Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Topologische tegenvoorbeelden

(Engelse titel: Topological Counterexamples)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

MAAIKE VAN DEN BERG

Delft, Nederland
19 augustus 2020

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

"Topologische tegenvoorbeelden"
(Engelse titel: "Topological Counterexamples")

MAAIKE VAN DEN BERG

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr. K.P. Hart

Overige commissieleden

Dr. J.A.M. de Groot

19 augustus 2020 Delft

Samenvatting

In dit verslag bekijken we zes topologische tegenvoorbeelden. Eerst bestuderen we de topologie van Appert. Deze topologie is gedefinieerd op een aftelbare verzameling, maar heeft overaftelbaar veel open verzamelingen. In de ruimte van Appert zijn de triviale rijtjes de enige rijtjes die convergeren. De ruimte is separabel, maar voldoet niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma.
Het is bekend dat elke aftelbare reguliere ruimte normaal is en dus 'veel' continue functies naar het eenheidsinterval heeft. Daarom is een aftelbare reguliere ruimte niet samenhangend. Dit geldt echter niet voor aftelbare Hausdorff ruimten. We bestuderen een ruimte die aftelbaar Hausdorff is én samenhangend. Deze ruimte heet Gustin's rijruimte.
Daarna bekijken we een andere samenhangende ruimte: de topologische sinus-kromme. Deze is niet compact, maar we kunnen de ruimte uitbreiden en er een compacte ruimte van maken. We zien in dit hoofdstuk dat niet elke kromme padsamenhangend is. Dus samenhang impliceert niet altijd padsamenhang.
De vierde ruimte die we bestuderen is Van Douwen's ruimte. Deze is regulier en T_1. Elke continue reëelwaardige functie in deze ruimte is constant.
Verder bekijken we een overaftelbaar product van normale ruimten, waarvan de productruimte zelf niet normaal is. Of het product separabel is of niet, hangt af van de 'grootte' van het product.
Tot slot nog een productruimte: de ruimte van Helly. Dit product is wel normaal, maar bevat een niet-normale deelruimte. We zullen namelijk zien dat de ruimte compact Hausdorff is en een deelruimte heeft die homeomorf is met de Sorgenfreylijn. De ruimte voldoet aan het eerste maar niet aan tweede aftelbaarheidsaxioma. De ruimte is wel separabel.

Inhoudsopgave

1 | Inleiding

Dit verslag is onderdeel van het bacheloreindproject. Ik heb gekozen om een literatuurstudie naar topologische tegenvoorbeelden te doen. Het bekijken van voorbeelden is erg leerzaam. Het helpt om begrippen en stellingen beter te begrijpen. Bovendien worden voorbeelden gebruikt om te onderzoeken of X direct uit Y volgt. Als er een voorbeeld is dat eigenschap Y heeft, maar niet eigenschap X, dan wordt dit voorbeeld een tegenvoorbeeld genoemd. De bewering Y impliceert X is met zo'n voorbeeld meteen weerlegd.
Het uitpluizen van voorbeelden, lijkt voor mij op een soort puzzel. Vaak duurt het een tijdje voor ik het voorbeeld helemaal begrijp en de puzzelstukjes op hun plaats vallen. Dat vind ik erg leuk aan dit onderwerp. Ik vind het daarom ook niet erg dat sommige van deze voorbeelden niet in het dagelijkse leven voorkomen.
De voorbeelden in dit verslag zijn, behalve Van Douwen's ruimte, allemaal terug te vinden in het boek *Counterexamples in Topology* [11]. Het voorbeeld bedacht door Van Douwen is in 1972 verschenen in *Nieuw Archief voor Wiskunde* [2]. Eric van Douwen is in januari 1972 afgestudeerd aan de TH Delft. Hij heeft de ruimte beschreven in zijn afstudeerverslag *Een kondensatieproces in de topologie.*
Niet alle wiskundigen gebruiken dezelfde termen en definities voor bepaalde eigenschappen. Daarom is er een begrippenlijst toegevoegd, deze is te vinden in de bijlage. In deze begrippenlijst staan ook een aantal begrippen die niet in de cursus topologie zijn behandeld. Daarnaast bevat de bijlage ook een lijst met belangrijke stellingen die gebruikt worden in dit verslag.

2 | Topologie van Appert

Dit hoofdstuk gaat over de topologie van Appert. Antoine Appert beschreef deze topologie in 1934 in zijn proefschrift [1]. Hij was geïnspireerd door Urysohn, die dezelfde topologie op een andere wijze beschreef in [14]. Rond 1925 beschreef Urysohn namelijk een topologie die bepaald werd door zogenaamde 'snel stijgende' rijtjes, deze komen overeen met gesloten verzamelingen in de topologie van Appert.

De topologie van Appert is gedefinieerd op een aftelbare verzameling, maar heeft overaftelbaar veel open verzamelingen. We zullen een aantal opvallende eigenschappen van deze ruimte bestuderen. De ruimte is bijvoorbeeld separabel, maar niet perfect separabel oftewel de ruimte voldoet niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma. Een andere opvallende eigenschap die we zullen bestuderen, is dat de topologie geen niet-triviale convergente rijtjes heeft.

De topologie van Appert is gedefinieerd op de verzameling $\mathbb{Z}^+$ van positieve gehele getallen. De intuïtie achter de topologie $\mathcal{T}$ is dat deze bestaat uit deelverzamelingen van $O \subseteq \mathbb{Z}^+$ waarvoor geldt dat $1 \notin O$, of $1 \in O$ en O bevat in de limiet ongeveer even veel getallen als $\mathbb{Z}^+$. Om dit op een elegante (en nette) wiskundige manier te formuleren, introduceren we eerst een nieuwe notatie. Het aantal getallen in $E \subseteq \mathbb{Z}^+$ die kleiner of gelijk zijn aan een zekere $n \in \mathbb{N}$, noteren we met $N(n, E)$. Ofwel $N(n, E) = |\{e \in E : e \leq n\}|$. Nu kunnen we de open verzamelingen netjes als volgt weergeven:

$$O \in \mathcal{T} \iff \begin{cases} 1 \notin O \\ 1 \in O \quad \text{en} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N(n, O)}{n} = 1 \end{cases}$$

Voorbeeld 2.1. *Voor elke $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ is $\{n\}$ open.*

Voorbeeld 2.2. *De verzameling $\mathbb{Z}^+ \setminus \{1, 2, ..., 13\}$ is open.*

We zullen nu laten zien dat de collectie $\mathcal{T}$ inderdaad een topologie definieert op $\mathbb{Z}^+$:

1. Merk op dat $1 \notin \emptyset$, dus $\emptyset$ is open. Ook $\mathbb{Z}^+$ is open, want $1 \in \mathbb{Z}^+$ en $N(n, \mathbb{Z}^+) = n$ voor elke n.

2. Stel $O_1, O_2, ..., O_k \in \mathcal{T}$. Dan kunnen we twee gevallen onderscheiden:

   (a) Als er een $i \in \{1, 2, ..., k\}$ is zodat $1 \notin O_i$ dan $1 \notin \bigcap_{j=1}^{k} O_j$. Dus deze eindige doorsnede van open verzamelingen is open.

   (b) In het tweede geval is $1 \in O_i$ voor alle $i \in \{1, 2, ..., k\}$. We bewijzen voor $k = 2$ dat de doorsnede open is, dan volgt met inductie dat ook voor willekeurige k de doorsnede open is.
   Er geldt $N(n, O_1 \cap O_2) = n - N(n, O_1^c \cup O_2^c)$ en $N(n, O_1^c \cup O_2^c) \leq N(n, O_1^c) + N(n, O_2^c)$.
   Dus $N(n, O_1 \cap O_2) \geq n - N(n, O_1^c) - N(n, O_2^c)$.
   Voor $i = 1, 2$ is $\lim_{n\to\infty} N(n, O_i^c)/n = 0$. Ook is $\lim_{n\to\infty} N(n, O_1 \cap O_2)/n \leq 1$.
   Dus uit de insluitstelling volgt dat $\lim_{n\to\infty} N(n, O_1 \cap O_2)/n = 1$.

3. Laat $O_i \in \mathcal{T}$ voor elke $i \in I$. We onderscheiden twee gevallen:
   (a) Als $1 \notin O_i$ voor alle $i \in I$. Dan $1 \notin \bigcup_{i \in I} O_i$ en dus is de vereniging open.
   (b) Als $1 \in O_j$ voor een $j \in I$. Dan is $n = N(n, \mathbb{Z}^+) \geq N(n, \bigcup_{i \in I} O_i) \geq N(n, O_j)$. Er geldt dat $\lim_{n \to \infty} N(n, O_j)/n = 1$, omdat O_j open is. Dus uit de insluitstelling volgt dat $\lim_{n \to \infty} N(n, \bigcup_{i \in I} O_i)/n = 1$

Een verzameling C is daarom gesloten als $1 \in C$ of als $1 \notin C$ en $\lim_{n \to \infty} N(n, C)/n = 0$.

2.1 Scheidingseigenschappen

De Appert topologie is perfect normaal, wat betekent dat de topologie normaal is en elke gesloten deelverzameling te schrijven is als de doorsnede van aftelbaar veel open verzamelingen. Eerst zullen we bewijzen dat de ruimte Hausdorff is, daaruit volgt meteen dat deze ook T_1 is. Zij $k, m \in \mathbb{Z}^+$ en $k < m$. Dan zijn de verzamelingen $\mathbb{Z}^+ \setminus \{m\}$ en $\{m\}$ open disjuncte verzamelingen die respectievelijke k en m bevatten. Merk op dat $m \neq 1$, want $m > k \geq 1$. Dus $\{m\}$ is inderdaad open, omdat 1 er niet in zit. Terwijl $\mathbb{Z}^+ \setminus \{m\}$ open is, omdat 1 er in zit en $\lim_{n \to \infty} \frac{N(n, \mathbb{Z}^+ \setminus \{m\})}{n} = 1$.
Nu zullen we bewijzen dat Appert's topologie T_4 is. Laat $A, B \subseteq \mathbb{Z}^+$ disjuncte, gesloten verzamelingen zijn.

1. Als $1 \notin A$ en $1 \notin B$, dan zijn A en B open. Dit zijn dus de disjuncte open verzamelingen die we zoeken.

2. Als $1 \in A \cup B$, kunnen we zonder beperking der algemeenheid aannemen dat $1 \in A$ en $1 \notin B$. Herinner dat A en B disjunct zijn. De verzameling B is open, want $1 \notin B$. Maar ook $\mathbb{Z}^+ \setminus B$ is open, omdat B gesloten is. Dus de disjuncte open verzamelingen $\mathbb{Z}^+ \setminus B$ en B bevatten respectievelijk A en B.

We hebben aangetoond dat de topologie van Appert normaal is. Nu rest ons te bewijzen dat elke gesloten deelverzameling van $\mathbb{Z}^+$ te schrijven is als de doorsnede van aftelbaar veel open deelverzamelingen. Stel $F \subseteq \mathbb{Z}^+$ is gesloten. Als $1 \notin F$, dan is F open. Als $1 \in F$, dan kunnen we F als volgt scrhijven als de doorsnede van open verzamelingen: $F = \bigcap_{i \in F^c} \mathbb{Z}^+ \setminus \{i\}$. Dus de topologie van Appert is perfect normaal.

2.2 Compactheid

De topologie van Appert is Lindelöf, oftewel elke open overdekking heeft een aftelbare deeloverdekking. Dit is makkelijk in te zien: als $\mathcal{F}$ een open overdekking is van $\mathbb{Z}^+$, dan is er voor elke $n \in \mathbb{Z}^+$ een F_n met $n \in F_n$, dus $\{F_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ is een aftelbare deeloverdekking.
Voor elke $n \in \mathbb{Z}^+$ is de verzameling $\{n\}$ compact. Immers, als $\mathcal{F}_n$ een open overdekking is van $\{n\}$, dan is er een $F_n \in \mathcal{F}_n$ met $n \in F_n$. Dus $\mathcal{G}_n = \{F_n\}$ is een eindige deeloverdekking van $\{n\}$. Hieruit volgt dat $\mathbb{Z}^+$ de vereniging is van aftelbaar veel compacte verzamelingen. Als een topologische ruimte de vereniging is van aftelbaar veel compacte verzamelingen, heet deze σ-compact. Dus de topologie van Appert is σ-compact.

Appert's topologie is niet lokaal compact en daarom niet compact. We hebben net gezien dat voor elke n de verzameling $\{n\}$ compact is. Deze verzameling is open als $n > 1$. Het moet dus misgaan voor $n = 1$. We zullen nu bewijzen dat de ruimte niet lokaal compact is, omdat het punt 1 geen compacte omgeving heeft. Neem aan dat U_1 een compacte omgeving is van 1. We zullen laten zien dat deze aanname tot tegenspraak leidt. Er is een open omgeving $U \subseteq U_1$ van 1. De aftelbare verzameling $U \subseteq \mathbb{Z}^+$ bevat oneindig veel punten, omdat U open is. Schrijf $U = \{u_0, u_1, u_2, ...\}$ met $1 = u_0 < u_1 < u_2 < \cdots$. Definieer $V = U \setminus \{u_{2^i} : i = 0, 1, 2, ...\}$.

Dan is $\lim_{n\to\infty} \frac{N(n, V)}{n} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{N(n, U) - \lfloor \log_2(n) \rfloor}{n} = 1.$

Dus V is een open omgeving van 1. Neem de open overdekking $\mathcal{F} = \{V\} \cup \{\{i\} : i \in U \setminus \{1\}\}$. Zij $\mathcal{G}$ een eindige deeloverdekking van U. Dan is in ieder geval $V \in \mathcal{G}$ en zijn er eindig veel $\{i\} \in \mathcal{G}$. Hieruit volgt dat de open overdekking eindig veel punten uit $U \setminus V$ bevat. We weten echter dat $U \setminus V$ oneindig is. Uit deze tegenspraak volgt dat er geen compacte omgeving van het punt 1 bestaat. De ruimte is dus niet lokaal compact.

Ten slotte zullen we laten zien dat de ruimte van Appert niet aftelbaar compact is. Een T_1-ruimte is aftelbaar compact als elke oneindige verzameling een verdichtingspunt heeft. In de ruimte van Appert heeft de verzameling $J = \{2^n : n \in \mathbb{Z}_{>1}\}$ geen verdichtingspunt. Eerst laten we zien dat elke $p \neq 1$ geen verdichtingspunt is van J. Zij $p \in \mathbb{Z}_{>1}$, dan is de open omgeving $\{p\}$ van p zó dat $\{p\} \cap J \setminus \{p\} = \emptyset$. Nu zullen we laten zien dat het punt 1 geen verdichtingpunt is. De verzameling $\mathbb{Z}^+ \setminus J$ open, want $1 \in \mathbb{Z}^+ \setminus J$ én

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n, \mathbb{Z}^+ \setminus J)}{n} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{N(n, J)}{n} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor \log_2(n) \rfloor - 1}{n} = 1.$$

De verzameling J is oneindig en heeft geen verdichtingspunt, dus de topologie van Appert is niet aftelbaar compact.

2.3 Aftelbaarheidsaxioma's

De topologie van Appert voldoet niet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma, want er is geen aftelbare lokale basis voor het punt 1. Dit gaan we laten zien met behulp van tegenspraak. Neem aan dat zo'n basis wel bestaat en noem deze basis $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$. Omdat $1 \in B_n$ en $B_n \in \mathcal{T}$, is B_n oneindig voor elke n. Dus voor elke n is er een $x_n \in B_n$ met $x_n > 10^n$. Neem nu $O_1 = \mathbb{Z}^+ \setminus \{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$. Dit is een open omgeving van 1, omdat $x_n > 1$ voor elke n en

$$1 \geq \lim_{n\to\infty} \frac{N(n, O_1)}{n} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{N(n, \{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\})}{n} \geq 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor \log_{10}(n) \rfloor}{n} = 1.$$

Maar $B_n \nsubseteq O_1$ voor elke n en dus is $\mathcal{B}$ geen lokale basis voor 1. Tegenspraak.
Hieruit volgt dat deze topologie ook niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet. Maar de ruimte is wel separabel, omdat de verzameling $\mathbb{Z}^+$ aftelbaar is. Neem bijvoorbeeld de verzameling $\mathbb{Z}_{>1}$, deze is dicht in $\mathbb{Z}^+$ en aftelbaar. De verzameling $\mathbb{Z}_{>1}$ is immers niet gesloten, dus moet zijn afsluiting gelijk zijn aan $\mathbb{Z}^+$.

2.4 Samenhang

Een ruimte is extreem onsamenhangend als de afsluiting van elke open deelverzameling open is. De topologie van Appert is niet extreem onsamenhangend, want de afsluiting van de

verzameling even getallen is niet open. Laat E de verzameling van alle even getallen zijn. We zullen laten zien dat $\overline{E} = \{1\} \cup E$.
De verzameling $\{1\} \cup E$ is gesloten, omdat 1 niet in het complement zit. Dus $\overline{E} \subseteq \{1\} \cup E$. Elk gesloten deelverzameling die E bevat, bevat ook het punt 1. Stel dat dit niet het geval is. Dan is er een gesloten verzameling C om E met $1 \notin C$. Derhalve is $\mathbb{Z}^+ \setminus C$ open en moet gelden dat $\lim_{n\to\infty} N(n, \mathbb{Z}^+ \setminus C)/n = 1$. Maar er geldt ook dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n, \mathbb{Z}^+ \setminus C)}{n} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{N(n, C)}{n} \leq 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{N(n, E)}{n} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Uit deze tegenspraak volgt dat voor elke gesloten verzameling om E, geldt dat 1 er in zit. Dus $\overline{E} = \{1\} \cup E$.

Appert's topologie is nuldimensionaal, want voor elk paar (F, G) gesloten en disjuncte verzamelingen, is de lege verzameling een partitie. We weten namelijk dat F of G clopen is, dit hebben we gezien in het bewijs van de normaliteit.

2.5 Convergentie

Een andere bijzondere eigenschap van deze topologie is dat deze geen niet-triviale convergente rijtjes heeft. Dit zullen we bewijzen door aan te nemen dat deze er wel zijn en te laten zien dat dit tot tegenspraak leidt. Stel $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is een niet-triviaal rijtje dat convergeert naar het punt a. Als $a \neq 1$, dan is $\{a\}$ een open omgeving die a en a_n bevat voor alle $n \geq N$ voor een zekere $N \in \mathbb{N}$. Maar dan is $a_n = a$ voor alle $n \geq N$ en dus is dit een triviaal rijtje. Daarom moet $a = 1$. Het rijtje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bevat een strikt stijgend deelrijtje $(a_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$, want het rijtje is niet-triviaal. Neem nu $V = \{1\} \cup (\mathbb{Z}^+ \setminus \{a_{n_{2^i}} : i \in \mathbb{N}\})$. Dan is V open, dit kan op dezelfde manier worden aangetoond als in paragraaf 2.2. Maar voor elke $N \in \mathbb{N}$ is er een $k \geq N$, namelijk $k = 2^N$, zodat $a_{n_k} \notin V$. Dus dit rijtje is niet convergent. Daarom convergeren alleen de triviale rijtjes.

3 | Gustin's rijruimte

In 1946 publiceerde William Gustin een artikel over een aftelbare, samenhangende ruimte [5] die voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma. Deze ruimte is Hausdorff, maar niet regulier. De ruimte wordt ook wel Gustin's Sequence Space genoemd. Bijzonder is dat de ruimte samenhangend is. Dit is een interessant verschil met aftelbare reguliere ruimten. Die zijn nooit samenhangend. Een aftelbare reguliere ruimte is namelijk normaal. En voor elke normale ruimte is er een niet-constante continue functie naar het eenheidsinterval. Deze functie kan niet surjectief zijn, omdat het eenheidsinterval niet aftelbaar is. Hieruit volgt dat de ruimte niet samenhangend is.

Voordat we de ruimte gaan bestuderen, zullen we een aantal definities en nieuwe notaties bekijken. In dit hoofdstuk zullen we behalve de nulrij alleen eindige rijen die bestaan uit positieve gehele getallen bestuderen. De nulrij is hier een 'lege rij', dus een rij $\sigma = (s_n)_n$ met $s_n, n \in \emptyset$. Als $\alpha = (a_n)_{n=1}^k$ en $a_n \geq i$ voor alle $n \in \{1, 2, ..., k\}$, dan schrijven we $\alpha \geq i$. Logischerwijs zullen we $\alpha < i$ schrijven als $a_n < i$ voor alle $n \in \{1, 2, ..., k\}$. De nulrij voldoet aan beide ongelijkheden. Als we twee rijen genaamd α en β hebben, dan kunnen we deze aan elkaar plakken. De rij die ontstaat door β aan α vast te plakken, wordt genoteerd met $\alpha\beta$.

