



Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

De partitiefunctie van Rademacher
(Engelse titel: Rademacher's partition function)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

ROBIN MARTINUS ROS

Delft, Nederland
Juli 2018



BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

“De partitiefunctie van Rademacher”

(Engelse titel: “Rademacher’s partition function”)

ROBIN MARTINUS ROS

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr. J.G. Bosman

Overige commissieleden

Dr. D.C. Gijswijt

Dr. B. van den Dries

Juli, 2018

Delft

Inhoudsopgave

1	Voorgeschiedenis en inspiratiebronnen	7
1.1	De benaderingen van Hardy en Ramanujan	7
1.2	De stelling van de partitiefunctie van Rademacher	8
1.3	Uitwerking van de eerste term	8
1.4	Bewijs van convergentie	9
1.5	Overzicht voor het bewijs	9
2	Beschrijvingen van de genererende functie van de partitiegetallen	11
2.1	De productformule voor de genererende functie	11
2.2	Het verband tussen de genererende functie en Dedekind's η -functie	12
2.3	De vijfhoeksgetalstelling van Euler	13
2.4	Een transformatie-eigenschap van de vijfhoeksom	14
3	Constructie van een integratiepad	17
3.1	Rakende cirkel-probleem	18
3.2	Farey-breuken en hun eigenschappen	19
3.3	Ford-cirkels	19
3.4	Een beschrijving van het Rademacherpad	20
4	Transformatie en absolute convergentie	21
4.1	Absolute convergentie van de som over de Ford-cirkels	21
4.2	Uitwerking voor $C(0, 1)$	22
4.3	Toepassing van Dedekinds Functievergelijking op $C(a, c)$	23
4.4	Uitwerking van de somformule van de genererende functie	23
5	De uitwerking naar Gamma-integralen	25
5.1	Omvormen van het integratiepad	25
5.2	De Hankelrepresentatie voor de Gammafunctie	26
5.3	Uitwerking en conclusie	27

Abstract

Het getal 5 is op meerdere manieren schrijven als som van positieve gehele getallen, waarbij volgorde niet uitmaakt. Even rekenen geeft snel dat dit op 7 manieren kan: $5 = 5$, $5 = 4 + 1$, $5 = 3 + 2$, $5 = 3 + 1 + 1$, $5 = 2 + 2 + 1$, $5 = 2 + 1 + 1 + 1$ en $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Zo is voor ieder positief geheel getal uit te vinden op hoeveel manieren het te schrijven is als som van positieve gehele getallen. Toch heeft de wiskunde hier niet een makkelijke berekening voor, al voelt dit proces wel als iets wat zo triviaal is als het uitrekenen van een combinatie of een permutatie. Dit werk gaat in op, formuleert en bewijst de formule die Hans Rademacher gaf voor deze partities. Ook probeert het een dieper inzicht te schenken achter deze formule, wat de inspiratie was en welke achterliggende theorie er gebruikt is.

Hoofdstuk 1

Voorgeschiedenis en inspiratiebronnen

1.1 De benaderingen van Hardy en Ramanujan

Iedereen heeft natuurlijk wel gehoord van Srinivasa Ramanujan en de paar jaar die hij in Cambridge doorbracht, waarin hij een onbeschrijfelijke hoeveelheid wiskunde heeft ontwikkeld. In 1918 hield hij zich, samen met Godfrey Harold Hardy, bezig met de partitiegetallen en werkten ze aan een manier om deze te beschrijven.

Het aantal manieren waarop $n \in \mathbb{N}$ geschreven kan worden als som van positieve gehele getallen wordt in dit boek genoteerd met $p(n)$, met $p(0) = 1$. Hardy en Ramanujan ontdekten in 1918 in [2] dat

$$p(n) \sim \frac{e^{K\sqrt{n}}}{4n\sqrt{3}} \text{ voor } n \rightarrow \infty \text{ en } K = \pi\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (1.1)$$

en in 1920 ontdekte J.V. Uspensky onafhankelijk hetzelfde in [3]. Maar Hardy en Ramanujan vonden meer. Ze ontdekten de asymptotische formule

$$p(n) = \sum_{k < \alpha\sqrt{n}} P_k(n) + O(n^{-1/4}) \quad (1.2)$$

met α een constante en $P_1(n)$ de term van de benadering. $P_2(n), P_3(n), \dots$ zijn vergelijkbare termen, maar met een kleinere K . Omdat $p(n)$ een geheel getal is, geeft (1.2) een exact antwoord als n groot genoeg is zodat de foutterm kleiner is dan $\frac{1}{2}$. Dit is een van de zeldzame voorbeelden van een formule die zowel asymptotisch als exact is. Helaas divergeert de som

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k(n), \quad (1.3)$$

zoals bewezen door D.H. Lehmer [4] in 1937.

Ramanujan vond zelf nog een hele hoop eigenaardige eigenschappen, die nu bekend staan als Ramanujan's Congruenties.

$$\begin{aligned} p(5k + 4) &\equiv 0 \pmod{5} \\ p(7k + 5) &\equiv 0 \pmod{7} \\ p(11k + 6) &\equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Hans Rademacher gaf in 1937 een lecture over (1.2) en vond bij het voorbereiden zelf een andere reeks, door kleine aanpassingen te maken in de berekeningen van Hardy en Ramanujan. Zo kwam Rademacher op termen $R_k(n)$, die erg lijken op $P_k(n)$, maar wel zodat

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(n) \quad (1.4)$$

convergeert.

Dit werk geeft een gesloten formule voor $p(n)$ en bewijst deze, op de manier die Rademacher ook voor ogen had.

1.2 De stelling van de partitiefunctie van Rademacher

De formule van Rademacher is als volgt:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{c=1}^{\infty} A_c(n) \sqrt{c} \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(n - \frac{1}{24}\right)\right)}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}}\right) \quad (1.5)$$

met

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0 \leq h < k \\ \gcd(h,k)=1}} e^{\pi i s(h,k) - 2\pi i n h/k}$$

en

$$s(h, k) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k} \left(\frac{hr}{k} - \left\lfloor \frac{hr}{k} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right).$$

Dat is even slikken. Het is vooral opvallend dat deze vreselijke som, van een partiële afgeleide van een sinh, maal een som van bepaalde complexe eenheidswortels, die achteraf gedeeld wordt door $\pi\sqrt{2}$, convergeert naar een *geheel* getal.

1.3 Uitwerking van de eerste term

Als we de eerste term van deze som uitwerken, dus $c = 1$, dan zien we dat

$$s(0, 1) = \sum_{r=1}^0 \dots = 0$$

en

$$A_1(n) = \sum_{\substack{0 \leq h < 1 \\ \gcd(h,1)=1}} e^{\pi i s(h,1) - 2\pi i n h} = e^{\pi i s(0,1)} = 1.$$

Van de som blijft dan over

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\left(n - \frac{1}{24}\right)\right)}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}}\right) &= \frac{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \cosh\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\left(n - \frac{1}{24}\right)\right) - \frac{1}{2\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \sinh\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\left(n - \frac{1}{24}\right)\right)}{n - \frac{1}{24}} \\ &= \frac{K \cosh\left(K\sqrt{n - \frac{1}{24}}\right)}{2\left(n - \frac{1}{24}\right)} - \frac{\sinh\left(K\sqrt{n - \frac{1}{24}}\right)}{2\left(n - \frac{1}{24}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Ke^{K\sqrt{n - \frac{1}{24}}} + Ke^{-K\sqrt{n - \frac{1}{24}}}}{4\left(n - \frac{1}{24}\right)} - \frac{e^{K\sqrt{n - \frac{1}{24}}} - e^{-K\sqrt{n - \frac{1}{24}}}}{4\left(n - \frac{1}{24}\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Als $n \rightarrow \infty$, vallen de negatieve exponenten weg. Gelijksnamig maken van de breuken zorgt voor een term $K\sqrt{n - \frac{1}{24}}$ in de teller links, en die is dominant over de term rechts. Wat over blijft, is

$$\frac{K\sqrt{n}e^{K\sqrt{n}}}{4n^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi\sqrt{2}e^{K\sqrt{n}}}{4n\sqrt{3}},$$

waar de $\pi\sqrt{2}$ wegvalt tegen de $\frac{1}{\pi\sqrt{2}}$ in (1.5), dus de eerste term convergeert zoals (1.1).

