

TU DELFT

BACHELOR EINDPROJECT

Modellering en parametrisering van intern getij met Delft3D-FM

Auteur
TAMMO ZIJLKER

Begeleiders
PROF. DR. MARTIN VERLAAN
&
PROF. DR. ROB MUDDE

14 juni 2018



Samenvatting

Dit onderzoek bestudeert het energieverlies van het barotroop getij aan de opwekking van intern getij. Dit energieverlies vindt plaats bij stroming van de gestratificeerde oceaan over steile topografieën, zoals ruggen in de oceaan en bij de randen van continentale platen. Zo'n 25-30% van de totale getij-energie, die wordt opgewekt door de zon en de maan gaat zo verloren.

In een wereldwijd getijmodel wordt alleen het dieptegemiddelde gedrag van de getijstroming beschouwd, waardoor de opwekking van intern getij niet expliciet gemodelleerd kan worden. Om het effect daar wel in mee te nemen, wordt het verlies van barotroop getij aan de opwekking van intern getij geparametriseerd aan de hand van variabelen, die in dat model wel meegenomen zijn.

Het onderzoek is numeriek uitgevoerd met het hydrostatisch oceaanmodel Delft3D-Flexible Mesh. In het 3D model is expliciet de opwekking van intern getij gesimuleerd en vergeleken met analytische resultaten voor de opwekking van intern getij. Daarnaast zijn deze resultaten gebruikt om de huidige geïmplementeerde parametrisering, van de opwekking van intern getij, in het 2D model te toetsen.

De expliciete simulering van de opwekking van intern getij in Delft3D-FM is succesvol gedaan. Het energieverlies van barotroop getij aan de opwekking van intern getij was in overeenstemming de literatuur. Voor smalle topografieën hoger dan (ongeveer) een halve oceaandiepte lijkt de hydrostatische aanname in het model te worden overschreden waardoor numerieke dissipatie van intern getij optreedt.

De huidige geïmplementeerde parametrisering van het verlies van barotroop getij aan de opwekking van intern getij is voor een beperkte verzameling topografieën en stratificaties getest. De resultaten geven indicaties, dat de huidige parametrisering niet in staat is om de conversie over een breder scala van topografieën in de oceanen goed te benaderen. Het voorspelbare gedrag van de conversie voor steile, superkritische topografieën wijst erop dat zo'n parametrisering wel mogelijk is.

Aanbevelingen voor verder onderzoek zijn het uitbreiden van het gebruikte model met stromingen in x - en y -richting en het effect van de Coriolis parameter. Om de parametrisering beter te testen kan het bestaande model op meer verschillende typische topografieën en stratificaties in de oceaan worden toegepast.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
2	2D wereldwijd getijmodel	3
2.1	Grid	4
3	Theorie en literatuur	5
3.1	Intern getij	5
3.2	Stratificatie	6
3.3	Bewegingsvergelijkingen	7
3.4	Eigenschappen intern getij	8
3.4.1	Invloed van de Coriolis parameter	9
3.4.2	Hydrostatische benadering	9
3.5	Analytische resultaten voor barotroop energieverlies aan opwekking intern getij . .	10
3.5.1	Analytisch resultaat door Pétrélis et al.	10
3.6	Parametrisering van barotroop energieverlies in Delft3D-FM	11
4	Experimentele setup, model en numerieke details	13
4.1	Basismodel	13
4.2	σ -Coördinaten	13
4.3	Topografie	14
4.4	Randvoorwaarden	15
4.5	Beginvoorwaarden	15
4.6	Voor- en nadelen modelopzet	18
5	Energieberekeningen	19
5.1	Energievergelijking	19
5.2	2D Energieberekening	20
5.3	3D Energieberekening	21
5.3.1	Kinetische energie	21
5.3.2	Potentiële energie	22
5.4	Totale energie	23
5.5	Barocline energieflux weg van obstakel	23
5.6	Numerieke implementatie energieberekening	24
6	Resultaten en discussie	25
6.1	Verificatie modelopzet	25
6.2	3D Opwekking intern getij	26
6.3	Numerieke en theoretische opwekking intern getij over polynomiale richel	30
6.3.1	Vergelijking model en theorie	32
6.3.2	Conversie bij niet-lineaire, realistische stratificatie	35
6.4	Test huidige parametrisering in 2D model	36
6.4.1	Test parametrisering bij niet-lineaire stratificatie	39

7	Wat niét werkte, ter leering ende vermaeck	41
7.1	Periodieke modelopzet	41
7.2	θ -factor in tijdsintegratie	43
7.3	Energieberekeningen en grid staggering	45
8	Conclusies en aanbevelingen	47
8.1	Conclusies	47
8.2	Aanbevelingen voor verder onderzoek	48
9	Dankwoord	49
10	Bibliografie	51

1 Inleiding

In de huidige tijd van klimaatverandering zijn betrouwbare voorspellingen van de gevolgen ervan van onschatbare waarde. Door zeespiegelstijging en toename van extreem weer vormen overstromingen en stormvloed een grote maatschappelijke bedreiging. Deltares, gevestigd in Delft, is een Nederlands onderzoeksinstituut dat internationaal leidend is op het gebied van deze voorspellingen.

Om accurate voorspellingen te kunnen doen van de waterstand en ook van stormvloed aan een kust, zoals bijvoorbeeld de Noordzeekust, worden modellen gemaakt die met een hoge resolutie de waterstand aan de kust simuleren. Deze modellen geven alleen betrouwbare voorspellingen als de juiste randvoorwaarden worden ingevoerd aan de oceaankant van het model. Hiervoor is een wereldwijd getijmodel noodzakelijk. Een mogelijkheid voor verbetering van een door Deltares gebruikt wereldwijd getijmodel is het nauwkeuriger incorporeren van het fenomeen intern getij. Opwekking van intern getij is in de diepe oceaan verantwoordelijk voor 25 – 30% van totale het verlies van getij-energie opgewekt door de maan en de zon. Dit is uit satellietdata afgeleid in het onderzoek van Egbert en Ray [5].

Onder begeleiding van prof. Martin Verlaan en prof. Rob Mudde heb ik numeriek onderzoek gedaan naar dit fenomeen in het kader van mijn bachelor eindproject.

Intern getij zijn dichtheidsgolven die zich nauwelijks aan het oppervlak van de oceaan manifesteren, maar onder het oppervlak in de oceaan propageren. Een eenvoudig voorbeeld van golven in het inwendige van een vloeistof zijn de oscillaties op een grenslaag van olie en water. Het oppervlak van de bovendrijvende olie kan in rust zijn terwijl op de grenslaag tussen olie en water golfbewegingen bestaan. Intern getij is een specifieke vorm van golfbeweging binnen in een vloeistof, opgewekt door en met dezelfde frequentie als de getijbeweging.

Om intern getij op te wekken is verschil in dichtheid in verticale richting, stratificatie, nodig. In de oceaan ontstaat dit door temperatuurverschillen en verschillen in zoutgehalte. Daarnaast is het noodzakelijk dat de getijstrooming over een bodem beweegt die niet vlak is. Dit gebeurt bijvoorbeeld bij onderzeese ruggen en nabij continentale platen.

Zonder intern getij beweegt het water in de oceaan door de werking van eb en vloed min of meer uniform heen en weer. De horizontale snelheden hebben geen verticale structuur. De uniforme beweging wordt het *barotroop* getij genoemd. Wanneer intern getij wordt opgewekt krijgt de snelheid wél een verticale structuur. Aan de opwekking van intern getij gaat energie verloren uit de uniforme beweging van de oceaan. De gemiddelde stroomsnelheid en het verschil in waterstand bij eb en vloed worden lager.

Om intern getij in numerieke simulaties expliciet mee te nemen is het in modellen noodzakelijk in de verticale richting meerdere lagen te modelleren en ook de horizontale resolutie nauwkeurig te maken (~ 1 km). In een wereldwijd getijmodel is dat echter om praktische redenen niet mogelijk, omdat het model op wereldschaal met deze resolutie niet in bruikbare rekentijd valt te runnen.

Wereldwijde getijmodellen werken doorgaans met slechts één verticale laag, waarbij naar het dieptegemiddelde gedrag van de stroming gekeken wordt. Ze worden daarom ook wel 2D modellen genoemd. Om in zo'n model het energieverlies aan opwekking van intern getij mee te nemen, moet dit verlies worden geparаметriserd met variabelen die in wél in zo'n model te berekenen zijn. Dit zijn onder meer de topografie van de bodem, de stratificatie van de oceaan en de dieptegemiddelde stroomsnelheid. In eerder onderzoek door Shobhit Jain [8] is geprobeerd een dergelijke parametrisering in een wereldwijd getijmodel te implementeren. Echter, dit is nog een relatief eenvoudige parametrisering. Ook is het intern getij niet expliciet gemodelleerd in zijn onderzoek en was verificatie van de geïmplementeerde parametrisering lastig. Daarom is vanuit Deltares de vraag gekomen naar verder onderzoek op dit gebied.

De twee hoofdvragen van dit onderzoek luiden:

- *Kan met Delft3D-FM de opwekking van intern getij expliciet in 3D numeriek worden gesimuleerd en kan het barotrope energieverlies aan de opwekking van intern getij bepaald worden?*
- *Benadert de huidige parametrisering het werkelijke barotrope energieverlies aan de opwekking van intern getij, dat expliciet in 3D is berekend?*

In dit verslag wordt eerst het theoretisch kader van intern getij besproken. Ook komt relevante literatuur met analytisch en numeriek onderzoek naar de opwekking van intern getij aan bod. Daarna wordt de gebruikte experimentele numerieke opzet in dit onderzoek besproken. Het expliciet modelleren van intern getij is met de gebruikte opzet mogelijk gebleken en de data zijn gebruikt om de parametrisering te testen. Tot slot worden nog enkele verrassende vondsten en onverwachte tegenvallers besproken, die onderzoekers kunnen gebruiken bij het opzetten van gelijksoortige experimenten.

2 2D wereldwijd getijmodel

In dit hoofdstuk wordt het 2D numerieke model, dat gebruikt voor een wereldwijd getijmodel, kort beschreven. Dit model vormt niet de kern van dit onderzoek, maar dient ter illustratie van het model waarin de parametrisering van het barotrope energieverlies aan de opwekking van intern getij toegepast wordt.

Het numerieke model waarmee het getij over de wereld wordt berekend is Delft3D-FM. Dit modelleert de waterstand in de oceanen als functie van de tijd. Meer informatie over deze software is te vinden in hoofdstuk 4.

Als naar de aarde gekeken wordt, is de diepte van de oceaan verwaarloosbaar klein ten opzichte van de straal van de aarde. De horizontale schalen in de oceaanstromingen zijn vele malen groter dan de verticale schalen. Daarom worden voor het modelleren van het getij de snelheden in de radiale richting niet expliciet meegenomen.

De beweging van het water in de oceanen en zeeën wordt door dieptegemiddelde gedrag beschreven. Hierdoor wordt de berekening in essentie 2D, in de x en y -richting. Door van slechts één verticale laag gebruik te maken is de berekening veel sneller. Er kunnen nu echter geen snelheids- en dichtheidsverschillen in de verticale richting worden meegenomen. De opwekking van intern getij, verantwoordelijk voor 25 - 30% van het verlies van getij-energie in de diepe oceaan, kan dus niet gesimuleerd worden. Dit is de tekortkoming van het 2D-model die de parametrisering voor energieverlies aan intern getij noodzakelijk maakt.

In het 2D model worden de variabelen h , U en V berekend. De totale waterdiepte h is, de som van de diepte H en de uitwijking van het vrije oppervlak η . U en V zijn de dieptegemiddelde snelheden in de x - en y - richting. De bewegingsvergelijkingen die hiervoor gelden zijn de volgende ondiep-water vergelijkingen:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial U h}{\partial x} + \frac{\partial V h}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + M_x \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + M_y \quad (3)$$

Hierin is f de Coriolis parameter, $f = 2\Omega \sin(\phi)$. Ω is de hoeksnelheid van de aarde en ϕ is de breedtegraad. g is de valversnelling. M_x en M_y zijn overige bronnen en putten van momentum. Dit kan bijvoorbeeld bodemwrijving zijn en hiermee wordt ook het verlies van energie aan intern getij geparametriseerd.

Om te zien hoe een getijgolf zich voortplant, wordt gekeken naar de bewegingsvergelijkingen voor een golf die zich in de x -richting voortplant. De hydrostatische benadering wordt toegepast zodat de gradiënt van de druk P als volgt berekend kan worden:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4)$$

Wanneer advectie wordt verwaarloosd en de Coriolis parameter $f = 0$ wordt gekozen kunnen vergelijkingen (1) - (3) worden vereenvoudigd tot:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

Hier is η de uitwijking van het vrije oppervlak en U de dieptegemiddelde snelheid over een waterkolom H , met $\eta \ll H$. Oplossingen voor dit stelsel zijn lopende harmonische golven:

$$\eta = \eta_0 \cos(x \pm \sqrt{gH}t) \quad (7)$$

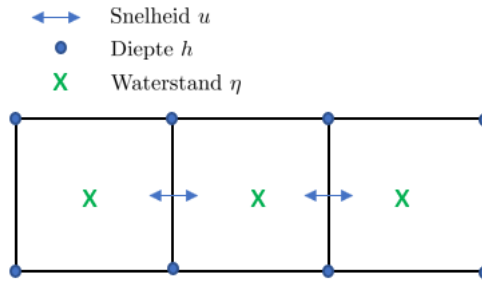
$$U = \eta_0 \sqrt{\frac{g}{H}} \cos(x \pm \sqrt{gH}t) \quad (8)$$

Belangrijk is dat de voortplantingssnelheid bepaald wordt door \sqrt{gH} en bij een harmonische golf de maximale uitwijking η en maximale stroom U schalen met een factor $\sqrt{g/H}$.

2.1 Grid

De bewegingsvergelijkingen (1) - (3) moeten in een numeriek model worden gediscretiseerd. Delft3D-FM maakt gebruik van een grid om dat te doen. In dat grid worden de snelheden en de waterstand niet op dezelfde plek berekend. In figuur 1 is daar een illustratie van te zien. Snelheden worden op de grens tussen twee cellen berekend en de waterhoogte wordt op het celmidden bepaald. Zo'n grid waar niet alle variabelen op dezelfde plek worden berekend heet "staggered".

Delft3D-FM heeft de mogelijkheid een ongestructureerd grid te gebruiken. Hier worden niet alleen vierkante cellen gebruikt maar kunnen meer gecompliceerde vormen worden toegepast. Dit is in figuur 2 geïllustreerd¹. Hier wordt het ongestructureerde grid getoond dat in een wereldwijd stormvloed model, gebaseerd op Delft3D-FM, wordt gebruikt. Dichterbij de kust is het grid veel fijner en opgebouwd uit onder andere driehoeken.



Figuur 1: Staggering van het grid in Delft3D-FM. Snelheden worden op de randen tussen gridcellen berekend en de waterstand op het gridcentrum.



Figuur 2: Ongestructureerd grid zoals gebruikt in het wereldwijde stormvloedmodel GLOSSIS, gebaseerd op Delft3D-FM. Dichtbij de kust kan door het ongestructureerde grid de resolutie veel hoger worden gemaakt met onder andere driehoekige gridcellen.

¹Delft3D-FM <https://www.deltares.nl/en/software/delft3d-flexible-mesh-suite/>

3 Theorie en literatuur

In dit hoofdstuk wordt het theoretisch kader van intern getij besproken. Eerst worden de concepten intern getij en stratificatie verder geïntroduceerd. Hierna worden de bewegingsvergelijkingen voor intern getij toegelicht. Hieruit worden de eigenschappen van intern getij afgeleid. Deze eigenschappen zijn bijzonder en de moeite waard om te bestuderen. Tot slot worden een aantal belangrijke analytische resultaten voor opwekking van intern getij uit de literatuur besproken en een aantal numerieke studies, die deze hebben getest of parametriseringen ervoor hebben voorgesteld.

3.1 Intern getij

Interne getijgolven, kortgezegd intern getij, zijn golfbewegingen in de oceaan. Net zoals golven zich aan het oppervlak van de oceaan voortplanten door het verschil in dichtheid tussen lucht en water, kan dit in het inwendige van de oceaan ook. In de oceaan komen overal dichtheidsverschillen voor ten gevolge van verschillen in temperatuur en zoutgehalte. Doordat deze dichtheidsverschillen veel kleiner zijn dan aan het oppervlak kunnen de amplitudes van de golfbewegingen veel groter worden. Amplitudes kunnen tientallen meters hoog zijn.

Intern getij ontstaat wanneer lagen van verschillende dichtheid langs een topografie op de bodem omlaag en omhoog moeten bewegen. Deze beweging ontstaat door de getijbeweging. Voorbeelden van zulke topografieën zijn de randen van continentale platen of een rug in de oceaan. Veel onderzoek is gedaan naar opwekking van intern getij bij Hawaï, bijvoorbeeld door Carter et al. [2]

Wanneer bij de topografie relatief zwaarder water uit diepere lagen omhoog wordt gestuwd, ontstaan krachten die dat zwaardere water weer naar beneden willen drukken. Hetzelfde geldt voor lichter water uit hogere lagen dat langs de topografie aan de andere kant naar beneden stroomt.

Door deze bewegingen kunnen golven in het inwendige van de oceaan ontstaan met de frequentie van het getij. Dit fenomeen doet zich niet alleen in de oceaan voor, maar ook in de atmosfeer. De lucht in de atmosfeer is zelf ook gestratificeerd en wanneer deze lucht over een berg wordt gestuwd ontstaan schommelingen in dichtheid die zich ver kunnen voortplanten.

Belangrijk zijn de concepten *barotroop* en *barocline*. De situatie waarbij de stroming in de oceaan geen verticale structuur heeft noemt men barotroop. Het getij dat opgewekt wordt door de bewegingen van aarde en hemellichamen is een barotrope stroming. De waterkolom stroomt praktisch uniform heen en weer. Wanneer interne golven opgewekt worden, krijgt deze stroming opeens wél een verticale structuur. Dat noemt men barocline.

Intern getij is om verschillende redenen belangrijk om te onderzoeken.

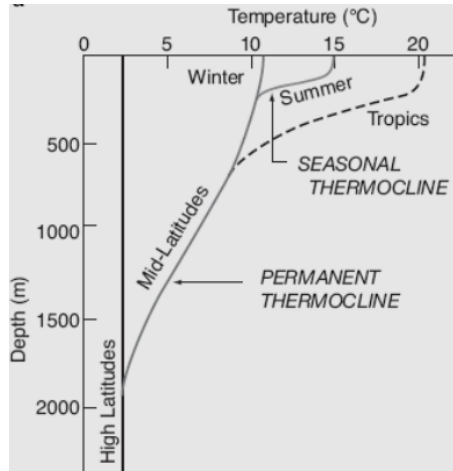
- Bij de opwekking van intern getij gaat energie verloren van het barotroop getij.
- Intern getij kan over lange afstanden propageren in de oceaan zoals blijkt uit onderzoek van Hendry [7]. Er werd intern getij waargenomen op plaatsen waar de enige topografieën die intern getij konden opwekken 700 km verderop lagen.
- Wanneer de golven van intern getij breken en hun energie in turbulentie omzetten zorgt dit voor menging in de oceaan. Dit is essentieel voor biologische productie en ook circulatie in de oceaan. De plaats waar dit gebeurt kan ver weg zijn van de topografie, waar het intern getij wordt opgewekt.

Hoe ver het intern getij propageert en hoe het door te breken voor menging zorgt, is voor dit onderzoek minder relevant. Voor een getijmodel is het vooral belangrijk om te weten hoeveel energie van het barotroop getij verloren gaat. Verlies van barotrope getij-energie betekent minder uitwijking van het oceaanoppervlak. Uit onderzoek van Egbert en Ray [5] blijkt dat zo'n 25 – 30% van de totale getij-energie op aarde wordt gedissipeerd via intern getij. Het is dus een belangrijk fenomeen om mee te nemen in een wereldwijd getijmodel.

3.2 Stratificatie

In de oceaan komen door verschillen in temperatuur en zoutgehalte dichtheidsverschillen voor. In de oceanografie wordt dit stratificatie genoemd. In figuur 3 is een typisch temperatuurprofiel weergegeven. Belangrijk is de thermocline, dit is een laag waar de temperatuur sterk in verticale richting verandert. Hier zal ook de dichtheid in de verticale richting veranderen en is er een sterke stratificatie. In de diepe oceaan is de temperatuur altijd rond de 4 °C. Het temperatuurprofiel dichterbij het oppervlak hangt af van de breedtegraad en de seizoenen. Dichtbij de polen wordt de oceaan aan het oppervlak nauwelijks opgewarmd en is er weinig stratificatie. Rond de evenaar is de temperatuur, vlak onder het oceaanooppervlak, boven de 20 °C. In de figuur is aangegeven waar de permanente thermocline, die hierdoor ontstaat, zich bevindt.

Op tussenliggende breedtegraden ontstaat in de zomer, wanneer het water vlakbij het oppervlak sterk wordt verwarmd, een tweede thermocline.



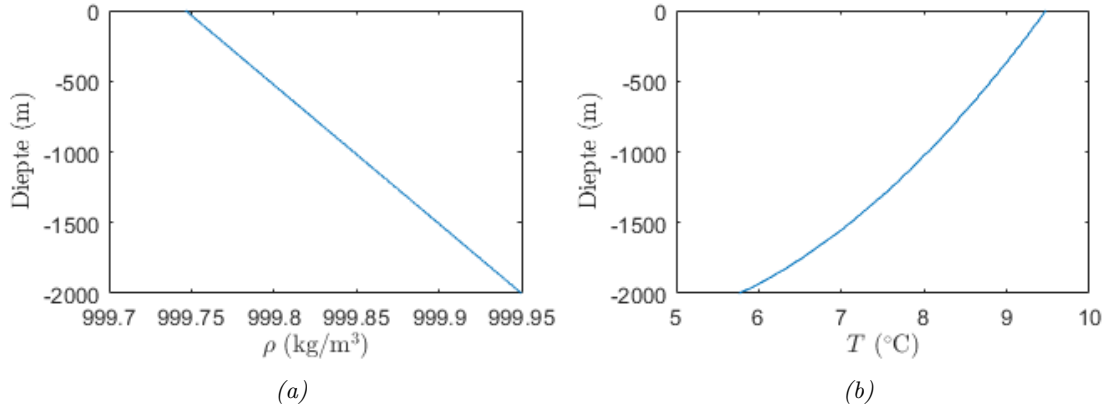
Figuur 3: Typisch temperatuurprofiel in de oceaan voor verschillende breedtegraden en seizoenen. Deze afbeelding komt van Wikipedia [14].

