0.321 (.002)
50	50	0.322 (.007)	0.325 (.002)

Tabel 3: Benaderingen van de gemiddelde optieprijs onder verschillend aantal oefenmomenten en initiële aandeleprijs met halve 95% betrouwbaarheidsintervallengten door Bolia et al. [2004]. Coëfficiënten benaderd onder 10000 initiële paden. De optieprijs is geëvalueerd na één iteratie onder 100000 initiële paden.

N	X_0	Naïeve benadering	IS benadering
10	36	4.413 (0.010)	4.432 (0.004)
20	36	4.438 (0.010)	4.443 (0.004)
50	36	4.426 (0.009)	4.435 (0.004)
10	50	0.307 (0.004)	0.302 (0.001)
20	50	0.305 (0.003)	0.309 (0.001)
50	50	0.299 (0.003)	0.304 (0.001)

Tabel 4: Benaderingen van de gemiddelde optieprijs onder verschillend aantal oefenmomenten en initiële aandeleprijs uit eigen simulatie met bijbehorende standard errors. Coëfficiënten benaderd onder 10000 initiële paden. De optieprijs is geëvalueerd na één iteratie onder 100000 initiële paden.

We zien dat er nog steeds een afwijking zit tussen de resultaten gevonden door Bolia et al. [2004] en de resultaten uit mijn simulaties. Alle gevonden resultaten voor de optieprijs liggen lager dan de resultaten beschreven in het artikel. Wel zien we dat de optieprijs met initiële aandeleprijs $X_0 = 36$ na één iteratie dichterbij de daadwerkelijke optieprijs komt te liggen. Ook zien we dat de variantie na één iteratie afneemt. In de volgende simulatie berekenen we een groter aantal iteraties om te zien of de daadwerkelijke optieprijs scherper wordt benaderd.

Iteratie	Gemiddelde	Standard error
$\hat{Q}_0(x_0)$	4.4684	
Naïef	4.4551	0.0090
1	4.4461	0.0040
2	4.4468	0.0040
3	4.4465	0.0040
4	4.4466	0.0040
5	4.4460	0.0040
6	4.4459	0.0040

Tabel 5: Resultaten van simulaties met meerdere iteraties. Aantal initiële paden: 10000, evaluatie optieprijs onder 100000 paden. De looptijd is opgedeeld in $N = 50$ intervallen.

In totaal zijn er 13 iteraties uitgevoerd. We zagen echter dat de optieprijs alleen nog veranderingen liet zien ter grootte van de standard error. Hierom is besloten verdere resultaten niet te vermelden. Er is te zien dat de convergentie stagneert. Dit gebeurt ook relatief snel. Ook blijft de gevonden optieprijs lager dan de optieprijs gegeven door Longstaff & Schwartz [2001]. Wat opvalt is dat de prijs na importance sampling kleiner

is dan de prijs onder naïeve simulatie, welke een ondergrens verondersteld wordt. Merk op dat $Q_0(x_0)$ ook een ondergrens voor de optieprijs is, echter een grote afwijking heeft doordat deze prijs is bepaald met behulp van informatie uit de toekomst van het proces.

5.3 Testen van het geprogrammeerde algoritme

Vanwege de vele afwijkingen in de gevonden resultaten, besluiten we de geïmplementeerde R -code te testen op eventuele fouten.

5.3.1 Testen van gesimuleerde prijspaden

We starten met het controleren van de gesimuleerde prijspaden. Uit vergelijking 31 volgt dat de verdeling van X_{n+1} gegeven $X_0 = x_0$ wordt gegeven door

$$X_{n+1} = X_0 \exp \left((n+1) \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{(n+1) \Delta t} Z \right), \quad (71)$$

waarbij $Z \sim N(0, 1)$. Ofwel X_{n+1} is lognormaal verdeeld met parameters $\mu_* = (n+1)(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \log(x_0)$ en $\sigma_*^2 = (n+1)\Delta t\sigma^2$. We bekijken de kans dat de stochast X_n een waarde kleiner of gelijk aan a aanneemt, ofwel de kans dat de aandeleprijs op moment n kleiner of gelijk is aan a . De gevonden resultaten staan in tabel 10 in appendix B. De afwijkingen tussen de bepaalde kansen gevonden onder de gesimuleerde paden en de kansen gevonden met behulp van vergelijking (71) zijn niet groter dan twee standard errors. We kunnen dus veronderstellen dat de prijspaden correct gesimuleerd worden.

5.3.2 Testen van het benaderingsalgoritme voor de coëfficiënten

Het is lastig te bepalen of dit gedeelte correct is geïmplementeerd. Een goede manier om te testen op correctheid van de coëfficiënten is de gevonden coëfficiënten te vergelijken met een gegeven verzameling coëfficiënten waarvan bekend is dat deze 'optimaal' zijn. Echter is een dergelijke verzameling niet bekend. We proberen alternatieve manieren om de uitkomsten van dit gedeelte van het algoritme te controleren.

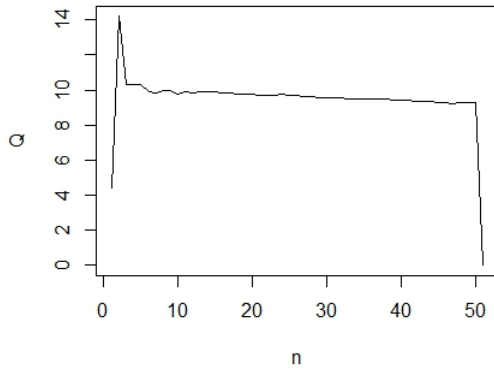
We beredeneren de eigenschappen van de functie $Q_n(\cdot)$ die hoort bij de Amerikaanse put-optie uit het voorbeeld zoals aan het begin van dit hoofdstuk beschreven. Bij gegeven aandeleprijs x geeft $Q_n(x)$ de continueringswaarde van de put-optie op tijdstip n . Voor $y > x$ moet dus gelden dat $Q_n(x) > Q_n(y)$. We vinden dus dat $Q_n(\cdot)$ een monotoon dalende functie is op de ruimte χ . We testen deze verwachting op de gevonden benaderingsfunctie $\tilde{Q}(\cdot, r_n)$. We vinden dat de benaderingsfunctie inderdaad monotoon dalend is op het interval $I = [30, 55]$. Het interval I is inderdaad een goede benadering van de mogelijke uitkomsten van het prijsproces. We vinden hier dus geen afwijking in onze verwachting.