Definitie 3.1. Voor twee rijtjes α en β betekent $\beta \supset_i \alpha$ dat er een rijtje γ bestaat zodat $\beta = \alpha\gamma$ én $\gamma \geq i$.

Voorbeeld 3.1. *Als $\beta = (6, 4, 7, 3)$ en $\alpha = (6, 4)$, dan is $\alpha\beta = (6, 4, 6, 4, 7, 3)$. En $\beta \supset_3 \alpha$, omdat $\gamma = (7, 3) \geq 3$ zo is dat $\beta = \alpha\gamma$.*

Nu kunnen we Gustin's rijruimte definiëren. Als verzameling nemen we de vereniging van

- alle rijen met een even aantal termen inclusief de nulrij: $Y = \{(a_n)_{n=1}^k : k \in 2\mathbb{Z}^+\} \cup \{\sigma\}$; en
- de verzameling geordende paren bestaande uit een positief geheel getal en een ongeordend paar even rijen: $Z = \{(k, \{\mu, \nu\}) : \mu, \nu \in Y, k \in \mathbb{Z}^+\}$.

Merk op dat de verzameling $X = Y \cup Z$ aftelbaar is.

We introduceren nu enkele notaties. Eerst definiëren we $W = \{\{\mu, \nu\} : \mu, \nu \in Y\}$. Dan kunnen we de verameling Z schrijven als $Z = \mathbb{Z}^+ \times W$. Voor willeurige β definieren we $U_i(\beta) = \{\alpha \in Y : \alpha \supset_i \beta\}$.

De verzameling $W = \{\{\mu, \nu\} : \mu, \nu \in Y\}$ is oneindig en aftelbaar. Er bestaat daarom een injectieve functie $p : W \to P$ waarbij P de verzameling priemgetallen is. De functie p kiezen we zó dat $\alpha < p(\alpha, \sigma)$ voor elke $\alpha \in Y$. Dit hebben we nodig in paragraaf 3.4, daar zal duidelijk worden waarom we de functie p zo kiezen. Vervolgens definiëren we de functie $q : Z \to \mathbb{Z}^+$ door $q(k, w) = [p(w)]^k$, deze functie is ook injectief. Als duidelijk is wat w of (k, w) is, zullen we $q(k, w)$ afkorten met q_k of q.

De topologie op X wordt bepaald door de toekenning van lokale bases. Als $\mu \in Y$ dan

nemen we $\mathcal{B}_\mu = \{U_i(\mu) : i \in \mathbb{Z}^+\}$ als lokale basis. Voor $z \in Z$ met $z = (k, \{\mu, \nu\})$ is $\mathcal{B}_z = \{B_i(z) : i \in \mathbb{Z}^+\}$ een lokale basis. Hier is $B_i(z) = \{z\} \cup U_i(\mu q) \cup U_i(\nu q)$ waarbij q een afkorting is van $q(k, \{\mu, \nu\})$.
We controleren of dit een correcte toekenning van een lokale basis is door eerst te kijken naar punten in Y en daarna naar punten in Z.

Zij $\mu \in Y$ en laat $\mathcal{B}_\mu$ niet-leeg zijn. We weten dat $\mu \supset_i \mu$ voor elke $i \in \mathbb{Z}^+$ dus $\mu \in U_i(\mu)$.
Neem $U_j(\mu), U_k(\mu) \in \mathcal{B}_\mu$ willekeurig. Dan is $U_m(\mu) \subseteq U_j(\mu) \cap U_k(\mu)$ voor $m = max\{j, k\}$.
Inderdaad: Als $\beta \in U_m(\mu)$ dan is er een $\gamma \geq m$ zodat $\mu\gamma = \beta$. Dus $\gamma \geq j, k$ en daarom geldt dat $\beta \in U_j(\mu) \cap U_k(\mu)$.
Merk op dat $U_i(\mu) \subseteq Y$ voor elke $i \in \mathbb{Z}^+$. Als $\nu \in U_i(\mu)$ voor een $i \in \mathbb{Z}^+$, dan is $\nu \in Y$. We zullen laten zien dat $U_i(\nu) \subseteq U_i(\mu)$. Er geldt dat $\nu \supset_i \mu$. Neem nu $\beta \in U_i(\nu)$ dan $\beta \supset_i \nu \supset_i \mu$. Daarom is $\beta \in U_i(\mu)$. Hieruit volgt dat $U_i(\nu) \subseteq U_i(\mu)$.
Dus $\mathcal{B}_\mu$ heeft de eigenschappen die een lokale basis moet hebben.

Neem $z \in Z$ en schrijf $z = (k, \{\mu, \nu\})$ en $q = q(z)$. Dan is $\mathcal{B}_z$ niet leeg en zo gedefinieerd dat $z \in B_i(z)$ voor alle $i \in \mathbb{Z}^+$.
Zij $i, j \in \mathbb{Z}^+$ willekeurig. We hebben gezien dat $U_m(\mu q) \subseteq U_i(\mu q) \cap U_j(\mu q)$ voor $m = max\{i, j\}$. Dit geldt ook als we μ vervangen door ν. Dus $B_m(z) \subseteq B_i(z) \cap B_j(z)$.
De omgeving $B_i(z)$ bevat voor elke i slechts één punt uit Z, namelijk z zelf. Stel nu dat $\alpha \in B_i(z) \setminus \{z\}$ voor een $i \in \mathbb{Z}^+$. Dan is $\alpha \in U_i(\mu q)$ of $\alpha \in U_i(\nu q)$. Dus $U_i(\alpha) \subseteq B_i(z)$, omdat $U_i(\alpha) \subseteq U_i(\mu q)$ of $U_i(\alpha) \subseteq U_i(\nu q)$.

We hebben dus in elk punt een aftelbare lokale basis. De ruimte voldoet daarom aan het eerste aftelbaarheidsaxioma. De verzameling X is aftelbaar, dus de ruimte voldoet ook aan het tweede aftelbaarheidsaxioma.

3.1 Scheidingseigenschappen

Een belangrijke eigenschap van Gustin's rijruimte is dat deze Hausdorff is. Het bewijs is opgesplitst in drie gevallen: twee punten uit Y, één punt uit Y en één uit Z, en ten slotte twee punten uit Z.

1. Zij $\mu, \nu \in Y$ en $\mu \neq \nu$. Dan zijn er $i, j \in \mathbb{Z}^+$ zó dat $\mu < i$ en $\nu < j$. Neem $m = max\{i, j\}$. We zullen laten zien dat $U_m(\mu)$ en $U_m(\nu)$ disjunct zijn. Stel dat dit niet het geval is. Dan is er een $\beta \in U_m(\mu) \cap U_m(\nu)$. Derhalve zijn er $\mu', \nu' \geq m$ met de eigenschap dat $\mu\mu' = \beta = \nu\nu'$. Maar dan is $\nu = \mu$, omdat $\nu, \mu < m$ en $\mu', \nu' \geq m$. Tegenspraak. Dus $U_m(\mu)$ en $U_m(\nu)$ zijn disjuncte open omgevingen die respectievelijk μ en ν bevatten.

2. Stel nu dat $\beta \in Y$ en $(k, \{\mu, \nu\}) \in Z$. Laat $q = q(k, \{\mu, \nu\})$. Merk op dat $\beta \neq \mu q$ en $\beta \neq \nu q$, omdat elk van de rijen β, μ en ν een even aantal termen heeft. We kunnen nu net als in het eerste geval een m kiezen zó dat $\beta < m$, $\mu q < m$ en $\nu q < m$. Er geldt $U_m(\beta) \cap B_m(k, \{\mu, \nu\}) = \emptyset$.

3. Neem $(k, \{\mu, \nu\}), (l, \{\alpha, \beta\}) \in Z$ verschillend. Schrijf $q_k = q(k, \{\mu, \nu\})$ en $q_l = q(l, \{\alpha, \beta\})$. Net als in de andere gevallen is er een $m \in \mathbb{Z}^+$ zodat

   $$\Big(U_m(\mu q_k) \cup U_m(\nu q_k)\Big) \bigcap \Big(U_m(\alpha q_l) \cup U_m(\beta q_l)\Big) = \emptyset.$$

Merk op dat de rijen μq_k en νq_k verschillend zijn van de rijen αq_l en βq_l. Dit volgt uit de injectiviteit van de functie q.

Dus X is een niet-triviale T_2-ruimte. Maar X is niet Urysohn. Voordat we dit aantonen, geven we de definitie van een Urysohn-ruimte.

Definitie 3.2. Een ruimte is **Urysohn** als voor elke $x, y \in X$ met $x \neq y$ er open omgevingen U en V van x respectievelijk y bestaan zó dat $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Als deze omgevingen niet bestaan dan worden x en y $\overline{\boldsymbol{H}}$**-inseparabel** genoemd. Het punt x is $\overline{H}$-inseparabel als voor elke $y \in X$ de punten x en y $\overline{H}$-inseparabel zijn.

Niet alle wiskundigen gebruiken dezelfde namen voor scheidingseigenschappen. William Gustin gebruikt bijvoorbeeld het begrip $\overline{H}$-separabel in plaats van Urysohn [5]. In het boek *Counterexamples in Topology* wordt deze eigenschap volledig Hausdorff of $T_{2\frac{1}{2}}$ genoemd [11].

Om te kunnen aantonen dat in Gustin's rijruimte elk tweetal punten $\overline{H}$-inseparabel is, hebben we de afsluiting van een open omgeving $U_i(\alpha)$ nodig. We zullen laten zien dat de afsluiting van $U_i(\alpha)$ gelijk is aan $U_i(\alpha) \cup V_i(\alpha)$ waarbij

$V_i(\alpha) = \{(k, \{\mu, \nu\}) \in Z : \mu q \supset_i \alpha \text{ of } \nu q \supset_i \alpha\}$.

Eerst zullen we aantonen dat $Y \cap \overline{U_i(\alpha)} = U_i(\alpha)$ en daarna dat $Z \cap \overline{U_i(\alpha)} = V_i(\alpha)$. Daaruit volgt dat $\overline{U_i(\alpha)} = U_i(\alpha) \cup V_i(\alpha)$.

Merk op dat $U_i(\alpha) \subseteq Y \cap \overline{U_i(\alpha)}$. Neem $\mu \in Y \cap \overline{U_i(\alpha)}$ en een geheel getal $n > \alpha$. Er geldt dat $U_j(\mu) \cap U_i(\alpha) \neq \emptyset$ voor alle $j \in \mathbb{Z}^+$, omdat μ een rijtje in de afsluiting van $U_i(\alpha)$ is. Dan is er een $\nu \in U_n(\mu) \cap U_i(\alpha)$. Dus ν is van de vorm $\mu\mu'$ en $\alpha\alpha'$ met $\mu' \geq n$ en $\alpha' \geq i$. Dan is $\alpha\alpha' = \mu\mu'$ met $\mu' \geq n$ en $\alpha < n$. Dus $\mu \supset_i \alpha$ en daarom $\mu \in U_i(\alpha)$.

Nu gaan we bewijzen dat $Z \cap \overline{U_i(\alpha)} = V_i(\alpha)$. Zij $z \in Z \cap \overline{U_i(\alpha)}$ met $z = (k, \{\mu, \nu\})$. Schrijf $q = q(z)$. Dan is voor elke $j \in \mathbb{Z}^+ : B_j(z) \cap U_i(\alpha) \neq \emptyset$. Dus uit het bewijs hierboven en het feit dat $B_j(z) = \{z\} \cup U_i(\mu q) \cup U_i(\nu q)$ volgt dat $\mu q \supset_i \alpha$ of $\nu q \supset_i \alpha$. Dus $z \in V_i(\alpha)$.
Neem nu $v \in V_i(\alpha)$ en laat $q = q(v)$. Dan zijn er $k \in \mathbb{Z}^+$ en μ, ν zodat $v = (k, \{\mu, \nu\})$ en $\mu q \supset_i \alpha$ of $\nu q \supset_i \alpha$. Hieruit volgt dat $B_j(v) \cap U_i(\alpha) \neq \emptyset$ voor alle $j \in \mathbb{Z}^+$. Dus $v \in Z \cap \overline{U_i(\alpha)}$.

Nu we hebben bewezen dat $\overline{U_i(\alpha)} = U_i(\alpha) \cup V_i(\alpha)$, kunnen we aantonen dat elk punt in Gustin's ruimte $\overline{H}$-inseparabel is. Zij $\mu, \nu \in Y$. We zullen laten zien dat $\overline{U_m(\mu)} \cap \overline{U_n(\nu)} \neq \emptyset$. Kies $k \in \mathbb{Z}^+$ zó dat $q = q(k, \{\mu, \nu\}) \geq max\{m, n\}$. Dan is $(k, \{\mu, \nu\}) \in V_m(\mu) \cap V_n(\nu)$, want $\mu q \supset_m \mu$ en $\nu q \supset_n \nu$. Voor willekeurige punten uit X kunnen we een soortgelijk argument gebruiken. Hieruit volgt dat X niet Urysohn is en dat elk paar van punten $\overline{H}$-inseparabel is. Dus elk punt uit X is $\overline{H}$-inseparabel. Uit de definitie van het begrip Urysohn ruimte volgt dat elke reguliere ruimte Urysohn is. Dus Gustin's rijruimte is niet regulier!

3.2 Compactheid

Elke compacte Hausdorff ruimte is normaal en dus ook regulier. Gustin's rijruimte is Hausdorff en niet regulier, daarom is deze niet compact.

3.3 Samenhang

Stel dat O_1 en O_2 disjuncte niet-lege open verzamelingen zijn zodat $O_1 \cup O_2 = X$. Dan zijn er $x_1 \in O_1$ en $x_2 \in O_2$. Maar we hebben net gezien dat $\overline{O_1} \cap \overline{O_2} \neq \emptyset$. Dit leidt dus tot een tegenspraak, omdat $O_1 = \overline{O_1}$ en $O_2 = \overline{O_2}$. De verzamelingen O_1 en O_2 zijn namelijk zowel open als gesloten. Dus er bestaat geen niet-triviale scheiding van Gustin's rijruimte. Daarom is deze samenhangend.

3.4 Een deelruimte

In deze paragraaf bestuderen we een deelruimte van Gustin's rijruimte. We nemen de verzameling $X^* = Y \cup Z^*$ met $Z^* = \{(k, \{\mu, \sigma\}) : \mu \in Y \setminus \{\sigma\}, k \in \mathbb{Z}^+\}$.

We kunnen X^* schrijven als de vereniging van open verzamelingen: $\left(\bigcup_{z \in Z^*} B_1(z)\right) \cup U_1(\sigma)$. Dus X^* is open in X. Open verzamelingen in de deelruimte X^* zijn daarom ook open in X. Eerst zullen we laten zien dat het punt σ $\overline{H}$-inseparabel is in X^*. Zij $O_\sigma \subseteq X^*$ een open omgeving van σ. Neem $\alpha \in Y \setminus \{\sigma\}$ willekeurig en een open omgeving $O_\alpha \subseteq X^*$ van α. Dan zijn O_σ en O_α ook open in X. Kies $i, j \in \mathbb{Z}^+$ zodat $U_i(\sigma) \subseteq O_\sigma$ en $U_j(\alpha) \subseteq O_\alpha$. Pak nu $k \in \mathbb{Z}^+$ met $q(k, \{\alpha, \sigma\}) \geq \max\{i, j\}$, dan is $(k, \{\alpha, \sigma\}) \in V_i(\sigma) \cap V_j(\alpha) \cap Z^*$. Dus $\overline{O_\sigma} \cap \overline{O_\alpha} \neq \emptyset$ en daarom is σ een $\overline{H}$-inseparabel punt. Hieruit volgt dat X^* niet Urysohn is.
We zullen nu laten zien dat X^* samenhangend is. Stel dat we niet-lege open en disjuncte verzamelingen O_1, O_2 hebben met de eigenschap dat $O_1 \cup O_2 = X^*$. Dan is $\sigma \in O_1$ of $\sigma \in O_2$. Dus $\overline{O_1} \cap \overline{O_2} \neq \emptyset$, omdat σ een $\overline{H}$-inseparabel punt is. Dit is in tegenspraak met de aanname dat O_1 en O_2 disjunct zijn, want elk van deze verzamelingen is gelijk aan zijn afsluiting. Dus er bestaat geen niet-triviale scheiding van X^*. Daarom is X^* samenhangend.

We weten verder dat de deelruimte X^* net als X aftelbaar is en aan beide aftelbaarheidsaxioma's voldoet. De deelruimte is ook Hausdorff. We hebben gezien dat de deelruimte niet Urysohn is, daarom is deze ruimte niet regulier. Dus X^* is niet compact.

We gaan nu aantonen dat $\sigma \in Y$ een dispersiepunt is van X^*. Dit betekent dat X^* samenhangend is en het complement van $\{\sigma\}$ totaal onsamenhangend. Een ruimte is totaal onsamenhangend als voor elke x en y in de ruimte met $x \neq y$ er een clopen verzameling C is zodat $x \in C$ en $y \notin C$. Het bewijs is opgesplitst in vier stappen. Eerst definiëren we een verzameling $X_i(\lambda)$. Vervolgens zullen we aantonen dat $X_i(\lambda)$ open is in $X^* \setminus \{\sigma\}$. Daarna zullen we aantonen dat deze verzameling gesloten is in $X^* \setminus \{\sigma\}$. Ten slotte laten we zien dat $X^* \setminus \{\sigma\}$ totaal onsamenhangend is. Hieruit volgt dat σ een dispersiepunt is van X^*.

Stap 1

Voor $\lambda \in Y \setminus \{\sigma\}$ en $i \in \mathbb{Z}$ zodat $\lambda < i$ definiëren we:

$$X_i(\lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(Y_i^n(\lambda) \cup Z_i^n(\lambda) \Big).$$

De verzamelingen $Y_i^n(\lambda)$ en $Z_i^n(\lambda)$ zijn als volgt recursief gedefinieerd:

- $Y_i^1(\lambda) = U_i(\lambda)$
- $Y_i^n(\lambda) = \{\mu \in Y : \mu \supset_i q(z), z \in Z_i^{n-1}(\lambda)\}$
- $Z_i^n(\lambda) = \{(k, \{\mu, \sigma\}) \in Z^* : \mu \in Y_i^n(\lambda), q(k, \{\mu, \sigma\}) \geq i\}$

Stap 2

We gaan bewijzen dat $X_i(\lambda)$ open is in $X^* \setminus \{\sigma\}$. Neem $x \in X_i(\lambda)$ willekeurig. We zijn op zoek naar een open omgeving van x die bevat is in $X_i(\lambda)$. Er zijn twee gevallen: $x \in Y$ of $x \in Z^*$.

Als $x \in Y$, dan is er een n zodat $x \in Y_i^n(\lambda)$. We zullen laten zien dat de open omgeving die we zoeken $U_i(x)$ is. Stel dat $n = 1$ en $\beta \in U_i(x)$ dan $\beta \supset_i x \supset_i \lambda$. Dus geldt inderdaad dat $\beta \in Y_i^1(\lambda)$. Stel nu dat $n > 1$ en $\beta \in U_i(x)$. In dit geval hebben we dat $\beta \supset_i x \supset_i q(z)$ voor een $z \in Z_i^{n-1}(\lambda)$, dus $\beta \in Y_i^n(\lambda)$. Daarom geldt in beide gevallen: $U_i(x) \subseteq Y_i^n(\lambda) \subseteq X_i(\lambda)$.

Als $x \in Z^*$, dan is er een n zodat $x \in Z_i^n(\lambda)$. Schrijf $x = (k, \{\mu, \sigma\})$. De open omgeving die we zoeken is $B_i(x)$. Om dit aan te tonen, nemen we $\nu \in U_i(\mu q(x)) \cup U_i(q(x))$ willekeurig. Als $\nu \in U_i(\mu q(x))$, dan $\nu \supset_i \mu q(x)$. Bovendien volgt uit de definitie van $Z_i^n(\lambda)$ dat $q(x) \geq i$, dus $\nu \supset_i \mu$. Ook weten we dat $\mu \in Y_i^n(\lambda)$. Uit geval 1 volgt nu dat $\nu \in Y_i^n(\lambda)$. Als $\nu \in U_i(\sigma q(x)) = U_i(q(x))$, dan $\nu \in Y_i^{n+1}(\lambda)$. Daarom $B_i(x) \subseteq X_i(\lambda)$.
De verzameling $X_i(\lambda)$ is dus open in X^* en in $X^* \setminus \{\sigma\}$.