Een maat voor de stratificatie is de Brunt-Väisälä frequentie. Wanneer een vloeistofpakketje in zijn positie een kleine verstoring krijgt, zal het met frequentie N oscilleren rond zijn evenwichtspositie. Dit kan alleen als $\frac{\partial \rho(z)}{\partial z} < 0$, hoe dieper in de oceaan, hoe zwaarder. In het andere geval is de stratificatie zelf instabiel. Wanneer de stratificatie instabiel is treedt, snel menging op. N wordt als volgt berekend:

$$N = -\sqrt{\frac{-g}{\rho_0} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z}} \quad [\text{s}^{-1}] \quad (9)$$

Hier is g de valversnelling, ρ_0 de gemiddelde dichtheid van een vloeistof en $\rho(z)$ het dichtheidsprofiel van de waterkolom.

Een belangrijke benadering die veel in de literatuur wordt gedaan om analytische oplossingen te kunnen vinden voor de beweging van intern getij, heeft met deze stratificatie te maken. Aangenomen wordt dat de dichtheid een lineair profiel heeft. In figuur 4a is een voorbeeld getoond van zo'n lineair dichtheidsprofiel. Ook is in figuur 4b het temperatuursverloop weergegeven dat zorgt voor dit dichtheidsprofiel. Het dichtheidsprofiel heeft $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ als Brunt-Väisälä frequentie. In dit onderzoek zijn zowel een lineaire stratificatie als een meer realistische stratificatie onderzocht. De dichtheden worden als functie van temperatuur berekend met de UNESCO toestandsvergelijking voor zeewater [11].



Figuur 4: (a) Diepteprofiel van dichtheid met een lineaire stratificatie met $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. (b) Temperatuurprofiel T , dat zorgt voor het lineaire dichtheidsprofiel.

3.3 Bewegingsvergelijkingen

Om de eigenschappen van intern getij te onderzoeken is een set bewegingsvergelijkingen nodig. Zoals door Henderschott en Garret [6] afgeleid van de Navier-Stokes vergelijkingen, kan de oceaan worden gemodelleerd als een niet-visceuze, roterende, incompressibele vloeistof. Omdat dichtheidsverschillen klein zullen zijn, kan de Boussinesque benadering gebruikt worden. Daarbij worden de bewegingsvergelijkingen gelineariseerd rond $\mathbf{u} = 0$, $\rho = \bar{\rho}(z)$, de stabiele stratificatie in de oceaan en $p = p_0(z)$, de hydrostatische druk in rust.

De variabelen van belang zijn: u , de horizontale snelheid in de x -richting, v , de horizontale snelheid in de y -richting, w , de verticale snelheid, ρ , de afwijking van de dichtheid in rust $\bar{\rho}(z)$ en p de afwijking van de druk in rust $p_0(z)$.

Incompressibiliteit geeft de volgende vergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

De momentum vergelijkingen geven:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\bar{\rho}} g \quad (13)$$

Tenslotte geldt massabehoud:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0 \quad (14)$$

In deze vergelijkingen komt de Coriolis parameter f terug. Deze heeft waarde $f = 2\Omega \sin \phi$, met ϕ de breedtegraad op aarde en Ω de hoeksnelheid van de aarde. Belangrijk is dat deze vergelijkingen niet hydrostatisch zijn door, de term ω_t in vergelijking (13).

3.4 Eigenschappen intern getij

Intern getij heeft een aantal bijzondere eigenschappen die in deze sectie zullen worden besproken. In Henderschott en Garret [6] worden eigenschappen afgeleid voor variabele w . Prof. Dr M. Verlaan heeft een afleiding gedeeld waarin alle 5 variabelen worden meegenomen. Hier wordt een propagerende golf gesubstitueerd in de bewegingsvergelijkingen, $u(x, y, z, t) = \hat{u}(\omega, k, l, m)e^{-i\omega t + ikx + il y + imz}$. Dat geeft het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\begin{bmatrix} -i\omega & -f & 0 & 0 & ik/\bar{\rho} \\ f & -i\omega & 0 & 0 & il/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & -i\omega & g/\bar{\rho} & im/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \bar{\rho}_z & -i\omega & 0 \\ ik & il & im & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{\rho} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Door dit stelsel met elementaire rij-operaties te herschrijven en de Brunt-Väisälä frequentie N te substitueren: $N^2 = -\bar{\rho}_z g/\bar{\rho}$ volgt het volgende stelsel.

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - f^2 & 0 & 0 & 0 & (-\omega k - ifl)/\bar{\rho} \\ 0 & \omega^2 - f^2 & 0 & 0 & (ifk - \omega l)/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & \omega^2 - N^2 & 0 & -\omega m/\bar{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 - N^2 & -imN^2/g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\omega/\bar{\rho}((\omega^2 - N^2)(k^2 + l^2) + m^2(\omega^2 - f^2)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{\rho} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Hieruit blijkt dat de 5 variabelen aan elkaar zijn gekoppeld. Twee belangrijke observaties kunnen gehaald worden uit vergelijking (16): de dispersierelatie en de karakteristieken van het intern getij.

Uit de vergelijking blijkt de dispersierelatie:

$$(\omega^2 - N^2)(k^2 + l^2) + m^2(\omega^2 - f^2) = 0 \quad (17)$$

oftewel

$$\omega^2 = \frac{N^2(k^2 + l^2) + f^2 m^2}{k^2 + l^2 + m^2} \quad (18)$$

Om dit te vereenvoudigen kan in het horizontale vlak alleen langs de x-as gekeken worden door $k' = \sqrt{k^2 + l^2}$ en $l' = 0$ te substitueren. Door de accenten dan te laten vervallen volgt:

$$\omega^2 = \frac{N^2 k^2 + f^2 m^2}{k^2 + m^2} \quad (19)$$

Uit (19) is het mogelijk de richting van de karakteristieken k/m en de groepssnelheid \mathbf{c}_g af te leiden.

$$\mathbf{c}_g = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}, \frac{\partial \omega}{\partial m} \right) = [N^2 - f^2] \frac{mk}{\omega(k^2 + m^2)^2} (m, -k) \quad (20)$$

$$\frac{k}{m} = \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{N^2 - \omega^2}} = \alpha \quad (21)$$

Uit (20) en (21) blijkt een bijzondere eigenschappen van intern getij. De golven planten zich voort onder een helling α in het water die wordt bepaald voor de frequentie ω , N en de Coriolis parameter f . Daarnaast staan de groepssnelheid \mathbf{c}_g en de voortplantingsrichting van het intern getij loodrecht op elkaar, zoals geïllustreerd wordt in figuur 5.

Wanneer nu de oceaan met een vaste diepte H beschouwd wordt, wordt het verticale golfgetal gekwantiseerd. Dit omdat het intern getij weinig uitwijking aan het oppervlak heeft, zoals Pedlosky laat zien [12]. Dat betekent dat het verticale golfgetal gegeven wordt door $m = \frac{2\pi n}{H}$.

3.4.1 Invloed van de Coriolis parameter

Uit vergelijking (16) blijkt dat voor $f > 0$, een plek buiten de evenaar, de horizontale snelheden u en v aan elkaar gekoppeld zijn. Om de analyse te vereenvoudigen is gekozen voor een numerieke opzet, waarin alleen snelheden in de x -richting voorkomen door een grid te gebruiken met slechts één cel in de y -richting. Dat betekent dat de modellen in dit onderzoek beperkt zijn tot experimenten op de evenaar met $f = 0$.

3.4.2 Hydrostatische benadering

Veel hydrodynamische modellen, onder andere het programma Delft3D-FM gebruiken de benadering van hydrostatische druk. Dat betekent dat ω_t in (13) verwaarloosbaar is. Dat is toegestaan wanneer de horizontale bewegingsschalen veel groter zijn dan de verticale. Concreet betekent dat in dit geval, dat voor de golfgetallen m en k geldt $m \gg k$. In de dispersierelatie (19) geldt:

$$\frac{\omega^2}{N^2} = \frac{k^2/m^2}{k^2/m^2 + 1} \quad (22)$$

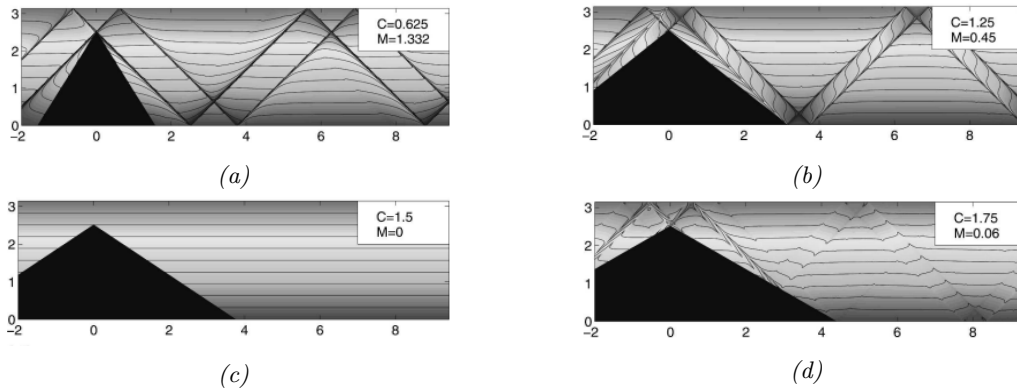
Om te kunnen zeggen dat $m \gg k$, moet duidelijk gelden $\omega \ll N$. Met een typische stratificatie in de orde van $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ en een getijfrequentie $\omega = 1.3 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ klopt dat formeel. De hydrostatische benadering kan echter worden overschreden, wanneer vlakbij een superkritische topografie de karakteristieken van intern getij zeer dicht op elkaar liggen en zeer kleine lengteschalen in de interne golven ontstaan, zoals in de volgende paragraaf wordt besproken. Dat hier de hydrostatische benadering niet langer geldig is, is in de experimenten ook teruggevonden.

3.5 Analytische resultaten voor barotroop energieverlies aan opwekking intern getij

In een goed werkend wereldwijd getijmodel is het belangrijk om het verlies van barotrope energie aan opwekking van intern getij mee te nemen. Er is veel onderzoek gedaan naar analytische oplossingen voor deze conversie, zoals in 3.5.1 toegelicht. Steeds worden specifieke condities aangebracht waarvoor een analytische oplossing mogelijk is. Gekeken wordt naar bijvoorbeeld specifieke vormen van de topografie waar het zeewater over heen stroomt, de stratificatie N en de diepte van de oceaan.

Belangrijk is ook het onderscheid tussen het sub- en superkritische regime. In de context van intern getij wordt daar het volgende mee bedoeld: het onderscheid tussen sub- en superkritisch wordt bepaald door de helling van propagatie van intern getij α die door vergelijking (21) wordt gegeven en de helling op het steilste punt van de topografie. Wanneer de topografie nooit steiler wordt dan α betreft het het subkritische regime en als dat wel zo is het superkritische regime.

Dit onderscheid is van wezenlijk belang vanwege het propagatiegedrag van intern getij. Omdat de golven onder hoek α van de topografie weg propageren, ontstaat er wanneer de hoek van de topografie daar aan gelijk is, analytisch een singulariteit. De karakteristieken van intern getij, die opgewekt worden bij de topografie, liggen dan erg dicht bij elkaar en worden 'geconcentreerd' zoals te zien in figuur 5a. In het subkritische regime is gebert dat niet zoals in figuur 5b - 5d is geïllustreerd.



Figuur 5: Contouren van gelijke dichtheid voor een driehoekige topografie met $h_{max}/H = 0.8$. De breedte van de topografie verschilt zodat factor $C = a\alpha/h_{max}$ verschilt. Wanneer $C < 1$ zoals in (a) is het superkritisch en wanneer $C > 1$ is het subkritisch (b) - (d). Daarnaast is factor M uit (23) getoond. Twee opvallende zaken zijn dat in het superkritische geval (a) de karakteristieken van het intern getij duidelijk dicht bij elkaar geconcentreerd liggen en dat in (c) $M = 0$, en geen intern getij opgewekt worden. Deze afbeeldingen komen uit Pétrélis et al. [13]

3.5.1 Analytisch resultaat door Pétrélis et al.

Een belangrijk resultaat uit de literatuur komt uit het onderzoek van Pétrélis et al [13]. Zij hebben een formulering gevonden voor het verlies van barotrope getij-energie aan de opwekking van intern getij voor een uniform, lineair gestratificeerde oceaan N . Zij nemen daarnaast in het horizontale vlak alleen de x-richting in hun beschouwing mee.

De charme van hun resultaat is dat het zowel in het sub- als het superkritische regime geldt. Het sluit aan bij diverse limietgevallen die in eerdere onderzoeken zijn gevonden. Deze limieten betreffen topografieën die erg klein zijn ten opzichte van de oceaandiepte en lage helling hebben (het subkritische regime) zoals in het artikel van Bell beschreven [1]. Ook sluit het aan bij de limiet van een 'knife-edge ridge', in essentie een muur die in het water staat. Dat is de superkritische

limiet zoals door Llewellyn Smith onderzocht [10].

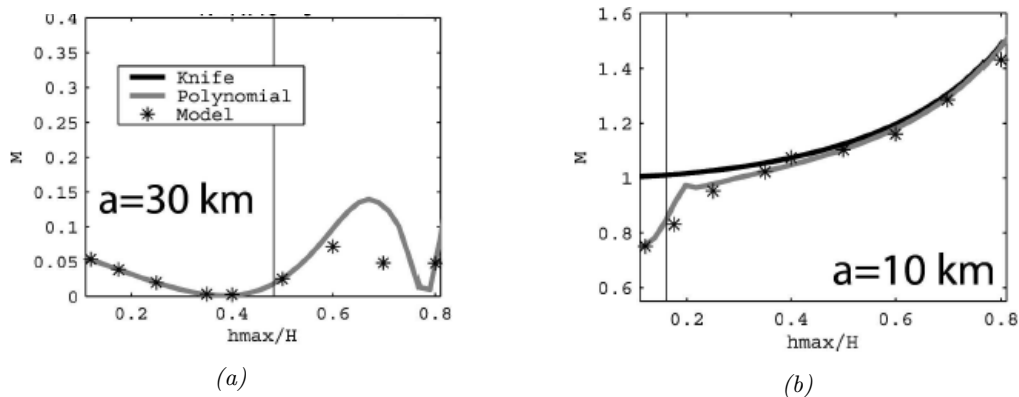
Zij hebben voor de barotroop-barocline energieconversie de volgende formulering gevonden, voor een barotrope stroming $U = U_0 \sin(\omega t)$ met w de frequentie van de getijstroom en U_0 maximale barotrope stroomsnelheid.

$$C = \frac{\pi}{4} h_{max}^2 \rho_0 U_0^2 N \sqrt{1 - \frac{f^2}{\omega^2}} \times M \left(\frac{h_{max}}{H}, \frac{a\alpha}{H} \right) \quad \left[\frac{W}{m} \right] \quad (23)$$

Hier staat C voor de gemiddelde conversie over één getijcyclus in W per meter breedte dwars op de stroomrichting. Uit de formulering blijken de belangrijkste factoren voor de conversie: h_{max} , de hoogte van de topografie, ρ_0 , de gemiddelde dichtheid van het water, N , de Brunt-Väisälä frequentie die de constante stratificatie beschrijft en f , de Coriolis parameter.

De vorm van de topografie wordt meegenomen in de dimensieloze parameter M , die zelf afhangt van de dimensieloze getallen h_{max}/H , de hoogte van de topografie gedeeld door de waterdiepte en $a\alpha/H$, de halve breedte van de topografie a maal de hoek waaronder intern getij propageert α gedeeld door de waterdiepte H . De factor M kan worden bepaald door een integraalvergelijking op te lossen zoals in het artikel van Pétrélis et al [13] beschreven.

Deze factor M hangt dus af van de vorm van de topografie en de hoek waaronder het intern getij propageert. Een illustratie van de invloed van deze factor is in figuur 5 weergegeven. Onder bepaalde omstandigheden valt de conversie helemaal weg. In figuur 6 is de functie M weergegeven voor verschillende polynomiale topografieën. Hierin is te zien dat voor een sterk superkritische topografie ($a = 10$ km en grote hoogtes) M de limiet van de 'knife edge ridge' benadert. Voor een bredere richel ($a = 30$ km) heeft M een ingewikkelder verloop en valt de theoretische conversie bij een bepaalde geometrie soms zelf weg.



Figuur 6: Functie M uit vergelijking (23) voor een polynomiale topografie met hoogte h_{max} op een totale waterdiepte H . (a) Polynomiale richel met $a = 30$ km en helling van het intern getij $\alpha = 0.1$ (b) Polynomiale richel met $a = 10$ km en helling van het intern getij $\alpha = 0.05$. De zwarte lijn is de superkritische limiet van een 'knife edge ridge', de grijze lijn de theoretische waarde voor M . Deze figuren komen uit het artikel van Di Lorenzo [4], waarin de analytische theorie numeriek is getoetst. De sterren stellen de waarden van M voor die zijn gevonden.

3.6 Parametrisering van barotroop energieverlies in Delft3D-FM

In een getijmodel moet rekening worden gehouden met het energieverlies van het barotrope getij aan de opwekking van intern getij. Een 3D model met voldoende resolutie kan dit expliciet berekenen. Wanneer echter op de schaal van de oceaan gekeken wordt, is dit niet met redelijke rekenkracht uitvoerbaar. In een getijmodel wordt slecht één verticale laag gebruikt. De berekening wordt daarmee in essentie 2D, waarin alleen nog naar het dieptegemiddelde gedrag van de oceaan wordt gekeken. Intern getij kan hiermee niet gesimuleerd worden.

Daarom is het in de praktijk noodzakelijk het barotrope energieverlies aan de opwekking van intern getij in een 2D model als extra dissipatieterm mee te nemen. Dit effect wordt meegenomen door een parametrisering te maken van het verlies in termen die het model wél bevat, zoals het bodemprofiel, de stroomsnelheid in de oceaan en de stratificatie.

De analytische resultaten voor de conversie zoals vergelijking (23) vormen een goed uitgangspunt. Er zijn echter twee belangrijke problemen met die formulering. Allereerst is de formule in het frequentiedomein door de factor $\sqrt{1 - \frac{f^2}{\omega^2}}$. In een numeriek model zoals Delft3D-FM waarin de bewegingsvergelijkingen in het tijdsdomein worden opgelost, kunnen zulke verliestermen niet in het frequentiedomein berekend worden. Daarnaast is deze oplossing alleen geldig voor de situatie waarin stroom loodrecht op een topografie beweegt.

Shobhit Jain heeft onderzoek gedaan naar het implementeren van deze dissipatie in Delft3D-FM [8]. Inspiratie voor de parametrisering kwam voort uit het onderzoek van Bell [1]. De uiteindelijke parametrisering, die is geïmplementeerd in Delft3D-FM, modelleert de dissipatie als een frictieterm, lineair in de stroomsnelheid over de topografie.

Deze dissipatie is als volgt in de horizontale momentumvergelijkingen opgenomen:

$$\boldsymbol{\tau}_{IT} = \hat{C} \rho \kappa^{-1} N \nabla h (\nabla h \cdot \mathbf{u}) \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] \quad (24)$$

\hat{C} is een constante waarmee de parametrisering gekalibreerd kan worden, ρ de gemiddelde dichtheid in de oceaan, κ het typische golfgetal van de topografie voor welke een waarde van $2\pi/10000$ m gebruikt wordt. N is de stratificatie die wordt berekend als een gewogen dieptegemiddelde van de werkelijke stratificatie van de bodem tot het oceaanoppervlak met lineair aflopende gewichten naar boven voor iedere gridcel.

$\boldsymbol{\tau}_{IT}$ kan geïnterpreteerd kan worden als een schuifspanning, de energieconversie van barotroop getij, C_{IT} is dan als volgt:

$$C_{IT} = \boldsymbol{\tau}_{IT} \cdot \mathbf{u} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (25)$$

Een belangrijk verschil met de analytische conversie die afhangt van h_{max} , hoogte van de topografie en H , de totale oceaandiepte is dat de parametrisering alleen naar de helling kijkt voor een bepaalde gridcel. Waar de analytische theorie naar het verlies van barotrope energie over topografie als geheel kijkt, moet dat in de parametrisering per gridcel worden gedaan en moet de som over alle gridcellen gelijk zijn aan het totale barotrope energieverlies.

Door het inwendig product tussen ∇h en \mathbf{u} zorgt alleen stroming loodrecht op de topografie voor de opwekking van intern getij.

Deze parametrisering bevat de belangrijke coëfficiënt \hat{C} . \hat{C} kan gebruikt worden om de parametrisering te calibreren. Deze coëfficiënt is in Delft3D-FM zo gekozen dat op wereldwijde schaal het energieverlies aan intern getij klopt met de literatuur. Dat het energieverlies op wereldschaal overeenkomt met de literatuur is goed, maar is in fysisch opzicht nog geen onderbouwing voor de waarde van \hat{C} . Op lokale schaal is er zo geen informatie of het energieverlies accuraat gemodelleerd is.

In deze studie kan wél getest worden of op lokale schaal de correcte opwekking van intern getij wordt geparametriseerd.

4 Experimentele setup, model en numerieke details

Om het opwekken van intern getij te simuleren en de huidige parametrisering van de conversie te testen wordt gebruikt gemaakt van een numeriek model. De modelopzet moet zorgen dat een gestratificeerde oceaan over een gewenste topografie stroomt. De beweging over deze topografie moet harmonisch zijn in de snelheid, met een frequentie en amplitude die vergelijkbaar is met de typische getijbeweging.

