Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Noties van eindigheid in de verzamelingenleer

(Engelse titel: Notions of finiteness in set theory)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

Arthur Groen

Delft, Nederland
Juli 2018

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

"Noties van eindigheid in de verzamelingenleer (Engelse titel: "Notions of finiteness in set theory)"

ARTHUR GROEN

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr. K. P. Hart

Overige commissieleden

Drs. E.M. van Elderen

Dr. J. A. M. de Groot

Juli, 2018

Delft

Voorwoord

Het verslag dat voor u ligt, is geschreven als deel van de bacheloropleiding technische wiskunde aan de TU Delft. Dit project is bij de afdeling Analyse aan de TU Delft onder begeleiding van K.P. Hart gedaan. Het project is voor mij een eerste echte duik in de wiskundige verzamelingenleer.

Het boek The Axiom of Choice van Thomas J. Jech is een grote inspiratie en basis geweest voor dit verlsag. Een lezer die dit onderwerp interessant vindt en er meer over wil weten zou er zeker goed aan doen dit boek te lezen. Dit boek vereist een zekere wiskundige volwassenheid van de lezer, maar is zeker aan te raden.

Bij deze wil ik graag mijn begeleider K.P. Hart hartelijk bedanken voor het begeleiden van dit project en het aanleveren van dit onderwerp. Ook wil ik graag J.A.M. de Groot en E.M. van Elderen bedanken voor het deel uitmaken van de beoordelingscommisie van dit project.

Abstract

In dit verslag worden drie noties van eindigheid van een verzameling gedefinieerd. Een verzameling is eindig wanneer er een bijectie bestaat tussen de verzameling en een natuurlijk getal. Uiteraard worden eerst de natuurlijke getallen gedefinieerd. Een verzameling is surjectie-eindig als iedere surjectieve functie met als domein en codomein deze verzameling ook injectief is. Een verzameling is Dedekind-eindig als iedere injectieve functie met als domein en codomein deze verzameling ook surjectief is. Er wordt bewezen dat deze drie noties in ZFC equivalent zijn. Ook wordt bewezen dat in ZF iedere eindige verzameling surjectie-eindig is, en iedere surjectie-eindige verzameling Dedekind-eindig is. Ten slotte wordt aangetoond dat de uitspraken 'iedere Dedekind-eindige verzameling is surjectie-eindig' en 'iedere surjectie-eindige verzameling is eindig', niet te bewijzen zijn in ZFA. De conclusie is dat de hiërarchie eindig impliceert surjectie-eindig impliceert Dedekind-eindig strikt is.

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Eindigheid is een begrip dat iedere wiskundige regelmatig tegenkomt. Ook een niet-wiskundige zal af en toe het begrip eindig (of oneindig) tegenkomen. Maar wat betekent eindigheid eigenlijk precies in de wiskunde? Door de geschiedenis heen hebben verschillende wiskundigen verschillende antwoorden gegeven op deze vraag. Een van de meest natuurlijke definities is om te zeggen dat een verzameling X eindig is, wanneer er een bijectie bestaat met een verzameling $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ voor een natuurlijk getal n. Er zijn echter een aantal punten in deze definitie waar een wiskundige over kan struikelen. Allereerst moeten we hiervoor definiëren wat dan precies een natuurlijk getal is, dit kan op verschillende manieren. Een ander potentieel probleem is de vraag of dit getal n, wat we zouden willen zien als het aantal elementen van X, wel uniek is.

Eén van de eerste definities van oneindigheid komt van Richard Dedekind, die een verzameling oneindig noemde wanneer deze verzameling een deelverzameling heeft die even groot is als de verzameling zelf. Een verzameling is dan eindig wanneer er niet zo'n deelverzameling bestaat. In dit verslag zullen we drie definities van eindigheid, waaronder de twee eerdergenoemde, netjes wiskundig definiëren. Vervolgens zullen we kijken hoe deze definities zich tot elkaar overhouden met het keuzeaxioma. Ten slotte zullen we kijken of dezelfde relaties ook gelden wanneer we het keuzeaxioma niet willen aannemen.

Een ander idee van eindigheid duikt op in de lineaire algebra. Iedere lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is inverteerbaar (bijectief) dan en slechts dan als T injectief of surjectief is. Dit berust erop dat een lineaire afbeelding bepaalt wordt door wat de afbeelding met de basiselementen doet. Aangezien de basis van $\mathbb{R}^n$ eindig is, zou iedere injectieve afbeelding van de basis naar zichzelf wel surjectief moeten zijn. Andersom zou iedere surjectieve afbeelding wel injectief moeten zijn. Deze twee eigenschappen die door wiskundige vaak gebruikt worden zonder daarbij verder veel na te denken, geven ook aanleiding tot mogelijke definities voor eindigheid. In secties 3, respectievelijk 4 worden deze definities van eindigheid geïntroduceerd.