Stap 3

We gaan nu aantonen dat het complement van $X_i(\lambda)$ open is in $X^* \setminus \{\sigma\}$. Neem een willekeurige x in dit complement. We onderscheiden weer twee gevallen: $x \in Y$ of $x \in Z^*$.

Veronderstel eerst dat $x \in Y$ en neem $\nu \in U_i(x)$ willekeurig. Stel dat $\nu \in X_i(\lambda)$. We zullen laten zien dat dit tot tegenspraak leidt. Er geldt namelijk dat $\nu \supset_i \lambda$ of $\nu \supset_i q(z)$ voor een $z \in Z_i^n(\lambda)$. Maar ook dat $\nu \supset_i x$, omdat $\nu \in U_i(x)$. Dus $q(z) \supset_i x$ of $\lambda \supset_i x$ of $x \supset_i q(z)$ of $x \supset_i \lambda$. Nu is $x \notin X_i(\lambda)$, dus de laatste twee mogelijkheden vallen af. Bovendien weten we dat $q(z) \geq i$ een getal is, $x \neq \sigma$ en $\lambda < i$. Dus $x = q(z)$ of $x = \lambda$. Maar ook dan $x \in X_i(\lambda)$. Uit deze tegenspraak volgt dat $\nu \notin X_i(\lambda)$. We weten ook dat $\nu \neq \sigma$. Dus $U_i(x) \subseteq X^* \setminus \big(\{\sigma\} \cup X_i(\lambda)\big)$.

In het tweede geval is $x \in Z^*$. We schrijven $x = (k, \{\mu, \sigma\})$. Neem $\nu \in B_i(x)$ en stel dat $\nu \in X_i(\lambda)$. We zullen laten zien dat dit tot tegenspraak leidt. We kunnen aannemen dat $\nu \neq x$, immers $x \notin X_i(\lambda)$. Dus $\nu \in U_i(\mu q(x))$ of $\nu \in U_i(q(x))$. Hieruit volgt dat $\nu \supset_i \mu q(x)$ of

$\nu \supset_i q(x)$, en omdat $\nu \in X_i(\lambda)$ geldt $\nu \supset_i \lambda$ of $\nu \supset_i q(z)$ voor een $z \in Z_i^n(\lambda)$. Dan hebben we de volgende mogelijkheden:

1. $\mu q(x) \supset_i \lambda$
2. $\lambda \supset_i \mu q(x)$
3. $\mu q(x) \supset_i q(z)$ voor een $z \in Z_i^n(\lambda)$
4. $q(z) \supset_i \mu q(x)$ voor een $z \in Z_i^n(\lambda)$
5. $q(x) \supset_i \lambda$
6. $\lambda \supset_i q(x)$
7. $q(x) \supset_i q(z)$ voor een $z \in Z_i^n(\lambda)$
8. $q(z) \supset_i q(x)$ voor een $z \in Z_i^n(\lambda)$

We zullen laten zien dat al deze mogelijkheden tot tegenspraak leiden.
Nummer 1 impliceert dat $\mu q(x) = \lambda$, of $\mu \supset_i \lambda$ en $q(x) \geq i$. Merk op dat $\mu q(x) = \lambda$ niet mogelijk is, want $\mu q(x)$ is oneven en λ is even. Maar dan is $x \in Z_i^1(\lambda)$.
We weten dat $\lambda < i$, dus nummer 2 of 6 zijn alleen mogelijk als $\lambda = \mu q(x)$ of $\lambda = q(x)$. Ook dit is niet mogelijk, omdat λ even lengte heeft en $\mu q(x)$ en $q(x)$ oneven lengte hebben.
Omdat $q(z) \geq i$ volgt uit nummer 3 dat $\mu q(x) \geq i$. We weten dat $\mu \neq \sigma$, dit volgt uit de definitie van de ruimte X^*. Dus $\mu \supset_i q(z)$ en $q(x) \geq i$. Maar dan is $x \in Z_i^{n+1}(\lambda)$.
Merk op dat $q(z)$ en $q(x)$ rijen zijn die uit één getal bestaan. We weten dat $\mu \neq \sigma$, dus nummer 4 is niet waar. Nummer 7 en 8 impliceren dat $q(x) = q(z)$. Maar q is injectief, daarom is $x = z$ en dus $x \in Z_i^n(\lambda)$.
Uit nummer 5 volgt dat $q(x) = \lambda$, omdat $\lambda \neq \sigma$. Maar $q(x)$ is een rij van lengte één en λ is een rij van even lengte. Dus dit is niet mogelijk.
In elk van de acht gevallen hebben we een tegenspraak afgeleid. Dus $B_i(x) \subseteq X^* \setminus \big(\{\sigma\} \cup X_i(\lambda)\big)$
Hiermee hebben we aangetoond dat het complement van $X_i(\lambda)$ open is, dus $X_i(\lambda)$ is gesloten in $X^* \setminus \{\sigma\}$.

Stap 4

We zullen nu aantonen dat $X^* \setminus \{\sigma\}$ totaal onsamenhangend is. Zij $x, y \in X^* \setminus \{\sigma\}$. We onderscheiden drie gevallen: $x, y \in Y$, $x, y \in Z$ of $x \in Z, y \in Y$. Voor elke van de gevallen wijzen we een clopen verzameling C aan zodat $x \in C$ en $y \notin C$. Daaruit volgt dat $X^* \setminus \{\sigma\}$ totaal onsamenhangend is.
In het eerste geval, waarbij $x, y \in Y$, kiezen we een $i \in \mathbb{Z}^+$ zodat $xy < i$. De clopen verzameling die we zoeken is dan $C = X_i(x)$, want $x \in X_i(x)$ en $y \notin X_i(x)$ omdat $y < i$ en $y \neq x$.
In het tweede geval zijn $x, y \in Z$ verschillend en dus volgt uit de injectiviteit van de functie q dat $q(x) < q(y)$ of $q(x) > q(y)$. We nemen voor het gemak aan dat $q(x) < q(y)$. Het andere geval is vergelijkbaar. Schrijf $x = (k, \{\mu, \sigma\})$ en $y = (l, \{\nu, \sigma\})$. Kies $i = q(x)$ en neem $C = X_i(\mu)$. Dan is $x \in Z_i^1(\mu) \subseteq C$, omdat $q(x) \geq i$ en $\mu \in Y_i^1(\mu)$. Bovendien is $y \notin C$, omdat $q(y) < q(x) = i$. Merk op dat de verzameling $X_i(\mu)$ alleen gedefinieerd is als $\mu < i$. Dit is het geval, omdat de functie p zo is gekozen dat $\alpha < p(\alpha, \sigma)$ voor elke $\alpha \in Y$. Dan geldt inderdaad dat $\mu = \mu\sigma < p(\mu, \sigma) \leq q(x) = i$.

Nu bekijken we het laatste geval: $x \in Z$ en $y \in Y$. Kies $i \in \mathbb{Z}^+$ zodat $yq(x) < i$. De verzameling $C = X_i(y)$ is ook nu goed gedefinieerd. We zien dat $y \in C$ en $x \notin C$, omdat $q(x) < i$.
Dus de ruimte $X^* \backslash \{\sigma\}$ is totaal onsamenhangend. Hieruit volgt dat $\sigma \in X^*$ een dispersiepunt is van X^*. Ook zien we dat elk paar punten in $X^* \backslash \{\sigma\}$ Urysohn is. Het punt σ is $\overline{H}$-inseparabel in X^*.

3.5 Semi-reguliere rijruimte

Om te beginnen hebben we de volgende definities nodig:

Definitie 3.3. Een verzameling A is **regulier open** als $A = \overline{A}^\circ$, dus als de verzameling gelijk is aan het inwendige van zijn afsluiting.

Definitie 3.4. Een ruimte waarin de regulier open verzamelingen een basis vormen voor de topologie, wordt **semi-regulier** genoemd.

We maken nu een semi-reguliere ruimte door alle regulier open verzamelingen in X als basiselementen te nemen. Als A basis-open is in deze semi-reguliere ruimte, dan is A regulier open in X. Hieruit volgt dat A ook open is in X, immers $A^\circ = \overline{A}^{\circ\circ}$ is gelijk aan $\overline{A}^\circ = A$. De nieuwe topologie is dus grover dan de oorspronkelijke topologie.
We zullen nu laten zien dat deze topologie net als de oorspronkelijke Hausdorff is. Als $x_1, x_2 \in X$ en $x_1 \neq x_2$, dan zijn er open disjuncte omgevingen U_1 en U_2 van x_1 respctievelijk x_2 in de oorspronkelijke topologie. Neem nu $O_1 = \overline{U_1}^\circ$ en $O_2 = \overline{U_2}^\circ$. Dan zijn O_1 en O_2 regulier open verzamelingen zodat $x_1 \in O_1$ en $x_2 \in O_2$. We zullen laten zien dat O_1 en O_2 disjunct zijn. Voor elke punt $y \in U_1$ geldt dat $y \notin \overline{U_2}$, want $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ en U_1 is open. Dus $U_1 \cap \overline{U_2} = \emptyset$. Hieruit volgt dat $U_1 \cap \overline{U_2}^\circ = \emptyset$, want $U_1 \cap \overline{U_2}^\circ \subseteq U_1 \cap \overline{U_2}$. Maar dan zit geen enkel punt uit $\overline{U_2}^\circ$ in de afsluiting van U_1, dus $\overline{U_2}^\circ \cap \overline{U_1} = \emptyset$. Derhalve is $\overline{U_2}^\circ \cap \overline{U_1}^\circ = \emptyset$. Dus O_1 en O_2 zijn open disjuncte omgevingen van x_1 respectievelijk x_2.
Het is makkelijk in te zien dat de ruimte nog steeds samenhangend is, iedere open verzameling in deze topologie is immers ook open in de oorspronkelijke topologie. Verder is deze ruimte aftelbaar en voldoet de ruimte aan het eerste en tweede aftelbaarheidsaxioma's. Maar net als de originele rijruimte van Gustin is deze semi-reguliere ruimte niet Urysohn en dus niet regulier en niet compact.

4 | Topologische sinus-kromme

De meeste mensen kennen het woord 'kromme' wel. Het is een woord dat niet alleen binnen de wiskunde wordt gebruikt, maar ook daarbuiten. Intuïtief zou ik een kromme beschrijven als een al dan niet gebogen lijn die met een potlood getekend kan worden zonder het potlood van het papier te halen. Deze beschrijving is echter te vaag. Het is bijvoorbeeld onduidelijk of een vlakvullende lijn aan deze beschrijving voldoet.
Karl Menger heeft een boek geschreven over krommen. Het boek, genaamd *Kurventheorie*, gaat onder andere over de geschiedenis van het begrip en beschrijft hoe de definitie van kromme tot stand is gekomen [8].
We beginnen met de definitie van het begrip 'continuüm':

Definitie 4.1. Een **continuüm** is een niet-lege compacte, samenhangende metrische ruimte.

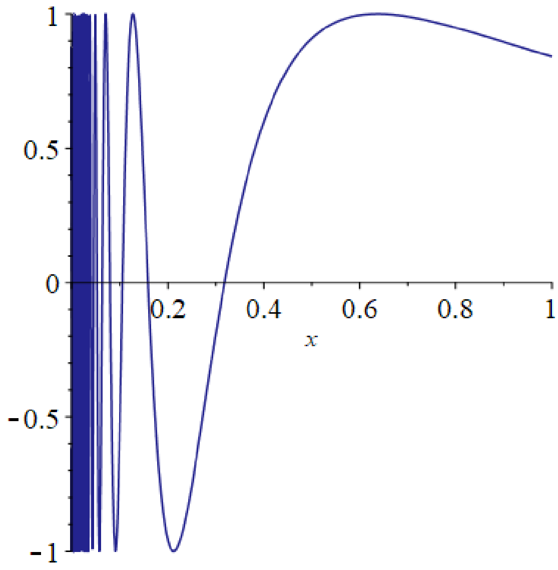
In een meer algemene context wordt een continuüm ook wel omschreven als een compacte, samenhangende Hausdorff ruimte. Maar voor nu is definitie 4.1 genoeg. In dit hoofdstuk zullen we namelijk in een metrische ruimte werken.
Karl Menger heeft krommen als volgt gedefinieerd:

Definitie 4.2. Een continuüm K is een **kromme** als voor elk punt $p \in K$ en elke open omgeving U van p er een open omgeving O is zodat $p \in O \subseteq U$ en $Rd(O) \cap K$ geen continuüm bevat dat uit meer dan één punt bestaat.

Hier is $Rd(O)$ de rand van de verzameling O.

Voorbeeld 4.1. *Een ellips voldoet aan de definitie voor een kromme: Het is een compacte, samenhangende metrische ruimte en elke cirkel met middelpunt op de ellips snijdt de ellips in maximaal 4 losse punten.*

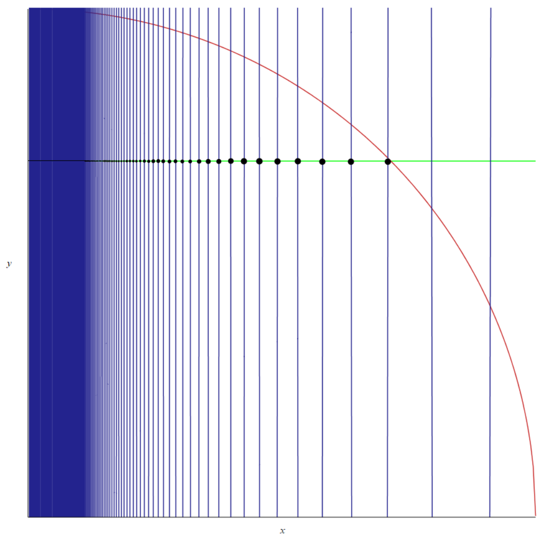
Nu gaan we een bijzondere kromme bestuderen, namelijk de sinus-kromme. Behalve het boek *Counterexamples in Topology* is voor het schrijven van dit hoofdstuk ook gebruik gemaakt van het artikel *De poolse cirkel* (Hart, 2017), zie [6]. We werken in $\mathbb{R}^2$ en nemen de verzameling $S = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$ met de geïnduceerde standaard topologie, oftewel de deelruimtetopologie. De verzameling $S^* = S \cup \{(0,0)\}$ wordt de **topologische sinus-kromme** genoemd, zie figuur 4.1.
Is het terecht dat deze verzameling een kromme wordt genoemd? Nee, eigenlijk niet. We zullen laten zien dat de verzameling S^* niet compact is en dus geen continuüm. We kunnen deze verzameling echter wel compact maken. De verzameling die we dan krijgen is wel een kromme.
We zullen in dit hoofdstuk ook zien dat niet elke kromme padsamenhangend is. Dus samenhang impliceert niet altijd padsamenhang.



Figuur 4.1: Topologische sinus-kromme

4.1 Compactheid

S^* is niet lokaal compact. Een ruimte is lokaal compact als elk punt van deze ruimte een compacte omgeving heeft. Om aan te tonen dat S^* niet lokaal compact is, moeten we dus een punt vinden zonder compacte omgeving. Het punt $O = (0,0)$ is hier afwijkend, dus waarschijnlijk is dit het punt zonder compacte omgeving. Neem een willekeurige omgeving U van het punt $(0,0)$. Kies $\epsilon > 0$ zodat $B(O;\epsilon) \cap S^* \subseteq U$. Dan is $\{(x, \frac{1}{2}\epsilon)) : x \in \mathbb{R}\} \cap S^*$ een rij die convergeert naar $(0, \frac{1}{2}\epsilon) \notin U$, zie figuur 4.2. Dus U is niet compact. Maar dan is S^* ook niet compact.



Figuur 4.2: De horizontale groene lijn snijdt S^* in een rij punten die convergeert naar een punt op de y-as.

Een andere bijzondere eigenschap van de sinus-kromme is dat deze het beeld is van een lokaal compacte ruimte, terwijl de kromme zelf niet compact is. We kunnen de volgende functie nemen:

$$F(x) = \begin{cases} (0,0) & x = -1 \\ (x, \sin(1/x)) & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

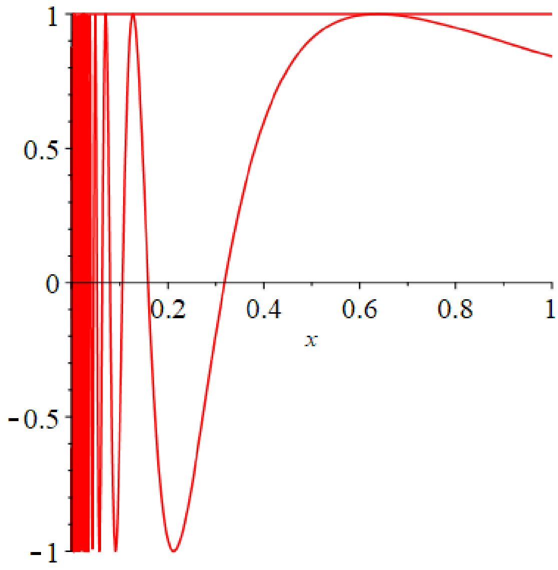
Deze functie is continu en het domein $\{-1\} \cup (0,1]$ is lokaal compact, maar het beeld niet! We kunnen S^* echter wel compact maken door de verticale lijn $V = \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}$ toe te voegen. De op deze manier verkregen verzameling noemen we de **gesloten topologische sinus-kromme $\overline{S}$**. Dit is een gesloten en begrensde verzameling. Dus $\overline{S}$ is inderdaad compact. Merk op dat $\overline{S} = S \cup V$ de afsluiting is van S.

4.2 Samenhang

De verzamelingen S^* en $\overline{S}$ zijn beiden samenhangend. De bewijzen zijn vergelijkbaar, daarom geven we hier alleen het bewijs voor S^*. Stel F en G zijn gesloten disjuncte verzamelingen zodat $F \cup G = S^*$. De verzameling S is samenhangend. Zonder beperking der algemeenheid kunnen we aannemen dat deze bevat is in F. Omdat F gesloten en disjunct van G is, moet $G = S^* \setminus F$ open zijn. Het enige punt dat nog in G zou kunnen zitten is $(0,0)$, maar elke open omgeving van $(0,0)$ snijdt f. Daarom is $G = \emptyset$. Dus S^* is samenhangend.

De verzamelingen S^* en $\overline{S}$ zijn niet padsamenhangend [9]. Een ruimte is padsamenhangend als voor elk tweetal punten a en b in die ruimte er een continue functie f van het eenheidsinterval naar de ruimte zelf bestaat zodat $f(0) = a$ en $f(1) = b$.
We nemen aan dat S^* padsamenhangend is en zullen een tegenspraak afleiden. Als S^* padsamenhangend is, dan is er een continue functie $p : [0,1] \to S^*$ met $p(0) = (0,0)$ en $p(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$. Schrijf $p(t) = (a(t), b(t))$, dan zijn $a(t)$ en $b(t)$ continue functies. Uit de tussenwaardestelling volgt dat er een rij $(t_n)_{n\geq 1}$ is met de eigenschap dat $a(t_n) = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ en $0 < \cdots < t_2 < t_1 < 1$. Dan is $b(t_n) = (-1)^n$, omdat elk punt van p op de sinus-kromme ligt. Verder is $(t_n)_{n\geq 1}$ een dalende begrensde rij, dus heeft deze een limiet t. De functie p is continu, daarom $p(t_n) \to p(t)$ als $n \to \infty$. Maar $b(t_n)$ convergeert niet. We hebben met deze tegenspraak laten zien dat S^* niet padsamenhangend is.
Om te bewijzen dat $\overline{S}$ niet padsamenhangend is, moeten we alleen het codomein van de functie p vervangen door $\overline{S}$. De rest van het bewijs is hetzelfde. Het is echter eenvoudig in te zien dat $\overline{S}$ uit twee padsamenhangende delen bestaat, namelijk V en $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ waarbij $0 < x \leq 1$.

We kunnen de gesloten sinus-kromme uitbreiden door de verzameling $H = \{(x,1) : 0 \leq x \leq 1\}$ toe te voegen. De verkregen verzameling T noemen we de **uitgebreide sinus-kromme**. Dus $T = \overline{S} \cup H$, zie figuur 4.3.

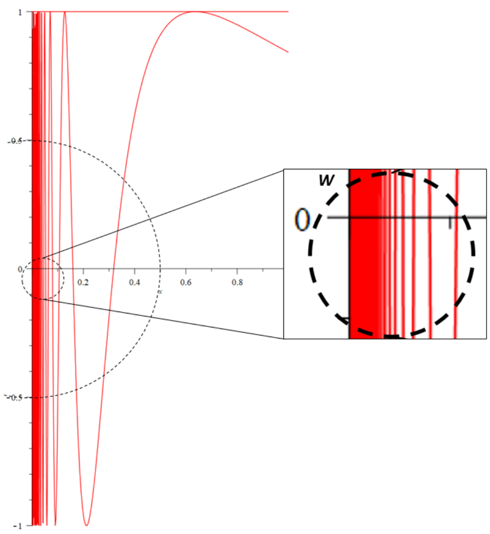


Figuur 4.3: De uitgebreide sinus-kromme T.