1.4 Bewijs van convergentie

Om te laten zien dat (1.5) convergeert, moeten we bijna dezelfde berekening doen. Omdat $A_c(n)$ sommeert over ten hoogste c termen die allemaal norm 1 hebben, geldt $|A_c(n)| \leq c$. Dus

$$\left| \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{c=1}^{\infty} A_c(n) \sqrt{c} \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{c}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(n - \frac{1}{24}\right)\right)}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right) \right| \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{c=1}^{\infty} c^{\frac{3}{2}} \left| \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{c}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(n - \frac{1}{24}\right)\right)}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right) \right|.$$

Merk op dat \sinh als Taylor-reeks te schrijven is door $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$. Als we $\frac{\pi}{c}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(n - \frac{1}{24}\right)$ invullen en delen door $\sqrt{n - \frac{1}{24}}$, staat hier

$$\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{c}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(n - \frac{1}{24}\right)\right)}{n - \frac{1}{24}} = \frac{\pi}{c}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{c}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3\left(n - \frac{1}{24}\right) + \dots$$

Als hier de afgeleide naar n wordt genomen, staat er een constante maal c^{-3} , plus hogere orde termen met sterker negatieve machten van c . Dit convergeert dus asymptotisch als Mc^{-3} , met M een constante die van n afhangt. Bij elkaar staat hier

$$\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{c=1}^{\infty} c^{\frac{3}{2}} \left| \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{c}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(n - \frac{1}{24}\right)\right)}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right) \right| \leq \frac{M}{\pi\sqrt{2}} \sum_{c=1}^{\infty} c^{-\frac{3}{2}}$$

en dit convergeert, want dit is een p -reeks.

1.5 Overzicht voor het bewijs

De genererende functie voor de partitiecöefficienten

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \tag{1.6}$$

wordt gebruikt om informatie te krijgen over deze coëfficiënten. Eerst wordt er bewezen dat deze som convergeert op $|x| < 1$. Vervolgens is duidelijk

$$\frac{F(x)}{x^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p(k)x^k}{x^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^{k-n-1}$$

met $0 < |x| < 1$. Deze laatste som is een Laurentreeks voor $F(x)/x^{n+1}$. Makkelijk is te zien dat deze reeks een pool van orde $n+1$ op $x=0$ heeft en als coëfficiënt $p(n)$ voor de x^{-1} -term, dus Cauchy's Residuenstelling geeft

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(x)}{x^{n+1}} dx \tag{1.7}$$

als C binnen de eenheidscirkel gekozen is zodat deze eenmaal tegen de klok in om $x = 0$ heen gaat. Dit is een van de eerste bewijzen met deze zogenaamde cirkelmethode, van Hardy en Littlewood. C wordt in deze cirkelmethode slim gekozen, zodat hij naar de singulariteiten op de eenheidscirkel convergeert. Hoewel er veel cirkels in dit bewijs gaan voorkomen, refereert de cirkel hier naar de eenheidscirkel.

Dan wordt de link gelegd met modulaire vormen: dit geeft twee eigenschappen van $F(x)$ die gebruikt worden om een makkelijke contour C te kiezen waarover $F(x)/x^{n+1}$ integreerbaar is. Dit pad wordt omgevormd tot een kromme van i tot $i + 1$ en dan wordt gebruik gemaakt van Ford-cirkels om deze kromme op te splitsen in meerdere stukken, waarvoor een hoop termen in de integraal verdwijnen.

Dit houdt een integraal van e -machten over. Deze kan met een Taylor-reeks analytisch uitgeschreven worden tot iets wat erg lijkt op een sommatie over Gamma-integralen. Hier komt de Taylor-reeks van een afgeleide van een sinus hyperbolicus uit en dat completeert het bewijs.

Hoofdstuk 2

Beschrijvingen van de genererende functie van de partitiegetallen

2.1 De productformule voor de genererende functie

Eerder is de genererende functie voor $p(n)$ beschreven als

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \quad (2.1)$$

op $|x| < 1$. In deze sectie bewijzen we de gelijkheid

$$F(x) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}. \quad (2.2)$$

Merk op dat dit iedere factor in dit product een meetkundige reeks is met variabele x^i . Wegens absolute convergentie van de meetkundige reeks op $|x| < 1$ mogen we dit product dus als volgt schrijven:

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} &= \left(\frac{1}{1-x} \right) \left(\frac{1}{1-x^2} \right) \left(\frac{1}{1-x^3} \right) \cdots \\ &= \left(1 + (x)^1 + (x)^2 + \cdots \right) \left(1 + (x^2)^1 + (x^2)^2 + \cdots \right) \left(1 + (x^3)^1 + (x^3)^2 + \cdots \right) \cdots \end{aligned}$$

Als de coëfficiënt voor x^n in deze expressie bekeken wordt, zou hier dus $p(n)$ uit moeten komen; het uitwerken van dit product moet op exact $p(n)$ manieren een factor x^n gemaakt kunnen worden. Om te illustreren dat dit inderdaad gebeurt, wordt er hier in een voorbeeld $n = 5$ genomen. Men kan een partitie van 5 nemen, zeg $5 = 3 + 1 + 1$. Dit komt overeen met twee factoren voor x^1 , een factor voor x^3 en nul factoren voor alle andere termen. Dit geeft:

$$(1 + x + x^2 + \cdots) (1 + x^2 + x^4 + \cdots) (1 + x^3 + x^6 + \cdots) (1 + x^4 + x^8 + \cdots) \cdots$$

Als hier de rode termen vermenigvuldigd worden, komt er precies een x^5 uit. Op dezelfde manier staat de partitie $5 = 3 + 2$ voor het product

$$(1 + x + x^2 + \cdots) (1 + x^2 + x^4 + \cdots) (1 + x^3 + x^6 + \cdots) (1 + x^4 + x^8 + \cdots) \cdots$$

Dit geeft een bijtelling tussen het aantal manieren om 5 te schrijven als som van positieve gehele getallen en manieren om x^5 te maken in dit product: de coëfficiënt van x^5 in dit product moet dus wel gelijk zijn aan $p(5)$. Hier is 5 niet bijzonder: dit werkt voor alle n en dus is (2.2) waar.

2.2 Het verband tussen de genererende functie en Dedekind's η -functie

In de theorie van modulaire vormen, is een bekende en veel gebruikte functie de η -functie van Dedekind, gedefinieerd door

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i k \tau}).$$

Definiër $q = e^{2\pi i \tau}$. Dan staat hier

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) = \frac{q^{\frac{1}{24}}}{F(q)}.$$

Merk op dat $q^{\frac{1}{24}}$ enkel notatie is voor $e^{2\pi i \tau / 24}$.

Er is een hoop informatie over $F(q)$ te behalen uit de theorie over deze η -functie. $\eta(\tau)$ is (bijna) een modulaire vorm van gewicht $\frac{1}{2}$. Dat houdt in dat

$$\eta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \epsilon(a, b, c, d) (c\tau + d)^{\frac{1}{2}} \eta(\tau) \quad (2.3)$$

als $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ met $ad - bc = 1$. De wortel van $c\tau + d$ wordt hier gekozen met argument tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$, de snede ligt dus op de negatieve reële as.

De matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ met determinant 1 zijn elementen van de groep $SL_2(\mathbb{Z})$, de 2×2 inverteerbare matrices met determinant 1 en gehele coëfficiënten.

$\epsilon(a, b, c, d)$ is een juist gekozen eenheidswortel. Als deze ϵ -term er niet had gestaan, was de functie een zuivere modulaire vorm geweest. Er geldt

$$\epsilon(a, b, c, d) = e^{\pi i \left(\frac{a+d}{12c} - s(d,c) - \frac{1}{4}\right)} \text{ als } c \neq 0 \text{ en } \epsilon(a, b, c, d) = e^{\pi i \frac{b}{12}} \text{ als } c = 0, d = 1.$$

met $s(h, k)$ zoals in (1.5).

Merk op: $SL_2(\mathbb{Z}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Als we voor deze beide matrices de formules uitwerken, is iedere matrix in $SL_2(\mathbb{Z})$ te construeren uit samenstellingen. Deze matrices geven

$$\eta(\tau + 1) = e^{\frac{\pi i}{12}} \eta(\tau) \quad (2.4)$$

en

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} \eta(\tau). \quad (2.5)$$

(2.4) is direct af te lezen uit de definitie van $\eta(\tau)$, omdat $e^{2\pi i \tau} = e^{2\pi i(\tau+1)}$. (2.5) wordt verderop in dit werk bewezen.

Een bewijs voor (2.3) wordt in dit werk niet formeel behandeld, maar is te vinden in [1], hoofdstuk 3.