Het numerieke model waarmee de experimenten uit worden gevoerd is Delft3D Flexible Mesh. Deze software is ontwikkeld door Deltares. Dit model lost de bewegingsvergelijkingen met de Boussinesque benadering (10) - (14) op met tevens de hydrostatische benadering. In het horizontale vlak geeft het veel vrijheid in de keuze van het grid (Flexible Mesh). In het verticale vlak kan gekozen worden voor meerdere σ -lagen of reguliere z -lagen. Meer details over Delft3D Flexible Mesh zijn te vinden in de Delft3D-FM manual [3]. Aan de situatie waarin slechts één verticale laag beschouwd is, wordt gerefereerd als 2D. In 2D is het intern getij niet expliciet te modelleren. Daarom zal het energieverlies door conversie van barotrope naar barocline energie moeten worden geparametriseerd aan de hand van variabelen die het 2D model wel berekent.

Wanneer meerdere verticale lagen gebruikt worden, zal dat 3D genoemd worden. Wanneer er in het 3D model een stratificatie ingesteld wordt, zal intern getij ontstaan wanneer het water over een topografie omhoog en omlaag stroomt. In dit hoofdstuk wordt de numerieke modelopzet van het onderzoek toegelicht.

4.1 Basismodel

Om intern getij expliciet te modelleren in Delft3D-FM en de parametrisering uit hoofdstuk 3.6 te testen wordt de volgende modelopzet gebruikt: de basisopstelling is een rechthoekig basin met dimensies $3000 \text{ km} \times 5 \text{ km}$ (x, y).

In de x -richting worden 3000 cellen gebruikt voor een resolutie van 1 km. In de y -richting wordt slechts één gridcel gebruikt. Zo wordt alleen beweging in de x -richting mogelijk in het horizontale vlak. Omdat alleen beweging in de x -richting mogelijk is, wordt Coriolis-parameter $f = 0$ gebruikt. Het model bevindt zich dan virtueel op de evenaar. Wanneer een andere waarde f gebruikt zou worden, moeten ook stromingen in de y -richting mogelijk zijn aangezien deze aan elkaar gekoppeld zijn voor intern getij.

Er worden 50 σ -lagen gebruikt om de oceaandiepte $H = 2000 \text{ m}$ te discretiseren voor de 3D simulaties. Dat geeft een verticale resolutie van 40 m.

De bodemwrijving wordt uitgezet in het model om alleen verlies van barotrope energie door intern getij te kunnen bepalen. Daarnaast is gebleken uit eerste runs dat de verticale eddy viscositeit en verticale eddy diffusiviteit zeer laag moeten worden genomen om aan de bodem en het vrije oppervlak ongewenste temperatuurfluxen en veranderingen in dichtheid te voorkomen. Beide worden op 0 ingesteld. In onderzoek van Di Lorenzo [4] is gebleken dat de opwekking van intern getij hier niet gevoelig voor is.

4.2 σ -Coördinaten

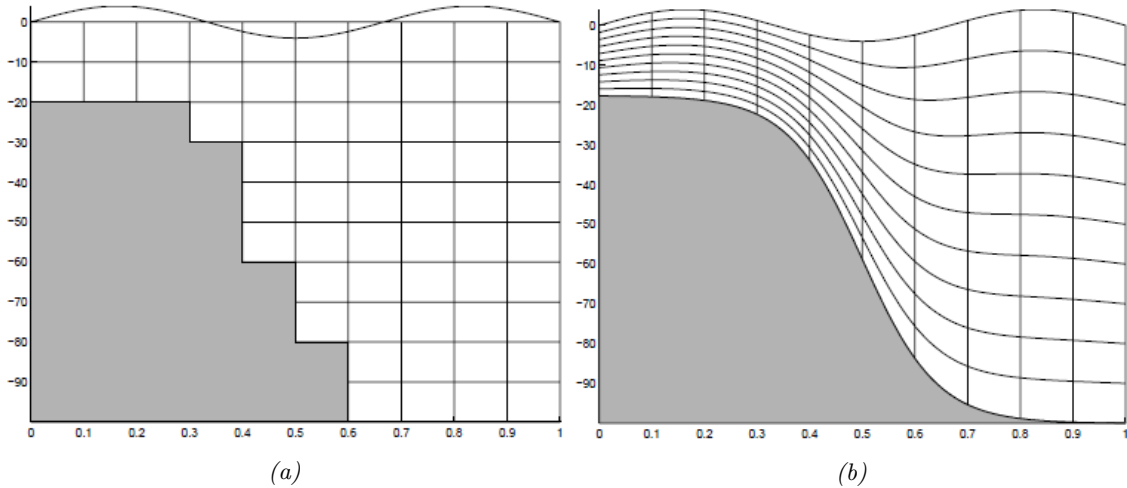
Delft3D-FM heeft de mogelijkheid de verticale discretisatie te doen met σ -coördinaten. Dit coördinatenstelsel wordt veel gebruikt in oceaanmodellering, met name wanneer er behoorlijke diepteverschillen voorkomen in het domein. Dit wordt gedaan door de z -coördinaat als volgt te transformeren:

$$\sigma = \frac{z - \eta}{H + \eta} \quad (26)$$

H is de diepte van de oceaan en η de uitwijking van het vrije oppervlak. De bodem, met hoogte $z = -H$ krijgt zo $\sigma = -1$ en het vrije oppervlak met $z = \eta$ krijgt $\sigma = 0$. Wanneer er σ -lagen

worden gebruikt, zijn overal in het systeem evenveel verticale lagen aanwezig. Figuur 7 illustreert hoe de discretisatie met z -lagen verschilt van de discretisatie met σ -lagen.

De σ -lagen volgen de topografie zoals in figuur 7b goed te zien is. De barotrope stroming volgt precies dit profiel. Het water versnelt om over de topografie heen te stromen, maar de stroming volgt precies de lagen. Wanneer met z -lagen voldoende resolutie in de ondiepere gedeeltes van het grid bereikt moet worden, heeft dit als gevolg dat waar de oceaan dieper wordt er veel lagen gemodelleerd moeten worden. Wanneer σ -coördinaten gebruikt worden zijn er op elk punt evenveel verticale lagen en doet dit probleem zich niet voor. Om deze redenen worden σ -coördinaten veel gebruikt in oceaanmodellen.



Figuur 7: a) Verticale discretisatie met z -lagen. De lagen zijn overal even hoog. Waar de topografie erg hoog wordt, blijven weinig z -lagen over. b) Verticale discretisatie met σ -lagen. Hier zijn overal evenveel lagen en volgen de lagen de topografie. Figuren komen uit "Atmospheric and Oceanic Modelling"[9]

4.3 Topografie

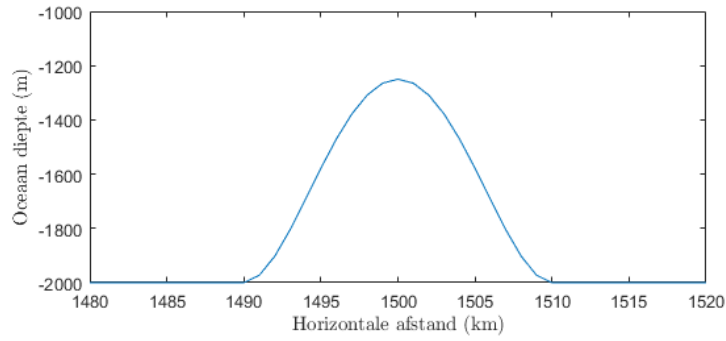
Op de bodem wordt in het midden van het grid in de x -richting een topografie geplaatst om intern getij op te wekken. Een zogeheten 'polynomiale' richel wordt gebruikt. Deze topografie wordt ook analytisch beschouwd in het onderzoek van Pétrélis et al [13] en de conversie, die zij hebben gevonden, wordt numeriek in het onderzoek van Di Lorenzo et al [4] bevestigd. Het is daarom een goede testcase voor dit onderzoek.

De hoogte h van deze topografie boven de zeebodem wordt gegeven door:

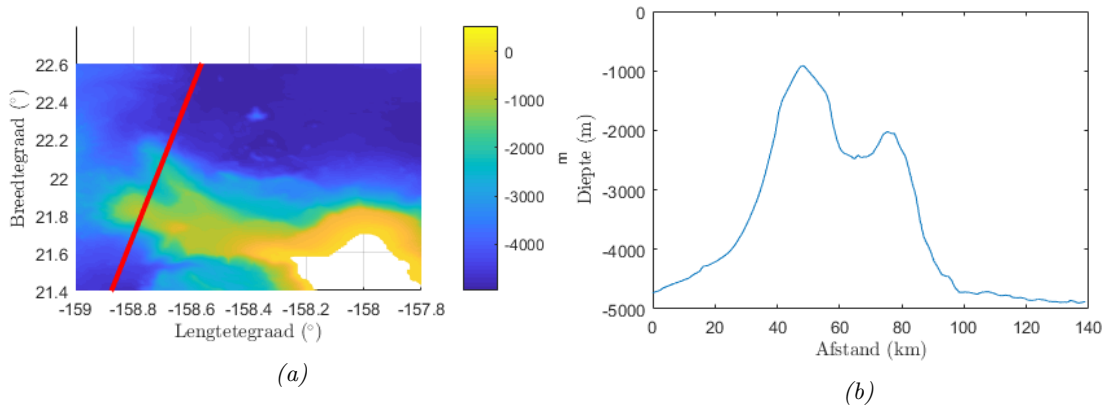
$$z = h_{max} \begin{cases} (1 - \frac{x^2}{a^2})^2 & \text{als } |x| < a \\ 0 & \text{als } |x| > a \end{cases} \quad (27)$$

Hier is a de halve breedte van de topografie op de zeebodem. Waardes $a = 10$ en $a = 30$ km. worden gebruikt. Voor h_{max} is een range van waarden van 250 m tot 1500 m in stappen van 250 m gebruikt. In figuur 8 is een voorbeeld te zien van deze topografie met $a = 10$ km en $h_{max} = 750$ m.

Om een idee te geven van een typische topografie in de oceaan is in figuur 9 de Kaena ridge te zien, een topografie onder water bij het eiland Oahu bij Hawaii. Bij deze topografie is numeriek en in het veld onderzoek gedaan naar de opwekking van intern getij. De topografie heeft duidelijke overeenkomsten met de polynomiale richel.



Figuur 8: Polynomiale richel met halve breedte $a = 10$ km en hoogte $h_{max} = 750$ m. De horizontale resolutie van het grid is 1 km.



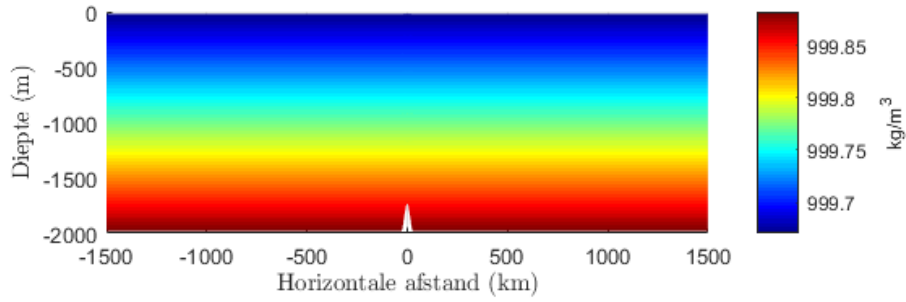
Figuur 9: a) Diepte rond de Kanea Ridge, noord-west van het eiland Oahu bij Hawaii. b) Diepte op de doorsnede zoals in a) in rood getoond. De gelijkennissen met de polynomiale richel zijn duidelijk zichtbaar.

4.4 Randvoorwaarden

Aan de zijkanten van het grid is het basin gesloten. De randvoorwaarde die daar geldt, zorgt dat de snelheid dwars op de rand 0 is. Aan de noord- en zuidkant van het grid geldt $v = 0$. Aangezien slechts één cel in deze richting wordt beschouwd, is de snelheid in de y -richting altijd 0. Aan de oost- en westkant van het grid geldt dat de snelheid in de x -richting 0 is, $u = 0$. Verder geldt op de bodem en aan de zijkanten dat er geen wrijving is. Het oceaan oppervlak is vrij om te bewegen. Op de bodem is de verticale snelheid ook 0.

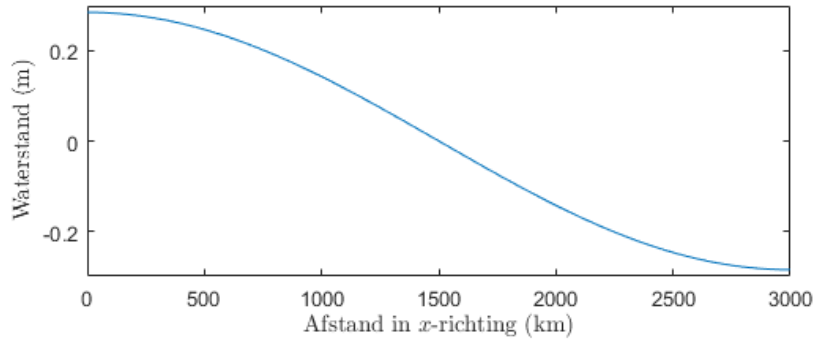
4.5 Beginvoorwaarden

Met de beginvoorwaarden van het model wordt gezorgd dat de gewenste stratificatie wordt ingesteld en over de topografie een barotrope stroom op gang komt. De stratificatie is een constante lineaire stratificatie zoals in hoofdstuk 3.2 beschreven. Waardes van N , de Brünt-Väisälä frequentie van $1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ en $2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ worden gebruikt. In figuur 10 is de dichtheid weergegeven wanneer een constante stratificatie van $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ wordt ingesteld.



Figuur 10: Dichtheid zoals geïnitieerd op $t = 0$. De stratificatie is constant met Brünt-Väisälä frequentie $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. In het midden van het grid is een lage topografie geplaatst (de witte piek). Wanneer het water naar links en recht zou gaan stromen is duidelijk dat de horizontale contouren van gelijke dichtheid worden verstoord en intern getij wordt opgewekt.

Om over de topografie, in het midden van het grid, een barotrope stroming op te wekken wordt een staande golf in de x -richting opgewekt. In essentie klotst het water heen en weer zoals in een badkuip gedaan kan worden. Om deze op gang te brengen, wordt de waterstand in het model geïnitieerd met een halve golflengte van een cosinus in de x -richting, zoals weergegeven in figuur 11.



Figuur 11: Initiële waterstand in het model. Deze waterstand zorgt voor een staande golf in de x -richting.

Het bestaan van deze staande golf kan als volgt analytisch worden afgeleid. De snelheid $U(x, t)$ en de uitwijking van het vrije oppervlak $\eta(x, t)$ worden in een diepe oceaan met diepte H en een uitwijking $\eta \ll H$ beschreven door de partiële differentiaal vergelijkingen (28) en (29). Deze zijn:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (29)$$

Deze vergelijkingen gelden voor de dieptegemiddelde snelheid U . In een kanaal van lengte L , en een initiële amplitude van het vrije oppervlak A worden de initiële condities gegeven door:

$$\begin{aligned}
\eta(x, t = 0) &= A \cos\left(x \frac{\pi}{L}\right) \\
\frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t = 0) &= 0 \\
U(x, t) &= 0 \\
\frac{\partial U}{\partial t}(x, t = 0) &= 0
\end{aligned} \tag{30}$$

De randvoorwaarden die op $x = 0$ en $x = L$ gelden zijn:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial x}(x = 0, t) &= 0 \\
\frac{\partial \eta}{\partial x}(x = L, t) &= 0 \\
U(x = 0, t) &= 0 \\
U(x = L, t) &= 0
\end{aligned} \tag{31}$$

Vergelijkingen (28) - (29) staan propagerende golven met snelheid \sqrt{gH} toe. Voor η voldoet de volgende oplossing aan de begin- en randvoorwaarden:

$$\begin{aligned}
\eta(x, t) &= \frac{1}{2} A \cos\left(\left(x - t\sqrt{gH}\right) \frac{\pi}{L}\right) \\
&+ \frac{1}{2} A \cos\left(\left(x + t\sqrt{gH}\right) \frac{\pi}{L}\right) \\
&= A \cos\left(x \frac{\pi}{L}\right) \cos\left(t\sqrt{gH} \frac{\pi}{L}\right)
\end{aligned} \tag{32}$$

Wanneer deze oplossing (32) in vergelijking (28) wordt gesubstitueerd en voor u wordt opgelost, blijkt dat voor $u(x, t)$ geldt dat:

$$U(x, t) = A \sqrt{\frac{g}{H}} \sin\left(x \frac{\pi}{L}\right) \sin\left(t\sqrt{gH} \frac{\pi}{L}\right) \tag{33}$$

Als de waterstand met een amplitude A wordt geïnitieerd, stroomt in het midden van het grid bij $x = L/2$ het water met een snelheidsamplitude $A\sqrt{g/H}$. Om een stroomsnelheid van 2 cm/s van het water te genereren bij een diepte van 2000 m, zal de waterstand η daarom met een amplitude van 28.5 cm worden geïnitieerd. De frequentie ω van deze stroming is:

$$\omega = 2\pi \frac{\sqrt{gH}}{2L} \tag{34}$$

Eerst zal dit model 2D getest worden om te controleren of deze barotrope stroming inderdaad zoals gewenst tot stand komt.

4.6 Voor- en nadelen modelopzet

De modelopzet waarin middels een staande golf een getijbeweging over de topografie in het midden wordt opgewekt heeft twee belangrijke voordelen. Na initialisatie hoeft geen energie toegevoegd te worden om de stroming op gang te brengen of te houden. Dit zal het opstellen van een energiebalans over het model aanzienlijk vereenvoudigen en zo de barotrope energieconversie naar intern getij beter meetbaar maken. Daarnaast is er geen periode nodig waarin de stroming langzaam op gang wordt gebracht. In deze periode zou de initiële stratificatie al behoorlijk verstoord worden, hetgeen de metingen minder precies zal maken.

Een nadeel van deze opzet is dat de topografie noodzakelijk symmetrisch moet zijn. De staande golf in het model bestaat uit een naar links en rechts propagerende golf die aan de randen reflecteert. Omdat de snelheid van propagatie (\sqrt{gH}) van de diepte afhangt zullen de twee golven uit fase raken, wanneer het diepteprofiel niet symmetrisch is. Daardoor zou de stroming boven de topografie niet langer zuiver harmonisch zijn. Opwekking van intern getij aan de rand van een continentale plaat is daardoor in deze opstelling niet te simuleren. Het diepteprofiel van de rand van de continentale plaat is immers niet symmetrisch.

Daarnaast is de stroming beperkt tot de x -richting. Doordat geen stromingen in de y -richtingen mogelijk zijn kan de invloed van de Coriolis parameter op het intern getij niet onderzocht worden. Nog een consequentie van de beperking van stroming tot de x -richting is dat alleen stroming loodrecht op een topografie gesimuleerd kan worden. In werkelijkheid kan de stroming ook onder een hoek tegen een topografie aanstromen.

5 Energieberekeningen

Om het energieverlies van het barotrope getij aan de opwekking van barocline beweging oftewel intern getij te onderzoeken moet dit meetbaar gemaakt worden. Dit hoofdstuk beschrijft hoe dat gedaan wordt in dit onderzoek. Eerst wordt de energievergelijking, afgeleid uit de bewegingsvergelijkingen, beschouwd. Daarna wordt voor de 2D en 3D modellen de energiebalans opgesteld en gesplitst in een barotroop en barocline deel.

5.1 Energievergelijking

In Henderschott en Garret [6] wordt de energievergelijking die volgt uit de bewegingsvergelijkingen (10) - (14) afgeleid. In die gelineariseerde Navier-Stokes vergelijkingen treedt zonder dissipatie energiebehoud op.

De energiebalans voor een infinitesimaal volume wordt gegeven door:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho_0 (u^2 + v^2 + w^2) \right] + \nabla \cdot (p\mathbf{u}) = -w\rho g \quad (35)$$

Hier zijn u, v en w de snelheden in respectievelijk de x, y en z -richting. p is de hydrostatische druk, ρ is de dichtheid van het water en g de valversnelling. In deze vergelijking zijn de drie belangrijke componenten te herkennen. De eerste term aan de linkerzijde is te associëren met kinetische energie, de tweede term aan de linkerzijde beschrijft een flux en het rechterlid is te associëren met potentiële energie.

Aan de randen van het model geldt dat $\mathbf{u} = 0$. Wanneer vergelijking (35) over het totale domein wordt geïntegreerd, kan de divergentiestelling worden gebruikt om te laten zien dat energie behouden is.

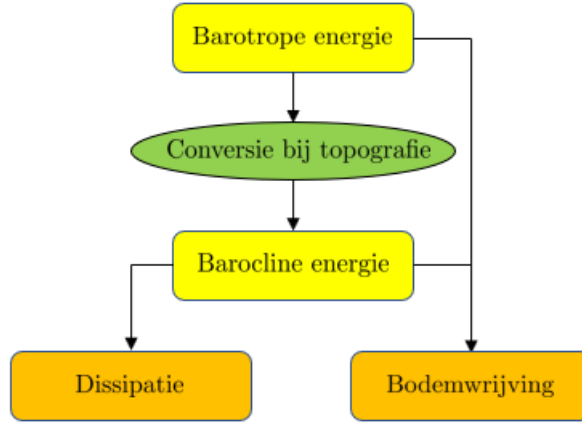
$$\begin{aligned} \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho_0 (u^2 + v^2 + w^2) \right] + w\rho g \right] dV &= \iint_S (p\mathbf{u} \cdot \hat{n}) dS \\ &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Wanneer vergelijking (36) ook in de tijd wordt geïntegreerd kan het totale energiebudget in het systeem worden bepaald (met een te kiezen integratie constante C). Omdat in het model alleen beweging in de x -richting mogelijk is, zal in het vervolg alleen nog snelheid u worden beschouwd in het horizontale vlak.

$$E_{tot}(t) = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \int_{-h}^{\eta} \left[\left[\frac{1}{2} \rho_0 (u^2 + w^2) \right] + \rho g z \right] dz dx dy = C \quad (37)$$

Om het verlies van barotrope energie aan de opwekking van intern getij te bestuderen is het noodzakelijk de kinetische en potentiële energieterm uit vergelijking (37) te splitsen in een barotroop gedeelte en een barocline gedeelte.

In figuur 12 is een illustratie van de conversie van barotrope naar barocline energie getoond. Bij de topografie wordt het water langs de wanden omhoog en omlaag gestuwd. Hierdoor ontstaat intern getij en wordt een gedeelte van de energie van het barotrope getij naar het barocline getij omgezet.