De verzameling T is boogsamenhangend, oftewel voor elke $y, z \in T$ is er een homeomorfisme $f : [0,1] \to f([0,1])$ met $f(0) = y$ en $f(1) = z$. We onderscheiden drie gevallen. In het eerste geval zijn y en z beide punten in de verzameling S. Terwijl in het tweede geval y en z punten uit het complement van S zijn. Merk op dat het complement gelijk is aan $V \cup H$. Ten slotte bekijken we het geval dat y in de verzameling S zit en z in het complement van deze verzameling.
Als $y, z \in S$, dan liggen y en z op de grafiek van $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$. Dus er is inderdaad een homeomorfisme, met als domein het eenheidsinterval, die 0 naar y stuurt en 1 naar z.
In het geval dat $y, z \in V \cup H$, houden we een verticale en een horizontale lijn over die in het punt $(0, 1)$ met elkaar verbonden zijn. Dus ook in dit geval bestaat er een homeomorfisme met de gewenste eigenschap.
Nu bekijken we het geval dat $y \in S$ en $z \in V \cup H$. Neem $u = \left(\frac{2}{\pi}, 1\right)$, dan is $u \in H \cap S$. Dus uit bovenstaande observaties volgt dat er een homeomorfisme h_1 is met $h_1(0) = y$ en $h_1(1) = u$ en een homeomorfisme h_2 met $h_2(0) = u$ en $h_2(1) = z$. Deze functies kunnen we gebruiken om een homeomorfisme van $[0,1]$ naar $h_1([0,1]) \cup h_2([0,1])$ te maken:

$$h(x) = \begin{cases} h_1(2x) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ h_2(2(x - \frac{1}{2})) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

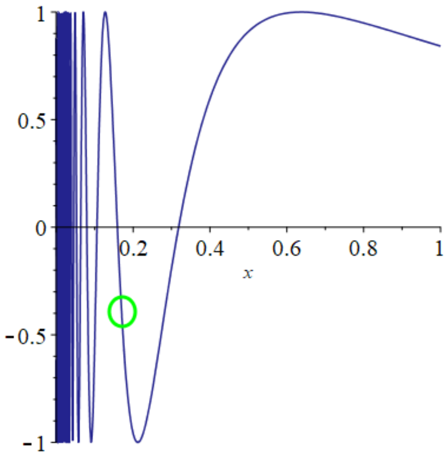
Dus T is inderdaad boogsamenhangend. Uit de definities van boog- en padsamenhangendheid, volgt dat T ook padsamenhangend is. Maar dit betekent niet dat de uitgebreide sinus-kromme lokaal samenhangend is. Bekijk het punt $O = (0,0)$ en de omgeving $U = B(O, \frac{1}{2}) \cap T$. Zij B een open schijf zodat $O \in B \subseteq B(O, \frac{1}{2})$. Dan is de omgeving $W = B \cap T$ de disjuncte vereniging van lijnstukjes, zie figuur 4.4. Dus W is niet samenhangend. Derhalve is T niet lokaal samenhangend.



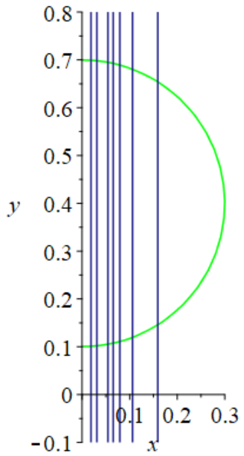
Figuur 4.4: De omgeving U van O is niet lokaal samenhangend: elk schijfje snijdt T in een disjuncte vereniging van lijnstukken.

4.3 Kromme?

De topologische sinus-kromme S^* is niet compact en dus geen continuüm. Deze verzameling voldoet dus niet aan de definitie van een kromme. De gesloten topologische sinus-kromme $\overline{S}$ is wel compact, samenhangend en metrisch. Dit is dus wel een continuüm.
Voor elk punt op de grafiek van $\sin(\frac{1}{x})$, kunnen we een open schijf nemen zodat de rand twee snijpunten heeft met de grafiek van $\sin(\frac{1}{x})$, zie figuur 4.5a. Nemen we nu een punt y op het lijnstuk V en een willekeurige open omgeving U van y. Dan kunnen we $\epsilon > 0$ zó kiezen dat $B(y;\epsilon) \subseteq U$. De rand van $B(y;\epsilon)$ snijdt de grafiek van $\sin(\frac{1}{x})$ in twee convergente rijen, zie figuur 4.5b. De gesloten topologische sinus kromme is dus wel een echte kromme!



(a) Een punt op de grafiek van $\sin(\frac{1}{x})$.

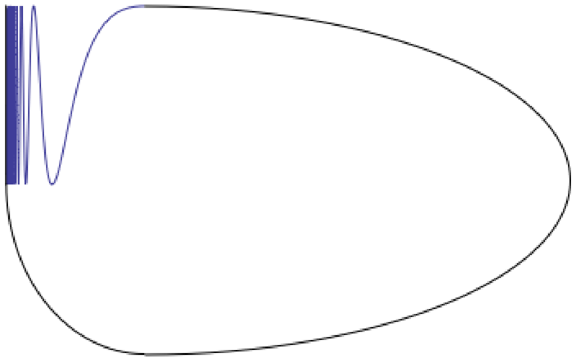


(b) Een punt op de verticale lijn V.

Figuur 4.5: Voor elk punt uit $\overline{S}$ is er een omgeving die de verzameling $\overline{S}$ snijdt in continua bestaande uit één punt.

4.4 Poolse cirkel

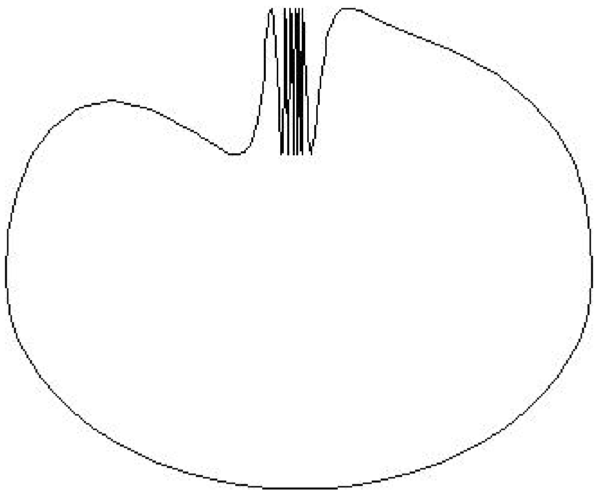
Er is nog een variant op de sinus-kromme. Deze wordt gemaakt door aan de gesloten sinus-kromme een lijnstuk toe te voegen dat het punt $(0, -1)$ verbindt met het punt $(1, \sin(1))$. De kromme die ontstaat wordt de Poolse cirkel of Warschause cirkel genoemd, zie figuur 4.6.



Figuur 4.6: Poolse cirkel. *Van Wikipedia.* Bezocht op 19-05-2020.

Door het extra lijnstuk is de Poolse cirkel wel boogsamenhangend. De moeilijkheden rond het punt $(0, 0)$ kunnen we nu vermijden door het extra lijnstuk. Het bewijs lijkt op dat voor de uitgebreide sinus-kromme, maar in plaats van de verzameling H hebben we nu het lijnstuk dat $(0, -1)$ met $(1, \sin(1))$ verbindt. In het geval dat er één punt op dit lijnstuk of op V ligt en één punt op de grafiek van f, hebben we twee homeomorfismen tussen enerzijds het punt op het lijnstuk en $(1, \sin(1))$ en anderzijds tussen $(1, \sin(1))$ en het punt op de grafiek van f. Dus op vergelijkbare manier als bij de uitgebreide sinus-kromme kunnen we een homeomorfisme maken om te bewijzen dat de Poolse cirkel boogsamenhangend is. Hieruit volgt dat de Poolse cirkel ook padsamenhangend is.

Op de Poolse cirkel kan ook weer een variant worden gemaakt. Hiervoor nemen we de verzameling $\overline{S}$, breiden die uit met de grafiek $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ voor $-1 \leq x < 0$ en ten slotte verbinden we de punten $(-1, \sin(-1))$ en $(1, \sin(1))$. In figuur 4.7 is deze verzameling te zien.



Figuur 4.7: Variant op de Poolse cirkel. *Van nLab* (2017), `https://ncatlab.org/nlab/show/Warsaw+circle`. Bezocht op 19-05-2020.

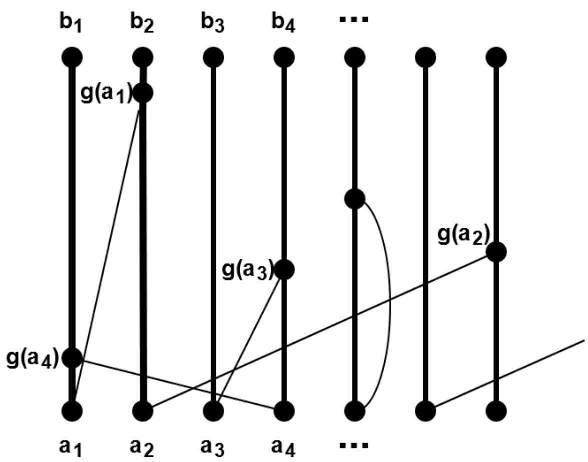
Opmerkelijk is dat er geen continue functie $g : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ bestaat met de eigenschap dat $g(1) \in V \setminus \{(0,-1)\}$ en $g(x)$ voor $x < 1$ in het binnengebied. Als we een heel klein stukje van $V \setminus \{(0,-1)\}$ afwijken, moeten we de grafiek van f wel snijden, omdat deze oneindig veel slingeringen maakt in de buurt van V. Op dezelfde manier kunnen we inzien dat $V \setminus \{(0,1)\}$ niet bereikbaar is vanuit het buitengebied. Dit is bijzonder, want dit geldt niet voor cirkels. Elk punt van de rand van de cirkel is bereikbaar vanuit het binnen- en buitengebied.

5 | Van Douwen's ruimte

De ruimte die we in dit hoofdstuk gaan bestuderen, is bedacht door Eric K. van Douwen [2]. Bijzonder aan deze ruimte is dat deze regulier en T_1 is, met de eigenschap dat elke continue reëelwaardige functie constant is. Eerst construeren we de ruimte en daarna controleren we of deze aan de genoemde eigenschappen voldoet.
Voor de constructie hebben we de volgende definitie nodig:

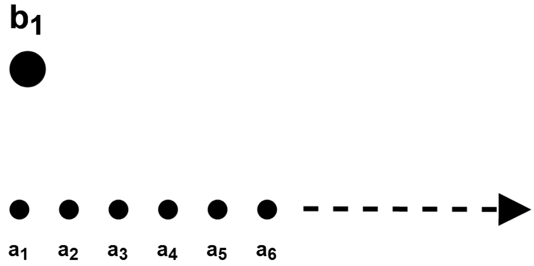
Definitie 5.1. De punten a en b in een topologische ruimte worden **tweelingen** genoemd als voor elke continue reëelwaardige functie f op deze ruimte geldt dat $f(a) = f(b)$.

Nu gaan we de ruimte construeren. Neem een reguliere T_1-ruimte X met de tweelingen a en b. Merk op dat deze niet-triviale ruimten oneindig zijn, want eindige T_1-ruimten zijn discreet. Voorbeelden van reguliere T_1-ruimten met tweelingen zijn de reguliere ruimten van Mysior [10] en Thomas [13] die niet volledig regulier zijn.
We definiëren $Z = X \times X$. Een verzameling O is open in Z als voor elke $x \in X$ de verzameling $\{y : (x, y) \in O\}$ open is in X. De tweelingen van $\{x\} \times X$ zijn (x, a) en (x, b) voor elke $x \in X$. Laat nu $A = \{(x, a) : x \in X\}$ en $B = \{(x, b) : x \in X\}$. Dan hebben A en $Z \setminus (A \cup B)$ dezelfde kardinaliteit. Dus is er een bijectieve functie $g : A \to Z \setminus (A \cup B)$. In figuur 5.1 is een schematische weergave van de ruimte Z met de paren $\{\mathbf{a}, g(\mathbf{a})\}, \mathbf{a} \in A$ te zien. Merk op dat we in deze afbeelding voor het gemak de deelverzameling $\mathbb{N}$ hebben gebruikt, terwijl de verzameling X niet per se aftelbaar is.



Figuur 5.1: De verzameling Z: de verticale lijnen zijn kopiën van X. Aan elk punt uit A is precies één punt uit $Z \setminus (A \cup B)$ gekoppeld.

Nu gaan we een quotiëntruimte construeren. Laat B een equivalentieklasse zijn en laat voor elke $x \in X$ het paar $\{(x, a), g(x, a)\}$ een equivalentieklasse zijn, zie figuur 5.2. De bijbehorende quotiëntafbeelding noemen we q en de quotiëntruimte Y. De topologie $\mathcal{T}_Y$ op Y bestaat uit alle deelverzamelingen U van Y waarvoor $q^{-1}[U]$ open is in Z.
We zullen nu aantonen dat $(Y, \mathcal{T}_Y)$ een reguliere T_1-ruimte is waarop elke reëelwaardige functie constant is. Om te beginnen laten we zien dat elke continue reëelwaardige functie



Figuur 5.2: De ruimte Y

constant is. Zij $f : Y \to \mathbb{R}$ continu. Dan is $f \circ q$ continu, en op elke equivalentieklasse is $f \circ q$ constant. Omdat $\mathbf{a} = (x, a)$ en $\mathbf{b} = (x, b)$ voor elke $x \in X$ tweelingen zijn, is $(f \circ q)(\mathbf{a}) = (f \circ q)(\mathbf{b}) = f(q[B])$ voor elke $x \in X$. Neem nu $z \in Z \setminus (A \cup B)$ willekeurig. Dan is er een $u \in X$ zodat $g(u, a) = z$ en daarom zit z in dezelfde equivalentieklasse als $\mathbf{a}_u = (u, a)$. Dus $(f \circ q)(z) = (f \circ q)(\mathbf{a}_u) = f(q[B])$. Hieruit volgt dat $f \circ q$ constant is op heel Z. Dus f is constant op Y.

Nu gaan we laten zien dat $(Y, \mathcal{T}_Y)$ de T_1-eigenschap heeft. Een verzameling F is gesloten in Y als $q^{-1}[Y]$ gesloten is in Z. Voor elke $x \in X$ is $\{x\}$ gesloten in X, omdat dit een T_1-ruimte is. We weten dus dat $\{b\}$ gesloten is in Y, want $q^{-1}[\{b\}] = B$ is gesloten in Z. Merk op dat B gesloten is in Z, omdat $\{(x, b)\}$ gesloten is in X voor elke $x \in X$.
Als $y = \{(x, a), g(x, a)\}$ voor zekere $x \in X$, dan is $\{y\}$ gesloten in Y. We weten namelijk dat $\{(x, a), g(x, a)\}$ gesloten is in Z.

Ten slotte moeten we nog aantonen dat Y regulier is. We weten al dat Y een T_0-ruimte is, omdat Y de T_1-eigenschap heeft. Dus we moeten alleen nog bewijzen dat Y een T_3-ruimte is. Hier hebben we het begrip 'verzadigd' voor nodig:

Definitie 5.2. Een deelverzameling V van Z heet **verzadigd** als voor elke $y \in Y$ met $V \cap q^{-1}(y) \neq \emptyset$ geldt dat $q^{-1}(y) \subseteq V$.

In andere woorden: $V \subseteq Z$ is verzadigd als voor elke equivalentieklasse $D \subseteq Z$ geldt dat D volledig bevat is in V of geen enkel element uit D is bevat in V.

Stelling 5.1. V is verzadigd in Z dan en slechts dan als $q^{-1}\big[q[V]\big] = V$.

Bewijs. Stel dat V verzadigd is in Z. We weten dat $V \subseteq q^{-1}\big[q[V]\big]$. Dus we moeten alleen nog laten zien dat $q^{-1}\big[q[V]\big] \subseteq V$. Neem $v \in q^{-1}\big[q[V]\big]$ willekeurig. Schrijf $y = q(v)$. Dan is $y \in q[V]$. Dus $V \cap q^{-1}(y) \neq \emptyset$. Nu volgt dat $v \in q^{-1}(y) \subseteq V$, omdat V verzadigd is.
We nemen nu aan dat V niet verzadigd is en dat $q^{-1}\big[q[V]\big] = V$. We zullen laten zien dat dit tot tegenspraak leidt. Er is een $y \in Y$ waarvoor $q^{-1}(y) \cap V \neq \emptyset$ en $y = q(z)$ voor een $z \in Z \setminus V$. Dan is $z \notin q^{-1}\big[q[V]\big]$, want we hebben aangenomen dat $q^{-1}\big[q[V]\big] = V$. Dus $y \notin q[V]$ en daarom $q^{-1}(y) \cap V = \emptyset$. Tegenspraak! Dus $q^{-1}\big[q[V]\big] = V$ impliceert dat V verzadigd is in Z. $\square$

Opmerking 5.1. Voor $U \subseteq Y$ geldt dat $q^{-1}[U]$ verzadigd is in Z, want $q^{-1}[U] \cap q^{-1}\big[\{y\}\big] \neq \emptyset$ dan en slechts dan als $q^{-1}\big[\{y\}\big] \subseteq q^{-1}[U]$.

Opmerking 5.2. De verzadigde verzameling O is open in Z dan en slechts dan als $q[O]$ open is in Y. Er geldt namelijk dat $q[O]$ open is in Y dan en slechts dan als $q^{-1}\big[q[O]\big]$ open is in Z. En $O = q^{-1}\big[q[O]\big]$, want O is verzadigd.
Op vergelijkbare manier is de verzadigde verzameling F gesloten in Z dan en slechts dan als $q[F]$ gesloten is in Y.

Om aan te tonen dat Y de T_3-eigenschap heeft, gebruiken we de volgende stelling:

Stelling 5.2. Y is T_3 als voor elke $y \in Y$ en elke open verzadigde omgeving $U \subseteq Z$ van $q^{-1}(y)$, er een open verzadigde verzameling $E \subseteq Z$ en een gesloten verzadigde verzameling $F \subseteq Z$ zijn zodat $q^{-1}(y) \subseteq E \subseteq F \subseteq U$.

Bewijs. Zij $y \in Y$ en $G \subseteq Y$ een gesloten verzameling met $y \notin G$. Dan is $Y \setminus G$ open in Y. Per definitie is $U = q^{-1}[Y \setminus G]$ open in Z. We weten ook dat U verzadigd is, zie opmerking 5.1. Dus U is een verzadigde open omgeving van y. Dan zijn er verzadigde verzamelingen E en F, waarbij E open is en F gesloten, met de eigenschap dat $q^{-1}(y) \subseteq E \subseteq F \subseteq U$.
Nu is $q[E]$ een open omgeving van y. Verder is $q[F]$ gesloten in Y. Dus $Y \setminus q[F]$ is open in Y en $q[F] \subseteq Y \setminus G$. Derhalve is $G \subseteq Y \setminus q[F]$. We weten dat $q[E] \cap (Y \setminus q[F]) = \emptyset$, omdat $q[E] \subseteq q[F]$. Dus $q[E]$ en $Y \setminus q[F]$ zijn open disjuncte omgevingen van y respectievelijk G. Daarom is Y een T_3-ruimte. □

Laat nu $y \in Y$ en zij U een verzadigde open verzameling in Z met de eigenschap dat $q^{-1}(y) \subseteq U$. Dan zijn we op zoek naar verzadigde verzamelingen E en F die respectievelijk open en gesloten zijn in Z en waarvoor geldt dat $q^{-1}(y) \subseteq E \subseteq F \subseteq U$. We onderscheiden twee gevallen: $q^{-1}(y) = B$ en $q^{-1}(y) \neq B$.
In het eerste geval, $q^{-1}(y) = B$, geldt voor elke $x \in X$ dat $U_x = \{u \in X : (x, u) \in U\}$ een open omgeving van $b \in X$ is. Vanwege de regulariteit van X kunnen we een open omgeving C_x van b kiezen met de eigenschap dat $b \in C_x \subseteq \overline{C_x} \subseteq U_x$. Bovendien kan C_x zó gekozen worden dat $a \notin \overline{C_x}$, omdat voor a en b er disjuncte open omgevingen O_a en O_b in X zijn, want X is T_2. Definieer nu $E_1 = \bigcup_{x \in X} C_x$ en $F_1 = \bigcup_{x \in X} \overline{C_x}$.
Vervolgens kiezen we voor elke $x \in X$ met $a \in U_x$ een open verzameling $A_x \subseteq X$ zodat $a \in A_x \subseteq \overline{A_x} \subseteq U_x$ en $b \notin \overline{A_x}$. Ook hier gebruiken we de T_3-eigenschap van X.
Voor $n > 1$ definiëren we de verzamelingen E_n en F_n recursief.
Laat $S_{n-1} = \{x \in X : g(x, a) \in E_{n-1}\}$. Definieer

$$E_n = E_{n-1} \cup \Big(\bigcup_{x \in S_{n-1}} A_x \Big) \text{ en } F_n = F_{n-1} \cup \Big(\bigcup_{x \in S_{n-1}} \overline{A_x} \Big).$$

Dan zijn

$$E = \bigcup_{n \geq 1} E_n \text{ en } F = \bigcup_{n \geq 1} F_n$$

de verzamelingen die we zoeken.