2.3 De vijfhoeksgetalstelling van Euler

De vijfhoeksgetalstelling van Euler zegt het volgende:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x^{\frac{k(3k-1)}{2}}. \quad (2.6)$$

Dit is simpel te herschrijven tot de vorm

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{k(3k-1)}{2}}$$

met nogmaals $q = e^{2\pi i\tau}$. Deze formule wordt verderop in dit werk vaak gebruikt.

Als we een poging doet het product in de linkerhand van (2.6) uit te schrijven, merken we al snel dat er veel termen wegvallen. Nou blijkt dat de coëfficiënt van x^k in de som gelijk is aan het aantal even disjuncte partities van k , min het aantal oneven disjuncte partities van k . Neem bijvoorbeeld $k = 7$.

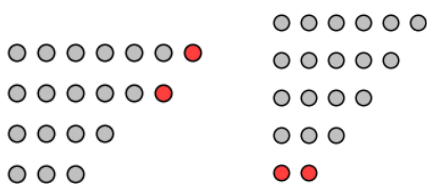
Iedere disjuncte partitie van 7 met een even aantal termen telt positief in mee in deze coëfficiënt: $7 = 1 + 6$ geeft dat in iedere term de 1 wordt gekozen, behalve voor $n = 1$ en $n = 6$. Hier vallen de min-tekens weg.

Iedere partitie van 7 met een oneven aantal termen telt juist negatief mee: voor $7 = 1 + 2 + 4$ neemt men overal de 1, behalve voor $n = 1, 2, 4$. Hier komen dus een oneven aantal min-tekens bij.

7 is op drie manieren te schrijven als disjuncte som van een even aantal getallen, namelijk $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 7$, en op twee manieren als disjuncte som van een oneven aantal getallen: $1 + 2 + 4 = 7 = 7$. Vervolgens is $3 - 2 = 1$, dus de coëfficiënt van x^7 wordt 1. Dit klopt, want voor $k = -2$ staat er rechts $(-1)^{(-2)} x^{(-2)(-7)/2} = x^7$.

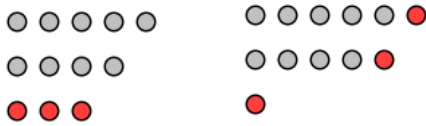
Let hierbij op dat dubbele termen niet meetellen, omdat die op geen manier uit het product van (2.6) te halen zijn.

Nu is het idee om een involutie maken op de disjuncte partities van een getal k , die oneven en even partities met elkaar matcht. Men kan een disjuncte partitie altijd van hoog naar laag rangschikken, zoals $20 = 7 + 6 + 4 + 3$. Dit is makkelijker te zien met Ferrer-diagrammen, zoals hieronder.



Neem m het kleinste getal in zo'n partitie, in het geval links geldt $m = 3$. Neem s het aantal punten dat op de meest rechtse schuine lijn in het diagram liggen. In het geval links geldt $s = 2$. s telt links de rode punten. Als $m > s$, zijn deze rode punten naar onderen te verplaatsen, zodat men de figuur rechts krijgt. Als $m \leq s$, is exact het tegenovergestelde te doen, zodat men van de rechter figuur de linker maakt.

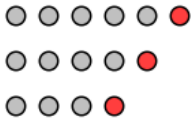
De functie die dit Ferrer-diagram links naar het Ferrer-diagram rechts stuurt, is dus zijn eigen inverse. Zo worden de meeste disjuncte partities met een oneven aantal getallen geïdentificeerd met even disjuncte partities en vice versa. Deze vallen dus allemaal weg.



In het geval dat $m = s$, zoals hierboven, is deze functie geen involutie. De figuur links wordt door de functie naar de figuur rechts gestuurd, maar de figuur rechts niet naar de figuur links. Deze valt dus niet weg en moet geteld worden in de som. Het aantal punten is duidelijk

$$n = m + (m + 1) + \dots + (2m - 1) = \frac{m(3m + 1)}{2} = \frac{k(3k + 1)}{2}$$

als we $k = m$ nemen. Het teken van deze partitie is het aantal rijen, oftewel s . Maar $s = m = k$, dus de coëfficiënt van x^n is $(-1)^k$. Dit geeft een term van $(-1)^k x^{\frac{k(3k+1)}{2}}$.



In het geval dat $m = s + 1$, zoals hierboven, geeft de functie een illegale partitie, namelijk $15 = 5 + 4 + 3 + 3$. Deze is niet te identificeren met een andere partitie en deze moet dus ook apart geteld worden.

$$n = m + (m + 1) + \dots + (2m - 2) = \frac{(m - 1)(3m - 2)}{2}$$

als we $k = 1 - m$ nemen. De coëfficiënt is weer $(-1)^s$, hier dus $s = m - 1 = -k$, en $(-1)^k = (-1)^{-k}$. Dit geeft nogmaals dezelfde term.

Het is dus duidelijk dat alle even en oneven partities tegen elkaar wegvallen, behalve als $n = \frac{k(3k-1)}{2}$ en in dat geval blijft er precies een Ferrer-diagram over. Dit komt exact overeen met de rechterkant van (2.6), dus hiermee is deze bewezen.

2.4 Een transformatie-eigenschap van de vijfhoeksom

In deze sectie bewijzen we (2.5) met Poissonsommatie, waarmee we de constructie van (2.3) kunnen afsluiten.

In het complexe vlak nemen we $q = e^{2\pi i\tau}$, zodat

$$\begin{aligned} F(q)^{-1} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{\pi i\tau k(3k-1)} = e^{\frac{-\pi i\tau}{12}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{3\pi i\tau(k^2 - \frac{k}{3} + \frac{1}{36})} \\ &= e^{\frac{-\pi i\tau}{12}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{3\pi i\tau(k - \frac{1}{6})^2} = e^{\frac{-\pi i\tau}{12}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\pi i k + \frac{\pi i\tau(6k-1)^2}{12}}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Bekijk de functie

$$f(x, \tau) = e^{\pi i x + \frac{\pi i\tau(6x-1)^2}{12}}$$

en

$$G(x, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + k, \tau)$$

zodat

$$\eta(\tau) = e^{\pi i\tau/12} F(q)^{-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k, \tau) = G(0, \tau).$$

We bekijken $|q| < 1$, dus dit houdt in dat $\Im(\tau) > 0$ en dus $\Re(i\tau) < 0$. Dus $f(x, \tau) \sim e^{-x^2}$ en dus convergeert de som van $G(x, \tau)$ absoluut in x .

Ook geldt $G(x, \tau) = G(x + 1, \tau)$ en dus heeft G een Fourier-getransformeerde in x . Poisson-sommatie geeft

$$\eta(\tau) = G(0, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n, \tau)$$

met

$$\hat{f}(n, \tau) = \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + k, \tau) e^{-2\pi i n x} dx.$$

Alles bij elkaar:

$$\eta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + k, \tau) e^{-2\pi i n x} \right) dx. \quad (2.8)$$

Omdat k en n hier allebei over gehele getallen sommeren, is $e^{-2\pi i n k} = 1$ en deze mag dus met de integrand vermenigvuldigd worden, zonder dat er iets verandert. De substitutie $\hat{x} = x + k$ en nogmaals het gebruik van deze absolute convergentie geeft dan de volgende formule:

$$\eta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\hat{x}, \tau) e^{-2\pi i n \hat{x}} d\hat{x}.$$

Uitschrijven geeft

$$\eta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i x + \frac{\pi i \tau (6x-1)^2}{12} - 2\pi i n x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \left(x + \frac{\tau(6x-1)^2}{12} - 2nx \right)} dx.$$

De exponent kan simpel herschreven worden:

$$\begin{aligned} x + \frac{\tau(6x-1)^2}{12} - 2nx &= 3\tau x^2 + (1 - \tau - 2n)x + \frac{\tau}{12} \\ &= \left((3\tau)^{\frac{1}{2}} x + \frac{1 - \tau - 2n}{2(3\tau)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 - \frac{1 + \tau^2 + 4n^2 - 2\tau - 4n + 4n\tau}{12\tau} + \frac{\tau}{12} \\ &= \left((3\tau)^{\frac{1}{2}} x + \frac{1 - \tau - 2n}{(12\tau)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 - \frac{(2n-1)^2}{12\tau} - \frac{2n-1}{6} \end{aligned}$$

waarbij we de vertakking van de wortel kiezen zodat $\sqrt{\tau}$ in het rechter halfvlak ligt; de snede van de wortel ligt op de negatieve reële as. Dit geeft

$$\begin{aligned} \eta(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \left(\left((3\tau)^{\frac{1}{2}} x + \frac{1 - \tau - 2n}{(12\tau)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 - \frac{(2n-1)^2}{12\tau} - \frac{2n-1}{6} \right)} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi i \left(\frac{(2n-1)^2}{12\tau} + \frac{2n-1}{6} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \left((3\tau)^{\frac{1}{2}} x + \frac{1 - \tau - 2n}{(12\tau)^{\frac{1}{2}}} \right)^2} dx \end{aligned}$$