Figuur 12: Diagram van de energiestromen in het model. Een deel van de barotrope energie wordt bij de topografie omgezet in barocline energie. Dit intern getij propageert weg van de topografie. Een gedeelte van deze energie gaat verloren aan dissipatie door turbulentie, ontstaan na het breken van intern getij. Daarnaast gaat zowel barotrope als barocline energie aan de bodem verloren aan bodemwrijving. In het onderzoek is bodemwrijving buiten de analyse gehouden.

5.2 2D Energieberekening

In de 2D simulaties waarin verticaal slechts één laag gebruikt wordt, wordt in essentie alleen naar het dieptegemiddelde gedrag van de oceaan gekeken. Met één verticale laag is alleen barotrope beweging zonder verticale structuur mogelijk. In vergelijking (37) hebben $\rho = \rho_0$ en $u = U$, de dieptegemiddelde snelheid, geen verticale afhankelijkheid. De verticale snelheid kan worden verwaarloosd aangezien de verticale snelheid van het oppervlak vele malen kleiner is dan de horizontale snelheid.

Per oppervlakte eenheid wordt de totale energie dan gegeven door:

$$\begin{aligned}
 E_{tot} &= \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{1}{2} \rho_0 U^2 + \rho_0 g z \right] dz \\
 &= (\eta + h) \frac{1}{2} \rho_0 U^2 + \int_{-h}^{\eta} \rho_0 g z dz + C \\
 &= (\eta + h) \frac{1}{2} \rho_0 U^2 + \frac{1}{2} g \eta^2
 \end{aligned} \tag{38}$$

Door de integratieconstante op $-\int_{-h}^0 \rho_0 g z dz$ te nemen is de energie gelijk aan 0 wanneer $\eta = 0$ en de snelheid $U = 0$ zijn. Daarom kunnen de barotrope kinetische energie $\bar{E}_{kin,2D}$ per volume eenheid en de barotrope potentiële energie $\bar{E}_{pot,2D}$ per oppervlakte eenheid als volgt berekend worden:

$$\bar{E}_{pot,2D} = \frac{1}{2} g \eta^2 \quad \left[\frac{J}{m^2} \right] \tag{39}$$

$$\bar{E}_{kin,2D} = \frac{1}{2} \rho_0 U^2 \quad \left[\frac{J}{m^3} \right] \tag{40}$$

Hier is U , de dieptegemiddelde stroomsnelheid in de x -richting en η de uitwijking van het vrije oppervlak. Door nu over het gehele domein $\bar{E}_{pot,2D}$ en $\bar{E}_{kin,2D}$ te integreren kan de totale energie berekend worden.

5.3 3D Energieberekening

In 3D wordt de berekening ingewikkelder. Doordat u en ρ een verticale afhankelijkheid hebben, is het uitrekenen van de verticale integraal in (37) niet meer triviaal. Daarnaast moet een onderscheid gemaakt worden tussen barotrope en barocline energie aangezien de laatste vorm in 3D wél kan bestaan.

In deze sectie zal worden beschreven hoe voor kinetische en potentiële energie dit onderscheid gemaakt kan worden tussen barotrope en barocline energie. Tenslotte zal ook worden beschreven hoe de barocline energieflex weg van de topografie bepaald kan worden. In de regel wordt barotroop geassocieerd met dieptegemiddeld gedrag van de stroming, barocline wordt geassocieerd met de afwijking hiervan, het intern getij.

5.3.1 Kinetische energie

Allereerst wordt aangenomen dat de stroming alleen in de x -richting plaatsvindt. w in (37) wordt verwaarloosd, omdat de verticale snelheden erg klein zijn. Dat is in overeenstemming met de hydrostatische benadering.

De kinetische energie wordt in zijn barotrope en barocline component gesplitst door de perturbatiesnelheid van het dieptegemiddelde te definiëren:

$$u = \bar{U} + u' \quad (41)$$

Deze componenten zijn als volgt gedefinieerd:

$$\bar{U}(x, t) = 1/h \int_{-h}^{\eta} u(x, z, t) dz \quad (42)$$

$$u'(x, z, t) = u(x, z, t) - \bar{U}(x, t) \quad (43)$$

De horizontale kinetische energie, met als eenheid J/m^{-3} wordt in (37) gegeven door:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \rho_0 u^2 \quad \left[\frac{J}{m^3} \right] \quad (44)$$

Wanneer u in zijn componenten wordt gesplitst, zoals in (43) gedefinieerd, kan dit worden geschreven als de volgende som:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \rho_0 u'^2 + \frac{1}{2} \rho_0 \bar{U}^2 + \rho_0 \bar{U} \cdot u' \quad (45)$$

Om de totale kinetische energie te berekenen moet vergelijking (45) over de diepte worden geïntegreerd.

$$\begin{aligned} (h + \eta) \overline{E_{kin}} &= \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} \rho_0 u'^2 + \frac{1}{2} \rho_0 \bar{U}^2 + \rho_0 \bar{U} \cdot u' dz \\ &= \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} \rho_0 u'^2 + (h + \eta) \frac{1}{2} \rho_0 \bar{U}^2 \quad \left[\frac{J}{m^2} \right] \end{aligned} \quad (46)$$

Hier is $\overline{E_{kin}}$ de dieptegemiddelde kinetische energie per volume-element. Het product $\bar{U} \cdot u'$ valt weg uit de verticale integraal, omdat \bar{U} geen verticale afhankelijkheid heeft en u' per definitie verticale integraal 0 heeft.

Uit (46) volgt dat de dieptegemiddelde energie $\overline{E_{kin}}$ kan worden bepaald als:

$$\begin{aligned} \overline{E_{kin}} &= \frac{1}{(h + \eta)} \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} \rho_0 u'^2 + \frac{1}{2} \rho_0 \bar{U}^2 \\ &= \overline{E'_{kin}} + E_{kin0} \quad \left[\frac{J}{m^3} \right] \end{aligned} \quad (47)$$

De term E_{kin0} is volledig analoog aan de barotrope energie in de 2D energieberekening uit vergelijking (40). Dit is in de 3D berekening de barotrope energie. De term $\overline{E'_{kin}}$ is de barocline kinetische energie die geassocieerd wordt met intern getij.

5.3.2 Potentiële energie

Ook de potentiële energieterm uit vergelijking (37) kan gesplitst worden in een barotroop en een barocline deel. De dichtheid bij een lineaire stratificatie is als volgt gedefinieerd:

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0 + \rho_N(z) + \rho'(x, y, z, t) \quad (48)$$

Hier is ρ_0 de gemiddelde dichtheid, $\rho_N(z)$ stelt de afwijking hiervan door de lineaire, continue stratificatie voor met Brünt-Väisälä frequentie:

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz}} \quad (49)$$

Tenslotte is ρ' de verandering van de dichtheid ten opzichte van $\rho_0 + \rho_N(z)$

Zo'n dichtheidsprofiel is in figuur 4a weergegeven. De potentiële energie van een waterkolom wordt op 0 gesteld wanneer er geen uitwijking van het vrije oppervlak is en wanneer het dichtheidsprofiel is zoals geïnitieerd. Dit kan door de integratieconstante, die tevoorschijn komt door de energievergelijking in de tijd te integreren, als volgt in te stellen.

Voor de potentiële energie geldt, over een kolom water geïntegreerd:

$$E_{pot} = \int_{-h}^{\eta} z\rho(z)gzdz - \int_{-h}^0 z(\rho_0 + \rho_N)gzdz \quad \left[\frac{J}{m^2} \right] \quad (50)$$

De barotrope stroming zorgt voornamelijk voor uitwijking van het vrije oppervlak en interne golven zorgen met name voor afwijkingen van de dichtheid in het inwendige van de oceaan. Daarom wordt de barotrope potentiële energie als volgt gedefinieerd, waarbij de luchtdruk p_0 buiten beschouwing gelaten is:

$$\overline{E_{pot0}} = \int_0^{\eta} (\rho_0 + \rho_N)gzdz \quad (51)$$

$$= \frac{1}{2}\rho_0g\eta^2 \quad \left[\frac{J}{m^2} \right] \quad (52)$$

Intern getij zorgt voor dichtheidsverplaatsingen in de oceaan. De energie die hiermee geassocieerd wordt, is de arbeid die moet worden verricht om een infinitesimaal volume te verplaatsen over een afstand ζ in de vloeistof. Zo'n verplaatsing ten opzichte van de initiële dichtheid $\rho_0 + \rho_N$ vraagt de volgende arbeid:

$$W(x, y, z, t) = \int_{z-\zeta}^z g[\rho(z) - \rho_0 - \rho_N(z')]dz' \quad \left[\frac{J}{m^3} \right] \quad (53)$$

Hier is $\rho'(z')$ de afwijking van de dichtheid op hoogte z' . Dit is de potentiële energie geassocieerd met het intern getij. In het geval van constante stratificatie N vereenvoudigt deze integraal. De afstand ζ wordt gegeven door

$$\zeta = \frac{\rho'g}{N^2\rho_0} \quad (54)$$

De kracht die nodig is om het deeltje te verplaatsen loopt lineair op van 0 tot $\rho'g$, dus de potentiële energie in J/m^3 , de arbeid om het deeltje naar die positie te verplaatsen wordt gegeven door:

$$E'_p = \frac{g^2 p'^2}{2\rho_0 N^2} \quad [J/m^3] \quad (55)$$

De potentiële energie in een waterkolom met vrij oppervlak η en dichtheidsprofiel ρ , wordt dus gegeven door:

$$E_{pot,tot} = E_{p0} + \int_{-h}^{\eta} E'_p dz \quad \left[\frac{J}{m^2} \right] \quad (56)$$

Net zoals voor de barocline kinetische energie kan een dieptegemiddelde gedefinieerd worden voor de barocline potentiële energie $\overline{E'_p}$:

$$\begin{aligned} E_{pot,tot} &= E_{p0} + \int_{-h}^{\eta} E'_p dz \\ &= E_{p0} + (h + \eta) \overline{E'_p} \end{aligned} \quad \left[\frac{J}{m^2} \right] \quad (57)$$

5.4 Totale energie

De totale energie in het systeem kan worden berekend door de dieptegemiddelde kinetische en potentiële energieën over het hele domein te integreren:

$$E_{tot}(t) = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (h + \eta(x, t)) \left(E_{kin0} + \overline{E'_{kin}} \right) + E_{p0} + (h + \eta(x, t)) \overline{E'_p} dx dy \quad (58)$$

Op $t = 0$ is er alleen energie in de vorm van uitwijking van het vrije oppervlak. Met een amplitude van 28,5 cm, dimensies 3000 km \times 5 km zoals in de basisopstelling is deze energie totaal:

$$E_{tot}(t = 0) = L_y \int_0^{L_x} \frac{1}{2} \rho_0 g A^2 \cos^2\left(x \frac{\pi}{L_x}\right) dx = 3.0007 \times 10^{12} J \quad (59)$$

5.5 Barocline energieflex weg van obstakel

Uit vergelijking (36) blijkt dat wanneer $\mathbf{u} \neq 0$, er energietransport kan optreden met grootte en richting $p\mathbf{u}$. Om de energie die is gebruikt voor de opwekking van intern getij te meten zou aan weerszijden van de topografie het barocline energietransport gemeten moeten worden. In figuur 13 zijn de twee doorsneden getoond waar dat gedaan wordt. Wanneer het intern getij niet gedissipeerd wordt, terwijl het naar dit oppervlak propageert, kan de opwekking van intern getij met deze energieflex nauwkeurig worden ingeschat.

Het berekenen van deze energieflex gebeurt als volgt:

$$Ef(x, t) = \int_{-h}^{\eta} \int_0^{L_y} p'(x, y, z, t) \cdot u'(x, y, z, t) dy dz \quad (60)$$

Daarbij is $u'(x, y, z, t)$ de afwijking van de barotrope stroom en $p'(x, y, z, t)$ de afwijking van de druk van het barotrope geval. Die afwijking is gedefinieerd als:

$$p'(x, y, z, t) = \rho_0 g (\eta - \eta_B) + p(x, y, z, t) - p_0(z) \quad (61)$$

Hier stelt η de waterstand voor in een modelrun met stratificatie, η_B degene in een modelrun zonder stratificatie. $p(x, y, z, t)$ is de druk als functie van $\rho(x, y, z, t)$ en p_0 druk als functie van $\rho_0 + \rho_b(z)$.

Voor de berekening van p' zijn alleen de laatste twee termen van belang. Dit komt doordat u' per definitie over de diepte geïntegreerd 0 is. Het product met u' zorgt ervoor dat alleen delen van p' die geen functie zijn van z wegvallen. De stand van het vrije oppervlak doet er dus niet toe. Dat betekent voor de berekening van de druk dat de eerste term niet meer berekend hoeft te worden. Aangezien deze geen verticale afhankelijkheid heeft, zal deze in het product met \mathbf{u}' wegvallen.

Voor de berekening van de drukperturbatie wordt eerst met diagnostische variabele $\rho(x, y, z, t)$ de dichtheidsperturbatie berekend:

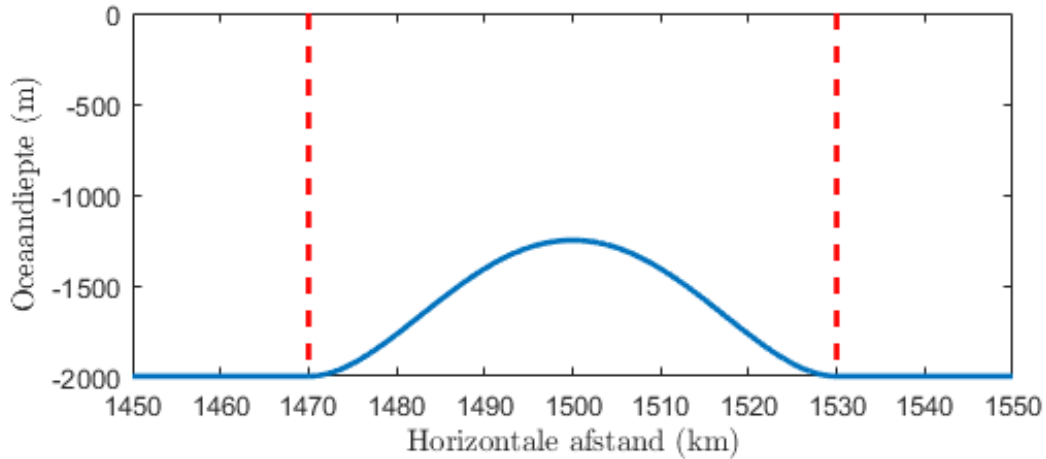
$$\rho'(x, y, z, t) = \rho(x, y, z, t) - (\rho_0 + \rho_N(x, y, z)) \quad (62)$$

Onder de hydrostatische benadering kan daarmee de drukperturbatie zonder de bijdrage van het vrije oppervlak worden berekend.

$$p'(x, y, z, t) = \int_z^0 \rho'(x, y, z', t) g dz' \quad (63)$$

Omdat het dieptegemiddelde van p' weg zal vallen wanneer het vermenigvuldigd wordt met u' , wordt p' ook verticale integraal 0 gegeven door zijn verticale integraal af te trekken.

$$p'(x, y, z, t) = \int_z^0 \rho'(x, y, z', t) g dz' - \int_{-h}^0 p' dz \quad (64)$$



Figuur 13: Topografie op de bodem en de doorsneden waar de barocline flux berekend moet worden.

5.6 Numerieke implementatie energieberekening

De formulering voor de verschillende energiecomponenten die in dit hoofdstuk zijn beschouwd moet, om in het model berekend te worden, discreet gemaakt worden. Mede door de staggering van het grid zoals in sectie 2.1 beschreven en het gebruik van σ -coördinaten is dat niet triviaal gebleken. Het is van belang met de snelheden op de snelheidspunten en de waterdiepte en dichtheid op de waterstandpunten te rekenen. In sectie 7.3 zijn enkele iteraties van de berekening beschreven.

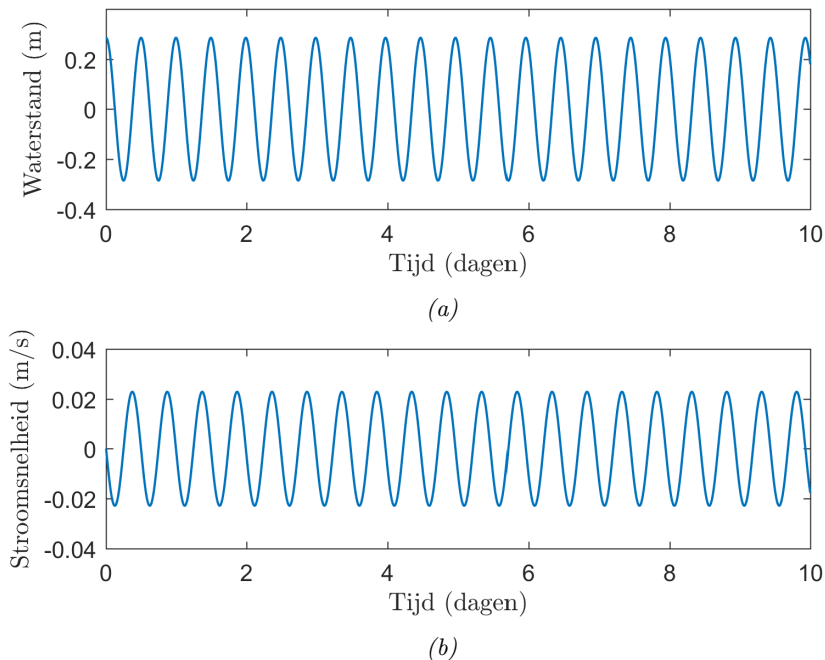
6 Resultaten en discussie

De belangrijkste gevonden resultaten worden in dit hoofdstuk besproken. Eerst wordt geverifieerd of in het 2D model de juiste barotrope beweging over de topografie ontstaat. Daarna wordt de opwekking van intern getij bij de topografie in het 3D model beschouwd. Eerst worden de kwalitatieve eigenschappen van het intern getij en daarna de energieberekeningen aan het intern getij geanalyseerd. Deze energieberekeningen worden vergeleken met de literatuur. Tot slot worden de resultaten van het testen van de parametrisering in het 2D model uit sectie 3.6 uiteengezet.

2D refereert aan experimenten met één verticale laag waarbij naar het dieptegemiddelde gedrag wordt gekeken. 3D betreft de opstelling waar verschillende σ -lagen worden gebruikt voor de verticale discretisatie.

6.1 Verificatie modelopzet

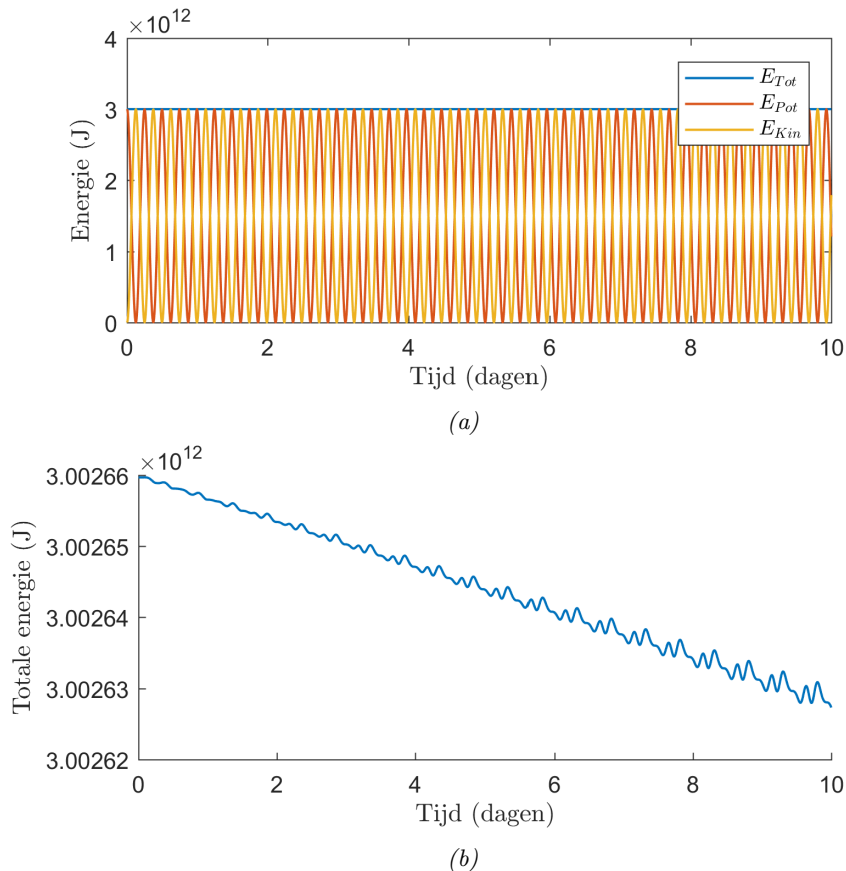
In sectie 4.5 is beschreven welke barotrope beweging op gang moet komen door de beginvoorwaarden. De waterstand wordt geïnitieerd als een halve periode van een cosinus waardoor een staande golf in het model ontstaat. Om te testen of de gewenste barotrope beweging op gang komt is de 2D opstelling bekeken. Van een run zonder bodemwrijving, met een polynomiale richel van 250 m hoog op een totale diepte van 2000 m zijn in figuur 14 de waterstand η in de meest linker gridcel weergegeven en de barotrope stroomsnelheid \bar{U} boven de topografie. Hier blijkt dat de voorspelde barotrope stroming en waterstand gevonden worden. Door de topografie van 250 m hoog is de amplitude van de snelheid hoger dan de voorspelde barotrope beweging van 2 cm/s. De frequentie is zoals verwacht ook fractioneel hoger dan tweemaal daags.



Figuur 14: Resultaten van het 2D model waarin barotrope beweging wordt getest. Waterstand wordt als halve golflengte van een cosinus geïnitieerd waardoor een staande golf ontstaat in het model. a) Waterstand η in de meest linker gridcel, de amplitude van 28.56 cm is duidelijk zichtbaar. b) Barotrope stroomsnelheid \bar{U} precies boven de topografie.