Merk op dat E open is en $B \subseteq E \subseteq F \subseteq U$. De verzameling F is gesloten in Z, want voor elke $x \in X$ is $\{f : (x, f) \in F\}$ gelijk aan $\overline{C_x} \cup \overline{A_x}$ of aan $\overline{C_x}$.
We moeten dus alleen nog controleren dat deze verzamelingen verzadigd zijn in Z. Voor vaste $x \in X$ geldt dat $(x, a) \in E$ dan en slechts dan als $g(x, a) \in E$. Hieruit volgt dat E òf elk element uit een equivalentieklasse bevat òf geen. Dus is E verzadigd. Hetzelfde geldt voor F.

Het geval dat $q^{-1}(y) \neq B$ is vergelijkbaar. We zullen de constructie van de verzamelingen E en F geven. In dit geval is $q^{-1}(y) = \{(t, a), g(t, a)\}$ voor een zekere $t \in X$. Zij $x \in X$ willekeurig. Definieer $H_x = \{(t, a), g(t, a)\} \cap \{(x, u) : u \in X\}$. Als $H_x = \emptyset$ dan nemen we $C_x = \overline{C_x} = \emptyset$. In het geval dat $H_x \neq \emptyset$, is er een open verzameling C_x zodat $H_x \subseteq C_x \subseteq \overline{C_x} \subseteq U_x$ en $b \notin \overline{C_x}$.
Definieer nu $E_1 = \bigcup_{x \in X} C_x$ en $F_1 = \bigcup_{x \in X} \overline{C_x}$.
Vervolgens nemen we voor elke $x \in X$ met $(x, a) \in U$ een open verzameling A_x zodat $a \in A_x \subseteq \overline{A_x} \subseteq U_x$ en $b \notin \overline{A_x}$.
Ook nu definiëren we E_n en F_n recursief. We nemen weer $S_{n-1} = \{x \in X : g(x, a) \in E_{n-1}\}$. En definiëren vervolgens $E_n = E_{n-1} \cup \left(\bigcup_{x \in S_{n-1}} A_x\right)$ en $F_n = F_{n-1} \cup \left(\bigcup_{x \in S_{n-1}} \overline{A_x}\right)$.
Ten slotte nemen we de vereniging: $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$ en $F = \bigcup_{n \geq 1} F_n$. Dit zijn de verzamelingen die we zoeken.
Merk op dat $B \cap F = \emptyset$ en dat $(x, a) \in F$ dan en slechts dan als $g(x, a) \in F$. Hetzelfde geldt voor E. Dus E en F zijn verzadigde verzamelingen. Verder zien we dat E open is. De verzameling F is gesloten, want voor elke $x \in X$ is $\{f : (x, f) \in F\}$ gelijk aan de lege verzameling of aan $\overline{C_x}$ of aan $\overline{C_x} \cup \overline{A_x}$. Dus E en F zijn inderdaad open respectievelijk gesloten verzamelingen die verzadigd zijn in Z. Hiermee hebben we bewezen dat de ruimte regulier is.

Stel dat $b \in X$ zó is dat voor elke $x, y \in X \setminus \{b\}$ er clopen disjuncte O_x en O_y zijn met $x \in O_x$ en $y \in O_y$. Dit is bijvoorbeeld het geval in de reguliere ruimte van Thomas die niet volledig regulier is. Dan heeft $Y \setminus q[B]$ deze eigenschap ook. Dit kan op dezelfde manier bewezen worden als de regulariteit van Y. We kunnen het grootste deel van het bewijs kopiëren, maar nemen voor elke $x \in X$ verzamelingen C_x en A_x clopen. Dan is $E = F$ ook clopen en net als in het voorgaande stuk verzadigd. We zien nu dat $q[B]$ een dispersiepunt is van Y. Merk op dat Y samenhangend is, vanwege de net bewezen eigenschap dat elke continue reëelwaardige functie constant is.

6 | Overaftelbaar product

In dit hoofdstuk zullen we een product van normale ruimten bekijken. We zullen zien dat de productruimte zelf niet normaal is. Ook zullen we zien dat de separabiliteit afhangt van de 'grootte' van het product. We nemen de verzameling:

$$X_\lambda = \prod_{\alpha \in A} \mathbb{Z}^+_\alpha$$

Voor elke $\alpha \in A$ heeft $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, ...\}$ de discrete topologie en X_λ heeft de producttopologie. Hier staat λ voor de kardinaliteit van A. We nemen aan dat A overaftelbaar is.

6.1 Scheidingsingseigenschappen

Eerst zullen we een aantal scheidingseigenschappen van X_λ bestuderen. We weten dat $\mathbb{Z}^+$ met de discrete topologie Hausdorff is, dus is X_λ dat ook. Immers, als $x, y \in X_\lambda$ en $x \neq y$, dan is er een $\alpha \in A$ zodat $x_\alpha \neq y_\alpha$. Dus zijn $\pi_\alpha^{-1}(x_\alpha)$ en $\pi_\alpha^{-1}(y_\alpha)$ open disjuncte omgevingen van x respectievelijk y.

We zullen nu bewijzen dat X_λ volledig regulier is. Zij $F \subseteq X_\lambda$ gesloten en $x \in X_\lambda \setminus F$. Dan is er een basis-open verzameling $B = \bigcap_{j=1}^m \pi_{\alpha_j}^{-1}[U_i] \subseteq X_\lambda \setminus F$ met $m \in \mathbb{Z}^+$. Neem voor elke $i \in \{1, ..., m\}$ een continue functie $f_{\alpha_i} : \mathbb{Z}^+ \to [0, 1]$ zó dat $f_{\alpha_i}(x_{\alpha_i}) = 1$ en $f_{\alpha_i}(y) = 0$ als $y \notin U_i$. Merk op dat deze functies bestaan, omdat $\mathbb{Z}^+$ volledig regulier is.
Definieer nu $g : X_\lambda \to [0, 1]$ door $g(z) = \prod_{j=1}^m f_{\alpha_j}(z_{\alpha_j})$. Dan is g een continue functie met de eigenschap dat $g(x) = 1$ en $g(z) = 0$ voor $z \in X_\lambda \setminus B$, dus ook voor elke $z \in F$ is $g(z) = 0$. Hieruit volgt dat X_λ volledig regulier is.

De eigenschappen die we tot nu toe hebben bekeken, waren eenvoudig af te leiden uit het feit dat $\mathbb{Z}^+$ deze eigenschappen heeft. Het ligt daarom in de lijn der verwachting dat de producttopologie van X_λ normaal is, net als $\mathbb{Z}^+$ met de discrete topologie. Dit is echter niet het geval. Stone heeft dit bewezen in zijn artikel *Paracompactness and Product Spaces* [12]. Het bewijs dat we hier bespreken is gebaseerd op het artikel van Stone.
We nemen aan dat de ruimte normaal is en zullen laten zien dat dit tot tegenspraak leidt. Om te beginnen gaan we twee gesloten disjuncte verzamelingen, P_1 en P_2, definiëren. Vanwege de aanname dat X_λ normaal is, zijn er open disjuncte verzamelingen U en V die respectievelijk P_1 en P_2 bevatten. Ten slotte zullen we een tegenspraak afleiden door een punt aan te wijzen dat zowel in U als in V zit.
We definiëren $P_1 \subseteq X_\lambda$ als de verzameling van alle punten waarvoor alléén het getal 1 meer dan één keer als coördinaat voorkomt. Op vergelijkbare wijze definiëren we $P_2 \subseteq X_\lambda$ als de verzameling van alle punten zodat alleen het getal 2 meer dan één maal als coördinaat voorkomt. Dus $p \in P_2$ dan en slechts dan als voor elke $k \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{2\}$ het getal k maximaal één keer een coördinaat van p is. Merk op dat deze beschrijvingen van P_2 equivalent zijn, omdat A overaftelbaar is. We kunnen de verzamelingen P_i voor $i \in \{1, 2\}$ ook op een andere manier beschrijven. Als we elk punt $p \in X_\lambda$ zien als een functie $p : A \to \mathbb{Z}^+$ dan geldt dat $p \in P_i$ dan en slechts dan als p injectief is op $A \setminus \{\alpha : p_\alpha = i\}$.

Merk op dat P_1 en P_2 disjunct zijn, omdat voor punten in P_1 geldt dat 1 meer dan één keer als coördinaat voorkomt terwijl voor punten in P_2 het getal 1 maximaal één keer als coördinaat voorkomt.
Zij $i \in \{1, 2\}$. Dan is er voor elke $x \in X_\lambda \setminus P_i$ minstens één $n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{i\}$ die meer dan één keer als coördinaat van x voorkomt. Dus vinden we dat $X_\lambda \setminus P_i$ de vereniging is van open verzamelingen:

$$X_\lambda \setminus P_i = \bigcup_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{Z}^+ \\ n\neq i}} \left(\pi_\alpha^{-1}(n) \cap \pi_\beta^{-1}(n)\right)$$

Hieruit volgt dat P_i gesloten is. Neem aan dat U en V open disjuncte verzamelingen zijn zodat $P_1 \subseteq U$ en $P_2 \subseteq V$. We zullen een tegenspraak afleiden.
Eerst zullen we recursief een rij punten in P_1 en een rij punten in A construeren. We beginnen met het punt $x^1 = (x^1_\alpha)_{\alpha\in A}$ waarvoor $x^1_\alpha = 1$ voor elke $\alpha \in A$. Dan is $x^1 \in P_1 \subseteq U$. Daarna kiezen we $\alpha_1, ..., \alpha_{m(1)} \in A$ met $m(1) \in \mathbb{Z}^+$ zó dat $\bigcap_{j=1}^{m(1)} \pi_{\alpha_j}^{-1}(x^1_{\alpha_j}) \subseteq U$. Merk op dat deze $\alpha_1, ..., \alpha_{m(1)}$ bestaan, omdat U open is.
Neem nu aan dat α_j bekend is voor $j \in \{1, ..., m(n)\}$. Dan kiezen we $x^{n+1} \in P_1$ zó dat

$$x^{n+1}_\alpha = \begin{cases} j & \text{als } \alpha = \alpha_j \text{ voor } j \in \{1, ..., m(n)\} \\ 1 & \text{anders} \end{cases}$$

Nu x^{n+1} en $\alpha_1, ..., \alpha_{m(n)}$ bekend zijn, kunnen we $\beta_1, ..., \beta_k$ zó kiezen dat $\bigcap_{j=1}^{k} \pi_{\beta_j}^{-1}(x^{n+1}_{\beta_j}) \subseteq U$. Elke β_i die nog niet voorkomt in het rijtje $(\alpha_j)_{j=1}^{m(n)}$ voegen we aan dit rijtje toe. We noteren deze elementen als $\alpha_{m(n)+1}, ..., \alpha_{m(n+1)}$. In het geval dat elke β_i voorkomt in het rijtje $(\alpha_j)_{j=1}^{m(n)}$, kunnen we een willekeurige α aan het rijtje toevoegen. Voor deze α moet gelden dat $\alpha \neq \alpha_j$ voor elke $j \leq m(n)$. De recursieve constructie van de rijen is nu voltooid.
Vervolgens kiezen we $y \in X_\lambda$ zodat

$$y_\alpha = \begin{cases} j & \text{als } \alpha = \alpha_j \text{ voor een zekere } j \in \mathbb{Z}^+ \\ 2 & \text{anders} \end{cases}$$

Dan is $y \in P_2 \subseteq V$. Dus is er een basisomgeving B_y van y met $B_y \subseteq V$. Hieruit volgt dat er een verzameling $G \subseteq A$ is die eindig veel elementen bevat en zó is dat

$$B_y = \bigcap_{\gamma\in G} \pi_\gamma^{-1}(y_\gamma).$$

Kies nu $k \in \mathbb{Z}^+$ zó dat $\alpha_n \in A \setminus G$ voor alle $n > m(k)$. Merk op dat deze $m(k)$ bestaat, omdat G eindig veel elementen bevat.
Definieer ten slotte het punt $z \in X_\lambda$ als volgt:

$$z_\alpha = \begin{cases} j & \text{als } \alpha = \alpha_j \text{ voor een zekere } j \in \{1, ..., m(k)\} \\ 1 & \text{als } \alpha = \alpha_i \text{ voor een zekere } i \in \{m(k)+1, ..., m(k+1)\} \\ 2 & \text{anders} \end{cases}$$

We zien dat $z_\alpha = y_\alpha$ als $\alpha \in G$. Voor $\alpha \in G$ geldt immers dat $z_\alpha = j = y_\alpha$ als $\alpha = \alpha_j$ voor een $j \in \{1, ..., m(k)\}$, òf $z_\alpha = 2 = y_\alpha$ als $\alpha \neq \alpha_j$ voor alle $j \in \mathbb{Z}^+$. Daarom is $B_y \subseteq V$ ook een

basisomgeving van z.
Uit de definitie van z volgt dat $z_\alpha = j = x_\alpha^{k+1}$ als $\alpha = \alpha_j$ voor een $j \in \{1, ..., m(k)\}$, en $z_\alpha = 1 = x_\alpha^{k+1}$ als $\alpha = \alpha_j$ voor een zekere $j \in \{m(k)+1, ..., m(k+1)\}$. Derhalve is $z \in \bigcap_{j=1}^{m(k+1)} \pi_j^{-1}(x_j^{k+1}) \subseteq U$.
We hebben nu gevonden dat $z \in U \cap V$. Dit is in tegenspraak met de aanname dat U en V disjunct zijn! De overaftelbare productruimte van $\mathbb{Z}^+$ is dus niet normaal.

6.2 Aftelbaarheidsaxioma's

De producttopologie van X_λ voldoet niet aan het eerste en tweede aftelbaarheidsaxioma. We gaan dit bewijzen door aan te nemen dat de topologie wel aan het eerste aftelbaarheidsaxioma voldoet en daaruit een tegenspraak af te leiden.
Stel dat $\mathcal{B}_p = \{B_i : i \in \mathbb{Z}^+\}$ een aftelbare lokale basis is voor het punt $p \in X_\lambda$. Definieer voor $n \in \mathbb{Z}^+$ de verzameling $A_n = \{\alpha \in A : \pi_\alpha[B_n] \neq \mathbb{Z}^+\}$. Dan is A_n eindig voor elke $n \in \mathbb{Z}^+$, omdat X_λ de producttopologie heeft. Dus $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ is aftelbaar. Hieruit volgt dat er een $\beta \in A$ is die in geen enkele A_n zit, want A is overaftelbaar. Dus $\pi_\beta[B_i] = \mathbb{Z}^+$ voor elke i. De verzameling $O = \pi_\beta^{-1}(p_\beta)$ is een open omgeving van p met de eigenschap dat $\pi_\beta[O] \neq \mathbb{Z}^+$. Dus B_n is voor geen enkele n bevat in O. Maar dan is $\mathcal{B}_p$ geen lokale basis. Met deze tegenspraak hebben we laten zien dat X_λ niet aan het eerste en dus ook niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet.

6.3 Separabiliteit

In deze paragraaf zullen we een niet-triviale eigenschap van X_λ bewijzen: De ruimte X_λ is separabel dan en slechts dan als $\lambda \leq 2^{\aleph_0}$.
We zullen beginnen met het bewijs dat X_λ separabel is als $\lambda \leq 2^{\aleph_0}$. Eerst nemen we aan dat $\lambda = 2^{\aleph_0}$. Dan bestaat er een bijectie ϕ van A naar het eenheidsinterval I.
Zij $k \in \mathbb{Z}^+$. Laat $J_i = [p_i, q_i]$ met $p_i, q_i \in I \cap \mathbb{Q}$ voor $i \in \{1, ..., k\}$ zo zijn dat $q_i < p_{i+1}$ voor elke $i < k$. Oftewel $J_1, ..., J_k$ zijn gesloten, disjuncte intervallen in I met rationale eindpunten. Neem voor elke $i \in \{1, 2, ..., k\}$ een positief geheel getal en noem dit n_i. Dan definiëren we $p(J_1, ..., J_k; n_1, ..., n_k)$ als het punt $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ in X_λ met

$$p_\alpha = \begin{cases} n_i & \text{als } \phi(\alpha) \in J_i \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Nu nemen we de verzameling van al dit soort punten in X_λ en noemen deze verzameling D. We zullen aantonen dat $D = \{p(J_1, ..., J_k; n_1, ..., n_k) : \text{ alle } (J_1, ..., J_k; n_1, ..., n_k) \text{ en } k \in \mathbb{Z}^+\}$ een aftelbare, dichte verzameling in X_λ is.

We laten eerst zien dat er voor elke $k \in \mathbb{Z}^+$ aftelbaar veel $2k$-tallen $(J_1, ..., J_k; n_1, ..., n_k)$ zijn. Neem $i \in \{1, ..., k\}$, dan heeft het interval J_i rationale eindpunten, dus zijn er aftelbaar veel intervallen J_i. Natuurlijk is het aantal n_i voor vaste i ook aftelbaar, omdat $n_i \in \mathbb{Z}^+$. Dus voor elke k is het aantal $2k$-tallen $(J_1, ..., J_k; n_1, ..., n_k)$ gelijk aan $(\aleph_0)^k \cdot (\aleph_0)^k = \aleph_0$. Dus $|D| = \prod_{k \in \mathbb{Z}^+} \aleph_0 = \aleph_0$.

We zullen aantonen dat D dicht is in X_λ door te laten zien dat D elke open niet-lege verzameling $O \subseteq X_\lambda$ snijdt. Zij O een open niet-lege deelverzameling van X_λ. Dan is er een

$B = \bigcap_{j=1}^{k} \pi_{\alpha_j}^{-1}[U_{\alpha_j}]$ met niet-lege $U_{\alpha_j} \subseteq \mathbb{Z}^+$ en k eindig, zodat B bevat is in O.
Kies nu gesloten en disjuncte intervallen $J_1, ..., J_k$ met rationale eindpunten in I, waarvoor geldt dat $\phi(\alpha_j) \in J_j$ voor elke $j \in \{1, ..., k\}$. Merk op dat deze intervallen bestaan, omdat ϕ een bijectie is en $I \cap \mathbb{Q}$ dicht is in I. Neem voor elke $j \in \{1, ..., k\}$ een $n_j \in U_{\alpha_j}$.
Dan is $p = p(J_1, ..., J_k; n_1, ..., n_k)$ zó dat

$$p_\alpha = \begin{cases} n_i & \text{als } \phi(\alpha) \in J_i \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Dus $p_{\alpha_i} = n_i \in U_{\alpha_i}$ voor elke $i \in \{1, ..., k\}$. Hieruit volgt dat $p \in B$ en per definitie geldt dat $p \in D$. Daarom is de doorsnede van O met D niet-leeg, dus D is dicht in X_λ.

Voorbeeld 6.1. *Stel $A = \mathbb{R}$ en $\phi : \mathbb{R} \to I$ is een bijectie. Neem $B = \pi_{\sqrt{2}}^{-1}\big[\{103\}\big] \cap \pi_7^{-1}\big[\{1, ..., 50\}\big]$. Kies $q \in \mathbb{Q}$ zodat q tussen $\phi(\sqrt{2})$ en $\phi(7)$ ligt. Nu nemen we als J_1 en J_2 de intervallen $[0, q - \frac{1}{m}]$ en $[q + \frac{1}{m}, 1]$ voor zekere $m \in \mathbb{Z}^+$. Kies $n_1 = 103$ en $n_2 = 1$. Dan is $p(J_1, J_2; n_1, n_2)$ zó dat $p_\alpha = 103$ als $\phi(\alpha) \in J_1$ en $p_\alpha = 1$ als $\phi(\alpha) \in J_2$. We zien dus $p_{\sqrt{2}} = 103$ en $p_7 \in \{1, ..., 50\}$ en daarom geldt dat $p \in B$.*

Omdat D aftelbaar en dicht is in X_λ, kunnen we concluderen dat X_λ separabel is voor $\lambda = 2^{\aleph_0}$.
Nu we dit bewezen hebben, kunnen we aantonen dat

$$X_\mu = \prod_{\beta \in B} \mathbb{Z}_\beta^+$$

ook separabel is voor $\mu = |B| < 2^{\aleph_0}$. Zonder beperking der algemeenheid kunnen we aannemen dat $B \subseteq A$. Neem de projectie $p : X_\lambda \to X_\mu$ gegeven door $p\big((x_\alpha)_{\alpha \in A}\big) = (x_\alpha)_{\alpha \in B}$. Dan is p een continue surjectie. De verzameling D is dicht en aftelbaar in X_λ, dus $p[D]$ is dicht en aftelbaar in X_μ. Daarom is X_μ ook separabel.