Vervolgens bekijken we de functie $\bar{Q} : \{0, \dots, N\} \times \chi \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij

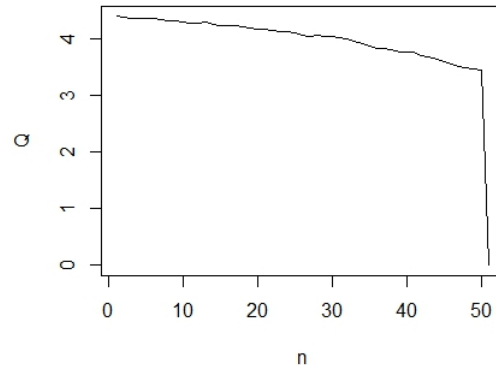
$$\bar{Q}(n, x) = Q_n(x) \quad (72)$$

voor zekere $N \in \mathbb{N}$. Zij $x \in \chi$ vast. De continueringswaardefunctie geeft de verdisconterde opbrengst van de optie, gegeven dat de optie nog niet uitgeoefend is tot en met een zeker tijdstip n_1 . Hierin zit dus de kans dat de prijs van het onderliggende aandeel 'in the money' komt (ofwel positieve opbrengst genereert). Voor een vaste aandeleprijs x en tijdstip $n_2 > n_1$ geldt dat deze kans op tijdstip n_2 kleiner is dan op tijdstip n_1 . We

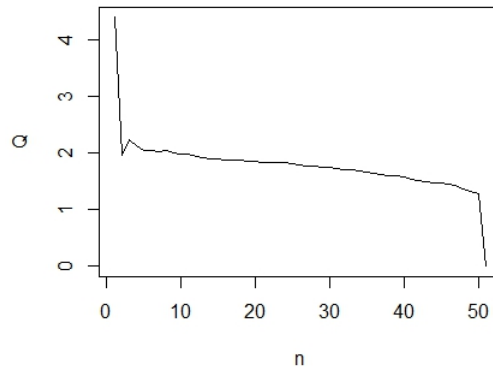
verwachten dus ook dat de continueringswaarde op moment n_2 kleiner is dan op moment n_1 . Ook wordt er in de continueringswaarde rekening gehouden met de verdiscontering tot tijdstip t_0 . Hieruit volgt voor de twee tijdstippen n_1 en n_2 dat voor een vaste aandelprijs x de verdisconteerde opbrengst van de optie op tijdstip n_2 kleiner is dan op tijdstip n_1 . Voor vaste $x \in \chi$ verwachten we dus dat $\bar{Q}(\cdot, x)$ een monotoon dalende functie is. We plotten diverse benaderingsfuncties om te zien of deze inderdaad monotoon dalend zijn. De benaderingsfuncties zijn bepaald aan de hand van eerder genoemde parameters. De resultaten van deze test zijn te vinden in de figuren 1, 2 en 3.



Figuur 1: Plot van een benadering van de functie $\bar{Q}(\cdot, 30)$



Figuur 2: Plot van een benadering van de functie $\bar{Q}(\cdot, 36)$



Figuur 3: Plot van een benadering van de functie $\bar{Q}(\cdot, 40)$

In de figuren 1 en 3 is een afwijking te zien in het punt $n = 1$. Deze afwijking is een gevolg van de manier waarop de functie in R geïmplementeerd is. De implementatie is te vinden in appendix C.1.3. Omdat het toepassen van de regressietechniek op tijdstip $n = 1$ problemen geeft, is er gekozen om direct de continueringswaarde op tijdstip $n = 1$ te bepalen. Dit heeft als gevolg dat het R -programma voor iedere $x \in \chi$ de waarde $\tilde{Q}(x_0, r_0)$ teruggeeft. Deze afwijking geeft echter niet de discrepantie die we zoeken. We zien dan ook geen afwijking in figuur 2. Wanneer we deze discrepantie buiten beschouwing laten,

zien we in alle figuren een benadering van een monotone functie.

Het is mogelijk dat het geschreven R -programma het uitoefenmoment te laat kiest. We testen deze fout op twee manieren. Allereerst kunnen we het optimale uitoefenmoment beïnvloeden door de volatiliteit voldoende klein te maken en de parameter r te laten wisselen van teken. Veronderstel een vast moment t waarvoor geldt dat:

$$r(n) = \begin{cases} -0.06 & \text{als } n \leq t \\ 0.06 & \text{als } n > t \end{cases} . \quad (73)$$

Er geldt nu, wanneer de volatiliteit voldoende klein is, dat t het optimale uitoefenmoment is. Uit de resultaten van deze test (niet genoemd) volgt dat het programma het goede uitoefenmoment kiest aan de hand van de gevonden coëfficiënten. We vinden hier geen afwijkingen.

We bekijken ook de mogelijkheid dat het programma te laat uitoefent bij een volatiliteit zoals in het voorbeeld. Dit is zeer moeilijk te testen, immers is het mogelijk dat de fout afhankelijk is van zowel x als t . Echter proberen we de functie $\tilde{Q}(\cdot, r_n)$ toch te testen op een constante fout ϵ . Veronderstel dat de fout in de gevonden benadering van de vorm:

$$Q_\epsilon(x, r) = Q_H(x, r) + \epsilon \quad (74)$$

is, waarbij Q_H de huidige continueringswaardefunctie en Q_ϵ een verbeterde benaderingsfunctie is. We noteren de gevonden optieprijs onder de huidige continueringswaardefunctie met \bar{Q}_H . De gevonden optieprijs onder de verbeterde benadering wordt gegeven door \bar{Q}_ϵ . Het verschil $\bar{Q}_\epsilon - \bar{Q}_H$ noteren we met \bar{D} , waarbij \bar{Q}_ϵ en \bar{Q}_H gepaard zijn. Middels simulatie vinden we de volgende resultaten:

M_{initieel}	10.000	M	100.000
N	50	ϵ	0.0022
\bar{D}	0.001414	$\sigma_{\bar{D}}$	0.2142

Tabel 6: Resultaten van een gepaarde simulatie. De optieprijs is berekend onder dezelfde gesimuleerde paden. Hierbij zijn gelijke parameters gebruikt als in het voorbeeld.