2 Natuurlijke getallen

De oplettende lezer heeft wellicht opgemerkt dat de definitie van eindigheid zoals eerder gegeven gebruikt maakt van natuurlijke getallen. Echter er is nergens gedefinieerd wat een natuurlijk getal is. In deze sectie zullen we de natuurlijke getallen definiëren en een aantal eigenschappen van eindigheid bewijzen.

Om de natuurlijke getallen te definiëren zullen we eerst de ordinaalgetallen definiëren. Hiertoe eerst de definitie van een welordening. Zij A een verzameling en R een relatie op A.

Definitie 2.1. R is een *welordening* op A als de volgende uitspraken gelden:

(i) Voor iedere $x \in A$ geldt $x \not R x$.

(ii) Zij $x, y, z \in A$. Als $x \, R \, y$ en $y \, R \, z$ dan $x \, R \, z$.

(iii) Iedere niet lege deelverzameling $B \subseteq A$ bevat een R-kleinste element. Dat will zeggen er bestaat een $x \in B$ zodanig dat voor iedere $y \in B$ geldt $x \, R \, y$ of $x = y$.

Ten slotte nog één definitie voordat de ordinaalgetallen gedefinieerd kunnen worden.

Definitie 2.2. Zij x een verzameling. Als voor iedere $y \in x$ geldt dat $y \subseteq x$, noemen we x *transitief.*

Hiermee definiëren we de ordinaalgetallen als volgt.

Definitie 2.3. Zij x een verzameling, x is een *ordinaalgetal* als x transitief is en welgeordend wordt door $\in$.

Voor de ordinaalgetallen schrijven we $x < y$ en $x \leq y$ voor $x \in y$ en $x \in y$ of $x = y$ respectievelijk. De natuurlijke getallen kunnen nu worden gedefinieerd als een deelverzameling van ordinaalgetallen.

Definitie 2.4. Een ordinaalgetal x is een *natuurlijk getal* als voor iedere $y \leq x$ geldt dat $y = \emptyset$ of er een $z < y$ bestaat zodanig dat $y = z \cup \{z\}$.

Een aantal voorbeelden van natuurlijke getallen zijn $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, en $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. We korten deze verzamelingen af met 0, 1, 2 etc. Op deze manier geldt dat $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. De definitie van $n+1$ wordt nu $n \cup \{n\}$, de opvolger van n. Door deze definitie kan ook $n + m$ recursief worden gedefinieerd voor natuurlijke getallen n en m.

We zullen ω gebruiken om de verzameling der natuurlijke getallen aan te duiden. De transiviteit van ω is vrij simpel in te zien. Immers ieder element van ω is een natuurlijk getal, en ieder natuurlijk getal is een verzameling natuurlijke getallen. Dus ieder element van ω is een deelverzameling van ω. Het volgende lemma geeft een handige (en waarschijnlijk bekende) eigenschap van ω, ook volgt uit dit lemma dat ω welgeordend wordt door $\in$ en dus zelf een ordinaalgetal is.

Lemma 2.5. *Iedere niet-lege deelverzameling van ω heeft een kleinste element.*

Bewijs. Zij A een niet-lege deelverzameling van ω. Neem $n \in A$ willekeurig. Er zijn twee opties. Optie 1 is dat $n \cap A = \emptyset$. Dan geldt $n = \min(A)$ immers ieder natuurlijk getal kleiner dan n is een element van n. Optie 2 is dat $n \cap A \neq \emptyset$. Als er een $\min(n \cap A)$ bestaat moet deze gelijk zijn aan $\min(A)$. Immers alle elementen van A die kleiner zijn dan n, zijn een element van $n \cap A$. We kunnen nu langs alle elementen van n gaan, om het minimum te vinden:
Als $0 \in A$ dan $0 = \min(A)$.
Anders als $1 \in A$ dan $1 = \min(A)$
$\vdots$
Anders als $n - 1 \in A$ dan $n - 1 = \min(A)$.
Een van deze uitspraken moet waar zijn immers $n \cap A \neq \emptyset$, dus A heeft een minimum. $\square$

Nu de natuurlijke getallen gedefinieerd zijn, kan eindigheid netjes gedefinieerd worden.

Definitie 2.6. Een verzameling X is *eindig* als er een natuurlijk getal n en een bijectie $f : X \to n$ bestaan.