Ook zijn voor deze run de energieën berekend met de methode zoals in sectie 5.2 beschreven. De resultaten zijn in figuur 15 weergegeven. Hier te zien dat er enige numerieke dissipatie in het

model optreedt en in het totaal naar het einde van de tijd kleine oscillaties lijken op te treden. Het verlies is verwaarloosbaar ten opzichte van het totaal en de verwachte verliezen aan intern getij of bodemwrijving.



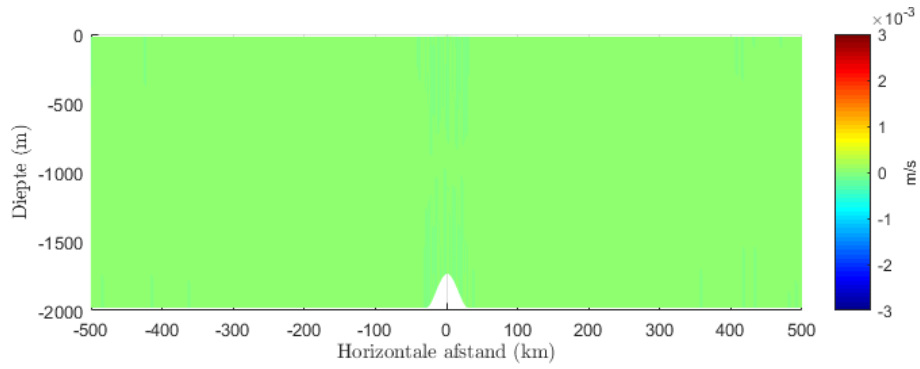
Figuur 15: Energieberekeningen aan het 2D model. a) De totale energie E_{Tot} blijft nagenoeg constant en energie wordt om en om opgeslagen als kinetische E_{Kin} en potentiële E_{Pot} energie. b) Gedetailleerder beeld van de E_{Tot} . Er treedt kleine numerieke dissipatie op. In 10 dagen wordt ongeveer 4×10^7 J gedissipeerd. Op de totale energie van 3×10^{12} J is dit verwaarloosbaar.

6.2 3D Opwekking intern getij

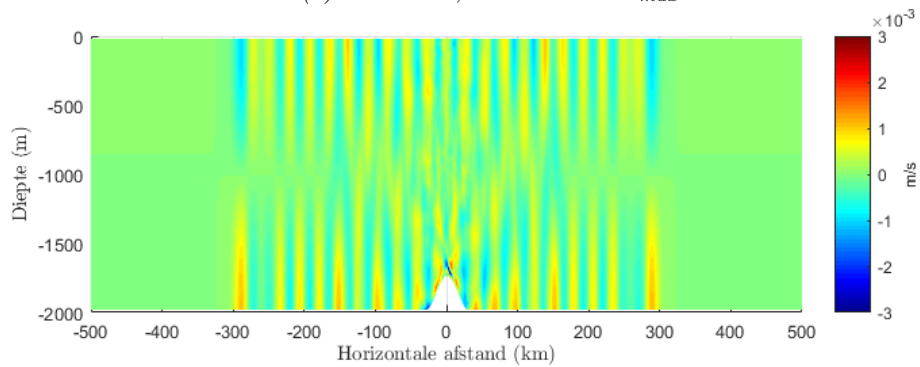
Met de juiste barotrope beweging is vervolgens getest of intern getij inderdaad ontstaat zoals de theorie voorspelt. In een 3D run met 50 σ -lagen is een run over 5 dagen mét en zonder een constante stratificatie met $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ gedaan. De resultaten daarvan zijn in figuur 16a en 16b getoond.

In deze figuur is duidelijk dat zonder stratificatie er geen verticale structuur in de stroming ontstaat, $u' = 0$ over het hele domein. Wanneer de oceaan echter gestratificeerd is, ontstaat gelijk een verticale structuur in de stroming in de buurt van de topografie.

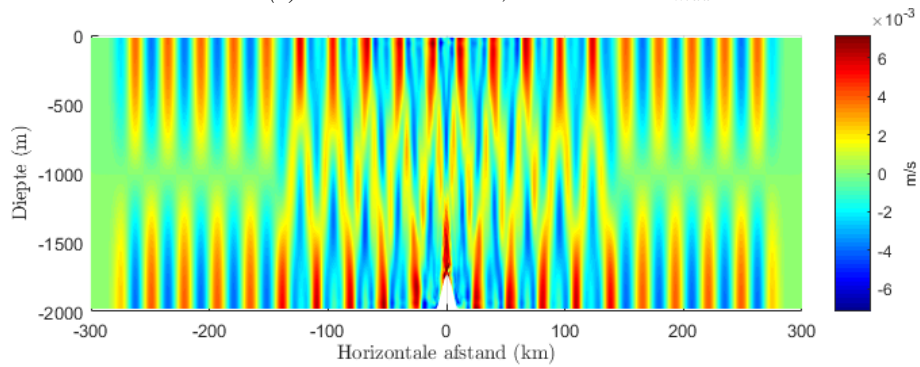
Om de eigenschappen van het intern getij, die in hoofdstuk 3.4 afgeleid zijn uit de bewegingsvergelijkingen, te onderzoeken zijn ook de resultaten voor de polynomiale richel met een breedte van $a = 10$ km weergegeven in figuur 16c en 16d. In figuur 17 zijn de resultaten met een stratificatie van $N = 2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ weergegeven.



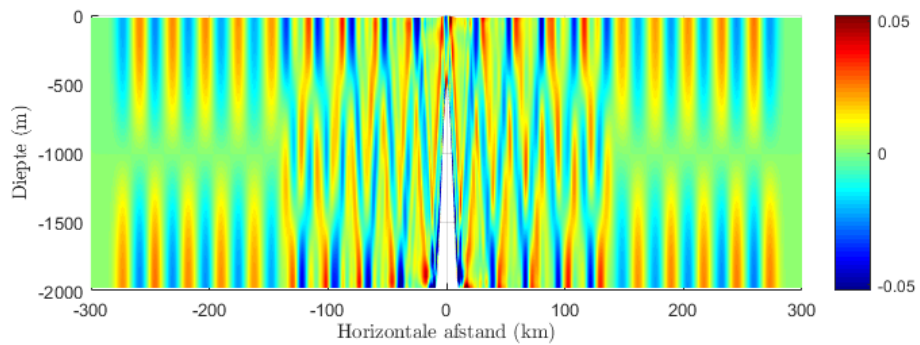
(a) $N = 0 \text{ s}^{-1}$, $a = 30 \text{ km}$ en $h_{max} = 250 \text{ m}$



(b) $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $a = 30 \text{ m}$ en $h_{max} = 250 \text{ m}$

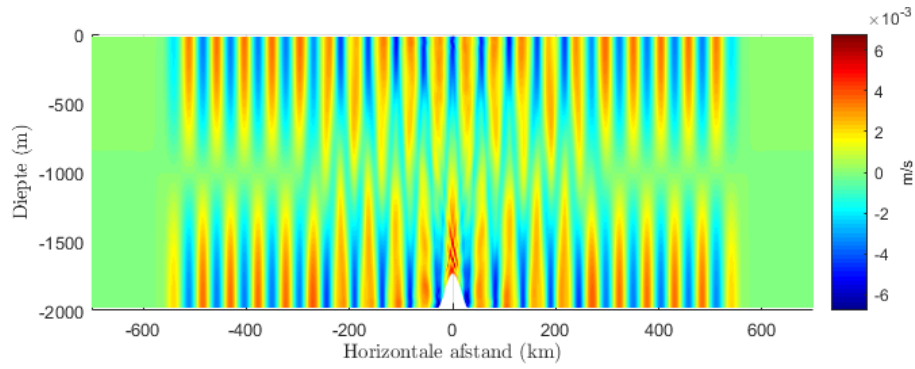


(c) $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $a = 10 \text{ km}$ en $h_{max} = 250 \text{ m}$

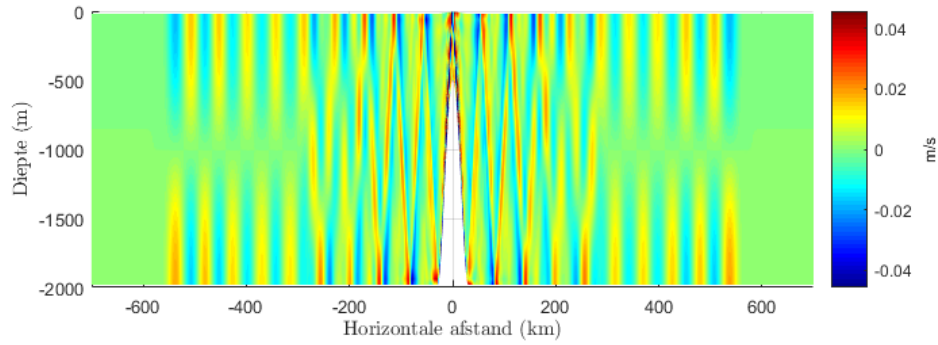


(d) $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $a = 10 \text{ km}$ en $h_{max} = 1500 \text{ m}$

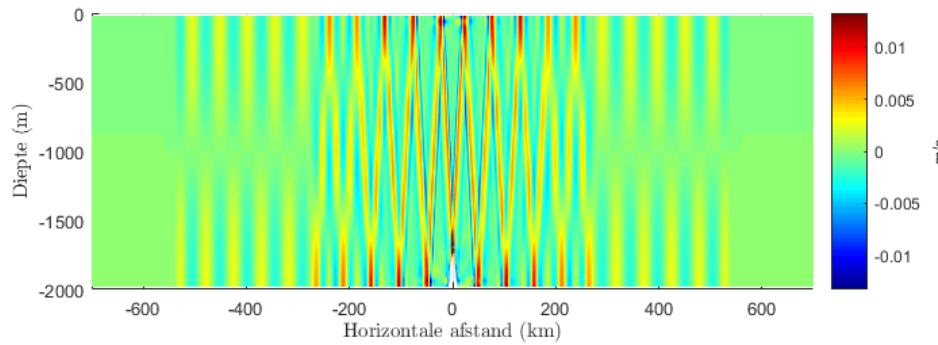
Figuur 16: Snelheidsperturbatie u' na 5 dagen in het 3D model met en zonder stratificaties voor verschillende polynomiale richels. (a) Zonder stratificatie. (b) Constante stratificatie $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. De topografie heeft breedte $a = 30 \text{ km}$ en hoogte $h_{max} = 250 \text{ m}$ (c) Constante stratificatie $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. De topografie heeft breedte $a = 10 \text{ km}$ en hoogte $h_{max} = 250 \text{ m}$ (d) Constante stratificatie $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. De topografie heeft breedte $a = 10 \text{ km}$ en hoogte $h_{max} = 1500 \text{ m}$



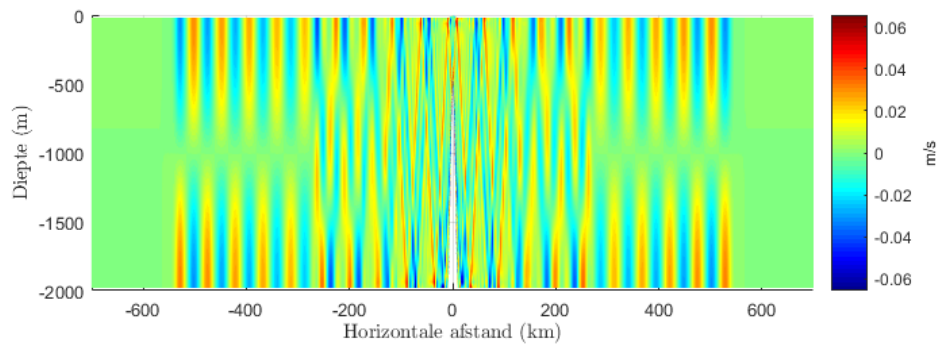
(a) $N = 2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $a = 30 \text{ km}$ en $h_{max} = 250 \text{ m}$, $u'_{max} = 8.8 \times 10^{-3} \text{ m/s}$



(b) $N = 2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $a = 30 \text{ km}$ en $h_{max} = 1500 \text{ m}$, $u'_{max} = 0.27 \text{ m/s}$



(c) $N = 2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $a = 10 \text{ km}$ en $h_{max} = 250 \text{ m}$, $u'_{max} = 2.66 \times 10^{-2} \text{ m/s}$



(d) $N = 2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $a = 10 \text{ km}$ en $h_{max} = 1500 \text{ m}$, $u'_{max} = 0.26 \text{ m/s}$

Figuur 17: Snelheids perturbatie u' na 5 dagen in het 3D model met constante stratificatie $N = 2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ voor verschillende polynomiale richels. (a) De topografie heeft breedte $a = 30 \text{ km}$ en hoogte $h_{max} = 250 \text{ m}$ (b) De topografie heeft breedte $a = 30 \text{ km}$ en hoogte $h_{max} = 1500 \text{ m}$ (c) De topografie heeft breedte $a = 10 \text{ km}$ en hoogte $h_{max} = 250 \text{ m}$ (d) De topografie heeft breedte $a = 10 \text{ km}$ en hoogte $h_{max} = 1500 \text{ m}$

Een aantal interessante observaties kunnen gedaan worden aan figuren 16 en 17. Allereerst propageert het intern getij met helling $\alpha = \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{N^2 - \omega^2}}$ die voorspeld is in vergelijking (21). De periode van de getijbeweging is $T = 12$ uur, met Coriolis parameter $f = 0$ geeft dat:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.1470 & \text{voor} & \quad N = 1 \times 10^{-3} \text{s}^{-1} & \text{en} \\ \alpha &= 0.0729 & \text{voor} & \quad N = 2 \times 10^{-3} \text{s}^{-1} \end{aligned} \quad (65)$$

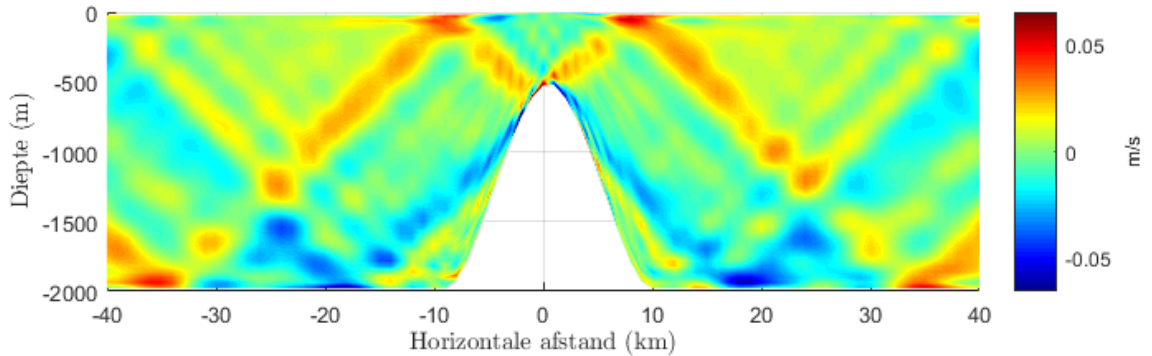
Te zien is dat in dezelfde 10 getijcyclussen het intern getij twee keer zo ver propageert als de stratificatie tweemaal zo groot is. De horizontale afstand waarover het intern getij propageert kan berekend worden uit de golfgetallen m en k en de helling α waaronder het intern getij zich voortplant. Het intern getij met de langste golflengte propageert het verst. In de verticale richting past een veelvoud van een halve golflengte. Het intern getij met in de verticale richting één halve golflengte heeft een golflengte van $2H$ ($H =$ waterdiepte). Deze golven propageren in n getijcyclussen over een horizontale afstand van

$$\Delta x = \frac{2Hn}{\alpha} \quad (66)$$

Voor $N = 1 \times 10^{-3} \text{s}^{-1}$ betekent dat een horizontale afstand van 275km en voor $N = 2 \times 10^{-3} \text{s}^{-1}$ een horizontale afstand van 550 km. Dit is in overeenstemming met de gevonden resultaten. Golven met een kortere golflengte propageren in die tijd over een kortere afstand. In figuren 17a - 17d is duidelijk te zien dat er tot de helft van de propagatie-afstand ook intern getij met andere golflengtes propageert. Hoe hoger en steiler de topografie, hoe groter dit effect is.

Naast de propagatie-afstand is ook te zien dat het intern getij vanaf de top van topografie weg lijkt te propageren wanneer deze sterk superkritisch wordt. Superkritisch wil in deze context zeggen dat de maximale helling van de topografie veel steiler is dan α . In figuur 18 is dat goed te zien in een close-up van u' rond de topografie.

Het effect van intern getij op de barotrope stroomsnelheid is significant. De barotrope snelheid, \bar{U} , is 2 cm/s. In figuur 17d is te zien dat bij de topografie van 1500 m hoog en 10 km breed, de snelheidsperturbatie u' tot tweemaal zo groot wordt als de barotrope stroomsnelheid \bar{U} , op een afstand van honderden kilometers van de topografie.

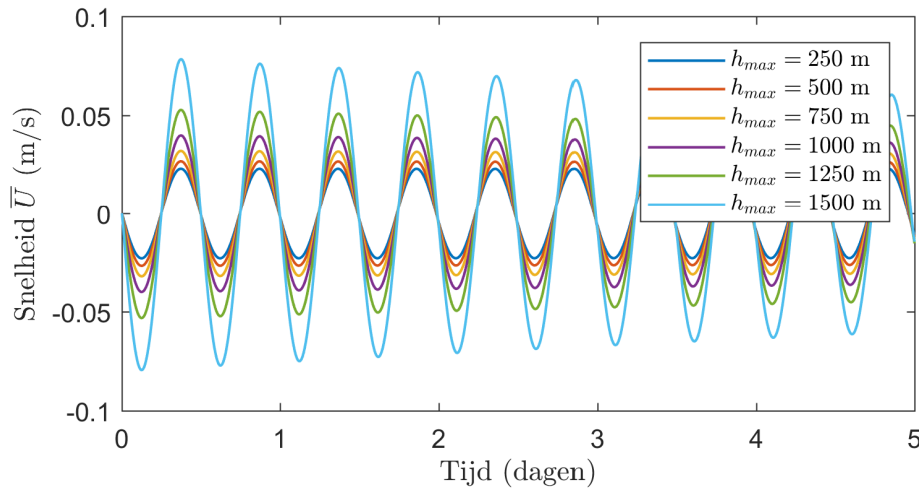


Figuur 18: Close-up van u' rond de topografie voor $N = 2 \times 10^{-3} \text{s}^{-1}$, $a = 10 \text{ km}$ en $h_{max} = 1500 \text{ m}$. De helling van de topografie is veel steiler dan α , waardoor de topografie superkritisch is. Duidelijk propageert het intern getij van de toppen van de topografie weg net als in figuur 5a.

6.3 Numerieke en theoretische opwekking intern getij over polynomiale richel

Nadat in het model de kwalitatieve eigenschappen van het opgewekte intern getij zijn gecontroleerd is geprobeerd de energie geconverteerd van de barotrope beweging naar intern getij ofwel barocline energie, te meten. In hoofdstuk 5.3 zijn een aantal mogelijkheden genoemd om deze energie te meten. De totale energie kan worden berekend als de som van barocline en barotrope energie. Afname van barotrope energie en toename van barocline energie zouden beide gebruikt kunnen worden om de opwekking te meten. Daarnaast kan de barocline energieflex weg van de topografie gemeten worden. Deze laatste methode is gebruikt in het onderzoek van Di Lorenzo et al. [4]. Omdat in de gebruikte opstelling geen energie wordt toegevoegd is het bijhouden van het energiebudget in dit onderzoek praktisch haalbaar en nuttig om inzicht te krijgen in het proces.

In figuur 19 is de dieptegemiddelde snelheid \bar{U} weergegeven voor verschillende hoogtes van de polynomiale richel met breedte $a = 10\text{km}$ en stratificatie $N = 1 \times 10^{-3}\text{s}$. In alle gevallen is te zien dat de amplitude van \bar{U} afneemt. In vergelijking is in figuur 14b te zien dat in het 2D model de barotrope snelheid boven de topografie behouden blijft. Dit is een indicatie dat inderdaad door invoering van de topografie en stratificatie barotrope energie verloren gaat aan intern getij.



Figuur 19: Barotrope stroomsnelheid \bar{U} boven de topografie gedurende 5 dagen. Snelheid is berekend in een 3D-model met constante stratificatie $N = 1 \times 10^{-3}\text{s}$ over een polynomiale topografie met breedte $a = 10\text{km}$ en verschillende hoogtes h_{max} .