Veronderstel dat \bar{D} normaal verdeeld is met verwachtingswaarde μ_D en variantie σ_D^2 . We bekijken de nulhypothese $\mu_D = 0$ en voeren een tweezijdige t-test uit met significantie niveau $\alpha = 0.05$. De t-statistiek wordt gegeven door:

$$t = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{\sigma_{\bar{D}}}{\sqrt{M}}} \quad (75)$$

Met behulp van de resultaten uit tabel 6 vinden we dat $t = 2.088$. Ook hier vinden we geen significante afwijkingen.

5.3.3 Het berekenen van de optieprijs

Een derde plek waar het R -programma een fout kan maken, is in het gedeelte waar de optieprijs wordt berekend (zie appendix C.1.4). Veronderstel een verzameling $\{x_{m,n} : n \leq N, m \leq M\}$ realisaties van het proces $\{X_n : n \leq N\}$ en bekende coëfficiënten r_0, \dots, r_{N-1} . Wanneer voor het optimale uitoefenmoment $\tau^* \in T_0$ geldt dat $\tau^* > 0$, volgt dat $Q_0(x_0)$

gelijk is aan de optieprijs (zie paragraaf 3.1). Merk op dat voor het gegeven voorbeeld het optimale uitoefenmoment niet op tijdstip $n = 0$ ligt. Met behulp van de initiële paden en de daarbij behorende coëfficiënten is het mogelijk om de waarde $\tilde{Q}(x_0, r_0)$ te bepalen. Aan de hand van de gevonden waarde $\tilde{Q}(x_0, r_0)$ is het mogelijk om dit deel van het algoritme te controleren. De gevonden resultaten zijn te vinden in de volgende tabel:

N	M	$\tilde{Q}_0(x_0, r_0)$	Gemiddelde	Standard error
20	10000	4.058	4.058	0.016
20	100000	4.087	4.087	0.006
50	10000	4.424	4.424	0.029
50	100000	4.455	4.455	0.009

Tabel 7: Berekende optieprijs onder de parameters uit het voorbeeld.

We zien inderdaad dat de berekende optieprijs gelijk is aan de benaderde continueringswaarde op tijdstip 0. We vinden geen afwijkingen in deze test.

5.3.4 Conclusie met betrekking tot de testresultaten

Naar aanleiding van de resultaten gevonden in paragraaf 5.1 is er besloten het geprogrammeerde R -programma te testen. Aan de hand van deze testen is geprobeerd een oorzaak te vinden voor de geconstateerde discrepanties in de resultaten. De gesimuleerde paden zijn getest op correctheid. Dit is gedaan door te kijken naar de kans dat een bepaalde aandeleprijs op een bepaald moment wordt aangenomen. Bij de benaderingsfunctie is gekeken of deze functie voldoet aan de eigenschappen die horen bij een continueringswaardefunctie. Hierbij is gekeken op welke intervallen de benaderingsfunctie de verwachte eigenschappen vertoont. Ook is de benaderingsfunctie getest op een constante fout. Dit is gedaan door te kijken naar de waarschijnlijkheid van een fout van de vorm: $Q_{\text{optimaal}}(x, r_n) = \tilde{Q}(x, r_n) + \epsilon$. Verder is er gekeken, aan de hand van een bekende verzameling realisaties en bijbehorende continueringswaarden, of de juiste optieprijs benaderd wordt. In zowel de simulatie, regressie en het gedeelte waar de optieprijs berekend wordt zijn geen significante afwijkingen gevonden die de discrepanties met eerdere onderzoeken kunnen verklaren.

Conclusie

In het verslag bekijken we het algoritme, beschreven door Bolia et al. [2004], voor het benaderen van de optieprijs van een Amerikaanse optie. Het verslag laat zien dat de optieprijs kan worden gevonden met een kleine variantie. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de variantie-reductietechniek importance sampling. Met behulp van de optiewaarde-functie kan een theoretische kansmaat worden gevonden, waaronder de optieprijs exact berekend kan worden. Deze kansmaat wordt de variantie-nul kansmaat genoemd. In een iteratief proces proberen we deze kansmaat te benaderen.

Naast het theoretisch kader worden in dit verslag ook de resultaten van eigen simulaties bekeken. De gevonden resultaten worden vervolgens vergeleken met de resultaten beschreven door Bolia et al. [2004]. Wat voornamelijk opvalt zijn de discrepanties tussen aan de ene kant de resultaten beschreven in [Bolia et al., 2004] en [Longstaff & Schwartz, 2001] en aan de andere kant mijn resultaten. De optieprijzen benaderd met behulp van eigen simulaties liggen lager dan de benaderde optieprijzen in de artikelen. Wanneer we importance sampling uitvoeren zien we dat de variantie inderdaad daalt, maar de afwijking in de gevonden prijs niet altijd kleiner wordt. Door middel van een aantal eenvoudige testen is geprobeerd de fout in het geprogrammeerde algoritme te vinden. Er zijn echter geen duidelijke aanwijzingen gevonden waarom het programma een lagere optieprijs genereert dan de optieprijzen beschreven in de artikelen. Binnen het project was het niet mogelijk verder onderzoek te doen naar een mogelijke oorzaak van de discrepanties tussen de gevonden resultaten. Dit als gevolg van de beperkte tijd die voor het onderzoek is vastgesteld.

Binnen de tijd van het project is met behulp van de gevonden resultaten geen oorzaak gevonden voor de discrepanties tussen de resultaten uit eigen simulaties en de resultaten uit eerder gedaan onderzoek.

Literatuur

- Bolia, N., Glasserman, P. & Juneja, S. (2004). Function-approximation-based importance sampling for pricing American options. *Proceedings of the 2004 Winter Simulation Conference*.
- Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo methods in financial engineering*. New York: Springer-Verlag.
- Longstaff, A. & Schwartz, S. (2001). Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach. *The Review of Financial Studies*, 14, 113-147.
- Madras, N. (2002). *Lectures on Monte Carlo methods*. Rhode Island: Providence.
- Rice, J. (2007). *Mathematical statistics and data analysis* (3e dr.). Brooks/Cole Cengage Learning.
- Rosenthal, J. S. (2006). *A first look at rigorous probability theory* (2e dr.). World Scientific Publishing Co.
- Shreve, S. E. (2004a). *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models* (Dl. 11). Springer Science & Business Media.
- Shreve, S. E. (2004b). *Stochastic calculus for finance I: The binomial asset pricing model*. Springer-Verlag.