Het getal n uit definitie 2.6 kan worden gezien als het aantal elementen van X. Dat dit getal uniek is, staat in de volgende propositie. Het bewijs van deze propositie gebruikt een stelling uit sectie 3; echter deze propositie zal nergens in het bewijs van deze stelling gebruikt worden.

Propositie 2.7. *Zij X een eindige verzameling. Dan is er een uniek natuurlijk getal n dat voldoet aan de eis in definitie 2.6.*

Bewijs. Om de popositie te bewijzen volstaat het om aan te tonen dat tussen twee verschillende natuurlijke getallen geen bijectie bestaat. Immers als er meerdere natuurlijke getallen bestaan waartussen een bijectie bestaat met een eindige verzameling, dan moet er een bijectie bestaan tussen deze natuurlijke getallen.

Zij $m, n \in \omega$ zodat er een bijectie $f : n \to m$ bestaat. Stel $m \neq n$, neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $m < n$. Wegens de transitiviteit van n en $m \in n$ volgt dat $m \subsetneq n$. Dus de verzameling $n \setminus m$ is niet leeg. Beschouw de functie $f|_m : m \to m$. Deze functie is injectief, maar niet surjectief. Immers er is een $x \in n \setminus m$ en $f(x) \notin \operatorname{Im} f|_m$. Echter er kan geen injectieve niet-surjectieve functie van een eindige verzameling naar zichzelf bestaat, zie stelling 3.4 Dit is een tegenspraak en dus volgt dat $m = n$. Dus als er een bijectie bestaat tussen twee natuurlijke getallen, zijn deze natuurlijke getallen gelijk. $\square$

De volgende eigenschappen van eindige verzamelingen zullen later nodig zijn.

Propositie 2.8. *De volgende eigenschappen gelden voor eindige verzamelingen:*

(i) Iedere deelverzameling van een eindige verzameling is eindig.

(ii) De vereniging van twee eindige verzameling is eindig.

Bewijs. (i) We bewijzen eerst met behulp van inductie dat iedere deelverzameling van een natuurlijk getal eindig is. Het is duidelijk dat iedere deelverzameling van 0 eindig is, immers de enige deelverzameling van 0 is de lege verzameling. Stel nu dat voor een natuurlijk getal n iedere deelverzameling van n eindig is. Neem $x \subseteq n+1$. Als $n \notin x$, dan geldt $x \subseteq n$ en dus is x eindig. Anderzijds als $n \in x$ dan geldt nog wel dat $x \setminus \{n\} \subseteq n$ en dus is deze verzameling eindig. Zij $m \in \omega$ en $f : x \setminus \{n\} \to m$ bijectief. We kunnen de functie $\tilde{f} : x \to m+1$ definiëren door:

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} m, & \text{als } y = n \\ f(y), & \text{anders} \end{cases}$$

Dit is een bijectie tussen x en $m+1$ en dus is x eindig. Met inductie volgt dat voor ieder natuurlijk getal n iedere deelverzameling van n eindig is. Zij X een eindige verzameling en Y een deelverzameling van X. Laat $n \in \omega$ zodat er een bijectie $f : X \to n$ bestaat en laat f zo'n bijectie zijn. Dan is Y bijectief met $f[Y] \subseteq n$ en dus is Y eindig. Er volgt dat iedere deelverzameling van een eindige verzameling eindig is.

(ii) Laat X en Y eindige verzamelingen zijn. Dan is de verzameling $Y \setminus X$ ook een eindige verzameling (zie punt (i)). Laat m en n natuurlijke getallen zijn en $f_1 : X \to m$ en $f_2 : Y \setminus X \to n$ bijecties. We definieren de $f : X \cup Y \to m+n$ als:

$$f(a) = \begin{cases} f_1(a), & \text{als } a \in X \\ f_2(a) + m, & \text{anders} \end{cases}$$

Deze functie is surjectief, immers voor iedere $k \in m+n$ geldt $k < m$ of $k \geq m$. Als $k < m$ geldt dat $f(f_1^{-1}(k)) = k$. Als geldt dat $k \geq m$ geldt dat $f(f_2^{-1}(k-m)) = k$, merk op dat $k - m \in n$ wegens $k < m+n$ en dus $k - m < n$.