Neem in de exponent in de integrand $\pi i = (-\sqrt{\pi i})^2$ met dezelfde snede van de wortel, zodat de integraal na substitutie een Gaussische integraal wordt. Dat geeft

$$\eta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi i \left(\frac{(2n-1)^2}{12\tau} + \frac{2n-1}{6} \right)} \sqrt{\frac{\pi}{-\pi i 3\tau}} = \sqrt{\frac{1}{-3i\tau}} e^{\pi i/6} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi i \left(\frac{(2n-1)^2}{12\tau} + \frac{n}{3} \right)}.$$

Nu is het idee om de som rechts op te splitsen in drie sommen: voor $n = 3k$, $n = 3k + 1$ en $n = 3k + 2$. Uitschrijven geeft

$$\eta(\tau) = \sqrt{\frac{1}{-3i\tau}} e^{\pi i/6} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(e^{-\pi i \left(\frac{(6k-1)^2}{12\tau} + k \right)} + e^{-\pi i \left(\frac{(6k+1)^2}{12\tau} + k + \frac{1}{3} \right)} + e^{-\pi i \left(\frac{(6k+3)^2}{12\tau} + k + \frac{2}{3} \right)} \right).$$

De eerste term in deze som is exact gelijk aan $f\left(k, \frac{-1}{\tau}\right)$. De tweede term is dat ook bijna, maar dan vermenigvuldigd met $e^{-\pi i/3}$. Dit is in te zien door de termen met $-k$ in te vullen op de termen met k . De derde term valt weg, want iedere term voor k valt exact weg tegen de term voor $1 - k$. Al met al wordt dat

$$\eta(\tau) = \sqrt{\frac{1}{-3i\tau}} e^{\pi i/6} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 + e^{-\pi i/3} \right) f\left(k, \frac{-1}{\tau}\right).$$

Dit geeft

$$\eta(\tau) = (e^{\pi i/6} + e^{-\pi i/6}) \sqrt{\frac{1}{-3i\tau}} \eta\left(\frac{-1}{\tau}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sqrt{\frac{1}{-3i\tau}} \eta\left(\frac{-1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{-\frac{1}{2}} \eta\left(\frac{-1}{\tau}\right).$$

De laatste formule, anders geschreven, geeft

$$\eta\left(\frac{-1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} \eta(\tau), \tag{2.9}$$

wat precies is wat we wilden bewijzen.

Hoofdstuk 3

Constructie van een integratiepad

De cirkelmethode van Hardy en Littlewood wordt hier gebruikt om een formule voor $p(n)$ te vinden. Duidelijk is:

$$\frac{F(x)}{x^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^{k-n-1} = p(0)x^{-n-1} + p(1)x^{-n} + p(2)x^{-n+1} + \dots + p(n)x^{-1} + p(n+1)x + \dots$$

Dit is een Laurentreeks rond $x = 0$ van $F(x)x^{-1-n}$. De oneindige som van (2.1) is analytisch op $|x| < 1$, dus op een pool van orde $n + 1$ na is deze functie analytisch op dit gebied. Op de eenheidscirkel gebeurt er echter iets vervelends, wat snel duidelijk wordt als men de productformule bekijkt:

$$F(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k}.$$

Dit product heeft een essentiële singulariteit op iedere complexe eenheidswortel: kies $\frac{h}{k} \in \mathbb{Q}$ willekeurig, dan geldt dat als $x = e^{2\pi i \frac{h}{k}}$, iedere term in dit product die een veelvoud van k is een eerste orde pool heeft in x . Neem bijvoorbeeld de breuk $\frac{23}{37}$. De bijbehorende eenheidswortel is $x = e^{2\pi i \frac{23}{37}}$. Deze is een oplossing van $1 - x^{37} = 0$, $1 - x^{74} = 0$, $1 - x^{111} = 0$, etc.

Zolang het integratiepad binnen de eenheidscirkel blijft, gaat er dus niet veel fout. De enige singulariteiten liggen namelijk op $x = 0$ en op de eenheidscirkel. Cauchy's Residuenstelling geeft dat een integraal van een functie over een gesloten kromme gelijk is aan $2\pi i$ maal de som over de singulariteiten van het windgetal maal het residu in die singulariteit. Kies als kromme C een cirkel met straal kleiner dan 1, heeft de singulariteit rond $x = 0$ windgetal 1 en alle andere singulariteiten windgetal 0. Dat betekent:

$$\oint_C \frac{F(x)}{x^{n+1}} dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{x=0} \left(\frac{F(x)}{x^{n+1}} dx \right).$$

Het residu rond $x = 0$ van de integrand is makkelijk uit te rekenen: dit is de coëfficiënt van x^{-1} in de Laurentreeks rond $x = 0$. Dus

$$\oint_C \frac{F(x)}{x^{n+1}} dx = 2\pi i p(n)$$

en dus ook

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(q)}{q^{n+1}} dq$$

Neem nu C de cirkel rond de oorsprong met straal $e^{-2\pi}$, dus C kan geparametriseerd worden als $q = e^{2\pi i \tau}$ met τ over de rechte lijn van i naar $i + 1$. Dat geeft $\frac{dq}{d\tau} = 2\pi i q$. Deze transformatie

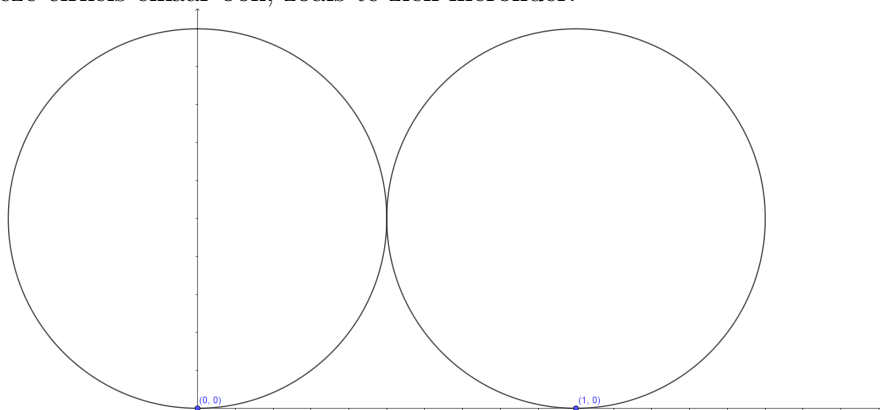
ingevuld in de integraal geeft

$$p(n) = \int_i^{i+1} F(q) e^{-2\pi i n \tau} d\tau = \int_i^{i+1} \frac{q^{\frac{1}{24}-n}}{\eta(\tau)} d\tau. \quad (3.1)$$

De transformatie beeldt met de eenheidscirkel af op het interval $[0, 1)$, het punt $q = 0$ op $i\infty$ en de eenheidsschijf op de strip $Im(\tau) > 0, 0 \leq Re(\tau) < 1$. De polen van de integrand liggen dus op iedere reële breuk tussen 0 en 1 en op $i\infty$. Alle informatie voor onze integraal ligt dus op de reële as. Daarom wordt in plaats van de rechte lijn van i naar $i + 1$ het pad gekozen zodat het willekeurig dicht bij iedere breuk op $[0, 1)$ komt. Dit wordt gedaan met behulp van Ford-cirkels, die als gunstig bijeffect hebben dat ze veel te maken hebben met $SL_2(\mathbb{Z})$.