Appendix A

Algebraïsche uitwerking van de importance dichtheidsfunctie

De uitdrukking voor $f(x, y)\phi_k(y)$ kan worden geschreven als:

$$\begin{aligned} f(x, y)\phi_k(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}y}} \exp\left(-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \left((1 - 2\hat{\sigma}^2\alpha_{1k}) \log^2(y) - (2\hat{\mu}_{n,x} + 2\hat{\sigma}^2\alpha_{2k}) \log(y) + \hat{\mu}_{n,x}^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}y}} \exp\left(-\frac{1 - 2\hat{\sigma}^2\alpha_{1k}}{2\hat{\sigma}^2} \left(\log(y) - \frac{\hat{\mu}_{n,x} + \hat{\sigma}^2\alpha_{2k}}{1 - 2\hat{\sigma}^2\alpha_{1k}}\right)^2\right) \\ &\quad \exp\left(-\frac{1 - 2\hat{\sigma}^2\alpha_{1k}}{2\hat{\sigma}^2} \left(\frac{\hat{\mu}_{n,x}^2}{1 - 2\hat{\sigma}^2\alpha_{1k}} - \left(\frac{\hat{\mu}_{n,x} + \hat{\sigma}^2\alpha_{2k}}{1 - 2\hat{\sigma}^2\alpha_{1k}}\right)^2\right)\right) \end{aligned} \quad (76)$$

Noem nu $\tilde{\mu}_{n,x} = \frac{\hat{\mu}_{n,x} + \hat{\sigma}^2\alpha_{2k}}{1 - 2\hat{\sigma}^2\alpha_{1k}}$ en $\tilde{\sigma} = \frac{2\hat{\sigma}^2}{1 - 2\hat{\sigma}^2\alpha_{1k}}$. Door de bovenstaande uitdrukking te vermenigvuldigen met $\frac{\tilde{\sigma}}{\hat{\sigma}}$ kan deze nu worden geschreven als:

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\hat{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}y}} \exp\left(-\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} (\log(y) - \tilde{\mu}_{n,x}^2)\right) \exp\left(\frac{\tilde{\mu}_{n,x}^2}{2\tilde{\sigma}^2} - \frac{\hat{\mu}_{n,x}^2}{2\hat{\sigma}^2}\right) \quad (77)$$

Hierin herkennen we de dichtheidsfunctie van de lognormale verdeling met parameters $\tilde{\mu}_{n,x}$ en $\tilde{\sigma}^2$. Zij $d_{\mu_{n,x}, \tilde{\sigma}^2}^{(k)}$ deze dichtheidsfunctie. De integraal $\int_{\chi} f(x, y)\phi_k(y)dy$ wordt nu gegeven door:

$$\int_{\chi} f(x, y)\phi_k(y)dy = \frac{\tilde{\sigma}}{\hat{\sigma}} \exp\left(\frac{\tilde{\mu}_{n,x}^2}{2\tilde{\sigma}^2} - \frac{\hat{\mu}_{n,x}^2}{2\hat{\sigma}^2}\right) \int_{\chi} d_{\mu_{n,x}, \tilde{\sigma}^2}^{(k)}(y)dy = \frac{\tilde{\sigma}}{\hat{\sigma}} \exp\left(\frac{\tilde{\mu}_{n,x}^2}{2\tilde{\sigma}^2} - \frac{\hat{\mu}_{n,x}^2}{2\hat{\sigma}^2}\right) \quad (78)$$

Met behulp van de gevonden uitdrukking voor $\int_{\chi} f(x, y)\phi_k(y)dy$ wordt de kansmassafunctie $p_{n,k}$ beschreven door:

$$p_{n,k}(x) = \frac{s_{n+1} \frac{\tilde{\sigma}}{\hat{\sigma}} \exp\left(\frac{\tilde{\mu}_{n,x}^2}{2\tilde{\sigma}^2} - \frac{\hat{\mu}_{n,x}^2}{2\hat{\sigma}^2}\right)}{\sum_{k \leq K} s_{n+1} \frac{\tilde{\sigma}}{\hat{\sigma}} \exp\left(\frac{\tilde{\mu}_{n,x}^2}{2\tilde{\sigma}^2} - \frac{\hat{\mu}_{n,x}^2}{2\hat{\sigma}^2}\right)} \quad (79)$$

De benadering voor \tilde{f}_n is nu de dichtheidsfunctie van een mengsel van niet negatieve lognormale verdelingen.

$$\tilde{f}_n(x, y) = \sum_{k \leq K} p_{n,k}(x) d_{\mu_{n,x}, \tilde{\sigma}^2}^{(k)}(y) \quad (80)$$

Het is nu relatief eenvoudig steekproeven te genereren onder de kansmaat \tilde{P} . Dit kan gedaan worden volgens de methode besproken in paragraaf 4.4.

Appendix B

Tabellen

X_0	σ	T	E.D.M.	Gemiddeld	Standard error
36	0.2	1	4.478	4.472	0.010
36	0.2	2	4.840	4.821	0.012
36	0.4	1	7.101	7.091	0.020
36	0.4	2	8.508	8.488	0.024
40	0.2	1	2.314	2.313	0.009
40	0.2	2	2.885	2.879	0.010
40	0.4	1	5.312	5.308	0.018
40	0.4	2	6.920	6.921	0.022
44	0.2	1	1.110	1.118	0.007
44	0.2	2	1.690	1.675	0.009
44	0.4	1	3.948	3.957	0.017
44	0.4	2	5.647	5.622	0.021

Tabel 8: Resultaten gevonden door Longstaff & Schwartz [2001] voor een Amerikaanse put-optie met 50 uitoefenmomenten per jaar en gegeven parameters. Alle overige parameters zijn gelijk aan de paramters uit het voorbeeld. Ook deze gemiddelden zijn bepaald over 100000 paden. De *E.D.M.*-kolom geeft de optieprijs berekend aan de hand van een eindige-differentiemethode. Details over deze methode zijn terug te vinden in [Longstaff & Schwartz, 2001]. Bolia et al. [2004] veronderstellen deze prijzen als 'werkelijke' optie-prijzen.

x_0	σ	T	Gemiddelde	Standard error
36	0.2	1	4.449	0.009
36	0.2	2	4.831	0.010
36	0.4	1	7.034	0.017
36	0.4	2	8.068	0.018
40	0.2	1	2.263	0.008
40	0.2	2	2.826	0.010
40	0.4	1	5.244	0.016
40	0.4	2	6.532	0.018
44	0.2	1	1.084	0.006
44	0.2	2	1.614	0.008
44	0.4	1	3.863	0.015
44	0.4	2	5.366	0.017

Tabel 9: Resultaten van eigen simulaties voor een Amerikaanse put-optie met 50 uitoefenmogelijkheden per jaar. De overige parameters zijn gelijk aan het voorbeeld. De uitoefenstrategie is bepaald onder 10000 initiële paden. De gemiddelde optieprijs is geëvalueerd onder 100000 paden.