Ten slotte zullen we aantonen dat $\lambda > 2^{\aleph_0}$ impliceert dat X_λ niet separabel is. In andere woorden, we gaan laten zien dat als X_λ separabel is, er geldt dat $\lambda \leq 2^{\aleph_0}$. Stel dat D een aftelbaar dichte deelverzameling van X_λ is. Definieer de functie Φ van A naar de machtsverzameling van D als volgt: $\Phi(\alpha) = D \cap \pi_\alpha^{-1}(1)$.
We zullen nu bewijzen dat Φ injectief is. Stel dat $\beta \neq \gamma$. Dan geldt $D \cap \big(\pi_\beta^{-1}(1) \cap \pi_\gamma^{-1}(2)\big) \neq \emptyset$, omdat D dicht is in X_λ. Dus is er een punt $x \in D$ met $x_\beta = 1$ en $x_\gamma = 2$. Hieruit volgt dat $x \in D \cap \pi_\beta^{-1}(1)$ en dat $x \notin D \cap \pi_\gamma^{-1}(1)$. Dus $D \cap \pi_\beta^{-1}(1)$ is niet bevat in $D \cap \pi_\gamma^{-1}(1)$. Op vergelijkbare wijze zien we dat $D \cap \pi_\gamma^{-1}(1)$ niet bevat is in $D \cap \pi_\beta^{-1}(1)$. Daarom is $D \cap \pi_\beta^{-1}(1) \neq D \cap \pi_\gamma^{-1}(1)$ en dus is Φ injectief.
Uit de injectiviteit van Φ volgt nu dat $\lambda = |A| \leq |\mathcal{P}(D)|$. Verder weten we dat D aftelbaar is, dus $|\mathcal{P}(D)| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)| = 2^{\aleph_0}$. We vinden dat $\lambda \leq 2^{\aleph_0}$.
Dus X_λ is alleen separabel als $\lambda \leq 2^{\aleph_0}$.

Dit resultaat laat zien dat de bewering 'de ruimte X is separabel' niet equivalent is met 'de ruimte X heeft de Souslin-eigenschap'. Om dit te kunnen uitleggen, hebben we definitie van 'Souslin-eigenschap' nodig.

Definitie 6.1. Een ruimte heeft de **Souslin-eigenschap** als elke familie paarsgewijs disjuncte open niet-lege verzamelingen aftelbaar is.

We zullen laten zien dat voor elke $\lambda > \aleph_0$, geldt dat X_λ de Souslin-eigenschap heeft. Voor dit bewijs is gebruik gemaakt van het boek *General Topology* van Engelking [4].
Stel dat $\mathcal{F} = \{B_t : t \in T\}$ een familie paarsgewijs disjuncte open verzamelingen is zodat $B_t \neq \emptyset$ voor elke $t \in T$. We kunnen aannemen dat $\mathcal{F}$ bestaat uit basis-open verzamelingen, want in elke open verzameling zit een basis-open verzameling. Veronderstel dat $\mathcal{F}$ niet aftelbaar is, oftewel dat $|T| > \aleph_0$. We zullen laten zien dat dit tot tegenspraak leidt. Neem een deelverzameling $F \subseteq T$ met $\aleph_0 < |F| \leq 2^{\aleph_0}$. Voor elke $t \in F$ is er een eindige verzameling S_t zó dat $B_t = \bigcap_{\alpha \in S_t} \pi_\alpha^{-1}[W_\alpha^t]$ met $W_\alpha^t \neq \mathbb{Z}^+$. Neem nu de verzameling $S = \bigcup_{t \in F} S_t$, dan is $\nu = |S| \leq 2^{\aleph_0}$, omdat S_t eindig is voor elke $t \in F$.
Het product $X_\nu = \prod_{\alpha \in S} \mathbb{Z}_\alpha^+$ is separabel, want $\nu \leq 2^{\aleph_0}$. Deze productruimte heeft dus een dichte deelverzameling die aftelbaar is, we noemen deze deelverzameling D. Elke verzameling $U_t = \bigcap_{\alpha \in S_t} \pi_\alpha^{-1}[W_\alpha^t]$ in X_ν met $W_\alpha^t \neq \mathbb{Z}^+$ is open in X_ν en heeft daarom een niet-lege doorsnede met D. We weten dat D aftelbaar is en dat de verzamelingen U_t disjunct zijn, dus $|S| \leq |D| = \aleph_0$. Maar dit is in tegenspraak met $|S| \geq |F| > \aleph_0$. Derhalve bevat T geen deelverzameling met kardinaliteit groter dan $\aleph_0$. Dus X_λ heeft de Souslin-eigenschap.

6.4 Compactheid

Ten slotte zullen we bewijzen dat X_λ niet lokaal compact en dus niet compact is. Hiervoor gebruiken we de volgende stelling uit het dictaat *Topologie* [3]:

Stelling 6.1. Als $f : X \to Y$ een continue surjectie is en X is compact, dan is Y ook compact.

We nemen aan dat X_λ lokaal compact is en zullen een tegenspraak afleiden. Neem een punt $x \in X_\lambda$ en stel dat V een compacte omgeving van x is. We weten dat $\pi_\alpha[V] \neq \mathbb{Z}^+$ voor eindig veel $\alpha \in A$. Dus is er een $\beta \in A$ met de eigenschap dat $\pi_\beta[V] = \mathbb{Z}^+$. De functie $\pi_\beta : V \to \mathbb{Z}^+$ is een continue surjectie. Dus uit stelling 6.1 volgt dat $\mathbb{Z}^+$ compact is. Maar $\mathbb{Z}^+$ heeft de discrete topologie, dus we hebben een tegenspraak afgeleid! We kunen nu concluderen dat de ruimte X_λ niet lokaal compact is en dus niet compact.

7 | Helly's ruimte

Helly's ruimte is vernoemd naar Euard Helly [15]. Eduard Helly was een Oostenrijkse wiskundige die leefde van 1884 tot 1943. Behalve deze ruimte, zijn er ook stellingen en een metriek naar Eduard Helly vernoemd.
Voor het schrijven van dit hoofdstuk heb ik naast het boek *Counterexamples in Topology*, ook gebruik gemaakt van een artikel van Dan Ma [7].

De ruimte van Helly heeft meerdere bijzondere eigenschappen. Voordat we deze gaan bestuderen, moeten we de ruimte definiëren. We beginnen met het product van overaftelbaar veel eenheidsintervallen:

$$I^I = \prod_{i \in [0,1]} [0,1]_i$$

Deze ruimte heeft de producttopologie. Vervolgens definiëren we de ruimte van Helly als de deelverzameling $\mathbb{H}$ van I^I die bestaat uit alle punten $x \in I^I$ met $x_i \leq x_j$ voor alle $i, j \in I$ met $i \leq j$. Deze ruimte heeft de deelruimtetopologie. Vanaf nu zullen we punten in I^I en $\mathbb{H}$ zien als functies. Dan zeggen we dat $\mathbb{H}$ bestaat uit alle niet-dalende functies van het eenheidsinterval naar het eenheidsinterval.

We zullen eerst laten zien dat $\mathbb{H}$ gesloten is in I^I. Zij $f \in I^I \setminus \mathbb{H}$. Dan zijn er $x, y \in I$ met de eigenschap dat $x < y$ en $f(x) > f(y)$. Kies $\epsilon = \frac{1}{4}\big(f(x) - f(y)\big)$. Neem nu de open omgeving $U_x = (f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon) \cap [0,1]$ van $f(x)$ en op vergelijkbare wijze de open omgeving U_y van $f(y)$. Dan is $U = \pi_x^{-1}[U_x] \cap \pi_y^{-1}[U_y]$ een open omgeving van f. Als $g \in U$, dan is $g(x) - g(y) \geq f(x) - \epsilon - \big(f(y) + \epsilon\big) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(y)\big) > 0$. Dus $g \notin \mathbb{H}$. Hieruit volgt dat $U \subseteq I^I \setminus \mathbb{H}$. Daarom is $I^I \setminus \mathbb{H}$ open in I^I en dus is $\mathbb{H}$ gesloten in I^I.

7.1 Scheidingseigenschappen en compactheid

We zullen nu aantonen dat de ruimte van Helly de Hausdorff-eigenschap heeft. Om dit te laten zien, hoeven we alleen maar aan te tonen dat I^I Hausdorff is. Merk op dat het eenheidsinterval met de standaard topologie de Hausdorff-eigenschap heeft. Neem $f, g \in I^I$ met $f \neq g$. Dan is er een $x \in I$ met $f(x) \neq g(x)$. Kies $\epsilon = \frac{1}{4}|f(x) - g(x)|$, dan zijn $U = (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$ en $V = (g(x) - \epsilon, g(x) + \epsilon)$ disjunct. Dus

$$\pi_x^{-1}\big[[0,1] \cap U\big] \text{ en } \pi_x^{-1}\big[[0,1] \cap V\big]$$

zijn open, disjuncte omgevingen van f respectievelijk g. Hieruit volgt dat I^I en de deelruimte $\mathbb{H}$ Hausdorff zijn.

We weten, dankzij de stelling van Tychonoff, dat de productruimte I^I compact is. Bovendien weten we dat $\mathbb{H}$ gesloten is in I^I. Dus $\mathbb{H}$ is een gesloten deelverzameling van een compacte ruimte. Hieruit volgt dat $\mathbb{H}$ zelf compact is. De ruimte van Helly is dus compact en Hausdorff. We krijgen nu cadeau dat deze ruimte normaal is.

7.2 Aftelbaarheidsaxioma's

De ruimte van Helly voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma, maar niet aan het tweede. We zullen nu eerst laten zien dat voor willekeurige $f \in \mathbb{H}$ er een aftelbare lokale basis bestaat. Om te beginnen definiëren we een aftelbare verzameling die we A_f noemen. Deze verzameling bestaat uit alle rationale getallen in het eenheidsinterval en alle punten waar f discontinu is. De functie f heeft maximaal aftelbaar veel discontinuïteiten. Dus we kunnen de verzameling A_f aftellen, $A_f = \{a_k : k \in \mathbb{Z}^+\}$.
Schrijf $U_{k,j}$ voor de open omgeving $\Big(f(a_k) - \frac{1}{j}, f(a_k) + \frac{1}{j}\Big) \cap I$ met $k, j \in \mathbb{Z}^+$. Vervolgens definiëren we voor elke $j \in \mathbb{Z}^+$ en elke eindige deelverzameling K van $\mathbb{Z}^+$ de verzameling

$$B(K, j) = \bigcap_{k \in K} \pi_{a_k}^{-1}[U_{k,j}].$$

Ten slotte beschrijven we de lokale basis in het punt f:

$$\mathcal{B}_f = \big\{B(K, j) : j \in \mathbb{Z}^+, K \subseteq \mathbb{Z}^+ \text{ eindig}\big\}.$$

We zullen laten zien dat deze lokale basis aftelbaar is. Voor elke eindige verzameling K is het aantal basisomgevingen $B(K, j)$ aftelbaar, want $j \in \mathbb{Z}^+$. Ook het aantal eindige deelverzamelingen K van de positieve gehele getallen is aftelbaar. Dus de lokale basis $\mathcal{B}_f$ bevat $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ verzamelingen.
We moeten nu alleen nog laten zien dat $\mathcal{B}_f$ een lokale basis is in f. Merk op dat we alleen hoeven aan te tonen dat er voor elke subbasisomgeving U, bepaald door één coördinaat, een verzameling $B(K, j)$ is zó dat $B(K, j) \subseteq U$. Elke open omgeving is bepaald door eindig veel coördinaten en bevat dus de eindige doorsnede van subbasiselementen die dan op zijn beurt weer de eindige doorsnede van elementen van $\mathcal{B}_f$ bevat.
Neem een willekeurige subbasis omgeving $U = \pi_y^{-1}[O]$, met $y \in I$ en $O = \big(f(y)-\epsilon, f(y)+\epsilon\big)\cap I$ voor een $\epsilon > 0$. We zullen nu laten zien dat er een verzameling $B(K, j)$ is die binnen deze U zit. We onderscheiden twee gevallen: in het eerste geval is f niet continu in y en in het tweede geval wel.
Als f niet continu is in y, kiezen we een $n \in \mathbb{Z}^+$ waarvoor $\frac{1}{n} \leq \epsilon$. Merk op dat $y = a_k$ voor een $k \in \mathbb{Z}^+$, omdat $y \in A_f$. Dus $B\big(\{k\}, n\big) \subseteq U$.
Stel nu dat f wel continu is in y. Dan is er een $\delta > 0$ zodat $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ voor elke $x \in I$ met $|x - y| < \delta$. Neem nu $a_i, a_j \in \mathbb{Q} \cap I \subseteq A_f$ zó dat $a_i \in (y, y + \delta)$ en $a_j \in (y - \delta, y)$. Kies vervolgens $k, m \in \mathbb{Z}^+$ met de eigenschap dat de intervallen $U_{i,k}$ en $U_{j,m}$ volledig bevat zijn in O. Neem $n = \max\{k, m\}$ en $K = \{i, j\}$. Dan is $U_{i,n} \subseteq O$ en $U_{j,n} \subseteq O$. We zullen nu aantonen dat $B(K, n) \subseteq U$. Neem $g \in B(K, n)$ willekeurig. Dan is $g(a_i) \in O$ en $g(a_j) \in O$. De functie $g \in \mathbb{H}$ is niet-dalend, dus $g(a_i) \leq g(y) \leq g(a_j)$. Hieruit volgt dat $g(y) \in O$ en daarom is $g \in U$.
We hebben nu bewezen dat $\mathcal{B}_f$ een lokale basis is in f en dat deze familie aftelbaar is. Dus $\mathbb{H}$ voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma.

De ruimte van Helly voldoet echter niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma. Definieer voor elke $x \in (0, 1)$ de functie $f_x \in \mathbb{H}$ als volgt:

$$f_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } t < x \\ \frac{1}{2} & \text{als } t = x \\ 1 & \text{als } t > x \end{cases}$$

Dan is $Y = \{f_x \in \mathbb{H} : x \in (0,1)\}$ een overaftelbare deelverzameling van $\mathbb{H}$.
We zullen nu laten zien dat elke functie in Y een open omgeving heeft die geen enkele andere functie uit Y bevat. Zij $x \in (0,1)$ willekeurig. De verzameling $O = \pi_x^{-1}\left[\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right]$ is een open omgeving van f_x. Als $z \neq x$, dan is $f_z(x)$ gelijk aan 0 of 1 en dus $f_z \notin O$.
We hebben nu aangetoond dat Y relatief discreet en overaftelbaar is. De deelruimte Y voldoet daarom niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma en $\mathbb{H}$ dus ook niet.

De verzameling Y is echter niet gesloten en discreet in de ruimte van Helly. Neem aan dat Y wel gesloten en discreet is in $\mathbb{H}$. Dan is Y net als $\mathbb{H}$ compact, omdat Y gesloten is. Neem de open overdekking van Y bestaande uit open verzamelingen waarvan elk precies één punt uit Y bevat. Dan is er een eindige deeloverdekking. Deze eindige deeloverdekking bevat maar eindig veel punten van Y. Uit deze tegenspraak volgt dat Y niet gesloten en discreet is als deelverzameling van $\mathbb{H}$.

7.3 Separabiliteit

De ruimte van Helly is separabel. Dit zullen we aantonen door een aftelbare, dichte deelverzameling te construeren. Om te beginnen definiëren we F_n voor $n \in \mathbb{Z}^+$ als de verzameling stijgende rijtjes rationale getallen in het eenheidsinterval. We eisen dat elk rijtje in deze verzameling n termen heeft. De verzameling F_n is daarom aftelbaar.
Voor $n > 1$ en een tweetal rijtjes $p = (p_1, p_2, ..., p_n) \in F_n$ en $q = (q_1, q_2, ..., q_{n-1}) \in F_{n-1}$ met $q_1 > 0$ en $q_{n-1} < 1$ definiëren we de functie $L(p,q)$:

$$L(p,q)(x) = \begin{cases} p_1 & 0 \leq x < q_1 \\ p_2 & q_1 \leq x < q_2 \\ \vdots & \vdots \\ p_{n-1} & q_{n-2} \leq x < q_{n-1} \\ p_n & q_{n-1} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Merk op dat $L(p,q) \in I^I$ een niet-dalende functie is, omdat p een stijgende rij is. Dus $L(p,q) \in \mathbb{H}$.
In het geval dat $n = 1$ en $p = (p_1) \in F_1$ definiëren we $L(p)$ als de constante functie met waarde p_1. Ook nu geldt dat $L(p) \in \mathbb{H}$.
Vervolgens nemen we de vereniging van al dit soort functies en noemen deze verzameling D:

$$D = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{L(p,q) \in \mathbb{H} : p \in F_n, q \in F_{n-1}\} \right) \cup \{L(p) \in \mathbb{H} : p \in F_1\}$$

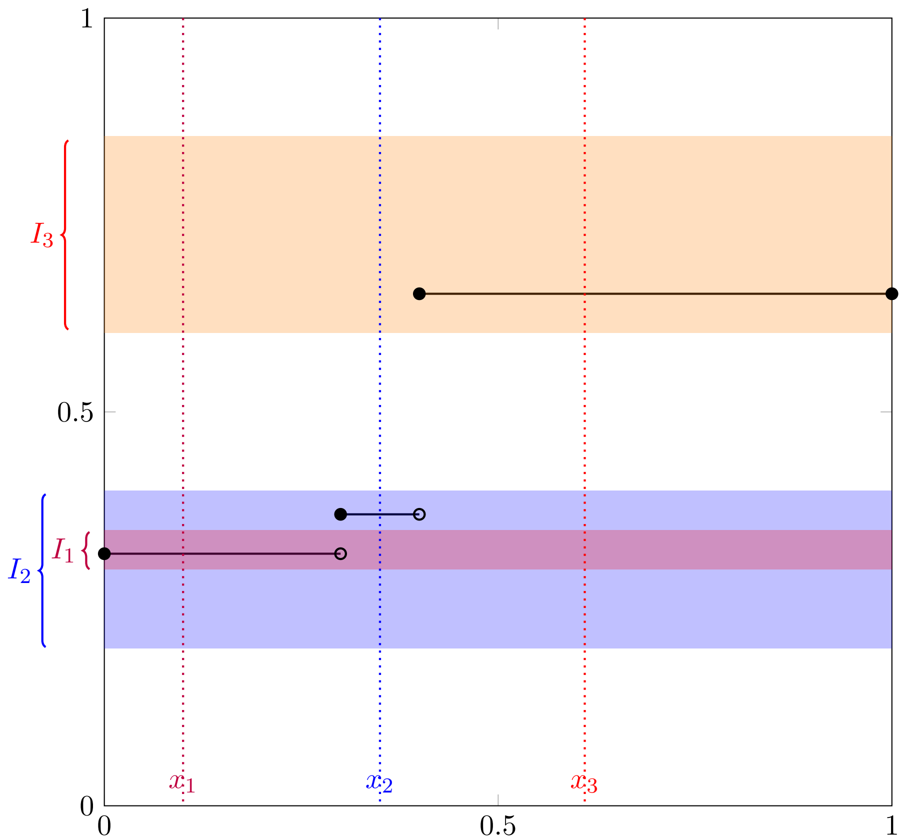
Er zijn aftelbaar veel paren (p,q), dus ook aftelbaar veel functies $L(p,q)$. Ook de verzameling functies $\{L(p) : p \in F_1\}$ is aftelbaar, want $F_1 = \mathbb{Q} \cap I$. De verzameling D is dus de vereniging van twee aftelbare verzamelingen en daarom zelf ook aftelbaar.