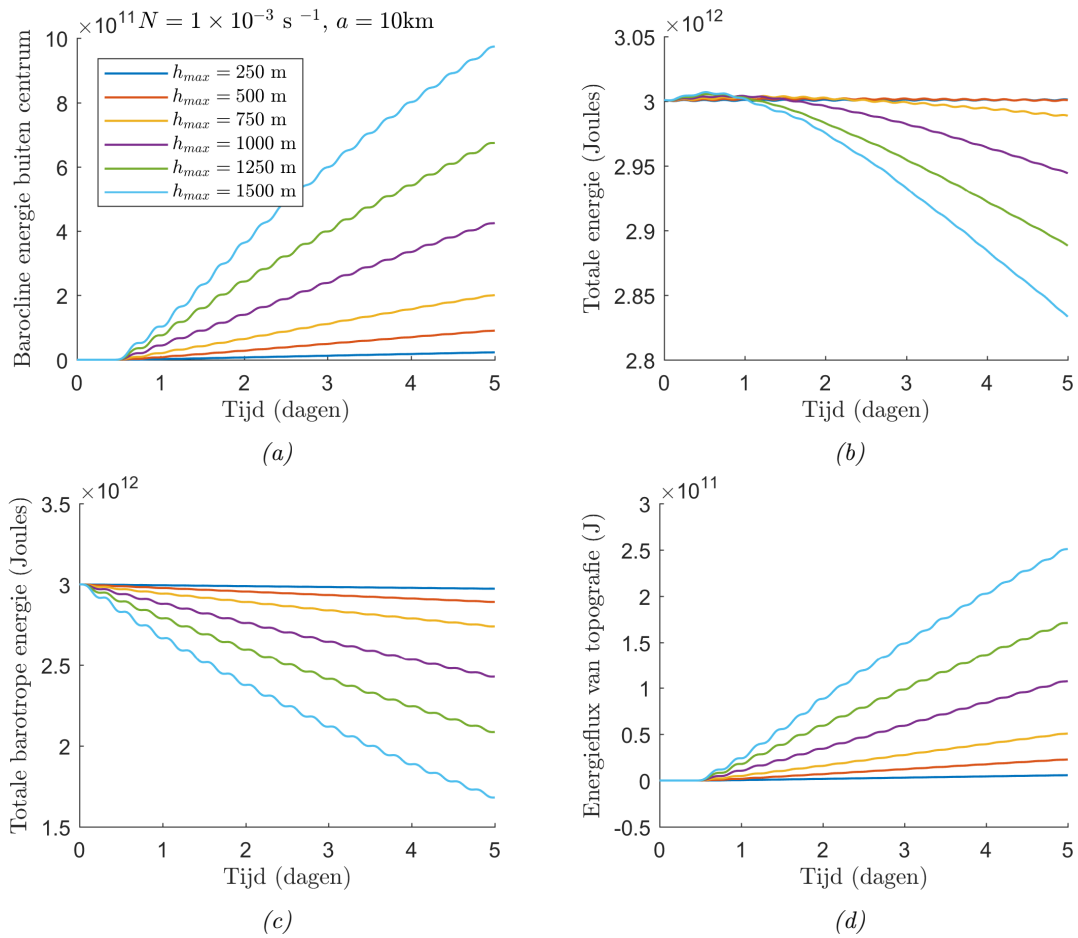
In figuur 20 zijn de resultaten van de 3D energie berekeningen, zoals in sectie 5.3 beschreven, weergegeven voor de polynomiale topografie met breedte $a = 10\text{km}$ en stratificatie $N = 1 \times 10^{-3}\text{s}^{-1}$. Om de berekende barocline energie te vergelijken met de barocline energieflex weg van topografie, is de barocline energie berekend buiten de oppervlakken waardoor de flux berekend is. De barocline energie precies boven de topografie is buiten dus niet meegenomen in dit totaal.

In figuren 20a en 20b is te zien dat pas na een halve dag de barocline energie buiten de topografie begint toe te nemen. Dit is te verklaren door het feit dat intern getij, dat bij de topografie wordt opgewekt, tijd nodig heeft weg te propageren van de topografie. Wel blijkt de energieflex weg van de topografie een te lage inschatting van de totale barocline energie. De barocline energie buiten het centrum in figuur 20a zou gelijk of kleiner moeten zijn dan de energieflex weg van de topografie in figuur 20b. Dit komt omdat intern getij uiteindelijk zal dissiperen, al dan niet numeriek.

Voor kleine hoogtes van de topografie, $h_{max} = 250\text{m}$ en $h_{max} = 500$, blijft de totale energie nagenoeg behouden. Voor grotere hoogtes is te zien dat er energie gedissipeerd wordt (figuur 20d). Voor deze hoogtes kan intern getij worden opgewekt waarvan niet langer de horizontale schalen

veel groter zijn dan de verticale schalen. Dit is in conflict met de hydrostatische benadering van het model, zoals in sectie 3.4.2 is beschreven. Dit interne getij kan daarom numeriek gedissipeerd worden. Uit het feit dat totale energie behouden blijft voor kleinere hoogtes kan beredeneerd worden dat de totale barocline energie daar ook goed ingeschat wordt. Daarmee blijkt dat de energieflex een te lage inschatting geeft van de conversie.

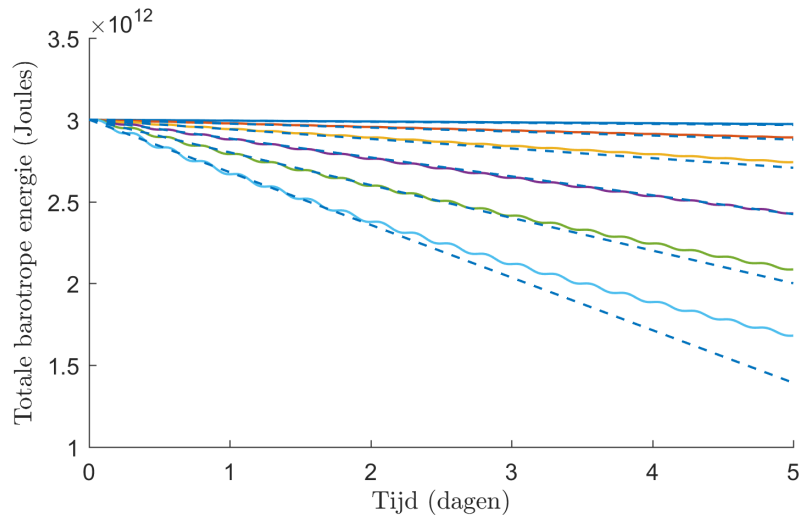
Er worden kleine oscillaties in de totale energie waargenomen, met exact de periode van de getijbeweging. Deze oscillaties zijn niet fysisch te verklaren. Deze oscillaties lijken voort te komen uit benaderingsfouten in de berekening of door problemen met staggering in het grid. In de 2D berekeningen kwamen ook gelijksoortige oscillaties terug. In sectie 7.3 is beschreven hoe de staggering van het grid invloed heeft op de berekening waardoor oscillaties ontstaan zijn. Deze problemen zijn in het 2D model verholpen. In het 3D model is dat niet volledig gelukt. Omdat de oscillaties wel veel kleiner zijn dan de effecten van intern getij kunnen de resultaten wel gebruikt worden. Daarnaast wordt bij middeling over een getijperiode deze oscillatie tenietgedaan.



Figuur 20: Resultaten van energie berekeningen aan polynomiale richel met breedte $a = 10 \text{ km}$ en stratificatie $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. a) Totale barocline energie buiten de topografie b) Totale barocline energieflex weg van de topografie, cumulatief in de tijd. c) Totale barotrope energie d) Totale energie.

6.3.1 Vergelijking model en theorie

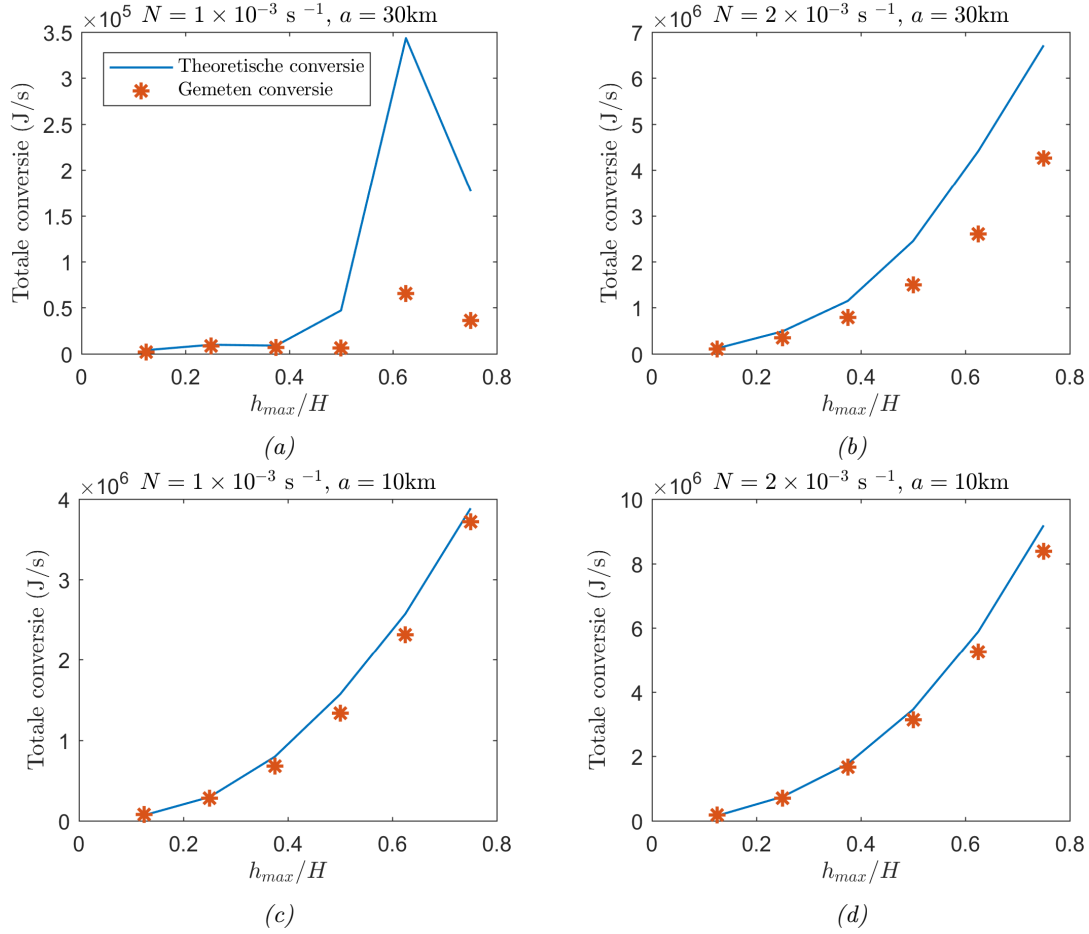
Een analytische oplossing van conversie van barotrope naar barocline energie over de polynomiale richel is gevonden in het onderzoek van Pétrélis et al. [13], zoals in hoofdstuk 3.5.1 gesproken. Deze resultaten zijn in het onderzoek van Di Lorenzo et al [4] geverifieerd. De betrouwbaarste maat voor conversie van barotrope naar barocline energie is de afname van barotrope energie gebleken. Omdat de barotrope stroomsnelheid in de loop van de run aanzienlijk afneemt zoals in figuur 19 te zien is, neemt ook de conversie naar barocline energie af gedurende de run. Daarom is een lineaire fit gemaakt aan de barotrope energie-afname gedurende de eerste getijcyclus van een halve dag. De helling is gelijk aan de gemiddelde conversie per tijdseenheid. In figuur 21 zijn deze lineaire benaderingen weergegeven.



Figuur 21: Lineaire fits aan de totale barotrope energie-afname E_{tot0} , voor de polynomiale richel met breedte $a = 10$ km, verschillende hoogtes h_{max} en stratificatie $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. De helling geeft de gemiddelde conversie per periode.

Deze fits zijn ook gemaakt voor modellen met een andere stratificatie, $N = 2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ en voor een andere breedte van de topografie $a = 30$ km. In figuur 22 is de theoretische conversie vergeleken met de gevonden conversie in de modellen.

Hier is te zien dat met name de conversie voor de topografie met een breedte van 30 km niet goed in overeenstemming is met de theoretische waarde ervoor. De gemeten waarden van de conversie zijn te laag. Voor de topografie met breedte $a = 10$ km is het verschil al veel kleiner, maar de conversie wordt nog steeds onderschat.



Figuur 22: Conversie van barotrope naar barocline energie, berekend in het 3D model door afname van barotrope energie te meten. Resultaten zijn weergegeven voor verschillende polynomiale richels en stratificaties N met een totale diepte van de oceaan van $H = 2000 \text{ m}$. Deze resultaten worden vergeleken met de theoretische voorspelling van Pétrélis et al. [13]. Conversie is met een breedte van de richel in de y -richting van 5 km .

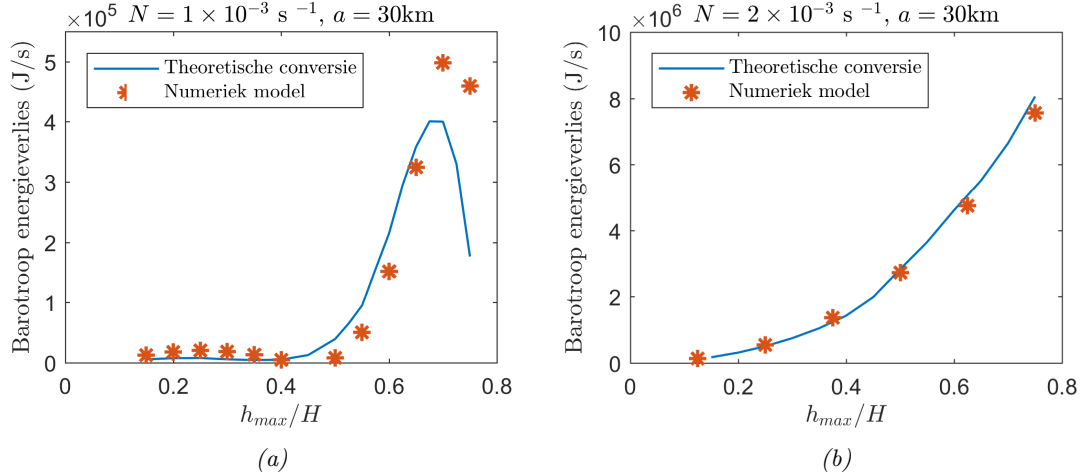
De reden van deze discrepantie bleek te zijn dat de gebruikte modelopzet en de theorie niet exact vergelijkbaar waren. De theoretische conversie bevat de functie M die afhangt van $(\frac{h_{max}}{H})$ en $(\frac{\alpha a}{H})$. De factor α , de helling waaronder het intern getij propageert is in de huidige opstelling anders dan de waarde α waarop de theoretische curve is gebaseerd. α kan worden berekend met vergelijking (21): $\alpha = \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{N^2 - \omega^2}}$. Door een verschil in f tussen dit experiment en bij de theoretische curve zijn de waarden voor α anders. De waarden zijn in tabel 1 weergegeven.

Tabel 1: α vergeleken voor experimentele opzet en theoretische curve

	Theoretische curve		Experimentele opzet	
N	$1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$	$2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$	$1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$	$2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$
α	0.1	0.05	0.1470	0.0729

De hogere waarde van α betekent dat in de experimenten de topografie ten opzichte van α minder steil is. Hierdoor wordt minder intern getij opgewekt, wat terugkomt in een lagere waarde van M .

Om te onderzoeken of het verschil in α inderdaad de schijnbare discrepantie tussen de theoretische waarde van de conversie en de numeriek gevonden conversie veroorzaakt is een controle-experiment gedaan. Dit is gedaan door in het 3D model ω zo te kiezen dat de waarden voor α overeenkomen. De nieuwe periode van de getijcyclus is 17 uur. Dit was in de experimentele opzet eerst 12 uur. Hiertoe is het domein langer gemaakt in de x -richting, $L_x = 4222$ km. Nu zouden de theoretische curve en de gemeten waarden van de barotroop-barocline energieconversie overeen moeten komen. Het resultaat van dit controle-experiment is in figuur 23 weergegeven.



Figuur 23: Controle van numeriek berekende conversie van barotrope energie naar intern getij, over verschillende polynomiale richels met breedte $a = 30$ km. Getijfrequentie ω is zo aangepast dat α in deze simulatie precies overeenkomt met α waarop de theoretische conversie is gebaseerd. (a) $\alpha = 0.1$ en $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ (b) $\alpha = 0.05$ en $2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$.

Uit deze resultaten blijkt dat de berekende energieconversie nu wél goed overeenkomt met de theoretische waarde voor een topografie met breedte $a = 30$ km voor verschillende hoogtes en stratificaties. In figuur 23a is nog wel te zien dat voor grotere hoogtes van de topografie berekende conversie en de theoretische waarde enig verschil hebben. In het onderzoek van Di Lorenzo [4], waar de theoretische waarde is getoets met numerieke experimenten werd ook in dit geval een lichte afwijking gevonden.

Dit controle-experiment geeft vertrouwen dat de gebruikte numerieke opzet in staat is het barotrope energieverlies aan de opwekking van intern getij goed te berekenen. In figuur 23a is te zien dat het verlies van barotroop getij niet monotoon toeneemt zoals bij smallere topografieën en hogere stratificatie. Door de breedte van $a = 30$ km en de stratificatie $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ bevindt deze topografie zich in het subkritische regime. Daar heeft het verlies, zoals de theorie voorspelt, een ingewikkeld, niet-monotoon verloop. Voor een specifieke topografie en stratificatie kan dit verlies zelfs helemaal wegvallen, zoals in figuur 5c geïllustreerd.

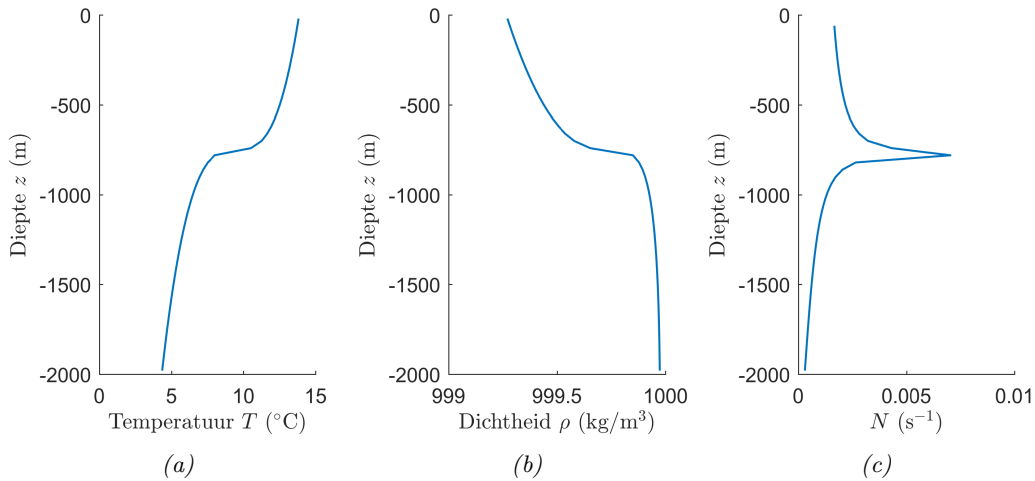
6.3.2 Conversie bij niet-lineaire, realistische stratificatie

Voor een realistischere stratificatie zoals in sectie 3.2 is besproken schiet de analytische theorie tekort. Analytische voorspellingen van de conversie zijn daar niet langer mogelijk door wiskundige complexiteit. De conversie bij een stratificatie van $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ en $N = 2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ komt goed overeen met de theorie en eerder numeriek onderzoek. Dit geeft een bevestiging dat met de huidige opstelling de conversie over een topografie nauwkeurig kan worden berekend. Om te kijken hoe deze conversie zich gedraagt voor een meer realistische stratificatie is een numeriek experiment gedaan met zo'n stratificatie.

In figuur 24 is het gebruikte temperatuurprofiel, de dichtheid ρ en de Brunt-Väisälä frequentie weergegeven die zijn gebruikt. De temperatuur is berekend met de volgende functie van z , de diepte:

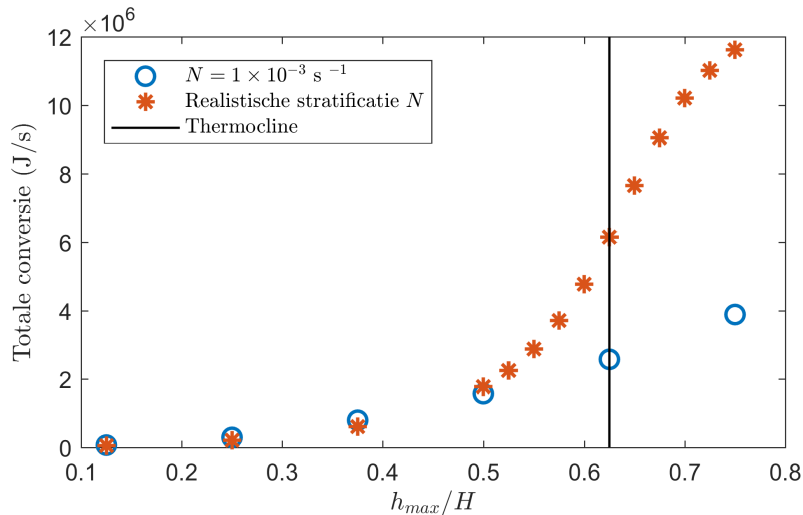
$$T = T_0 + \alpha(z - z_0)^{\frac{1}{3}} \quad (67)$$

De gebruikte parameters zijn $z_0 = -750 \text{ m}$, de diepte van de thermocline, $\alpha = 0.48$ en $T_0 = 9.49$. Nu de stratificatie niet meer constant is, wordt in het artikel van Pétrélis et al [13] gesuggereerd dat de meest nauwkeurig schatting van de conversie kan worden berekend met N op de top van de topografie. Wanneer de hoogte van de topografie dus zo hoog wordt dat deze in de thermocline, met een hoge waarde van N komt, zal de conversie relatief groot zijn.



Figuur 24: a) Temperatuurprofiel uit vergelijking (67) b) Dichtheid ρ c) Brunt-Väisälä frequentie N .

In figuur 25 is het verlies van barotrope energie aan de opwekking van intern getij te zien als functie de hoogte h_{max}/H voor deze stratificatie. Te zien is dat wanneer de topografiehoogte in de buurt komt van de thermocline de energieconversie sterk toeneemt. Dit effect is goed te zien in vergelijking met de energieconversie voor een constante stratificatie met $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ die in dezelfde figuur is weergegeven.



Figuur 25: Verlies van barotrope energie aan de opwekking van intern getij bij het dichtheidsprofiel uit figuur 24. In dit model is een polynomiale richel met breedte $a = 10$ km ingesteld. Opwekking intern getij is berekend met de barotrope afname. Ter referentie is de opwekking voor een constante stratificatie $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ weergegeven. Zwarte lijn geeft de diepte van de thermocline aan op -750 m.

6.4 Test huidige parametrisering in 2D model

Het 3D model is in staat het verlies van barotrope energie aan de opwekking van intern getij goed in te schatten. De resultaten zullen daarom gebruikt worden om de huidige parametrisering van de opwekking van intern getij, die in de 2D modellen van Delft3D-FM is geïmplementeerd, te testen.