N	n	a	p	\hat{p}	Standard error
10	10	30	0.1249	0.1237	0.0033
10	10	36	0.4248	0.4227	0.0049
10	10	42	0.7333	0.7278	0.0045
10	5	30	0.0585	0.0585	0.0023
10	5	36	0.4497	0.4552	0.0050
10	5	42	0.8626	0.8606	0.0035
10	1	30	0.0000	0.0000	0.0000
10	1	36	1.0000	1.0000	0.0000
10	1	42	1.0000	1.0000	0.0000
20	20	30	0.1292	0.1282	0.0033
20	20	36	0.4227	0.4238	0.0049
20	20	42	0.7244	0.7259	0.0045
20	10	30	0.0677	0.0700	0.0026
20	10	36	0.4466	0.4451	0.0050
20	10	42	0.8449	0.8420	0.0036
20	2	30	0.0000	0.0000	0.0000
20	2	36	0.4822	0.4943	0.0050
20	2	42	0.9997	0.9996	0.0002
30	30	30	0.1305	0.1297	0.0034
30	30	36	0.4221	0.4186	0.0049
30	30	42	0.7215	0.7188	0.0045
30	15	30	0.0706	0.0700	0.0026
30	15	36	0.4457	0.4423	0.0050
30	15	42	0.8393	0.8408	0.0037
30	3	30	0.0002	0.0007	0.0003
30	3	36	0.4794	0.4779	0.0050
30	3	42	0.9983	0.9984	0.0004
40	40	30	0.1312	0.1269	0.0033
40	40	36	0.4217	0.4205	0.0049
40	40	42	0.7201	0.7215	0.0045
40	20	30	0.0721	0.0727	0.0026
40	20	36	0.4452	0.4512	0.0050
40	20	42	0.8366	0.8397	0.0037
40	4	30	0.0004	0.0002	0.0001
40	4	36	0.4782	0.4859	0.0050
40	4	42	0.9971	0.9969	0.0006
50	50	30	0.1316	0.1301	0.0034
50	50	36	0.4215	0.4233	0.0049
50	50	42	0.7192	0.7144	0.0045
50	25	30	0.0729	0.0752	0.0026
50	25	36	0.4449	0.4447	0.0050
50	25	42	0.8350	0.8328	0.0037
50	5	30	0.0005	0.0005	0.0002
50	5	36	0.4774	0.4764	0.0050
50	5	42	0.9962	0.9965	0.0006

Tabel 10: Kanstabel behorende bij 10000 gesimuleerde paden met parameters zoals in het voorbeeld. Hierbij geldt $p = \mathbb{P}(X_n \leq a)$. De achterliggende *R*-code is te vinden in appendix C.3

Appendix C

R-Code

C.1 Optieprij (naïef)

C.1.1 Parameters

```
# N aantal tijdstappen, M aantal gegenereerde initiële paden,  
# Mn aantal paden waaronder de optie wordt geëvalueerd  
# en K het aantal basisfuncties.  
N = 50  
M = 2000  
Mn = 100000  
K = 4  
  
# looptijd T, constant risico-vrij rentepercentage r,  
# volatiliteit sigma.  
T = 1  
r = 0.06  
sigma = 0.2  
  
# Uitoefenprijs Sk en initiële aandeelprijs x0  
Sk = 40  
x0 = 36  
  
# coëfficiënten basisfuncties  
c1 = c(-1,-1,-1,-1)  
c2 = c(0,1,2,3)
```

C.1.2 Simulatiefuncties en opbrengstfuncties

```
# functies voor het simuleren van prijspaden.  
X = function(x){  
  return(exp((r - sigma2/2)*dt + sqrt(dt)*sigma*x))  
}  
GBM.eigen = function(M){  
  X.random = matrix(rnorm(N*M,mean = 0 , sd = 1),ncol = M, N)  
  Xm = x0*apply(apply(X.random,2 , X),2 ,cumprod)  
  Xm = rbind(x0,Xm,deparse.level = 0)  
  return(Xm)  
}  
  
# functies voor het vinden van de uitbetaling, verdiscontering  
# en intrinsieke waarde.  
payoff = function(x){  
  return(pmax(Sk - x, 0))  
}  
verdiscontering = function(ndt){
```

```

    return(exp(-r*ndt))
}
g = function(x,ndt){
    return(exp(-r*ndt)*pmax(Sk - x,0))
}

```

C.1.3 Benadering van de continueringswaardefunctie

```

# Basisfuncties
phi = function(x,k){
    alpha2k = c(0,1,2,3)
    return(exp(-1*(log(x))^2 + alpha2k[k]*log(x)))
}

# Continueringswaardefunctie
Qn = function(x,n,coeff1){
    # Wanneer n > N, is de continueringswaarde gelijk aan 0
    # De coëfficiënt op tijdstip n=1 komt overeen met de
    # continueringswaarde op tijdstip n=1.
    cond1 = n<=N
    cond2 = n==1
    if(cond1){
        if(cond2){
            return(coeff1[1,1])
        }
        else{
            vphi = phi(x,1:K)
            vcoef = coeff1[n,1:K]
            return(sum(vphi * vcoef))
        }
    }
    else{
        return(0)
    }
}

# Geeft een vector van lengte M,
# met de continueringswaarden van de M paden op tijdstip n.
Qn.vector = function(X,n,coeff1){
    N = nrow(coeff1)
    cond1 = n<=N
    cond2 = n==1
    if(cond1){
        if(cond2){
            return(rep(coeff1[1,1],length.out = length(X)))
        }
        else{
            vphi = sapply(FUN = phi, X = X, k = 1:K)
            Q = coeff1[n,] * vphi
            return(apply(FUN = sum, 2, X = Q))
        }
    }
}