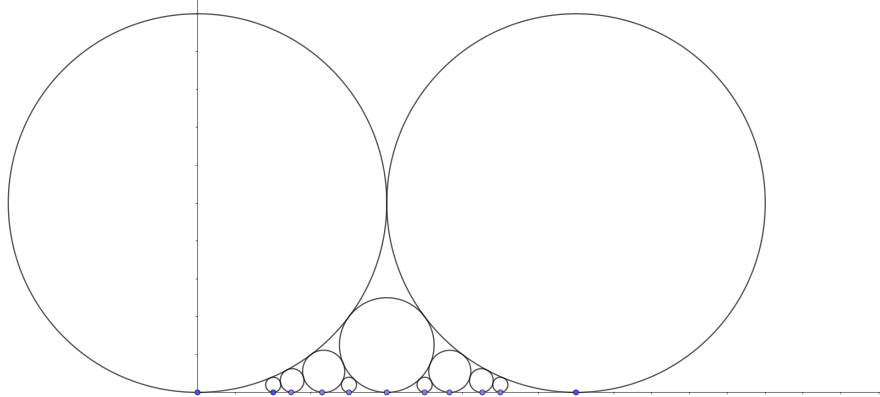
3.1 Rakende cirkel-probleem

Als boven 0 en 1 cirkels met straal $\frac{1}{2}$ geplaatst worden, zodat deze de reële as precies raken, raken deze cirkels elkaar ook, zoals te zien hieronder.



Waar moet de grootst mogelijke cirkel komen die beide cirkels en de reële as exact raakt? En als die er is, waar moet dan de grootst mogelijke komen?

Het blijkt, dat als de cirkels boven breuk $\frac{a}{c}$, met $\gcd(a, c) = 1$, straal $\frac{1}{2c^2}$ hebben, deze cirkels elkaar precies raken en nergens overlappen. Hieronder een plaatje met deze stralen, alle cirkels met noemer kleiner dan 5.



Dit heeft een prachtig bewijs, dat in dit hoofdstuk gegeven wordt. Hier zijn Farey-breuken essentieel voor het bewijs.

3.2 Farey-breuken en hun eigenschappen

De rij Farey-breuken van orde n bestaat uit alle gereduceerde breuken in $[0, 1]$, gesorteerd op volgorde. Een paar voorbeelden:

$$\begin{aligned} F_1 &: \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \\ F_2 &: \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \\ F_7 &: \frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1} \end{aligned}$$

Hier gelden een paar mooie eigenschappen voor. Als $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ Farey-breuken zijn, dan $\frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d}$. Dat is al snel duidelijk:

$$\frac{a+b}{c+d} - \frac{a}{c} = \frac{bc-ad}{c(c+d)} > 0$$

en

$$\frac{b}{d} - \frac{a+b}{c+d} = \frac{bc-ad}{d(c+d)} > 0.$$

Beide ongelijkheden volgen direct uit $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

Een andere, erg belangrijke eigenschap, is dat als $0 \leq \frac{a}{c} < \frac{b}{d} \leq 1$ en $bc - ad = 1$, dan zijn $\frac{a}{c}$ en $\frac{b}{d}$ opeenvolgende breuken in een Farey-rij. Omdat $bc - ad = 1$, is $\gcd(a, c) = \gcd(b, d) = 1$. Ze zijn niet opeenvolgend als er een breuk $\frac{h}{k}$ bestaat met $k < c$ of $k < d$. We weten:

$$k = (bc - ad)k = bck - adk - cdh + cdh = c(bk - dh) + d(ch - ak) \geq c + d$$

omdat $bk - dh \geq 1$ en $ch - ak \geq 1$. Deze laatste ongelijkheden volgt uit $\frac{a}{c} < \frac{h}{k} < \frac{b}{d}$. Dus er bestaat geen breuk tussen $\frac{a}{c}$ en $\frac{b}{d}$ met noemer kleiner dan c of d , dus in ieder geval vanaf $\max c, d$ staan deze breuken tijdelijk naast elkaar.

Dit geeft een erg mooi inzicht, duidelijk zichtbaar in de voorbeelden aan het begin van deze sectie: Als men twee opeenvolgende breuken ziet als een 2×2 -matrix, heeft deze een determinant van -1 . Verwisselt men de kolommen, krijgt deze matrix dus duidelijk een determinant van 1 , oftewel elementen van $SL_2(\mathbb{Z})$.

3.3 Ford-cirkels

Gegeven een breuk $\frac{a}{c}$ met $\gcd(a, c) = 1$. De Ford-cirkel bij deze breuk is de cirkel in het complexe vlak met middelpunt $\frac{a}{c} + \frac{i}{2c^2}$ en straal $\frac{1}{2c^2}$. Deze cirkel wordt in dit werk genoteerd met $C(a, c)$. Deze cirkels zijn vernoemd naar L.R. Ford [5], die ze voor het eerst bestudeerde. De claim is dat de oplossing van het rakende-cirkel probleem gegeven wordt door Ford-cirkels, horende bij Farey-breuken.

Kies de horizontale lijn $\Im(t) = 1$ en de Ford-cirkel $C(0, 1)$. De horizontale lijn zou beschreven kunnen worden als een cirkel met straal ∞ en middelpunt $i\infty$. Duidelijk is dat deze cirkels elkaar raken in $\tau = i$.

Als men de Möbiustransformatie $\tau \rightarrow \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ toepast, met $ad - bc = 1$, worden deze cirkels vervormd naar andere cirkels.

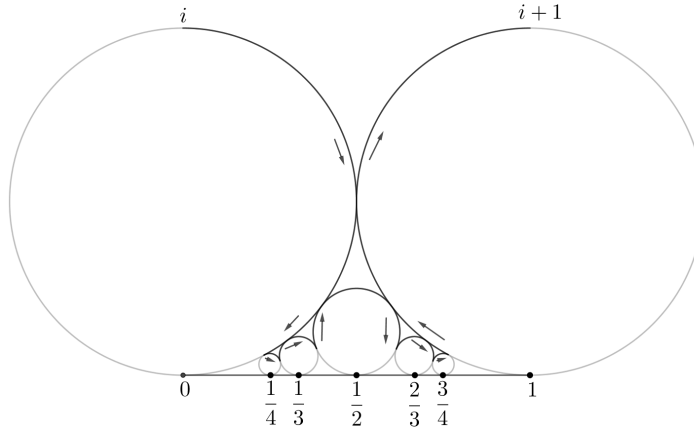
Voor de Ford-cirkel $C(a, c)$ geldt $\gcd(a, c) = 1$, dus er bestaan $b, d \in \mathbb{Z}$ zodat $ad - bc = 1$. We bekijken de Möbiustransformatie

$$\tau = \frac{at+b}{ct+d} = \frac{\frac{a}{c}(ct+d)}{ct+d} - \frac{ad-bc}{c^2t+cd} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2(t+\frac{d}{c})}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{(ct+d)^2}.$$

Deze transformatie stuurt de lijn $\Im(t) = 1$ eerst naar zichzelf door de transformatie $t \rightarrow t + \frac{d}{c}$, vervolgens naar de lijn $\Im(t) = c^2$ door $t \rightarrow c^2 t$, vervolgens naar de cirkel met middelpunt $\frac{i}{2c^2}$ en straal $\frac{1}{2c^2}$ door $t \rightarrow \frac{1}{t}$ en deze vervolgens naar $C(a, c)$ door $t \rightarrow \frac{a}{c} - t$. $C(0, 1)$ wordt door deze transformatie op eenzelfde manier naar $C(b, d)$ gestuurd. Omdat de lijn $\Im(t) = 1$ en de Ford-cirkel $C(0, 1)$ elkaar duidelijk alleen raken in $t = i$, raken de Ford-cirkels $C(a, c)$ en $C(b, d)$ elkaar ook in een enkel punt als $ad - bc = 1$.

3.4 Een beschrijving van het Rademacherpad

Eerst is het belangrijk om op te merken dat het punt $\tau = i$ en $\tau = i + 1$ in de integrand van (3.1) geïdentificeerd kunnen worden, omdat ze oorspronkelijk van hetzelfde punt op de cirkel in q -ruimte kwamen. Als $N \in \mathbb{N}$ vast gekozen wordt, kan men de Ford-cirkels horende bij breuken in F_N tekenen. De cirkel bij $C(0, 1)$ gaat door het punt $\tau = i$ en de cirkel bij $C(1, 1)$ gaat door het punt $\tau = i + 1$. Merk op dat deze cirkels door τ geïdentificeerd worden. Neem met de klok mee het pad rond $C(0, 1)$, tot de Ford-cirkel horend bij de volgende Farey-breuk wordt geraakt. Neem dan met de klok mee het pad over die cirkel, tot de Ford-cirkel bij de volgende Farey-breuk wordt geraakt. Herhaal dit tot op een gegeven moment het punt $\tau = i + 1$ wordt bereikt. Noem dit pad $P(N)$. Voor $N = 4$ staat dit pad geïllustreerd.