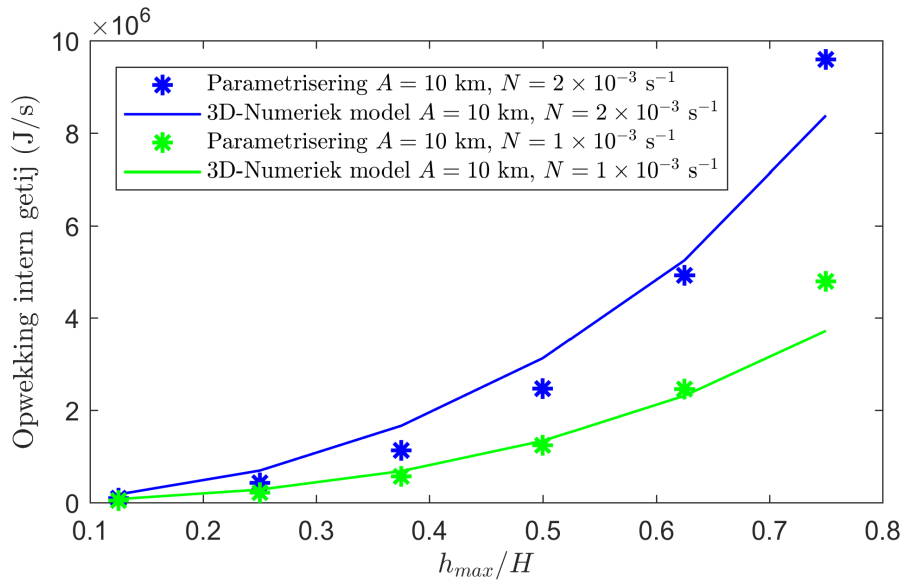
De parametrisering is in sectie 3.6 besproken. Belangrijk is dat de parametrisering een coëfficiënt \hat{C} bevat. Voor de waarde van deze coëfficiënt is de literatuur geen onderbouwing te vinden. In het onderzoek van Shobit Jain [8] is de parametrisering in een wereldwijd getijmodel ingevoerd en is een waarde van \hat{C} gezocht waarbij, op wereldwijde schaal de totale conversie naar intern getij overeen kwam met de waarde uit literatuur. Wanneer over de hele aarde de conversie klopt, betekent dat niet dat op lokale schaal inderdaad de juiste conversie wordt berekend. Door de geometrie van de topografie kan lokaal de energieconversie enorm afwijken.

Het 3D model dat ontwikkeld is in dit onderzoek kan nu wél gebruikt worden om te testen of de parametrisering de juiste opwekking op lokale schaal geeft. Het criterium dat is gekozen om de parameter \hat{C} te optimaliseren is om de totale geparametriseerde opwekking gelijk te maken aan de totale gemeten opwekking in de 3D modellen voor de topografie met breedte $a = 10$ km.

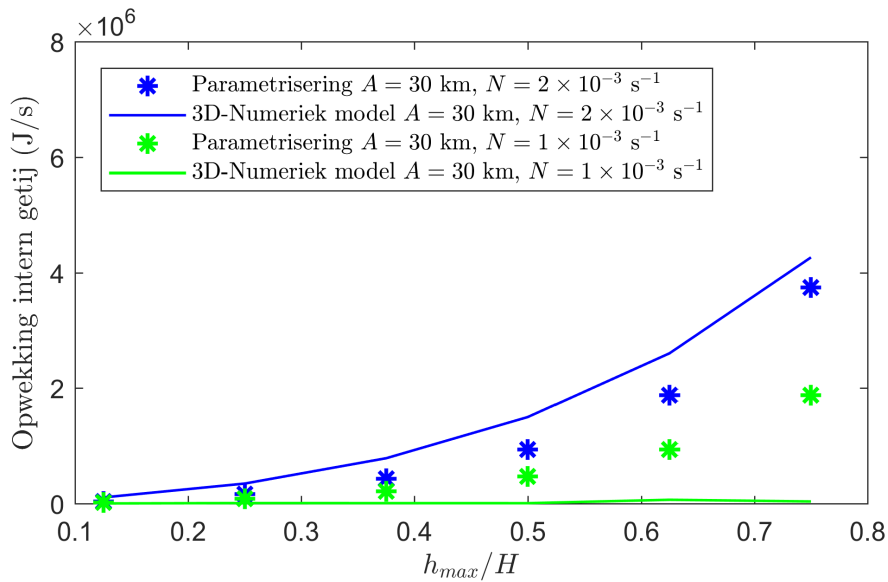
De totale geparametriseerde opwekking wordt gedefinieerd als som van de conversie over de modellen met $N = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ en $N = 2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ voor een range van hoogtes $h_{max} = 250$ m tot $h_{max} = 1500$ m. De definitie voor de totale gemeten conversie in de 3D modellen is analoog. De gevonden optimale waarde voor \hat{C} is $\hat{C} = 0.0022$.

Het gekozen criterium is in het algemeen niet de beste manier om een curve te benaderen. In dit geval echter, waar slechts één coëfficiënt \hat{C} gekalibreerd kan worden, geeft het genoeg inzicht in het verloop van de parametrisering voor verschillende topografiehoogtes.

In figuur 26 zijn de resultaten van deze parametrisering weergegeven. Met dezelfde waarde voor \hat{C} is de parametrisering voor de polynomiale topografie met breedte $a = 30$ km getest voor verschillende stratificaties. De resultaten daarvan zijn in figuur 27 weergegeven.



Figuur 26: Geparametriseerde opwekking intern getij, toegepast in het 2D model, vergeleken met 3D numeriek berekende conversie voor topografiebreedte $a = 10 \text{ km}$. Gebruikte waarde voor \hat{C} is 0.0022 . De opwekking is over een topografie met breedte in de y -richting van 5 km . Gebruikte modelopzet is de basisopstelling uit hoofdstuk 4.1.



Figuur 27: Geparametriseerde opwekking intern getij, toegepast in het 2D model, vergeleken met 3D numeriek berekende conversie voor topografiebreedte $a = 30 \text{ km}$. Gebruikte waarde voor \hat{C} is 0.0022 . De opwekking is over een topografie met breedte in de y -richting van 5 km . Gebruikte modelopzet is de basisopstelling uit hoofdstuk 4.1.

In figuur 26 is te zien dat bij de gebruikte waarde van $\hat{C} = 0.0022$ de conversie van barotrope energie bij een topografiebreedte van $a = 10\text{km}$ met de parametrisering een redelijke benadering is van de numeriek gevonden conversie. Voor de breedte van $a = 10\text{ km}$ is de relatieve fout van de parametrisering ten opzichte van de numeriek gevonden conversie 22%.

Het verloop van de conversie berekend met de parametrisering en de 3D berekende conversie als functie van h_{max} is niet helemaal vergelijkbaar. Voor lagere hoogtes van de topografie wordt de conversie consequent onderschat en voor hogere topografieën wordt de conversie overschat. Met de waarde van \hat{C} valt het verschillende verloop tussen de parametrisering en de numerieke resultaten niet op te lossen. Door \hat{C} te veranderen wordt de conversie voor elke topografiehoogte met dezelfde factor gecorrigeerd.

Wanneer dezelfde parametrisering met $\hat{C} = 0.0022$ wordt gebruikt voor een breedte van $a = 30\text{ km}$ blijkt het verlies voor het subkritische domein $N = 1 \times 10^{-3}\text{ s}^{-1}$ grof overschat wordt met ongeveer een orde van grootte. Voor $N = 2 \times 10^{-3}\text{ s}^{-1}$ onderschat de parametrisering de opwekking de conversie. De parametrisering lijkt dus niet in staat met één waarde voor \hat{C} een correcte benadering te geven voor de conversie over topografieën met verschillende breedtes.

Het controle-experiment dat uitgevoerd is om de energieconversie over een richel van 30 km te vergelijken met de literatuur, zoals in hoofdstuk 6.3.1, geeft nog een belangrijk inzicht in het gedrag van de parametrisering.

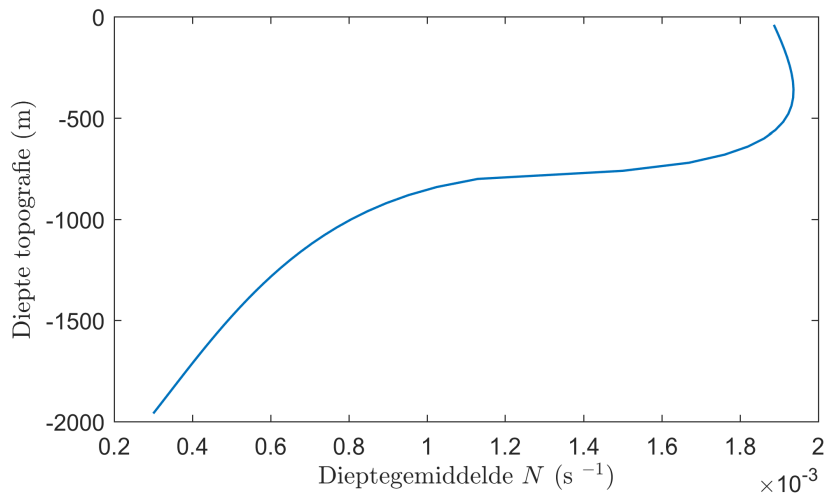
In figuur 27 is de numerieke conversie getoond die berekend is met de originele modelopzet waar de getijfrequentie ω tweemaal daags is. Deze conversie is in figuur 22 weergegeven. In hoofdstuk 6.3.1 is getoond dat de getijfrequentie ω van belang is voor de berekende conversie in de 3D berekeningen. Door de frequentie te verlagen, werd de conversie hoger.

Dit verschil komt uit de parametrisering niet naar voren. Die geeft dezelfde conversie voor beide frequenties. Dit wordt veroorzaakt doordat de functie M , die in de analytische formulering voor de conversie in vergelijking (23) in de parametrisering niet wordt opgenomen. Op dit punt blijkt de parametrisering dus ook tekort te schieten.

6.4.1 Test parametrisering bij niet-lineaire stratificatie

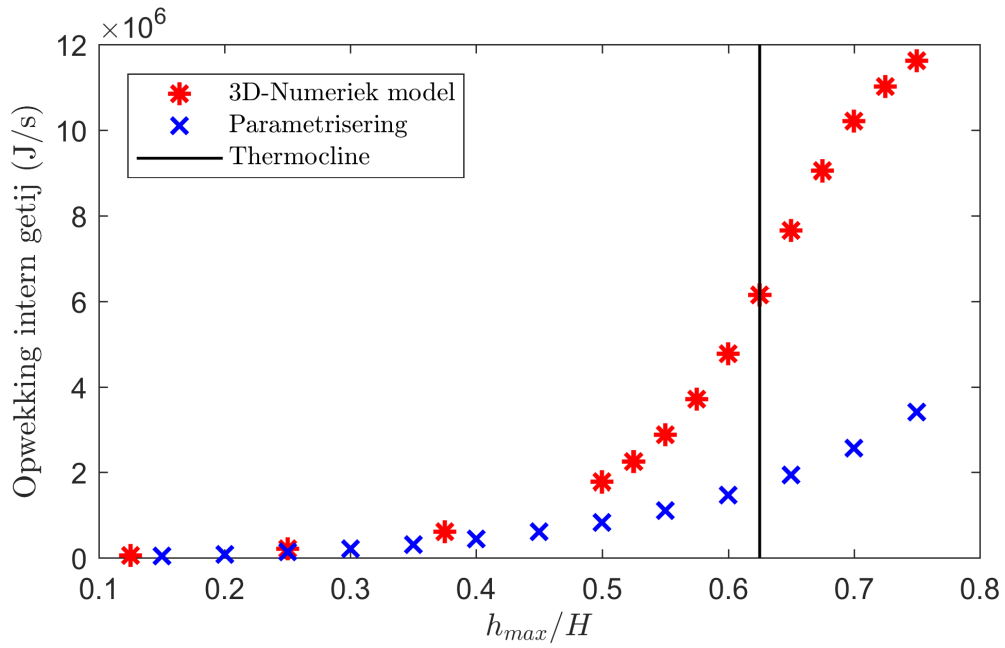
Het verschil in verloop dat in figuur 26 te zien is, geeft aan de de parametrisering niet perfect werkt, maar de vraag is of dat het enige probleem is. Voor een realistisch getijmodel moet ook een realistische stratificatie gebruikt worden. In het 3D numerieke model is gevonden dat de conversie daar hard omhoog schiet wanneer de topografie ongeveer even hoog is als de thermocline, zoals in figuur 25 geïllustreerd.

De parametrisering probeert hiermee rekening te houden door de stratificatie N , die erin gebruikt wordt, op een handige manier te kiezen. De verticale snelheid van de stroming die over topografie gaat loopt lineair af richting het oppervlak. Dit is uiteindelijk wat voor de opwekking van intern getij zorgt. Daarom is de stratificatie N die gebruikt wordt, berekend als een gewogen dieptegemiddelde van de werkelijke stratificatie van de bodem tot het oceaanooppervlak met lineair aflopende gewichten naar boven. Dit gemiddelde wordt voor ieder gridcel met de diepte van die gridcel berekend. Dit gewogen dieptegemiddelde voor de gebruikte stratificatie is in figuur 28 getoond.



Figuur 28: Gewogen dieptegemiddelde van Brunt-Väisälä frequentie N uit figuur 24. Dit dieptegemiddelde wordt gebruikt in de parametrisering. Dieptegemiddelde wordt berekend van de diepte van de topografie tot het vrije oppervlak met lineair aflopende gewichten naar boven.

In figuur 29 is het resultaat te zien van de parametrisering van de opwekking van intern getij in het 2D model, vergeleken met het 3D model voor de stratificatie als in figuur 24. Hier is te zien dat de parametrisering de opwekking van intern getij slecht weet in te schatten bij topografieën met hoogtes die in de buurt van de thermocline komen. Waar bij een constante stratificatie de opwekking goed werd ingeschat, zit de parametrisering er hier een factor 5 naast.



Figuur 29: Opwekking intern getij berekend met de parametrisering in het 2D model waar N als gewogen dieptegemiddelde wordt gebruikt. Gebruikte topografie is de polynomiale richel met breedte $a = 10$ km. Ter vergelijking is de numeriek 3D berekende opwekking van intern getij weergegeven.

7 Wat niét werkte, ter leering ende vermaeck

Wetenschappelijk onderzoek is zelden tot nooit een lineair proces. Gedurende het onderzoek komt men telkens obstakels tegen, die dwingen een andere aanpak te kiezen. Ook komt men soms interessante fenomenen tegen die buiten de oorspronkelijke reikwijdte van het onderzoek vallen, maar niettemin erg interessant zijn. In dit onderzoek was dat niet anders. In dit hoofdstuk worden een aantal aspecten toegelicht die niet liepen zoals gepland en de waardevolle lessen zijn gebleken.

- De experimentele opzet zoals in hoofdstuk 4 besproken, waarin het barotrope getij over de topografie wordt opgewekt met een staande golf is conceptueel eenvoudig en erg effectief gebleken. Toch is dit niet de oorspronkelijke aanpak geweest zoals in sectie 7.1 wordt beschreven.
- Aan de hand van de energieberekeningen en de modellen zijn verschillende iteraties nodig geweest. De tijdsintegratie factor θ bleek erg belangrijk te zijn voor numerieke dissipatie, zoals in sectie 7.2 beschreven wordt.
- Het is erg belangrijk om rekening te houden met de staggering van het grid om de energiebalans sluitend te krijgen zoals beschreven in sectie 7.3.

7.1 Periodieke modelopzet

Om een barotrope harmonische stroom over de topografie op te wekken in een numeriek model zijn er veel manieren denkbaar. In het onderzoek van DiLorenzo [4] werd een periodiek model in de x-richting gebruikt. Wat aan de linkerkant uit de grid stroomde, stroomde er rechts weer in. De barotrope stroom werd opgewekt met een kracht die uniform in de ruimte werkte. Aangezien in dit onderzoek de analytische conversie uit het onderzoek van Pétrélis et al [13] werd teruggevonden, leek dit een goed startpunt.

In Delft3D-FM, een programma dat bedoeld is voor realistische simulaties aan de aarde, stuitte ik daarbij echter op twee problemen. Allereerst is zo'n uniforme kracht in de ruimte geen functie. De getij-opwekkende potentiaal is wel een functie. Daarnaast is de periodieke randvoorwaarde alleen mogelijk wanneer op schaal van de aarde wordt gekeken en het grid rond de aarde op zichzelf aansluit.

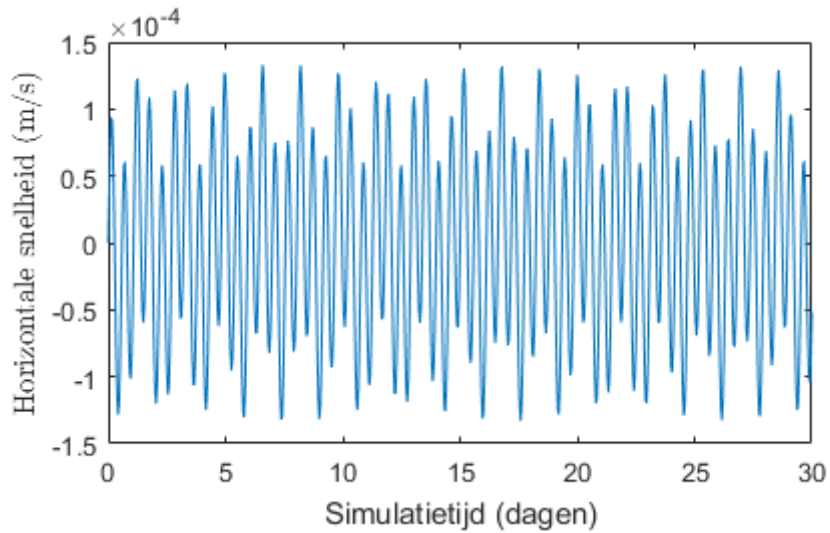
Daarom is in eerste instantie gekozen voor een grid dat in feite een lint van een paar kilometer breed was en rond de aarde liep, parallel aan de evenaar. De breedtegraad ervan kon gekozen worden zodat de gewenste Coriolis parameter gold in het grid. De barotrope stroom werd aangedreven door de getij-opwekkende potentiaal. Hiervan kunnen zoals gewenst componenten aan- en uitgezet worden. De belangrijkste component is het M_2 getij, het tweemaal daags getij opgewekt door samenspel van de maan en zon.

In figuur 30 zijn de resultaten weergegeven van dit periodieke model. Uit figuur 30a blijkt dat er geen harmonische beweging ontstaat zoals gewenst. De Fouriertransformatie ervan in figuur 30b laat zien dat er behalve de gewenste M_2 component nog een andere component de beweging verstoort met frequentie $\omega = 0.58/\text{dag}$. Deze component lijkt wanneer figuur 30a nauwkeurig bestudeerd wordt zeer langzaam uit te doven. De snelheid en waterstand in dit model laten zich goed beschrijven door vergelijking (28) en (29). Deze voorspellen dat indien op $t = 0$ de waterstand een bepaalde afwijking heeft, deze met een snelheid $v = \sqrt{gD}$ links- en rechtsom door het grid zal propageren, D'Alemberts principe. In het periodieke grid zal dit dus na een bepaalde tijd weer langs de oorspronkelijke positie komen. De omtrek van de aarde C_{model} die op breedtegraad θ moet worden afgelegd is

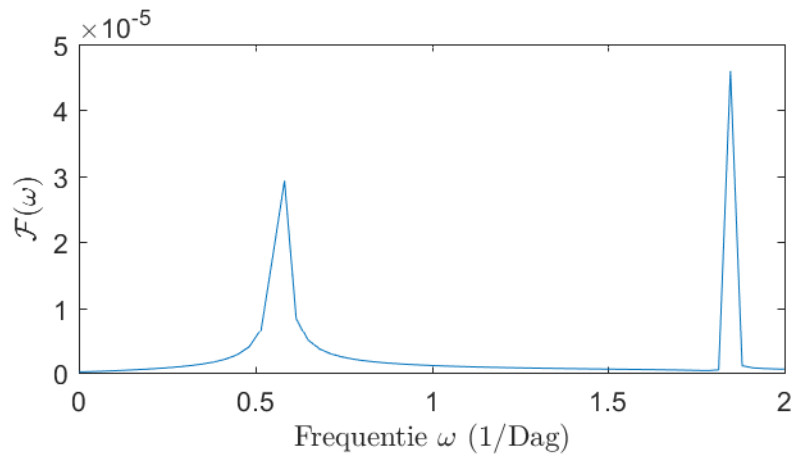
$$C_{model} = 2\pi \cos(\theta) R_{aarde} \quad (68)$$

De frequentie ω waarmee zo'n verstoring het grid rond propageert is:

$$\omega = \frac{v}{C_{model}} = 0.29 \quad [1/\text{Dag}] \quad (69)$$



(a)



(b)

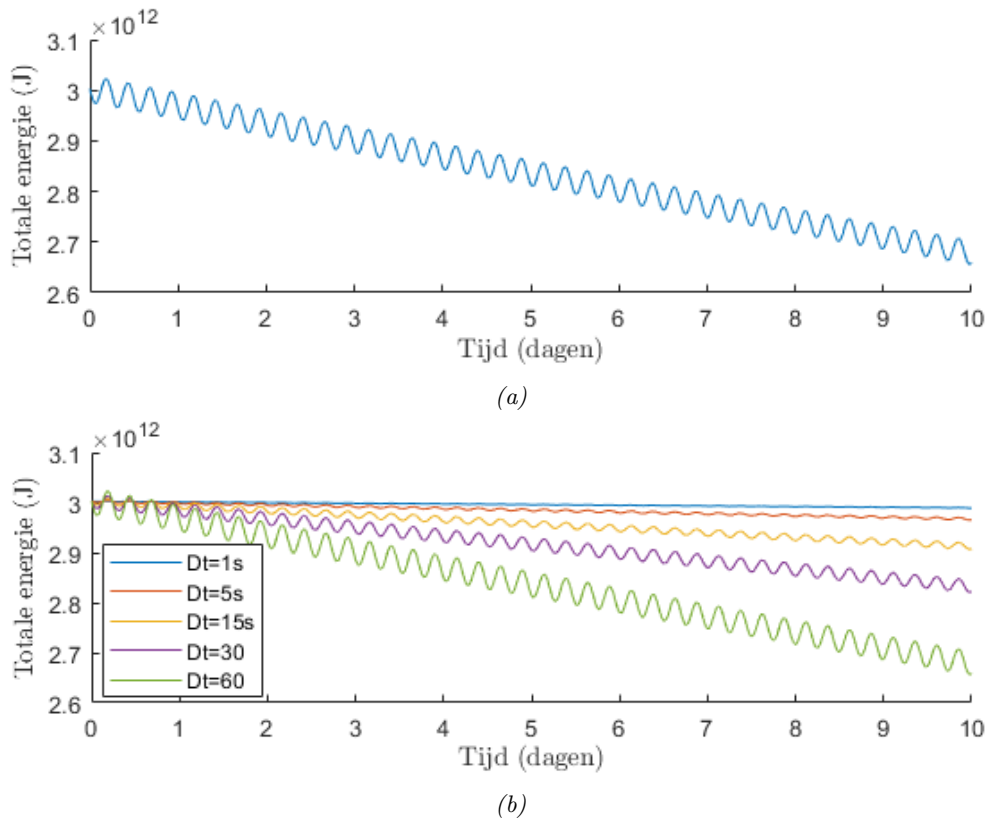
Figuur 30: Resultaten uit een run van 30 dagen met het periodieke model. Getij aandrijvende kracht van het M_2 getij werd gebruikt. Oceaandiepte is $D = 1000\text{m}$ en de breedtegraad 43.3° N.B. (a) Horizontale stroomsnelheid op 0-meridiaan. (b) Fourierspectrum van de horizontale snelheid. De piek rond $\omega = 1.93$ correspondeert met het M_2 getij. De piek rond $\omega = 0.58$ correspondeert met de afwijking tov het evenwicht op $t = 0$ die met snelheid \sqrt{gD} propageert.