```



```

    }
  }
  else{
    return(rep(0, length.out = length(X)))
  }
}

# Bepalen van de coëfficiënten die horen bij
# de continueringswaardefunctie.
coef.Qn = function(Xm){
  # t is een vector met tijdstippen
  # coeff is een N bij M matrix met coëfficiënten voor
  # de continueringswaardefunctie
  # taumn is een N bij M matrix met optimale uitoefenmomenten tau
  # voor pad m en tijdstip n.
  # gtaumn is een N bij M matrix met verdisconteerde uitbetalingen
  # behorende bij uitoefenmoment tau[n,m]
  t = seq(0,T,T/N)
  coeff = matrix(data = 0, ncol = K, nrow = N)
  taumn = matrix(data = N+1, ncol = M, nrow = N)
  gtaumn = matrix(data = 0, ncol = M, nrow = N)

  # Bepalen van de verdisconteerde uitbetaling op ieder tijdstip, voor
  # ieder pad.
  gex = matrix(ncol = M, nrow = N + 1)
  gex = apply(FUN = payoff, 1, X = Xm)
  verdis = diag(sapply(FUN = verdiscontering, X = t))
  gex = t(gex*%verdis)

  # Bepalen van de coëfficiënten r_N, door gebruik te maken van de
  # kleinste-kwadratenmethode.
  realisatie.phi.N = t(sapply(Xm[N,], phi, 1:K))
  gtaumn[N,] = gex[N+1,]
  model.Q.RNmineen = lm(gtaumn[N,] ~ 0 + realisatie.phi.N)
  rn = coef(model.Q.RNmineen)
  coeff[N,] = rn

  for(n in (N-1):1){
    for(m in 1:M){
      # Voor ieder pad m en ieder moment n het optimale uitoefenmoment
      # bepalen.
      taumn[n,m] = ifelse(gex[n+1,m] >= Qn(Xm[n+1,m], n+1, coeff)
        , n+1, taumn[n+1,m])
      gtaumn[n,m] = gex[taumn[n,m],m]
    }
    if(n>1){
      # Bepalen van coëfficiënten r_n aan de hand van het
      # optimale uitoefenmoment tau[n,m].
      realisatie.phi.n = t(sapply(Xm[n,], phi, 1:K))
      model.Q.Rn = lm(gtaumn[n,] ~ 0 + realisatie.phi.n)
    }
  }
}

```

```

    rn = coef(model.Q.Rn)
    coeff[n,] = rn
  }
  # Op tijdstip n=1, is er geen kleinste-kwadratenregressie
  # mogelijk vanwege  $x_0 = 36$  voor ieder pad  $m$ .  $Q_0(x_0)$  is
  # gelijk aan de gemiddelde waarde van de verdisconteerde
  # opbrengsten van  $g_{\tau}[1,m]$ . We nemen dit als alternatieve
  # coëfficiënt.
  else{
    coeff[1,1] = mean(gtaumn[1,])
  }
}
return(coeff)
}

```

C.1.4 Optieprijs (naïef)

```

option.price = function(Xm,coeff1){
  # t is een vector met tijdstippen
  # extime is een vector van lengte Mn, met voor ieder
  # m-de pad het optimale uitoefenmoment.
  # Xextime is een vector van lengte Mn
  # met de m-de realisatie van de prijs van het onderliggende
  # aandeel op tijdstip extime.
  t = seq(0,T,T/N)
  extime = vector(mode = "numeric", length = Mn)
  Xextime = vector(mode = "double", length = Mn)

  # Bepalen van de verdisconteerde uitbetaling op ieder tijdstip, voor
  # ieder pad.
  gex = matrix(ncol = Mn, nrow = N + 1)
  gex = apply(FUN = payoff, 1, X = Xm)
  verdis = diag(sapply(FUN = verdiscontering, X = t))
  gex = t(gex%*%verdis)

  # Bepalen van een benadering voor de continueringswaarden voor ieder
  # tijdstip n op pad m.
  Q = matrix(ncol = Mn, nrow = (N+1))

  for(n in 1:(N+1)){
    Q[n,] = Qn.vector(Xm[n,],n,coeff1)
  }

  # cond is een N + 1 bij M matrix met voor ieder tijdstip n op
  # pad m TRUE als de intrinsieke waarde groter of gelijk is
  # aan de continueringswaarde
  cond = ifelse(gex >= Q, TRUE, FALSE)

  # Bepalen van de optimale uitoefentijdstippen en de bijbehorende

```

```

# aandeelprijs.
for(m in 1:Mn){
  for(n in 1:(N+1)){
    if(cond[n,m]){
      extime[m] = n
      Xextime[m] = Xm[n,m]
      break
    }
  }
}

# Bepalen van de gemiddelde verdisconteerde optieopbrengst op het
# optimale uitoefenmoment.
gextime = mapply(g,ndt = t[extime], x = Xextime)
mean1 = mean(gextime)
SE = sd(gextime)/sqrt(Mn)

optionprice = c(mean1,SE)
return(optionprice)
}

```

C.2 Optieprijs (importance sampling)

C.2.1 Parameters

```

sigmahat =sqrt(dt*sigma^2)

muhat = function(x){
  p = (r-sigma^2/2)*dt + log(x)
  return(p)
}

mut = function(x,k){
  p = (muhat(x)+ sigmahat^2*c2[k])/(1-2*sigmahat^2*c1[k])
  return(p)
}

sigmat = function(k){
  p = sqrt(sigmahat^2/(1-2*sigmahat^2*c1[k]))
  return(p)
}

```

C.2.2 Functies ten behoeve van importance sampling

```

# Dichtheidsfunctie die hoort bij  $X_n$ 
fxy = function(x,y){
  return(dlnorm(y, mean = muhat(x), sd = sigmahat))
}

```

```
#####
```

```

# Bepalen van de importance dichtheid #
#####

# Bepalen van de beta_n(k), waarbij voor beta_n(k) geldt:
# p_{n,k}(x) = beta_n(k)/(sum(beta_n(k)))
beta = function(x,n,k,coeff2){
  b = coeff2[n+1,k]*(sigmat(k)/sigmahat)*exp((mut(x,k)^2/
    (2*sigmat(k)^2))-(muhat(x)^2/(2*sigmahat^2)))
  return(b)
}

# Bepalen van p_{n,k}(x)
# Geeft een vector terug wanneer de input (x,k of n) een vector is,
# anders een los getal.
pster = function(x,n,k,coeff2){
  p = sapply(1:K,beta,x = x, n = n, coeff2 = coeff2)

  if(is.null(dim(p))){
    return(beta(x,n,k,coeff2)/sum(p))
  }
  else{
    return(beta(x,n,k,coeff2 / rowSums(p)))
  }
}

# Dichtheidsfunctie van een lognormale verdeling met parameters
# mu-tilde en sigma-tilde^2
dl = function(x,y,k){
  return(dlnorm(y,mean = mut(x,k),sd = sigmat(k), log = FALSE))
}

# Importance dichtheid. Geeft een vector terug bij input vector (x,y of n)
fster = function(x,y,n,coeff2){
  f = sapply(1:K,pster,x = x, n = n, coeff2 = coeff2) *
  sapply(1:K,dl,x = x, y = y)
  if(is.null(dim(f))){
    return(sum(f))
  }
  else{
    return(rowSums(f))
  }
}

#####
# Importance sampling #
#####

# Steekproef nemen uit de importance verdeling.
importance.sampling = function(x,n,coeff2){