Nu geldt dus:

$$p(n) = \int_i^{i+1} \frac{q^{\frac{1}{24}-n}}{\eta(\tau)} d\tau = \int_{P(N)} \frac{q^{\frac{1}{24}-n}}{\eta(\tau)} d\tau$$

We kunnen in plaats van over dit pad, de integraal ook per Ford-cirkel bekijken: over iedere Ford-cirkel wordt helemaal geïntegreerd (op het snijpunt met de reële as na) en we bekijken alle Ford-cirkels horend bij breuken met noemer kleiner dan N . Oftewel:

$$\sum_{c=1}^N \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \oint_{C(a,c)} \frac{q^{\frac{1}{24}-n}}{\eta(\tau)} d\tau$$

waarbij over alle cirkels met de klok mee wordt geïntegreerd.

Als $N \rightarrow \infty$, wordt $P(N)$ een pad dat alle Ford-cirkels helemaal, met de klok mee doorloopt, behalve het punt op de reële as. Dat betekent dat

$$p(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{P(N)} \frac{q^{\frac{1}{24}-n}}{\eta(\tau)} d\tau = \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \oint_{C(a,c)} \frac{q^{\frac{1}{24}-n}}{\eta(\tau)} d\tau \quad (3.2)$$

onder de voorwaarde dat de som rechts absoluut convergeert.

Hoofdstuk 4

Transformatie en absolute convergentie

4.1 Absolute convergentie van de som over de Ford-cirkels

We willen laten zien dat

$$\sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \left| \oint_{C(a,c)} \frac{q^{\frac{1}{24}-n}}{\eta(\tau)} d\tau \right|$$

convergeert. Merk op:

$$\sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \left| \oint_{C(a,c)} \frac{q^{\frac{1}{24}-n}}{\eta(\tau)} d\tau \right| \leq \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \oint_{C(a,c)} \left| \frac{q^{\frac{1}{24}-n}}{\eta(\tau)} d\tau \right|,$$

vanwege de driehoeksongelijkheid. $C(a, c)$ is een cirkel met straal $\frac{1}{2c^2}$, dus deze heeft omtrek $\frac{\pi}{c^2}$. We hebben ten hoogste c van deze cirkels, dus al met al weten we

$$\sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \oint_{C(a,c)} \left| \frac{q^{\frac{1}{24}-n}}{\eta(\tau)} d\tau \right| \leq \sum_{c=1}^{\infty} \frac{\pi}{c} \left| \frac{q^{\frac{1}{24}-n}}{\eta(\tau)} \right|,$$

met het deel in de absolute waardestrepn op deze Ford-cirkels. We gebruiken de Möbiustransformatie uit sectie 3.3 om de η af te schatten. Er bestaan een $b, d \in \mathbb{Z}$ zodat $ad - bc = 1$, want $\gcd(a, c) = 1$. Als nu $\tau = \frac{at+b}{ct+d}$, ligt t op de lijn van $i + \infty$ naar $i - \infty$. Ook geldt

$$\eta(\tau) = \epsilon(a, b, c, d)(ct + d)^{\frac{1}{2}} \eta(t).$$

$|\epsilon(a, b, c, d)| = 1$, want de exponent is zuiver imaginair. Dit geeft $|\eta(\tau)| = \left| (ct + d)^{\frac{1}{2}} \right| |\eta(t)|$.

Omdat t op de horizontale lijn door i ligt, geldt $\left| (ct + d)^{\frac{1}{2}} \right| \geq \sqrt{c}$. We zien dat $|\eta(t)| = |\eta(x + i)|$, met $x \in \mathbb{R}$. Deze is periodiek volgens (2.4), en heeft geen nulpunten in deze periode, dus deze heeft een minimum op dit interval, zeg N . Dus $\eta(t) > N$. Bij elkaar genomen hebben we dus $|\eta(\tau)| > N\sqrt{c}$.

$|q^{\frac{1}{24}-n}| = |e^{2\pi i \tau (\frac{1}{24}-n)}|$ en voor vaste n is deze begrensd door een constante M . Alles ingevuld geeft

$$\sum_{c=1}^{\infty} \frac{\pi}{c} \left| \frac{q^{\frac{1}{24}-n}}{\eta(\tau)} d\tau \right| \leq \sum_{c=1}^{\infty} \frac{M\pi}{Nc^{\frac{3}{2}}} = \frac{M\pi}{N} \sum_{c=1}^{\infty} c^{-\frac{3}{2}}.$$

Deze is natuurlijk convergent en dus geldt

$$p(n) = \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \oint_{C(a,c)} \frac{q^{\frac{1}{24}-n}}{\eta(\tau)} d\tau.$$

4.2 Uitwerking voor $C(0, 1)$

In deze sectie wordt de integraal uitgewerkt voor de eerste Ford-cirkel. Deze is erg intuïtief en het idee van het bewijs wordt zo erg snel duidelijk.

Neem $z = -\frac{1}{\tau}$, zodat $\tau = -\frac{1}{z}$ en $\frac{d\tau}{dz} = \frac{1}{z^2}$. Dan

$$\oint_{C(0,1)} \frac{q^{\frac{1}{24}-n}}{\eta(\tau)} d\tau = \int_{i+\infty}^{i-\infty} \frac{e^{\frac{2\pi i}{z}(n-\frac{1}{24})}}{z^2 \eta(-\frac{1}{z})} dz = \int_{i+\infty}^{i-\infty} e^{\frac{2\pi i}{z}(n-\frac{1}{24})} z^{-2} (-iz)^{-\frac{1}{2}} \eta(z)^{-1} dz$$

volgens (2.5). Hier vullen we in dat $F(e^{2\pi iz}) = \frac{e^{\pi iz/12}}{\eta(z)}$ en we krijgen

$$\int_{i+\infty}^{i-\infty} e^{\frac{2\pi i}{z}(n-\frac{1}{24})} z^{-2} (-iz)^{-\frac{1}{2}} \eta(z)^{-1} dz = \int_{i+\infty}^{i-\infty} e^{\frac{2\pi i}{z}(n-\frac{1}{24})} z^{-2} (-iz)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi iz}{12}} F(e^{2\pi iz}) dz.$$

Uitwerken van de definitie van $F(e^{2\pi iz})$ geeft

$$\int_{i+\infty}^{i-\infty} e^{\frac{2\pi i}{z}(n-\frac{1}{24})} z^{-2} (-iz)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi iz}{12}} F(e^{2\pi iz}) dz = \int_{i+\infty}^{i-\infty} e^{\pi i(\frac{2n}{z} - \frac{1}{12z} - \frac{z}{12})} z^{-2} (-iz)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} p(k) e^{2\pi ikz} dz.$$

Omdat we in het absolute convergentiegebied van deze som werken, mag de sommatie over k uit de integraal gehaald worden. Dan staat hier

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k) \int_{i+\infty}^{i-\infty} e^{\pi i((2k-\frac{1}{12})z + \frac{24n-1}{12z})} z^{-2} (-iz)^{-\frac{1}{2}} dz. \quad (4.1)$$

Nu willen we bewijzen dat de integraal van (4.1) gelijk is aan 0 als $k > \frac{1}{24}$.

Bekijk de rechthoek van $i + R$ naar $i - R$, naar $Ri - R$, naar $Ri + R$, naar $i + R$. Als we over deze rechthoek de integrand van (4.1) integreren en R naar oneindig laten gaan, krijgen we sowieso 0, want deze integrand is analytisch op het bovenhalfvlak. De integraal van $i + R$ naar $i - R$ wordt gelijk aan de integraal van (4.1). We laten zien dat de integralen over de andere lijnstukken gelijk worden aan 0 als $2k - \frac{1}{12} > 0$.

$$\int_{Ri-R}^{Ri+R} \left| e^{\pi i((2k-\frac{1}{12})z + \frac{24n-1}{12z})} z^{-2} (-iz)^{-\frac{1}{2}} dz \right| = \int_{Ri-R}^{Ri+R} \left| e^{-\pi R(2k-\frac{1}{12}) + \pi R \frac{24n-1}{12|z|^2}} z^{-\frac{5}{2}} dz \right|.$$

De lengte van dit pad is $2R$, maar $z^{-\frac{5}{2}}$ drukt dit snel naar 0 en als $2k - \frac{1}{12} > 0$ is de e -macht begrensd, dus gaat deze integraal naar 0 als $R \rightarrow \infty$.