Nu rest ons alleen nog aan te tonen dat D dicht is in $\mathbb{H}$. Dit doen we door te laten zien dat elke basis-open verzameling U de verzameling D snijdt. We bekijken twee gevallen.
In het eerste geval is $U = \pi_x^{-1}[I_1] \cap \mathbb{H}$ een basis-open verzameling met $x \in [0,1]$ en $I_1 \subseteq I$ een open interval. Neem $p = (p_1)$ met $p_1 \in I_1 \cap \mathbb{Q}$, dan is $L(p) \in D \cap U$.

In het tweede geval is $U = \bigcap_{j=1}^{k} \pi_{x_j}^{-1}\left[I_j\right] \cap \mathbb{H}$ een niet-lege basisverzameling met $k > 1$. We kunnen aannemen dat $I_j \subseteq I$ een open interval is voor elke j, $x_j \in [0,1]$ voor elke j en $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$.
Neem nu voor elke $j \leq k-1$ een rationaal getal $q_j \in (x_j, x_{j+1})$. Dan is $q = (q_1, q_2, ..., q_{k-1})$ een stijgende rij, omdat $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$. Dus er geldt dat $q \in F_{k-1}$. Merk op dat $q_j \in (0,1)$ voor elke $j \leq k-1$.
De verzameling U is niet leeg, dus bevat deze een niet-dalende functie. Bovendien is elke I_j open, dus zijn er $y_1 \in I_1, y_2 \in I_2, ..., y_k \in I_k$ met $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_k < 1 = y_{k+1}$. Kies nu voor elke $j = 1, ..., k$ een rationale $p_j \in I_j \cap (y_{j-1}, y_{j+1})$. Merk op dat deze stap alleen nodig is als y_j niet rationaal is, anders kunnen we $p_j = y_j$ nemen. Nu is $p = (p_1, p_2, ..., p_k)$ een stijgend rijtje bestaande uit rationale getallen, dus $p \in F_k$.
De functie $L(p,q)$ is bevat in U, want er geldt dat:

$$\begin{array}{llllr}
L(p,q)(x_1) & = p_1 & \in I_1, & \text{omdat} & 0 \leq x_1 < q_1 \\
L(p,q)(x_2) & = p_2 & \in I_2, & \text{omdat} & q_1 < x_2 < q_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
L(p,q)(x_{k-1}) & = p_{k-1} & \in I_{k-1}, & \text{omdat} & q_{k-2} < x_{k-1} < q_{k-1} \\
L(p,q)(x_k) & = p_k & \in I_k, & \text{omdat} & q_{k-1} < x_k \leq 1
\end{array}$$

Dus is $L(p,q) \in D \cap U$. In figuur 7.1 staat een voorbeeld van een open verzameling $U = \bigcap_{j=1}^{k} \pi_{x_j}^{-1}\left[I_j\right] \cap \mathbb{H}$ met $k = 3$ waarbij een functie $L \in D \cap U$ is gevonden.
We hebben nu bewezen dat D dicht is in $\mathbb{H}$ en dat D aftelbaar is, dus $\mathbb{H}$ is separabel.



Figuur 7.1: Voorbeeld van een functie L (zwarte lijn) die bevat is in D en in de open omgeving $U = \bigcap_{j=1}^{3} \pi_{x_j}^{-1}[I_j] \cap \mathbb{H}$.

In paragraaf 7.2 hebben we gezien dat de ruimte van Helly niet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet. Maar elke separabele metrische ruimte voldoet aan dit axioma, dus de ruimte van Helly is niet metrizeerbaar.

7.4 Een deelruimte die homeomorf is met de Sorgenfreylijn

Een andere interessante eigenschap van de ruimte van Helly is dat deze een deelverzameling bevat die homeomorf is met de Sorgenfreylijn.
Definieer voor $s \in (0,1)$ de functie $g_s \in \mathbb{H}$ als volgt:

$$g_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t \leq s \\ 1 & \text{voor } t > s \end{cases}$$

De verzameling $S = \{g_s \in \mathbb{H} : 0 < s < 1\}$ is homeomorf met de Sorgenfreylijn. We weten dat $(0,1)$ homeomorf is met $\mathbb{R}$, dus het is voldoende om te laten zien dat het interval $(0,1)$ met de Sorgenfreytopologie homeomorf is met S. We zullen laten zien dat de functie $\phi : (0,1) \to S$ gegeven door $\phi(s) = g_s$ een homeomorfisme is.

Ten eerste is ϕ bijectief. Merk op dat uit de definitie van S en ϕ volgt dat ϕ surjectief is. We moeten alleen nog laten zien dat ϕ injectief is. Zij $u, v \in (0,1)$ met $u \neq v$. Zonder verlies der algemeenheid kunnen we aannemen dat $u < v$. Dan is $g_u(v) = 1 \neq 0 = g_v(v)$, dus $g_u \neq g_v$. Hieruit volgt dat ϕ injectief is.

Ten tweede is ϕ continu. Neem de basis-open omgeving $U = \bigcap_{j=1}^{k} \pi_{x_j}^{-1}\big[I_j\big] \cap S$ waarbij voor elke j het interval $I_j \subseteq I$ open is en $x_j \in I$. Zonder beperking der algemeenheid kunnen we aannemen dat $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ en $I_j \neq I$ voor elke j.
We bekijken vier gevallen:

1. In het geval dat $U = \emptyset$, is $\phi^{-1}[U] = \emptyset$ open in de Sorgenfreytopologie.

2. Stel nu dat $1 \in I_j$ voor elke j. We hebben aangenomen dat $I_j \neq I$, dus $0 \notin I_j$ voor elke j. Als $g_s \in U$, dan is $g_s(x) = 1$ voor elke $x \geq x_1$. Dus U bevat alle functies die vóór x_1 van 0 naar 1 springen. Daarom is $\phi^{-1}[U] = (0, x_1)$ open in de Sorgenfreytopologie.

3. Nu nemen we aan dat $0 \in I_j$ voor elke j. Als $g_s \in U$, dan is $g_s(x) = 0$ voor elke $x \leq x_k$. Dus U bevat alle functies g_s waarvoor $s \geq x_k$. Hieruit volgt dat $\phi^{-1}[U] = [x_k, 1)$ open is.

4. In het laatste geval is er een $m \in \{2, ..., k\}$ zó dat:

   (i) voor elke $j < m$: $0 \in I_j$ en $1 \notin I_j$, en
   (ii) voor elke $j \geq m$: $0 \notin I_j$ en $1 \in I_j$.

   Dan geldt voor elke $g_s \in U$ dat $g_s(x) = 0$ voor $x \leq x_{m-1}$ en $g_s(x) = 1$ voor $x \geq x_m$. Dus $U = \{g_s \in S : x_{m-1} \leq s < x_m\}$ en daarom is $\phi^{-1}[U] = [x_{m-1}, x_m)$ open in de Sorgenfreytopologie.

Ten slotte zullen we laten zien dat ϕ^{-1} continu is. Laat $a, b \in (0, 1]$ zó zijn dat $a < b$. We zullen aantonen dat $\phi\big[[a, b)\big] = V$, waarbij

$$V = \pi_a^{-1}\Big[[0, 1)\Big] \cap \pi_b^{-1}\Big[(0, 1]\Big] \cap S$$

Per definitie is $\phi\big[[a, b)\big] = \{g_s \in S : a \leq s < b\}$. Voor elke functie g_s in deze verzameling geldt dat $g_s(a) \leq g_s(s) = 0$, omdat elke functie in de ruimte van Helly niet-dalend is. Ook geldt er dat $g_s(b) \geq g_s(c) = 1$ voor een $c \in (s, b)$. Dus $\phi\big[[a, b)\big] \subseteq V$.
Neem nu een functie $g_t \in V$. Dan is $g_t(a) = 0$ en $g_t(b) = 1$, dus $a \leq t < b$. Hieruit volgt dat $V \subseteq \phi\big[[a, b)\big]$. Dus $\phi\big[[a, b)\big] = V$ is open. Daarom is ϕ^{-1} continu.
We hebben nu aangetoond dat ϕ een homeomorfisme is. Dus S is homeomorf met de Sorgenfreylijn.

7.5 Normaliteit niet erfelijk

De ruimte van Helly is een goed voorbeeld van een normale ruimte die een niet-normale deelruimte bevat. Dit zullen we op drie verschillende manieren bewijzen. De eerste twee bewijzen tonen aan dat de deelruimte $Z = \mathbb{H} \setminus \{h \in \mathbb{H} : h[I] \subseteq \{0, 1\}\}$ niet normaal is. Het derde bewijs wijst een deelruimte aan die niet homeomorf is met het kwadraat van de Sorgenfreylijn.

Ten eerste merken we op dat Z open is in $\mathbb{H}$. Als $z \in Z$, dan is er een $x \in I$ met $z(x) \notin \{0, 1\}$. Daarom is $\pi_x^{-1}\big[(0, 1)\big] \cap \mathbb{H} \subseteq Z$ een open omgeving van z. Dus Z is inderdaad open in $\mathbb{H}$.
Nu zullen we aantonen dat Z niet T_4 is. Hiervoor gebruiken we het Lemma van Jones:

Stelling 7.1. Lemma van Jones: Stel dat Z een T_4-ruimte is, Y een gesloten discrete deelruimte van Z en D een dichte deelverzameling van Z. Dan is $2^{|Y|} \leq 2^{|D|}$.

Voordat we deze stelling bewijzen, eerst nog twee opmerkingen:

Opmerking 7.1. Als A een deelverzameling is van de discrete ruimte Y. Dan zijn A en $Y \setminus A$ gesloten in Y, omdat Y de discrete topologie heeft.

Opmerking 7.2. Als F gesloten is in de gesloten verzameling Y, dan is $Y \setminus F = O \cap Y$ voor een open verzameling O in Z. We weten dat Y gesloten is in Z, dus $Z \setminus F = O \cup (Z \setminus Y)$ is open in Z. Hieruit volgt dat F gesloten is in Z.

Nu zullen we het lemma van Jones bewijzen:

Bewijs. Zij $A \subseteq Y$ willekeurig. Dan volgt uit opmerking 7.1 en 7.2 dat A en $Y \setminus A$ gesloten zijn in Z. Vanwege de T_4-eigenschap van Z, zijn er open disjuncte verzamelingen U_A en V_A zodat A bevat is in U_A en $Y \setminus A$ in V_A.
Voor elke deelverzameling A van Y kiezen we verzamelingen U_A en V_A. Definieer de functie $f : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(D)$ als $f(A) = U_A \cap D$. We zullen laten zien dat deze functie injectief is. Neem $A, B \in \mathcal{P}(Y)$ met $A \neq B$. Dan is A niet bevat in B of vice versa. Zonder beperking der algemeenheid kunnen we aannemen dat A niet bevat is in B, oftewel er is een $x \in A$ met $x \notin B$. Dan is $x \in U_A$ en $x \in V_B$. Dus $U_A \cap V_B$ is een niet-lege open verzameling. We weten dat D dicht is in Z, dus ook $U_A \cap V_B \cap D$ is niet-leeg. Bovendien weten we dat $U_B \cap V_B$ wél leeg is. Daarom is $U_A \cap D \neq U_B \cap D$, oftewel $f(A) \neq f(B)$. Dus f is inderdaad injectief. Derhalve is $|\mathcal{P}(Y)| \leq |\mathcal{P}(D)|$ en dus $2^{|Y|} \leq 2^{|D|}$. □

We zullen nu met behulp van het lemma van Jones bewijzen dat Z niet normaal is. Neem aan dat Z een T_4-ruimte is. We zullen laten zien dat dit tot tegenspraak leidt.
Eerste zullen we aantonen dat de verzameling $D \cap Z$ dicht is in Z. We weten dat Z open is in de ruimte van Helly. Dus elke verzameling O die open is in Z, is ook open in $\mathbb{H}$. De verzameling D is dicht in $\mathbb{H}$, dus $O \cap D \neq \emptyset$ voor elke open O in Z. Hieruit volgt dat D dicht is in Z.
We zullen nu laten zien dat de verzameling Y gesloten is in Z. Herinner dat Y bestaat uit alle functies $f_x \in \mathbb{H}$ met $x \in (0,1)$ en dat $f_x(t) = 0$ als $t < x$, $f_x(x) = \frac{1}{2}$ en $f_x(t) = 1$ als $t > x$. Neem $h \in Z \setminus Y$ willekeurig. Uit de definitie van Z volgt dat er een $x \in I$ is met $h(x) \notin \{0,1\}$. Er zijn nu twee mogelijkheden: $h(x) \neq \frac{1}{2}$ of $h(x) = \frac{1}{2}$.
In het eerste geval, waarbij $h(x) \neq \frac{1}{2}$, is $\pi_x^{-1}\big[(0,\frac{1}{2}) \cap (\frac{1}{2},1)\big] \cap \mathbb{H}$ een open omgeving van h die volledig bevat is in $Z \setminus Y$.
In het tweede geval geldt dat $h(x) = \frac{1}{2}$. Maar $h \notin Y$, dus is er nog een punt $y \in I$ zó dat $h(y) \notin \{0,1\}$. De verzameling $\pi_x^{-1}\big[(0,1)\big] \cap \pi_y^{-1}\big[(0,1)\big] \cap \mathbb{H}$ is een open omgeving van h die disjunct is van Y.
We hebben nu aangetoond dat Y een gesloten deelverzameling is van Z. We weten dat Y een discrete, overaftelbare deelruimte is van $\mathbb{H}$. Dus Y is ook een discrete overaftelbare deelruimte van Z. Bovendien hebben we gezien dat $D \cap Z$ een aftelbare dichte deelverzameling is van Z. We zien nu dat $|Y| = 2^{\aleph_0} = 2^{|D \cap Z|}$ en dus $2^{|Y|} > 2^{|D \cap Z|}$. Hiermee hebben we een tegenspraak afgeleid. Dus Z is niet T_4.

De deelruimte Z bevat twee gesloten disjuncte verzamelingen P en Q met de eigenschap dat elk paar disjuncte open omgevingen van P en Q een niet-lege doorsnede heeft. Als we deze gesloten verzamelingen kunnen aanwijzen, hebben we een alternatief bewijs dat laat zien

dat Z niet T_4 is. Dit is een meer rechtstreekse manier om aan te tonen dat Z niet normaal is. We hebben namelijk geen stelling nodig, alleen de definitie van T_4.
In de cursus topologie hebben we gezien dat het Niemitzky-vlak niet normaal is. Dit kan ons helpen om gesloten verzamelingen P en Q te vinden zonder disjuncte open omgevingen. De ene gesloten verzameling in het Niemitzky-vlak wordt bepaald door rationale getallen en de andere door irrationale getallen. Vervolgens wordt de stelling van Baire gebruikt.
Voor de ruimte van Helly doen we iets soortgelijks. We gebruiken net als bij het Niemitzky-vlak een verzameling P bepaald door irrationale getallen en een verzameling Q bepaald door rationale getallen:

$$P = \{f_x \in Y : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \qquad\qquad Q = \{f_x \in Y : x \in \mathbb{Q}\}$$

Merk op dat P en Q gesloten zijn in Z, dit volgt uit opmerking 7.1 en 7.2.
Zij O open in Z met $P \subseteq O$. We zullen bewijzen dat $Q \cap \overline{O} \neq \emptyset$. Dan volgt dat Q niet bevat is in $Z \setminus \overline{O}$. Dus er bestaat geen open omgeving van Q die disjunct is van O, elke open omgeving disjunct van O is immers bevat in $Z \setminus \overline{O}$.
Eerst introduceren we een nieuwe notatie: voor $f \in Z$, $F \subseteq I$ eindig en $n \in \mathbb{Z}^+$ schrijven we

$U(f, F, n)$ voor de open omgeving $\displaystyle\bigcap_{x \in F} \pi_x^{-1}\left[\Big(f(x) - 2^{-n}, f(x) + 2^{-n}\Big) \cap I\right]$ in Z.

Oftewel $U(f, F, n) = \Big\{g \in Z : (\forall x \in F)\Big(|g(x) - f(x)| < 2^{-n}\Big)\Big\}$.

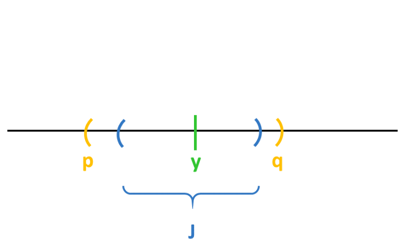
Voor elke $f_x \in P$ kiezen we een open omgeving $U(f_x, F_x, n_x) \subseteq O$. Zonder beperking der algemeenheid, kunnen we aannemen dat $x \in F_x$. Immers, als $U(f_x, F_x, n_x)$ en $U(f_x, G_x, n_x)$ open omgevingen van f_x zijn zó dat $F_x = G_x \cup \{x\}$, dan is $U(f_x, F_x, n_x) \subseteq U(f_x, G_x, n_x)$.
De verzameling F_x is eindig, dus zijn er rationale getallen p_x en q_x met de eigenschap dat $F_x \cap (p_x, q_x) = \{x\}$. Oftewel x is het enige element uit F_x dat ook in het interval (p_x, q_x) zit.

Definieer nu voor $p, q \in \mathbb{Q}$ de verzameling $A_{p,q} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : p_x = p, q_x = q\}$.

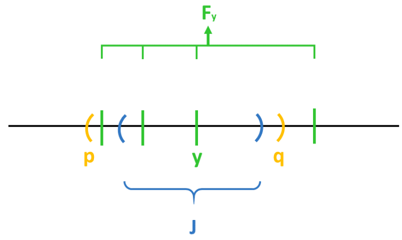
Dan is $\displaystyle\bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}} A_{p,q} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Dus $\displaystyle\Big(\bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}} A_{p,q}\Big) \cup \Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}\Big) = \mathbb{R}$.

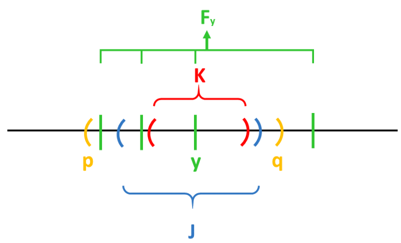
De Categoriestelling van Baire zegt dat $\mathbb{R}$ niet mager is in zichzelf, daarom zijn er $p, q \in \mathbb{Q}$ zodat $\overline{A_{p,q}}$ niet nergens dicht is. Merk op dat voor elke $q \in \mathbb{Q}$ is $\{q\}$ nergens dicht in $\mathbb{R}$. Hieruit volgt dat $\overline{A_{p,q}}^{\circ} \neq \emptyset$. Derhalve is er een open interval J zodat $J \subseteq \overline{A_{p,q}}$ en dus $J \subseteq (p, q)$.
Kies een rationaal getal $y \in J$, zoals in figuur 7.2a. Neem een omgeving $U(f_y, F_y, n_y)$. Herinner dat we kunnen aannemen dat $y \in F_y$. De verzameling F_y is eindig, dus kunnen we een open interval $K \subseteq J$ kiezen met $K \cap F_y = \{y\}$, zie figuur 7.2c.



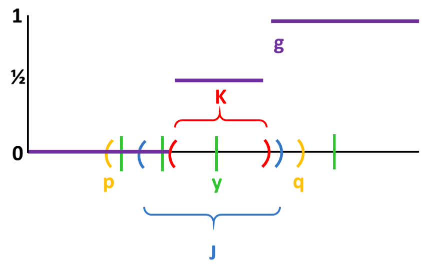
(a) Het interval J met het rationale getal y.



(b) Het interval $J \subseteq \overline{A_{p,q}}$ en de verzameling F_y.



(c) Het interval $K \subseteq J$ is zó dat $K \cap F_y = \{y\}$.



(d) De functie g.

Figuur 7.2: Een aantal stappen uit het bewijs dat P en Q geen disjuncte open omgevingen hebben.

Schrijf $K = (k_1, k_2)$ en definieer $g \in Z$ als volgt:

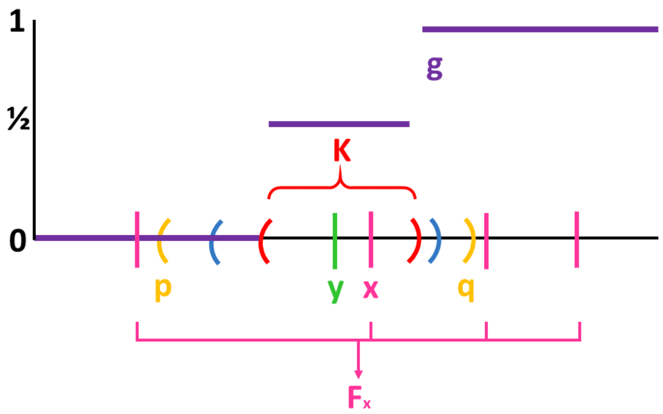
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq x \leq k_1 \\ \frac{1}{2} & \text{als } k_1 \leq x \leq k_2 \\ 1 & \text{als } k_2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

In figuur 7.2d zien we dat $g \in U(f_y, F_y, n_y)$. Dit is altijd het geval, want voor $z \in F_y$ geldt:

$$f_y(z) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq z \leq k_1 \\ \frac{1}{2} & \text{als } k_1 \leq z \leq k_2, \text{ omdat dan } z = y \\ 1 & \text{als } k_2 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Dus inderdaad is $g(z) = f_y(z)$ voor elke $z \in F_y$.