```

```

kv = 1:K
probv = sapply(1:K, pster , x = x, n = n, coeff2 = coeff2)

samplek = sample(kv, size = 1, prob = probv)
return(rlnorm(1, mean = mut(x, samplek), sd = sigmat(samplek)))
}

# Simuleren van M paden onder importance sampling.
importance.sampling.Mpad = function(x0,M,coeff2){
  XM = matrix(ncol = M, nrow = N+1)
  XM[1,] = rep(x0, length = M)
  for(n in 1:N){
    XM[n+1,] = sapply(XM[n,], importance.sampling, n = n, coeff2 = coeff2)
  }
  return(XM)
}

# De likelihood ratio tot tijdstip n
l = function(n, X, coeff2){
  lhood = fxy(X[n-1],X[n])/fster(X[n-1],X[n],n-1, coeff2)
  return(lhood)
}
ln = function(n,X,coeff2){
  if(n == 1){
    return(1)
  }
  else{
    lt = ifelse(n>2,prod(sapply(2:n,l,X,coeff2)),l(2,X,coeff2) )
    return(lt)
  }
}

# De likelihood ratio vanaf tijdstip n1 tot en met tijdstip n2
Lratio = function(n1,n2,coeff2,X){
  return(ifelse(n1 == n2, l(n1,X,coeff2),ln(n2,X,coeff2)
  /ln(n1,X,coeff2)))
}

# Input een vector, geeft de likelihood ratio behorende
# bij de totale vector.
LM = function(X, coeff2){
  l = length(X) - 1
  n = seq(1,l)
  X1 = X[1:l]
  Y1 = X[2:(l+1)]
  fxy1 = mapply(FUN = fxy, x = X1, y = Y1)
  fster1 = mapply(FUN = fster, x = X1, y = Y1, n = n, MoreArgs =
list(coeff2))
  L = fxy1/fster1
  return(cumprod(L))
}

```

```

}

# Geeft een vector met likelihood ratio 's behorende bij een matrix.
# De likelihood ratio 's zijn tussen tijdstip n1 en tijdstip n2
LratioM = function(n1, n2, Xm, coeff2){
  M = ncol(Xm)
  x = rep(1, length.out = M)
  Xm12 = Xm[n1:n2,]
  L = apply(Xm12, 2, LM, coeff2)
  if(n1 == 1){
    L = rbind(x,L,deparse.level = 0)
  }
  return(L)
}

```

C.2.3 Benadering optiewaardefunctie

```

coef.Jn = function(Xm, coeff){
  # t is een vector met tijdstippen
  # coeff2 is een N+1 bij M matrix met coëfficiënten voor
  # de optiewaardefunctie
  # taumnmin1 is een N+1 bij M matrix met optimale uitoefenmomenten
  # tau_{n-1} voor pad m en tijdstip n.
  # gtaumnmin1 is een N+1 bij M matrix met verdisconteerde uitbetalingen
  # behorende bij uitoefenmoment tau[n-1,m]
  coeff2 = matrix(data = 0, ncol = K, nrow = N+1)
  taumnmin1 = matrix(data = N+1, ncol = M, nrow = N+1)
  gtaumnmin1 = matrix(data = 0, ncol = M, nrow = N+1)
  t = seq(0, T, T/N)

  # (zie continueringswaarde/optieprijs)
  gex = matrix(ncol = M, nrow = N + 1)
  gex = apply(FUN = payoff, 1, X = Xm)
  verdis = diag(sapply(FUN = verdiscontering, X = t))
  gex = t(gex%%verdis)
  Q = matrix(ncol = M, nrow = (N+1))
  for(n in 1:(N+1)){
    Q[n,] = Qn.vector(Xm[n,], n, coeff1)
  }
  cond = ifelse(gex >= Q, TRUE, FALSE)

  realisatie.phi.N = t(sapply(Xm[N+1,], phi, 1:K))
  gtaumnmin1[N+1,] = gex[N+1,]
  model.J.sNplus1 = nnls(0 + realisatie.phi.N, gtaumnmin1[N+1,])
  sn = coef(model.J.sNplus1)
  coeff2[N+1,] = sn
}

```

```

for(i in 0:(N-1)){
  n = N - i
  for(m in 1:M){

    taumnmin1[n,m] = ifelse(cond[n,m], n, taumnmin1[n+1,m])
    gtaumnmin1[n,m] = gex[taumnmin1[n,m],m]
  }
  if(n>1){
    realisatie.phi.n = t(sapply(Xm[n,], phi, 1:K))
    model.J.sn = nnls( 0 + realisatie.phi.n, gtaumnmin1[n,])
    sn = coef(model.J.sn)
    coeff2[n,] = sn
  }
  else{
    coeff2[1,1] = mean(gtaumnmin1[1,])
  }
}
return(coeff2)
}

```

C.2.4 Benadering continueringswaardefunctie (Importance sampling)

```

coef.Qn.importance = function(Xm, coeff2){
  # (Zie continueringswaarde naïef)
  t = seq(0, T, T/N)
  coeff3 = matrix(data = 0, ncol = K, nrow = N)
  taumn = matrix(data = N+1, ncol = M, nrow = N)
  gtaumn = matrix(data = 0, ncol = M, nrow = N)

  gex = matrix(ncol = M, nrow = N + 1)
  gex = apply(FUN = payoff, 1, X = Xm)
  verdis = diag(sapply(FUN = verdiscontering, X = t))
  gex = t(gex%*%verdis)

  cond1 = function(n,m){
    return(gex[n+1,m]>=Qn(Xm[n+1,m], n+1, coeff3))
  }
  cond2 = function(n){
    return(n>1)
  }

  # Bepalen van de coëfficiënten van de continueringswaarde-
  # functie op tijdstip N-1 onder importance sampling
  # Hierbij wordt gewogen kleinste-kwadratenregressie
  # gebruikt met als weegfactor de likelihood ratio
  realisatie.phi.N = t(sapply(Xm[N,], phi, 1:K))
  gtaumn[N,] = gex[N+1,] * LratioM(N, N+1, Xm, coeff2)
  model.Q.RNmineen = lm(gtaumn[N,] ~ 0 + realisatie.phi.N,