Met dezelfde redenering gaan de andere twee integralen ook naar 0 als $R \rightarrow \infty$, waarbij we gebruiken dat $\Im(z) \geq 1$. Dat betekent dat de integraal over de lijn van $i + R$ naar $i - R$ ook absoluut naar 0 moet convergeren, als $R \rightarrow \infty$. Dus

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k) \int_{i+\infty}^{i-\infty} e^{\pi i((2k-\frac{1}{12})z + \frac{24n-1}{12z})} z^{-2} (-iz)^{-\frac{1}{2}} dz = \int_{i+\infty}^{i-\infty} e^{\pi i(\frac{24n-1}{12z} - \frac{z}{12})} z^{-2} (-iz)^{-\frac{1}{2}} dz.$$

Integralen van deze vorm worden verder uitgewerkt in het volgende hoofdstuk.

4.3 Toepassing van Dedekinds Functievergelijking op $C(a, c)$

We weten al dat

$$\eta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = e^{\pi i\left(\frac{a+d}{12c} - s(d,c) - \frac{1}{4}\right)}(c\tau + d)^{\frac{1}{2}}\eta(\tau)$$

als $ad - bc = 1$, volgens (2.3). Voor $C(a, c)$ geldt dat $\gcd(a, c) = 1$, dus er bestaan een $b, d \in \mathbb{Z}$ zodat $ad - bc = 1$. Nu bekijken we nogmaals de Möbiustransformatie die deze cirkel omvormt in een lijn van $i + \infty$ naar $i - \infty$:

$$\tau = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2\left(z + \frac{d}{c}\right)}, \quad \frac{d\tau}{dz} = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

Invullen geeft

$$\eta(\tau) = e^{\pi i\left(\frac{a+d}{12c} - s(d,c) - \frac{1}{4}\right)}(cz + d)^{\frac{1}{2}}\eta(z).$$

Nu geldt:

$$\begin{aligned} p(n) &= \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \oint_{C(a,c)} \frac{q^{\frac{1}{24}-n}}{\eta(\tau)} d\tau = \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \int_{i+\infty}^{i-\infty} \frac{q^{\frac{1}{24}-n}}{\eta(\tau)(cz + d)^2} dz \\ &= \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \int_{i+\infty}^{i-\infty} \frac{q^{\frac{1}{24}-n}}{e^{\pi i\left(\frac{a+d}{12c} - s(d,c) - \frac{1}{4}\right)}(cz + d)^{\frac{5}{2}}\eta(z)} dz. \end{aligned}$$

Als nu de transformatie $z \rightarrow z - \frac{d}{c}$ uitgevoerd wordt, staat hier

$$\begin{aligned} &\sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \int_{i+\infty}^{i-\infty} \frac{q^{\frac{1}{24}-n}}{e^{\pi i\left(\frac{a+d}{12c} - s(d,c) - \frac{1}{4}\right)}(cz)^{\frac{5}{2}}\eta\left(z - \frac{d}{c}\right)} dz \\ &= \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \frac{\sqrt{i}}{c^{\frac{5}{2}}} e^{\pi i s(d,c) - \pi i \frac{a+d}{12c}} \int_{i+\infty}^{i-\infty} q^{\frac{1}{24}-n} z^{-\frac{5}{2}} \eta\left(z - \frac{d}{c}\right)^{-1} dz. \end{aligned}$$

4.4 Uitwerking van de somformule van de genererende functie

We vullen nu in dat

$$\eta\left(z - \frac{d}{c}\right)^{-1} = e^{\frac{-\pi iz + \pi id}{12c}} F\left(e^{2\pi iz - \frac{2\pi id}{c}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} p(k) e^{(2\pi iz - \frac{2\pi id}{c})\left(k - \frac{1}{24}\right)}.$$

Dit geeft

$$\begin{aligned} &\sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \sqrt{i} e^{\pi i s(d,c) - \pi i \frac{a+d}{12c}} \int_{i+\infty}^{i-\infty} q^{\frac{1}{24}-n} (cz)^{-\frac{5}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} p(k) e^{(2\pi iz - \frac{2\pi id}{c})\left(k - \frac{1}{24}\right)} dz \\ &= \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \sqrt{i} e^{\pi i s(d,c) - \pi i \frac{a+d}{12c}} \int_{i+\infty}^{i-\infty} (cz)^{-\frac{5}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} p(k) e^{2\pi i \frac{az - \frac{ad}{c} + b}{cz} \left(\frac{1}{24} - n\right) + (2\pi iz - \frac{2\pi id}{c})\left(k - \frac{1}{24}\right)} dz. \end{aligned}$$

Deze integraal is 0 voor $k > \frac{1}{24}$, op dezelfde manier als bewezen voor $C(0, 1)$. We hoeven dus alleen te kijken naar $k = 0$. Dat geeft

$$\begin{aligned}
&= \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \sqrt{i} e^{\pi i s(d,c) - \pi i \frac{a}{12c}} \int_{i+\infty}^{i-\infty} (cz)^{-\frac{5}{2}} e^{2\pi i \frac{az - \frac{ad}{c} + b}{cz} (\frac{1}{24} - n) - \frac{\pi iz}{12}} dz. \\
&= \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \sqrt{i} e^{\pi i s(d,c) - \pi i \frac{a}{12c}} \int_{i+\infty}^{i-\infty} (cz)^{-\frac{5}{2}} e^{2\pi i \left(\frac{a}{c} - \frac{1}{c^2 z}\right) (\frac{1}{24} - n) - \frac{\pi iz}{12}} dz \\
&= \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \sqrt{i} e^{\pi i s(d,c) - 2\pi i n \frac{a}{c}} \int_{i+\infty}^{i-\infty} (cz)^{-\frac{5}{2}} e^{\frac{-2\pi i}{c^2 z} (\frac{1}{24} - n) - \frac{\pi iz}{12}} dz \\
&= \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \sqrt{i} e^{\pi i s(a,c) - 2\pi i n \frac{a}{c}} \int_{i+\infty}^{i-\infty} (cz)^{-\frac{5}{2}} e^{\pi i \left(\frac{24n-1}{12c^2 z} - \frac{z}{12}\right)} dz.
\end{aligned}$$

Merk in de laatste formule op dat $ad \equiv 1 \pmod{c}$, dus $s(d, c) = s(a, c)$, volgens [1], stelling 3.6 (b), pagina 62. Deze laatste som convergeert duidelijk absoluut, want de exponent van de e -macht is zuiver imaginair en deze integraal gedraagt zich als een Gamma-functie. Dit geeft ons

$$p(n) = \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{0 \leq a < c \\ \gcd(a,c)=1}} \sqrt{i} e^{\pi i s(a,c) - 2\pi i n \frac{a}{c}} \int_{i+\infty}^{i-\infty} (cz)^{-\frac{5}{2}} e^{\pi i \left(\frac{24n-1}{12c^2 z} - \frac{z}{12}\right)} dz.$$

Let op de definitie van $A_k(n)$ in (1.5). Nu staat er dus

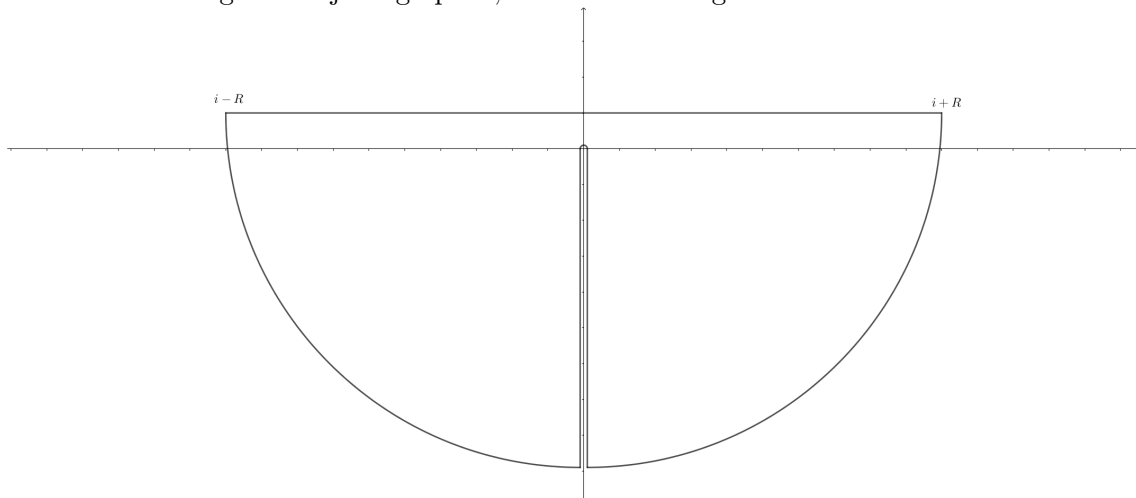
$$p(n) = \sum_{c=1}^{\infty} A_c(n) \sqrt{i} \int_{i+\infty}^{i-\infty} (cz)^{-\frac{5}{2}} e^{\pi i \left(\frac{24n-1}{12c^2 z} - \frac{z}{12}\right)} dz. \quad (4.2)$$

Hoofdstuk 5

De uitwerking naar Gamma-integralen

5.1 Omvormen van het integratiepad

Bekijk nu het integratiepad dat van $i + \infty$ naar $i - \infty$ loopt, een kwartcirkel tegen de klok in maakt tot vlak voor de negatieve imaginaire as, langs de negatieve imaginaire as loopt tot de reële as, een halve cirkel met de klok mee maakt om 0 heen, terugloopt naar $-i\infty$ en dan een kwart cirkel terug naar zijn beginpunt, zoals hieronder geïllustreerd.