We weten dat $J \cap \overline{A_{p,q}} = J$, dus $A_{p,q}$ is dicht in J. Het interval $K \subseteq J$ is open, dus is er een $x \in A_{p,q} \cap K$. Derhalve is $p_x = p$ en $q_x = q$. Herinner dat de omgeving $U(f_x, F_x, n_x)$ zo gekozen is dat $U(f_x, F_x, n_x) \subseteq O$ en $F_x \cap (p,q) = \{x\}$. Daarom is $F_x \cap K = \{x\}$. Dus $g \in U(f_x, F_x, n_x) \subseteq O$, zie figuur 7.3.



Figuur 7.3: De functie g zit in $U(f_x, F_x, n_x)$.

We hebben nu laten zien dat $g \in U(f_y, F_y, n_y) \cap O$. Neem vervolgens een willekeurige basisomgeving $U_y = \bigcap_{i \in G} \pi_i^{-1}[I_i] \cap Z$ van f_y met $G \subseteq I$ eindig en I_i een open interval in I. Definieer F als de verzameling $G \cup \{y\}$. Kies $m \in \mathbb{Z}^+$ zodat $(f_y(i) - 2^{-m}, f_y(i) + 2^{-m}) \subseteq I_i$ voor elke $i \in G$. Dan is $U(f_y, F, m) \subseteq U_y$. Elke basisomgeving U_y van f_y snijdt daarom de verzameling O, dus $f_y \in \overline{O}$. Per definitie is $f_y \in Q$. Hieruit volgt dat $Q \cap \overline{O} \neq \emptyset$. Dus Z heeft niet de T_4-eigenschap.

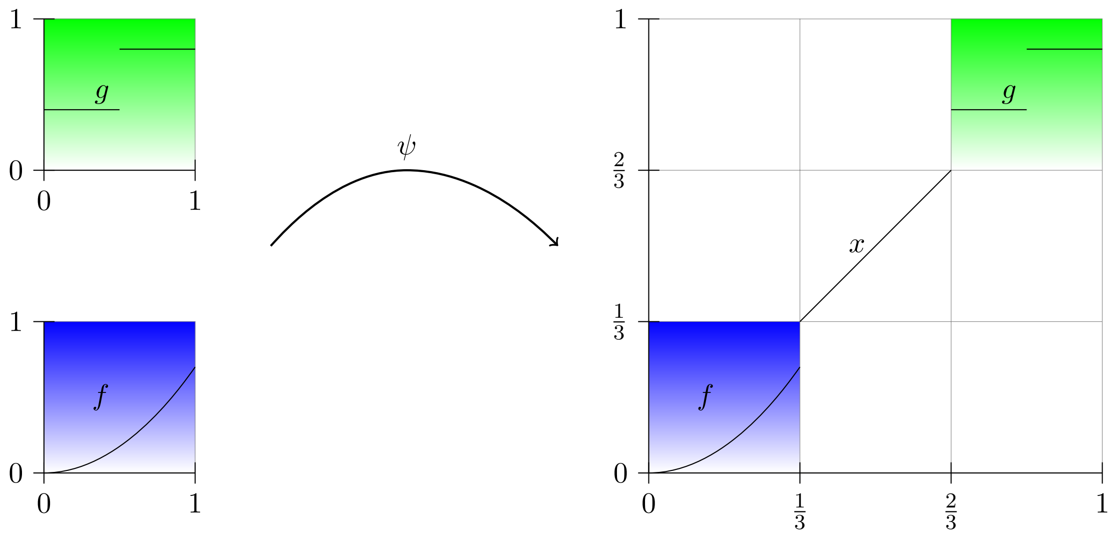
We hebben nu twee manieren bekeken om aan te tonen dat Z niet normaal is. Het eerste bewijs maakt gebruik van het lemma van Jones, terwijl het tweede bewijs direct laat zien dat de verzameling Z niet voldoet aan axioma T_4. Om het lemma van Jones te bewijzen, is het keuzeaxioma nodig. Namelijk bij het kiezen van de verzamelingen U_A en V_A voor elke deelverzameling A van Y. Echter, in het tweede bewijs, kan het gebruik van het keuzeaxioma vermeden worden.

Nu zullen we een derde bewijs geven dat aantoont dat $\mathbb{H}$ een deelruimte bevat die niet normaal is. Dit doen we door een deelruimte te construeren die homeomorf is met het kwadraat van de Sorgenfreylijn. Herinner dat het kwadraat van de Sorgenfreylijn niet normaal is.
Om te beginnen hebben we een homeomorfisme nodig. Definieer $\psi : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \psi[\mathbb{H} \times \mathbb{H}]$ met $\psi[\mathbb{H} \times \mathbb{H}] \subseteq \mathbb{H}$ als volgt:

$$\psi(f,g)(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} f(3x) & \text{als } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ x & \text{als } x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ \frac{1}{3} g(3x-2) + \frac{2}{3} & \text{als } x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Zie figuur 7.4 voor een schematische weergave van de functie ψ.
We zullen nu laten zien dat deze functie injectief is. Als $\psi(f_1, g_1) = \psi(f_2, g_2)$, dan is

$$\begin{cases} \frac{1}{3} f_1(3x) = \frac{1}{3} f_2(3x) & \text{voor } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} g_1(3x-2) + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} g_2(3x-2) + \frac{2}{3} & \text{voor } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Figuur 7.4: De afbeelding ψ.

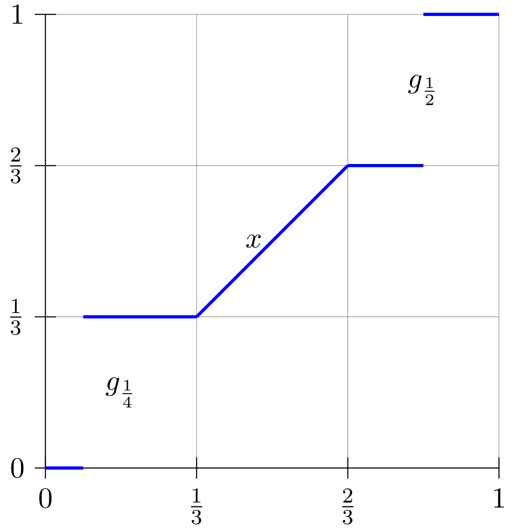
Hieruit volgt:

$$\begin{cases} f_1(3x) = f_2(3x) & \text{voor } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ g_1(3x-2) = g_2(3x-2) & \text{voor } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Daarom is $f_1 = f_2$ en $g_1 = g_2$. Dus ψ is inderdaad injectief. Merk op dat we het codomein zo hebben gekozen dat ψ surjectief is. Derhalve is ψ een bijectie.

Nu moeten we nog aantonen dat ψ continu is. Neem een verzameling O uit de subbasis. Dan is $O = \pi_i^{-1}[J] \cap \psi[\mathbb{H} \times \mathbb{H}]$ voor een $i \in I$ en een interval $J = I \cap (a, b)$ met $a, b \in \mathbb{R}$. We zullen laten zien dat het inverse beeld open is. We onderscheiden drie gevallen.
In het eerste geval is $i \in [0, \frac{1}{3}]$. Dus $\psi^{-1}[O] = \pi_{3i}^{-1}[(3a, 3b) \cap I] \times \mathbb{H}$ is open.
In het tweede geval is $i \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Als $i \notin J$ dan is $O = \emptyset$ en dus is $\psi^{-1}[O] = \emptyset$ open. Als $i \in J$, dan is $O = \psi[\mathbb{H} \times \mathbb{H}]$. Dus is $\psi^{-1}[O] = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ open.
In het laatste geval is $i \in [\frac{2}{3}, 1]$. Dus $\psi^{-1}[O] = \mathbb{H} \times \pi_{3i-2}^{-1}[(3a-2, 3b-2) \cap I]$ is open.
We hebben nu bewezen dat ψ continu is.

We moeten alleen nog aantonen dat ψ gesloten is. Als F een gesloten verzameling in het compacte product $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ is, dan is F compact. Hieruit volgt dat $\psi[F]$ compact is, want ψ is een continue surjectie. We zullen laten zien dat een compacte deelverzameling van een Hausdorff ruimte gesloten is. Daaruit volgt dan dat $\psi[F]$ gesloten, omdat $\psi[\mathbb{H} \times \mathbb{H}]$ Hausdorff is. Daarom is ψ^{-1} continu.
Stel C is een compacte deelverzameling van een Hausdorff ruimte X. We zullen laten zien dat $X \setminus C$ open is. Neem $x \in X \setminus C$ willekeurig. Kies voor elke $y \in C$ open disjuncte verzamelingen V_y en U_y die respectievelijk x en y bevatten. Neem de open overdekking $\mathcal{F} = \{U_y : y \in C\}$. Dan is er een eindige deeloverdekking $\mathcal{G} = \{U_{y_i} : y_i \in C, 1 \leq i \leq n\}$ voor een $n \in \mathbb{Z}^+$. Nu is $V = \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$ een open omgeving van x met de eigenschap dat $V \subseteq X \setminus C$. Dus de verzameling $X \setminus C$ is open in X.



Figuur 7.5: De functie $\psi(g_{\frac{1}{4}}, g_{\frac{1}{2}})$ in de normale verzameling M.

We hebben nu aangetoond dat ψ een homeomorfisme is. De deelruimte $\psi[\mathbb{H} \times \mathbb{H}]$ is dus homeomorf met $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$. We weten dat $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ de niet-normale deelruimte $S \times S$ bevat. Merk op dat $S \times S$ niet-normaal is, omdat deze homeomorf is met het kwadraat van de Sorgenfreylijn. Dus $\psi[\mathbb{H} \times \mathbb{H}]$ bevat een deelruimte die niet normaal is, namelijk $M = \psi[S \times S]$. Hoe ziet deze deelruimte eruit? Om dit te bepalen, kijken we wat de functie ψ doet met het punt $(g_s, g_t) \in S \times S$.

$$\psi(g_s, g_t)(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in [0, \frac{1}{3}s] \\ \frac{1}{3} & \text{als } x \in (\frac{1}{3}s, \frac{1}{3}] \\ x & \text{als } x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ \frac{2}{3} & \text{als } x \in [\frac{2}{3}, \frac{1}{3}(t+2)] \\ 1 & \text{als } x \in (\frac{1}{3}(t+2), 1] \end{cases}$$

Zie figuur 7.5 voor een voorbeeld van een punt in $\psi[S \times S]$. De deelruimte $\psi[S \times S]$ is bevat in de ruimte van Helly en niet normaal.
We hebben twee deelruimtes in $\mathbb{H}$ gezien die niet normaal zijn. De ruimte van Helly is zelf wel normaal. Dus normaliteit is niet altijd erfelijk.
Het laatste bewijs laat ook zien dat $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ bevat is in $\mathbb{H}$. We kunnen zelfs $\mathbb{H}^\infty$ terugvinden in $\mathbb{H}$. Daarvoor moeten we het interval I opsplitsen in de intervallen

$$I_n = \left[\frac{2 \cdot 3^{n-1} - 2}{3^n}, \frac{2 \cdot 3^{n-1} - 1}{3^n}\right]$$

Voor elke $n \in \mathbb{Z}^+$ kunnen we $\mathbb{H}$ in $I_n \times I_n$ stoppen. Hieruit volgt dat we oneindig veel kopieën van de ruimte van Helly terug kunnen vinden in de ruimte zelf!

Bibliografie

[1] Appert, A. (1934). *Propriétés des espaces abstraits les plus généraux.* Doctorat d'état, Université de Paris.

[2] Douwen, van, E. K. (1972). A regular space on which every continuous real-valued function is constant. *Nieuw Arch. Wisk. (3)*, 20:143–145.

[3] Engelen, van, A. J. M. and Hart, K. P. (2002). *Topologie.* Vrije Universiteit Amsterdam.

[4] Engelking, R. (1989). *General topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics.* Heldermann Verlag, Berlin, second edition. Door de auteur vertaald uit het Pools.

[5] Gustin, W. (1946). Countable connected spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52:101–106.

[6] Hart, K. P. (2017). De poolse cirkel. *Pythagoras.*

[7] Ma, D. (2019). Helly space. `https://dantopology.wordpress.com/2019/06/10/helly-space/`. Geraadpleegd op 01-07-2020.

[8] Menger, K. (1932). *Kurventheorie.* Leipzig, Berlin: B.G. Teubner.

[9] Morrow, J. (2012). Topologist's sine curve. `https://sites.math.washington.edu/~morrow/334_16/sine%20curve.pdf`. Geraadpleegd op 17-05-2020.

[10] Mysior, A. (1981). A regular space which is not completely regular. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 81(4):652–653.

[11] Steen, L. A. and Seebach, Jr., J. A. (1978). *Counterexamples in topology.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

[12] Stone, A. H. (1948). Paracompactness and product spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54:977–982.

[13] Thomas, J. (1969). Classroom Notes: A Regular Space, Not Completely Regular. *Amer. Math. Monthly*, 76(2):181–182.

[14] Urysohn, P. (1925). Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen. *Math. Ann.*, 94:262–295.

[15] Wikipedia (2019). Helly space. `https://en.wikipedia.org/wiki/Helly_space`. Geraadpleegd op 26-06-2020.

A | Definities

Voor het schrijven van dit hoofdstuk heb ik het dictaat *Topologie* (Van Engelen en Hart, 2002) [3] en het boek *Counterexamples in Topology* (Steen en Seebach, 1978) [11] gebruikt. In dit hoofdstuk is $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte.

Definitie A.1. De ruimte X is **lokaal compact** als voor elke $x \in X$ en elke omgeving U van x er een compacte omgeving V van x is met de eigenschap dat $V \subseteq U$.

Definitie A.2. Een ruimte is **$\boldsymbol{\sigma}$-compact** als deze de vereniging is van aftelbaar veel compacte verzamelingen;

Definitie A.3. Een ruimte is **aftelbaar compact** als de ruimte T_1 is en elke oneindige verzameling een verdichtingspunt heeft.

Definitie A.4. Een ruimte is **Lindelöf** als elke open overdekking een aftelbare deeloverdekking heeft.

Definitie A.5. De ruimte X is **samenhangend** als er *geen* niet-lege open disjuncte verzamelingen A en B zijn met $A \cup B = X$.

Definitie A.6. De ruimte X is **lokaal samenhangend** als voor elke $x \in X$ en elke omgeving U van x er een samenhangende omgeving V van x bestaat zodat $V \subseteq U$.

Definitie A.7. Een ruimte is **totaal onsamenhangend** als voor elke $x, y \in X$ met $x \neq y$ er een clopen verzameling C is met $x \in C$ en $y \notin C$.

Definitie A.8. Stel dat X samenhangend is. Dan wordt $x \in X$ een **dispersiepunt** genoemd als $X \setminus \{x\}$ totaal onsamenhangend is.

Definitie A.9. Een ruimte is **extreem onsamenhangend** als voor elke open deelverzameling A van X, $\bar{A}$ open is.

Definitie A.10. Een ruimte is **padsamenhangend** of wegsamenhangend als voor elk tweetal punten $a, b \in X$ er een continue functie $f : [0, 1] \to X$ bestaat met de eigenschap dat $f(0) = a$ en $f(1) = b$.

Definitie A.11. Een ruimte is **boogsamenhangend** als voor elke tweetal punten $x, y \in X$ er een homeomorfisme $f : [0, 1] \to f([0, 1])$ bestaat zodat $f(0) = x$ en $f(1) = y$.

Definitie A.12. Een ruimte is **regulier** als deze zowel T_3 als T_0 is.

Definitie A.13. Een ruimte is **normaal** als deze zowel T_4 als T_1 is.

Definitie A.14. De ruimte X is $\mathbf{T_{3\frac{1}{2}}}$ als voor elke gesloten verzameling $F \subseteq X$ en elke $x \notin F$ er een continue functie $f : X \to [0, 1]$ is zó dat $f(y) = 0$ als $y \in F$ en $f(x) = 1$.

Definitie A.15. De ruimte X is **volledig regulier** of **Tychonoff** als deze zowel $T_{3\frac{1}{2}}$ als T_0 is.

Definitie A.16. Een ruimte is **$\overline{H}$-separabel** of **$T_{2\frac{1}{2}}$** of **Urysohn** als voor elke $x, y \in X$ met $x \neq y$ er open omgevingen U en V van x respectievelijk y bestaan zó dat $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Als deze omgeving niet bestaan, worden x en y **$\overline{H}$-inseparabel** genoemd. Het punt x heet $\overline{H}$-inseparabel als voor elke $y \in X$, het paar x, y $\overline{H}$-inseparabel zijn.

Definitie A.17. Een verzameling A is **regulier open** als $A = \overline{A}^{\circ}$, dus als de verzameling gelijk is aan het inwendige van zijn afsluiting.

Definitie A.18. Een ruimte waarin de regulier open verzamelingen een basis vormen voor de topologie, wordt **semi-regulier** genoemd.

Definitie A.19. Een **continuüm** is een niet-lege compacte, samenhangende metrische ruimte.

Definitie A.20. Een continuüm K is een **kromme** als voor elk punt $p \in K$ en elke open omgeving U van p er een open omgeving O is zodat $p \in O \subseteq U$ en $Rd(O) \cap K$ geen continuüm bevat dat uit meer dan één punt bestaat.

Definitie A.21. De punten a en b in een topologische ruimte worden **tweelingen** genoemd als voor elke continue reëelwaardige functie f op deze ruimte geldt dat $f(a) = f(b)$.

Definitie A.22. Zij $p : X \to Y$ surjectief. Dan heet $V \subseteq X$ **verzadigd** ten opzichte van p als voor elke $y \in Y$ met $V \cap q^{-1}\big[\{y\}\big] \neq \emptyset$ geldt dat $q^{-1}\big[\{y\}\big] \subseteq V$.

Definitie A.23. Een verzameling $A \subseteq X$ is **nergens dicht** als $\overline{A}^{\circ} = \emptyset$, oftewel als het inwendige van de afsluiting leeg is.

Definitie A.24. Een verzameling $A \subseteq X$ is **mager** als er een rij $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ van nergens dichte verzameling is met de eigenschap dat $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Definitie A.25. Een ruimte is **perfect separabel** als deze voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma, oftewel als deze een aftelbare basis heeft.

Definitie A.26. De ruimte X is **perfect normaal** als X normaal is en elke gesloten deelverzameling van X te schrijven is als de doorsnede van aftelbaar veel open verzamelingen.

Definitie A.27. Een ruimte heeft de **Souslin-eigenschap** als elke familie paarsgewijs disjuncte, open en niet-lege verzamelingen aftelbaar is.

B | Stellingen

Stelling B.1. Stelling van Urysohn: Een ruimte is separabel en metrizeerbaar dan en slechts dan als deze regulier is en een aftelbare basis heeft.

Stelling B.2. Elke compacte Hausdorff ruimte is normaal.

Stelling B.3. Lemma van Urysohn: Een topologische ruimte X is T_4 dan en slechts dan als voor elk tweetal F en G gesloten en disjuncte verzamelingen er een continue functie $f : X \to \mathbb{R}$ bestaat met $f(x) = 0$ als $x \in F$ en $f(x) = 1$ als $x \in G$.

Stelling B.4. Als $f : X \to Y$ een continue surjectie is en X is compact, dan is Y ook compact.

Stelling B.5. Stelling van Tychonoff: Als $\{X_i\}_{i \in I}$ een familie niet-lege topologische ruimten is en X de productruimte. Dan is X compact dan en slechts dan als X_i compact is voor elke $i \in I$.

Stelling B.6. Als X een T_4-ruimte is en $A \subseteq X$ gesloten, dan is A ook T_4.

Stelling B.7. Lemma van Jones: Stel dat Z een T_4-ruimte is, Y een gesloten discrete deelruimte van Z en D een dichte deelverzameling van Z. Dan is $2^{|Y|} \leq 2^{|D|}$.

Stelling B.8. Als X compact is en A een gesloten deelverzameling van X, dan is de deelruimte A ook compact.

Stelling B.9. Categoriestelling van Baire (voor $\mathbb{R}$): De ruimte $\mathbb{R}$ is niet mager in zichzelf.