```

```

weights = LratioM(1,N,Xm,coeff2)[N,])
rn = coef(model.Q.RNmineen)
coeff3 [N,] = rn

for(n in (N-1):1){
  for(m in 1:M){
    # Bepalen van het optimale uitoefenmoment en de daarbij behorende
    # verdisconteerde uitbetaling.
    taumn[n,m] = ifelse(cond1(n,m),n+1,taumn[n+1,m])
    gtaumn[n,m] = gex[taumn[n,m],m] * Lratio(n,taumn[n,m],coeff2,Xm[,m])
  }
  if(cond2(n)){
    # Berekenen van de coëfficiënten op tijdstip n. Hierbij
    # wordt gebruik gemaakt van de likelihood ratio tussen
    # tijdstip 1 en n als weegfactor (ter compensatie
    # van afwijking door importance sampling).
    realisatie.phi.n = t(sapply(Xm[n,],phi,1:K))
    model.Q.Rn = lm(gtaumn[n,]~ 0 + realisatie.phi.n,
weights = LratioM(1,n,Xm,coeff2)[n,])
    rn = coef(model.Q.Rn)
    coeff3 [n,] = rn
  }
  else{
    # Op tijdstip n=1 is er geen kleinste-kwadratenregressie mogelijk
    # vanwege x0 = 36 voor ieder pad m.
    coeff3 [1,1] = mean(gtaumn[1,])
  }
}
return(coeff3)
}

```

C.2.5 Benadering optiewaardefunctie (importance sampling)

```

coef.Jn.importance = function(Xm,coeff3,coeff2){
  # (Zie continueringswaardefunctie (importance sampling))
  t = seq(0,T,T/N)
  coeff4 = matrix(data = 0, ncol = K, nrow = N+1)
  taumnmin1 = matrix(data = N+1, ncol = M,nrow = N+1)
  gtaumnmin1 = matrix(data = 0, ncol = M, nrow = N+1)

  gex = matrix(ncol = M, nrow = N + 1)
  gex = apply(FUN = payoff, 1, X = Xm)
  verdis = diag(sapply(FUN = verdiscontering, X = t))
  gex = t(gex%*%verdis)

  # Omdat de nnls functie geen gewogen algoritme bevat, is
  # het noodzakelijk de matrixvergelijking  $Y = Xb + \text{epsilon}$ 
  # om te schrijven naar de matrixvergelijking
  #  $Y' = X'b + \text{epsilon}'$ , waarbij  $Y'$  en  $X'$  de gewogen matrices

```



```

# zijn die horen bij de matrices X en Y en epsilon ' de
# de nieuwe foutterm is.
y = LratioM(1,N+1,Xm, coeff2)[N+1,]
Weights = sqrt(y)
realisatie.phi.N = Weights * t(sapply(Xm[N+1,], phi, 1:K))
gtaumnmin1[N+1,] = gex[N+1,]
model.J.sNplus1 = nnls(0 + realisatie.phi.N, Weights *
gtaumnmin1[N+1,])
sn = coef(model.J.sNplus1)
coeff4[N+1,] = sn

for(i in 0:(N-1)){
  n = N - i
  for(m in 1:M){
    if(gex[n,m]>=Qn(Xm[n,m], n, coeff3)){
      taumnmin1[n,m] = n
    }
    else{
      taumnmin1[n,m] = taumnmin1[n+1,m]
    }
    gtaumnmin1[n,m] = gex[taumnmin1[n,m],m]*
    Lratio(n, taumnmin1[n,m], coeff2, Xm[,m])
  }
  if(n>1){
    y = LratioM(1,n,Xm, coeff2)[N+1]
    Weights = sqrt(y)
    realisatie.phi.n = Weights * t(sapply(Xm[n,], phi, 1:K))
    model.J.sn = nnls(0 + realisatie.phi.n, Weights * gtaumnmin1[n,])
    sn = coef(model.J.sn)
    coeff4[n,] = sn
  }
  else{
    coeff4[1,1] = mean(gtaumnmin1[1,])
  }
}
return(coeff4)
}

```

C.2.6 Optieprijs (importance sampling)

```

option.price.importance = function(Xm.is, coeff1, coeff2){
  M.is = ncol(Xm.is)
  t = seq(0,T,T/N)
  extime = NA
  gextime = 0
  for(m in 1:M.is){
    for(n in 1:(N+1)){
      if(g(Xm.is[n,m], ndt = t[n])>= Qn(Xm.is[n,m], n, coeff1)){

```

```

# De gevonden verdisconteerde opbrengst dient vermenigvuldigd
# te worden met de likelihood ratio ter compensatie van de
# afwijking door importance sampling.
extime[m] = n
gextime[m] = g(Xm.is[extime[m],m],ndt =
t[extime[m]]) * ln(n,Xm.is[,m],coeff2)
break
}
}
}
mean1 = mean(gextime)
SE = sd(gextime)/sqrt(M.is)

optionprice = c(mean1,SE)
return(optionprice)
}

```

C.3 Testfuncties

Benadering van de kans $P(X_n \leq a)$ over M GBM paden.

```

prob.estimator = function(X,n,a){
  aantal = 0

  for(m in 1:M){
    if(X[n,m]<= a){
      aantal = aantal + 1
    }
  }
  return(aantal/M)
}

```

Standard error van de benadering.

```

se.phat = function(X,n ,x){
  sephat = sqrt((prob.estimator(X,n,x)*(1-prob.estimator(X,n,x)))/(M-1))
  return(sephat)
}

```

'Exacte' waarde $P(X_n \leq a)$

```

prob.Xn = function(x,n){
  mu = (r - sigma^2/2)*dt * n + log(x0)
  sigmaster = sigmahat(N) * sqrt(n)
  return(plnorm(x, mean = mu, sd = sigmaster))
}

```