Als $Im(z) < 1$, gaat de integraal van (4.2) naar nul, dus de kwartcirkels met straal ∞ vallen weg en we kunnen de integraal vervangen door de integraal die aan de positieve reële kant langs de lijn $-i\infty$ naar 0, loopt, om 0 heen draait en terug loopt naar $-i\infty$. Dit pad noteren we met

$$\int_{i+\infty}^{i-\infty} = \int_{-i\infty}^{0^+},$$

De 0^+ staat hier voor de positieve oriëntatie van de cirkel om 0. We verleggen de snede van de wortel dan ook naar de negatieve imaginaire as. Dit maakt van (4.2)

$$p(n) = \sum_{c=1}^{\infty} A_c(n) \int_{-i\infty}^{0^+} i^{\frac{1}{2}} (cz)^{-\frac{5}{2}} e^{\pi i \left(\frac{24n-1}{12c^2 z} - \frac{z}{12} \right)} dz.$$

Neem nu $w = -iz$. Dit geeft:

$$p(n) = \sum_{c=1}^{\infty} A_c(n) i \int_{-\infty}^{0^+} (cw)^{-\frac{5}{2}} e^{2\pi \left(\frac{n-\frac{1}{24}}{c^2 w} + \frac{w}{24} \right)} dw.$$

Neem $t = \frac{\pi w}{12}$. Nu staat hier

$$p(n) = \sum_{c=1}^{\infty} A_c(n) i \int_{-\infty}^{0^+} \left(\frac{\pi}{12ct} \right)^{\frac{5}{2}} e^{2\pi \left(\frac{\pi n - \frac{\pi}{24}}{12c^2 t} + \frac{t}{2\pi} \right)} \frac{12}{\pi} dt = \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{12} \right)^{\frac{3}{2}} A_c(n) i \int_{-\infty}^{0^+} (ct)^{-\frac{5}{2}} e^{t + \frac{\pi^2}{6c^2 t} \left(n - \frac{1}{24} \right)} dt.$$

Als nu $\frac{u^2}{4} = \frac{\pi^2}{6c^2} \left(n - \frac{1}{24} \right)$, staat hier

$$p(n) = \sum_{c=1}^{\infty} c^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{\pi}{12} \right)^{\frac{3}{2}} A_c(n) i \int_{-\infty}^{0^+} t^{-\frac{5}{2}} e^{t + \frac{u^2}{4t}} dt. \quad (5.1)$$

5.2 De Hankelrepresentatie voor de Gammafunctie

Een bekend resultaat is de Hankelrepresentatie [6] van $\Gamma(z)$:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2i \sin(\pi z)} \int_{-\infty}^{0^+} e^{t} t^{z-1} dt.$$

Als we de Taylor-reeks voor de e -macht opschrijven, zodat

$$e^{\frac{u^2}{4t}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{u^{2r}}{2^{2r} t^r r!}$$

dan staat er in (5.1):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0^+} t^{-\frac{5}{2}} e^t \sum_{r=0}^{\infty} \frac{u^{2r}}{2^{2r} t^r r!} dt &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{u^{2r}}{2^{2r} r!} \int_{-\infty}^{0^+} t^{-r-\frac{5}{2}} e^t dt \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{u^{2r}}{2^{2r} r!} 2i \sin \left(\pi \left(-r - \frac{3}{2} \right) \right) \Gamma \left(-r - \frac{3}{2} \right) \\ &= -i \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r u^{2r}}{2^{2r-1} r!} \Gamma \left(-r - \frac{3}{2} \right). \end{aligned}$$

Omdat $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ en $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, geldt

$$\Gamma \left(-r - 2 + \frac{1}{2} \right) = \sqrt{\pi} \frac{(-4)^{r+2} (r+2)!}{(2r+4)!}.$$

Invullen geeft

$$\begin{aligned} p(n) &= \sum_{c=1}^{\infty} c^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{\pi}{12} \right)^{\frac{3}{2}} A_c(n) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r u^{2r}}{2^{2r-1} r!} \sqrt{\pi} \frac{(-1)^{r+2} 2^{2r+4} (r+2)!}{(2r+4)!} \\ &= \sum_{c=1}^{\infty} 4c^{-\frac{5}{2}} \pi^2 3^{-\frac{3}{2}} A_c(n) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{u^{2r} (r+2)(r+1)}{(2r+4)!} = \sum_{c=1}^{\infty} c^{-\frac{5}{2}} \pi^2 3^{-\frac{3}{2}} A_c(n) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{u^{2r}}{(2r+1)!(2r+3)!}. \end{aligned}$$

Als we de Taylor-reksen van cosh en sinh bekijken, zien we snel dat

$$p(n) = \sum_{c=1}^{\infty} c^{-\frac{5}{2}} \pi^2 3^{-\frac{3}{2}} A_c(n) \left(\frac{\cosh(u)}{u^2} - \frac{\sinh(u)}{u^3} \right) = \sum_{c=1}^{\infty} c^{-\frac{5}{2}} \pi^2 3^{-\frac{3}{2}} A_c(n) \frac{d}{du} \frac{\sinh(u)}{u}. \quad (5.2)$$

5.3 Uitwerking en conclusie

Invullen van $u = \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{24}\right)}$ geeft

$$n = \frac{3}{2} \left(\frac{cu}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{24}, \quad \frac{dn}{du} = \frac{3c^2u}{\pi^2}.$$

Invullen in (5.2) en de kettingregel gebruiken geeft

$$\begin{aligned} p(n) &= \sum_{c=1}^{\infty} c^{-\frac{5}{2}} \pi^2 3^{-\frac{3}{2}} A_c(n) \frac{1}{\frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{24}\right)}} \frac{d \sinh\left(\frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{24}\right)}\right)}{dn} \frac{dn}{\frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{24}\right)}} \frac{du}{du} \\ &= \sum_{c=1}^{\infty} c^{-\frac{1}{2}} 3^{-\frac{1}{2}} A_c(n) \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{24}\right)}} \frac{d \sinh\left(\frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{24}\right)}\right)}{dn} \frac{c \sqrt{\frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{24}\right)}}{\pi} \\ &= \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\pi} c^{\frac{1}{2}} A_c(n) \frac{d \sinh\left(\frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{24}\right)}\right)}{dn} \frac{1}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \sqrt{c} A_c(n) \frac{d \sinh\left(\frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{24}\right)}\right)}{dn} \frac{1}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \end{aligned}$$

en hiermee is (1.5) bewezen.

Bibliografie

- [1] Apostol, T.M. Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory (1990), *Springer-Verlag, New York*.
- [2] Hardy, G.H. and Ramanujan, S. Asymptotic formulae in combinatory analysis. *Proc. London Math. Soc. (2) 17* (1918), 75-115.
- [3] Uspensky, J.V. Asymptotic Formulae for numerical functions which occur in the theory of partitions [Russisch]. *Bull. Acad. Sci. URSS (6) 14* (1920), no. 17, 36 pp. MR10, 286b.
- [4] Lehmer, D.H. On the Hardy-Ramanujan series for the partition function. *J. London Math. Soc. 12* (1937), 171-176.
- [5] Ford, Lester R. Fractions. *Amer. Math. Monthly 45* (1938), 586-601
- [6] Schmelzer, T. and Trefethen, L. Computing the Gamma Function Using Contour Integrals and Rational Approximations , *SIAM Journal on Numerical Analysis 1* (2007)
- [7] Whittaker, E.T. and Watson, G.N. A Course of Modern Analysis, Fourth Edition (1927), *Cambridge University Press*
- [8] Knapp, A.W. Elliptic Curves (1992), (*Princeton University Press*)