Dit is precies de helft van de frequentie van de verstoring die gevonden is in het model. De verklaring ervoor is als volgt: op $t = 0$ van de simulatie is de evenwichtsstand van het water in balans met de getij opwekkende potentiaal. Dat houdt voor het M_2 getij in dat het nagenoeg twee harmonische golven rond de aarde zijn met twee pieken en twee dalen (2x eb en 2x vloed). Op $t = 0$ wordt echter de waterstand in rust geïnitieerd. Daarom is er een afwijking t.o.v. het evenwicht die er uit ziet als twee harmonische golflengtes rond de aarde. Deze gaan met snelheid v rond propageren. Wanneer op een punt wordt geobserveerd komen deze met frequentie $\omega = 0.29/\text{dag}$ langs zoals in vergelijking (69) aangetoond. Omdat de twee golflengtes niet te onderscheiden zijn, is de waargenomen frequentie twee keer zo groot, $\omega = 0.58/\text{dag}$, zoals in figuur 30b te zien is.

Meestal dissiperen opstartproblemen zoals hier snel. In de diepe oceaan is de dissipatie echter bijzonder laag. Na 30 dagen is het nog nauwelijks uitgedoofd. De barotrope stroom aandrijven met de getijpotentiaal was hierdoor niet mogelijk. Dit zou alleen lukken als de waterstand bij initialisatie precies in evenwicht was met de potentiaal, maar dit bleek niet nauwkeurig mogelijk te zijn.

7.2 θ -factor in tijdsintegratie

Bij het uitvoeren van de eerste energieberekeningen aan 2D runs van het staandegolfmodel werden oscillaties in de totale energie geobserveerd zoals te zien in figuur 31a. De totale energie zou wel af mogen nemen door de bodemwrijving die in deze run werkte, maar energie kan niet opeens weer 'ontstaan'. Het verfijnen van het grid maakte geen verschil. Onderzocht is of de oorzaak misschien bij een te grote tijdsstap lag. De resultaten zijn in figuur 31b te zien.



Figuur 31: (a) Totale energie in systeem, berekend met een tijdstap $Dt = 60$ s. (b) Totale energie in systeem, berekend voor verschillende tijdstappen met $\theta = 0.55$

Waar met een kleinere tijdstap de oscillaties inderdaad kleiner worden doet zich een nieuw groot probleem voor in figuur 31. Bij een tijdstap van 60s is de dissipatie in het systeem een factor 25 keer groter dan met tijdstap 1 s. Verder lijkt de dissipatie nauwelijks nog te convergeren naar een bepaalde waarde. Voor dit onderzoek, waar een correcte energiebalans cruciaal is, vormde dit een groot obstakel. De oplossing bleek te liggen in de numerieke tijdsintegratie. Voor de differentiaal vergelijking

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (70)$$

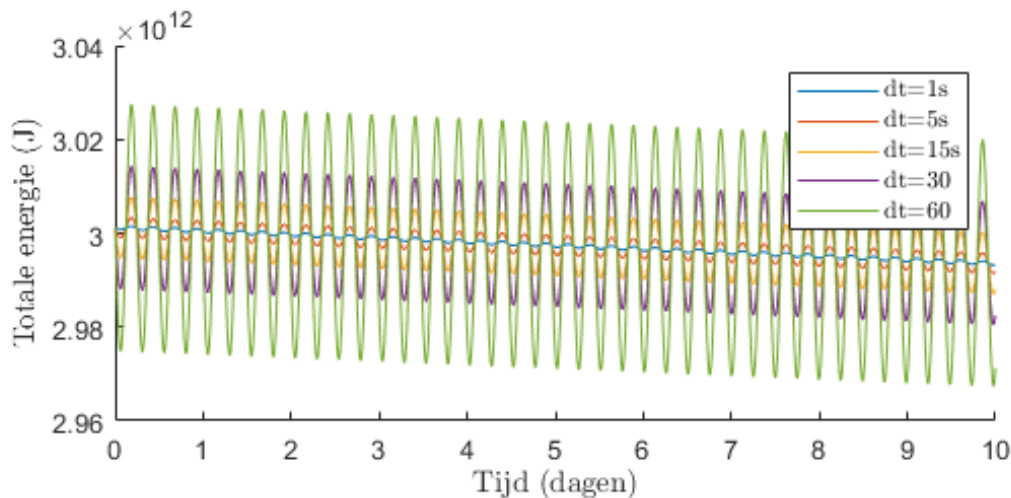
zijn verschillende numerieke oplossingen mogelijk. Delft3D-FM geeft de mogelijkheid een factor θ te specificeren die de methode bepaalt. Het numerieke schema werkt als volgt:

$$x(n+1) = x(n) + (1-\theta)dtf(x(n)) + \theta dtf(x(n+1)) \quad (71)$$

Hier is $x(n+1)$ de oplossing op de volgende tijdstap, $x(n)$ de oplossing op de huidige tijdstappen en dt de tijdstap zelf. Voor $\theta = 0$ is het de methode Euler voorwaarts, voor $\theta = 1$, de methode Euler achterwaarts. Voor $\theta = 0.5$ is het de trapezium methode. Met $\theta = 1$ is de methode superstabiel, maar $\theta = 0.5$ geeft een methode die tweede orde nauwkeurig is. De waarde die Delft3D-FM als default neemt is $\theta = 0.55$. Wanneer deze veranderd wordt naar $\theta = 0.5$ resulteert dit in figuur 32.

Hier is te zien dat met $\theta = 0.5$ de dissipatie van totale energie nu wel gelijk wordt geschat bij verschillende tijdstappen. De oscillaties blijven echter nog wel aanwezig. De oplossing van dat probleem wordt in sectie 7.3 toegelicht.

Om stabiliteit te garanderen kiest Delft3D-FM standaard voor een waarde van $\theta > 0.5$. Dit blijkt echter wel problematisch te zijn voor deze experimenten waar behoud van energie cruciaal is. Deze observatie ook van belang in andere modellen: bij het modelleren van tsunami's en stormvloed is het correct inschatten van dissipatie noodzakelijk, deze is immers direct gerelateerd aan het verwoestende effect van de stormvloed.

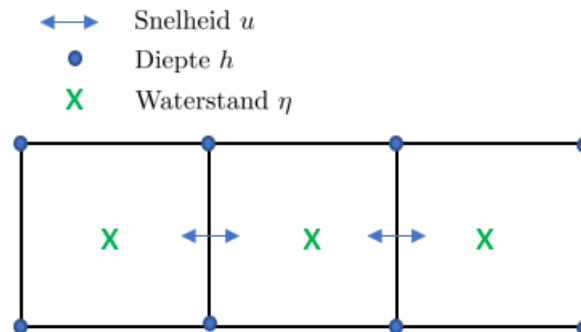


Figuur 32: Totale energie in systeem berekend met $\theta = 0.5$. Oscillaties in totale energie blijven aanwezig, maar dissipatie is voor alle tijdstappen Dt hetzelfde.

7.3 Energieberekeningen en grid staggering

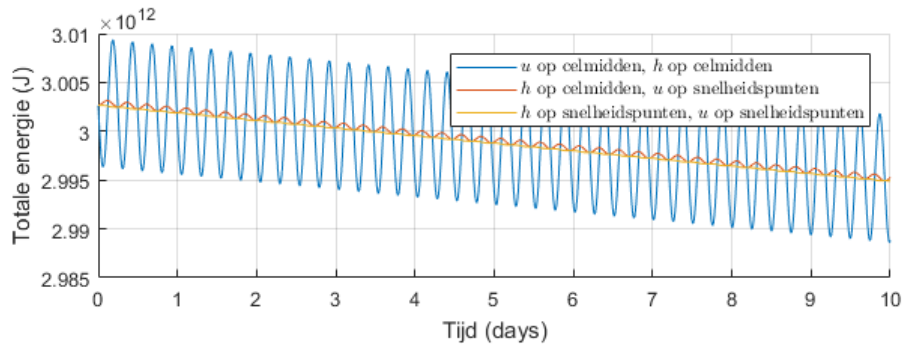
In figuur 32 is te zien dat, na berekening van de totale energie in het systeem, er oscillaties in zitten. Hier was het model nog in 2D, waarbij maar één verticale laag werd beschouwd. Deze oscillaties zijn niet fysisch te verklaren door dissipatie door bodemwrijving en eventuele numerieke dissipatie, hierdoor kan de totale energie alleen monotoon afnemen. Het probleem bleek te zitten in de berekening van de energiecomponenten. In sectie 5.2 is beschreven hoe kinetische en potentiële energie wordt berekend. Om de totale energie te berekenen moeten (39) en (40) over het hele model worden geïntegreerd. Deze integraal moet numeriek benaderd worden en de berekening moet zeer exact gedaan worden. Het totale energiebudget is in de orde van $3 \times 10^{12} J$. Zoals in figuur 15a te zien is en de theorie voorspelt, wisselt de totale energie constant tussen potentiële en kinetische energie. Wanneer in een van deze twee componenten de berekening net verkeerd is zullen oscillaties optreden zoals in figuur 32 te zien is.

De fout bleek te zitten in de numerieke benadering. Delft3D-FM maakt gebruik van een staggered of versprongen grid. Daarin worden de variabelen niet allemaal op dezelfde plaats, bijvoorbeeld het midden van de gridcellen berekend. In figuur 33 wordt dat nogmaals geïllustreerd. Dit heeft numeriek een aantal voordelen, maar een nadeel is dat het berekenen van bijvoorbeeld energieën gecompliceerder wordt. Dat geldt zeker wanneer een veel gecompliceerder grid met bijvoorbeeld driehoekige cellen wordt gebruikt.

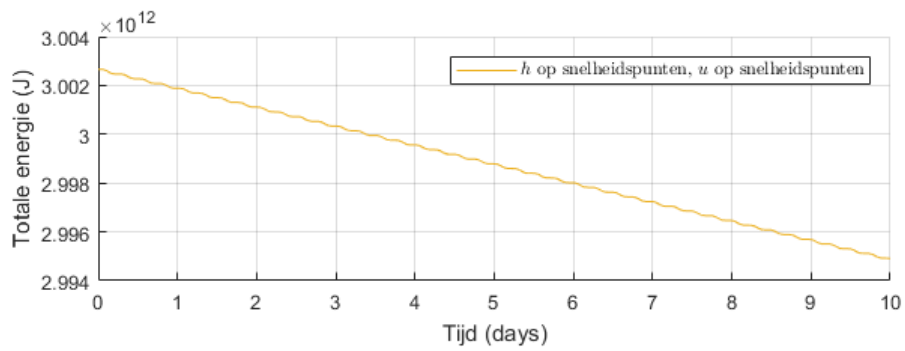


Figuur 33: Staggering van het grid in Delft3D-FM. Snelheden worden op de randen tussen gridcellen berekend en de waterstand op het gridcentrum.

Delft3D-FM geeft naast de snelheid u op de snelheidspunten ook de snelheid gemiddeld naar de waterstandspunten als output. Deze werden gebruikt bij de berekeningen van figuur 32. Om de kinetische energie uit vergelijking (40) in de diepte te integreren moet ook de juiste hoogte van de waterkolom inclusief de uitwijking van het vrije oppervlak gebruikt worden. In figuur 34 is het effect te zien van de aangepaste berekening. De oscillaties in totale energie zijn nu weg.



(a)



(b)

Figuur 34: (a) Invloed van staggering op berekening totale energie (b) Totale energie berekend op juiste punten. Oscillaties verdwijnen. Dissipatie door bodemwrijving is zichtbaar.

8 Conclusies en aanbevelingen

8.1 Conclusies

In een wereldwijd getijmodel, zoals Deltares heeft ontwikkeld, is het verlies van barotrope energie aan opwekking van intern getij van belang om mee te nemen. 25-30% van de barotrope energie in de diepe oceaan wordt op deze manier gedissipeerd. Expliciete 3D modellering is niet haalbaar op wereldschaal vanwege de verschillende verticale lagen en hoge gridresolutie die nodig zouden zijn. Daarom dient de opwekking van intern getij in een 2D model geparametriseerd te worden. In deze sectie worden de conclusies van dit onderzoek uiteengezet aan de hand van de twee hoofdvragen. Tot slot worden aanbevelingen voor verder onderzoek gedaan.

De eerste onderzoeksvraag was: *Kan met Delft3D-FM de opwekking van intern getij expliciet in 3D numeriek worden gesimuleerd en kan het barotrope energieverlies aan de opwekking van intern getij bepaald worden?*

- De opwekking van intern getij over een polynomiale richel kan numeriek worden gesimuleerd. De kwalitatieve eigenschappen van het intern getij kloppen met de theorie en literatuur.
- In de 3D experimenten kan een energiebalans worden opgesteld als som van barotrope en barocline energie. Het verlies van barotrope energie kan goed als maat gebruikt worden voor de energieconversie van barotrope energie naar de opwekking van intern getij. Voor lagere topografiehoogtes blijft energie behouden, voor hogere waardes treedt numerieke dissipatie op. Dit is waarschijnlijk het gevolg van beperkingen door de hydrostatische aanname in de bewegingsvergelijkingen.
- De gevonden barotrope energieverliezen aan de opwekking van intern getij komen overeen met de theorie en eerder numeriek onderzoek. De resultaten kunnen worden gebruikt om de parametrisering van het verlies in een 2D model te toetsen.
- In het subkritische regime, waarbij de helling α onder welke het intern getij in de oceaan propageert groter is dan de helling op de topografie, heeft het barotrope energieverlies aan de opwekking van intern getij een ingewikkeld verloop dat sterk afhankelijk is van de topografie en stratificatie. Dit zal lastig met een parametrisering te benaderen zijn. In het superkritische regime lijkt de conversie over de topografie voorspelbaarder en monotoon op te lopen.
- Met een realistische stratificatie is de energieconversie naar intern getij sterk afhankelijk van de hoogte van de thermocline in relatie tot de hoogte van de topografie. Omdat dit effect zo groot is, zal het noodzakelijk zijn dit goed in de parametrisering mee te nemen.
- In de resultaten van de energieberekeningen zitten oscillaties met de periode van de getijbeweging. Dit komt waarschijnlijk door problemen in de numerieke berekening van de energie in een gestaggered grid zoals ook in 2D berekeningen is gebleken. Omdat deze oscillaties over een periode uitmiddelen en veel kleiner zijn dan de energieverliezen aan intern getij vormen ze geen probleem voor het bepalen van deze energieverliezen.

De tweede onderzoeksvraag was: *Hoe goed benadert de huidige parametrisering het werkelijke barotrope energieverlies aan de opwekking van intern getij, dat expliciet in 3D is berekend?*

- De parametrisering kan zo gekalibreerd worden, dat een redelijk benadering van het barotrope energieverlies over een polynomiale topografie van 10 km breed gevonden wordt. Een relatieve deviatie van 22% is gevonden.
- De parametrisering geeft, wanneer gekalibreerd op de topografie van 10 km breed, geen goede benadering van de conversie bij een breedte van 30 km.
- Waar in het 3D model verschillen in de getijfrequentie ω leiden tot verschillen in de conversie van barotrope naar barocline energie, is de parametrisering daar nog niet gevoelig voor.

- Bij een realistische stratificatie geeft het gebruik van een gewogen dieptegemiddelde N nog geen goede inschatting van het energieverlies in vergelijking met het 3D model. Dit verschil is signifikanter dan het verschil in verloop van het verlies voor een breedte van 10km tussen de parametrisering en het 3D model.

8.2 Aanbevelingen voor verder onderzoek

Verder onderzoek op het gebied van de 3D numerieke simulaties is nodig:

- Het huidige model kan gebruikt worden om over een bredere verzameling van realistische symmetrische topografieën, stratificaties en dieptes het barotrope verlies aan de opwekking van intern getij te berekenen. Dit geeft een beter idee welke regimes voor de opwekking van intern getij te onderscheiden zijn, waartegen een parametrisering getest kan worden.
- De numerieke energieberekening in 3D kan verbeterd worden om de oscillaties te verhelpen.
- Verder onderzoek is ook nodig om beperkingen van de huidige experimentele modelopzet te verhelpen. Stromingen in x - én y -richtingen moeten worden meegenomen om de invloed van de Coriolis parameter te onderzoeken. Daarnaast kan een andere modelopzet gezocht worden waar ook asymmetrische topografieën zoals de randen van continentale platen kunnen worden gesimuleerd.
- Het is ook aan te bevelen de opwekking van intern getij in een niet-hydrostatisch model te onderzoeken. Met een minder vereenvoudigde set bewegingsvergelijkingen kunnen hogere topografieën beter gesimuleerd worden.

Naar de parametrisering van het barotrope energieverlies in een 2D model is ook verder onderzoek nodig.

- Het accuraat benaderen van het barotrope energieverlies in het geval van een realistische stratificatie lijkt het belangrijkste om te onderzoeken.
- De parametrisering zou ook over een breder regime van topografieën, stratificaties en dieptes moeten worden getest aan de hand van de numerieke resultaten.
- Verbeteringen van de parametrisering zijn nodig om de gevonden beperkingen op te lossen. De parametrisering hoeft niet een precieze benadering te geven van het verlies voor elke willekeurige topografie. Wel is het belangrijk om voor de meest voorkomende omstandigheden in de oceaan zo goed mogelijk te werken. Het subkritische regime is lastig te voorspellen gebleken en zal moeilijk te parametriseren zijn. In het superkritische regime lijkt de trend van de verliezen als functie van de totale topografiehoogte wel voorspelbaar. Een parametrisering die in dit regime goed werkt zal een belangrijke bijdrage zijn aan een optimaal wereldwijd getijmodel.

9 Dankwoord

Graag wil ik mijn begeleiders bedanken voor hun hulp bij dit project. Van Prof. dr. Martin Verlaan heb ik zijn enthousiasme en de mogelijkheid op korte termijn een afspraak te kunnen maken voor overleg zeer op prijs gesteld. De vele uren die we samen gezocht hebben naar oplossingen hebben mij enorm geholpen. Prof. dr. Rob Mudde was voor mij een prettige discussiepartner die mij uitdaagde zo eenvoudig mogelijk de essentie van het onderzoek scherp te formuleren en had goede tips voor mij als onderzoeker. Mijn dank is groot, dat hij ondanks zijn benoeming bij het College van Bestuur de begeleiding heeft voortgezet.

Daarnaast zijn er collega's bij Deltares van Prof. dr. Martin Verlaan die hebben geholpen bij problemen waar we op stuitten bij het opzetten van het model, waar voor het eerst intern getij expliciet gemodelleerd werd. In het bijzonder wil ik Herman Kernkamp en Sander van der Pijl daarvoor bedanken.

10 Bibliografie

Referenties

- [1] BELL, T. H. Topographically generated internal waves in the open ocean. *Journal of Geophysical Research* 80, 3 (1975), 320–327.
- [2] CARTER, G. S., MERRIFIELD, M. A., BECKER, J. M., KATSUMATA, K., GREGG, M. C., LUTHER, D. S., LEVINE, M. D., BOYD, T. J., AND FIRING, Y. L. Energetics of m2 barotropic-to-baroclinic tidal conversion at the hawaiian islands. *Journal of Physical Oceanography* 38, 10 (2008), 2205–2223.
- [3] DELTARES. *D-Flow Flexible Mesh, User Manual*. Deltares.
- [4] DI LORENZO, E., YOUNG, W. R., AND LLEWELLYN SMITH, S. Numerical and analytical estimates of m2 tidal conversion at steep oceanic ridges. *Journal of Physical Oceanography* 36, 6 (2006), 1072–1084.
- [5] EGBERT, G. D., AND RAY, R. D. Significant dissipation of tidal energy in the deep ocean inferred from satellite altimeter data. *Nature* 405 (2000), 775–778.
- [6] HENDERSCHOTT, M. Tides lectures, whoi-2005-08, July 2005.
- [7] HENDRY, R. M. Observations of the semidiurnal internal tide in the western north atlantic ocean. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 286, 1330 (1977), 1–24.
- [8] JAIN, S. Internal tides dissipation parametrization in dflow-fm, 2015.
- [9] JOHN MARSHALL, K. E., AND ADCROFT, A. 12.950 atmospheric and oceanic modeling, February 2004.
- [10] LLEWELLYN SMITH, S., G., S., AND YOUNG, W. R. Tidal conversion at a very steep ridge. *Journal of Fluid Mechanics* 495 (2003), 175–191.
- [11] P. FOFONOFF, N., AND MILLARD, R. Algorithms for computation of fundamental properties of seawater.
- [12] PEDLOSKY, J. *Waves in the Ocean and Atmosphere*. Springer, 2003.
- [13] PÉTRÉLIS, F., LLEWELLYN SMITH, S., AND YOUNG, W. R. Tidal conversion at a submarine ridge. *Journal of Physical Oceanography* 36, 6 (2006), 1053–1071.
- [14] WIKIPEDIA. Thermocline — Wikipedia, the free encyclopedia, 2018. [Online; accessed 4-June-2018].