Ook is f injectief. Immers als $x, y \in X \cup Y$ met $f(x) = f(y)$, moet gelden dat $x, y \in X$ of $x, y \notin X$. Immers als $x \in X$ en $y \notin X$ volgt dat $f(x) < m$ en $f(y) \geq m$, dus $f(x) \neq f(y)$. Als $x \notin X$ en $y \in X$ volgt dat $f(x) \geq m$ en $f(y) < m$, dus $f(x) \neq f(y)$.
Als geldt dat $x, y \in X$ dan volgt met $f(x) = f(y)$ dat $f_1(x) = f_1(y)$. Dus met injectiviteit van f_1 volgt $x = y$.
Anderzijds als $x, y \notin X$ dan volgt met $f(x) = f(y)$ dat $f_2(x) = f_2(y)$. En dan met de injectiviteit van f_2 volgt dat $x = y$. Er volgt dat f een bijectie is tussen $X \cup Y$ en $m+n$ en dus is $X \cup Y$ eindig. $\square$

Ten slotte zullen we nog de definitie van aftelbaar oneindig nodig hebben.

Definitie 2.9. Een verzameling X is *aftelbaar oneindig* als er een bijectie $f : \omega \to X$ bestaat.

3 Dedekind-eindigheid

De Elementen is een verzameling van boeken geschreven door de Oud-Griekse wiskundige Euclides. Deze boeken hebben een enorme invloed gehad op de wiskunde en zijn tot in de twintigste eeuw gebruikt in wiskundig onderwijs. In het eerste boek schreef hij onder andere vijf postulaten en vijf algemeenheden. Eén van deze algemeenheden is erg interessant voor ons. Hij schreef dat het deel altijd kleiner is dan het geheel. Dit klinkt erg logisch, en in de meetkunde zoals Euclides deze beoefende is het een logische aanname. Wanneer je een lijnstuk hebt, is een deel van dit lijnstuk altijd korter dan het gehele lijnstuk.

Echter Galileo Galilei stuitte op een probleem. Eerst merkte hij op dat sommige positieve getallen kwadraten zijn en andere niet. Dus de kwadraten zijn een echt deel van de positieve getallen. Echter ieder positief getal heeft precies één kwadraat en ieder kwadraat heeft precies één positieve wortel. En dus zijn er evenveel positieve getallen als kwadraten. Galileo's conclusie was dat 'minder', 'meer' en 'evenveel' geen betekenis hebben als het om oneindigheid gaat.

Tegenwoordig is het geen probleem om 'evenveel' te definiëren voor oneindige verzamelingen. We doen dit door twee verzameling even groot te noemen als er een bijectie tussen de verzamelingen bestaat. Dit kan tot gevolg hebben dat een verzameling even groot is als een echte deelverzameling, zoals in het voorbeeld van Galileo. In zijn boek *Was sind und was sollen die Zahlen?* uit 188 definieerde Dedekind oneindigheid op een manier die gebruik maakt van deze eigenschap van oneindige verzamelingen.

Definitie 3.1. Een verzameling X is *Dedekind-oneindig* als er een echte deelverzameling Y van X bestaat zodanig dat X en Y bijectief zijn.

In dit verslag is vooral de volgende definitie van Dedekind-eindigheid handig.

Definitie 3.2. Een verzameling X is *Dedekind-eindig* als iedere injectieve functie $f : X \to X$ surjectief is.

De definities van Dedekind-eindig en Dedekind-oneindig zoals hier gegeven zijn elkaars complement. Dus als een verzameling niet Dedekind-eindig is, is de verzameling Dedekind-oneindig. Anderzijds als een verzameling niet Dedekind-oneindig is, is deze Dedekind-eindig.

Het volgende lemma uit *The Axiom of Choice* [2, p. 25] zal extra inzicht geven waarom Dedekind-oneindigheid een redelijke kandidaat is voor de definitie van eindigheid.

Lemma 3.3. *Een verzameling X is Dedekind-oneindig dan en slechts dan als X een aftelbaar oneindige deelverzameling heeft.*

Bewijs. Stel dat er een injectieve functie $f : \omega \to X$ bestaat. Dan heeft X een aftelbaar oneindige deelverzameling $f[\omega]$, we zullen f beschouwen als bijectie tussen ω en $f[\omega]$. Definieer de functie $g : \omega \to \omega$ door $g(n) = n+1$. Beschouw nu de functie $h = (f \circ g \circ f^{-1}) : f[\omega] \to f[\omega]$. Aangezien g injectief is en f bijectief volgt dat h ook injectief is. Uit het feit dat g niet surjectief is en f een bijectie is volgt dat h niet surjectief is. Immers $f(0) \notin \operatorname{Im} h$. We kunnen nu de functie h uitbreiden tot de functie $\tilde{h} : X \to X$ door:

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x), & \text{als } x \in f[\omega] \\ x, & \text{anders} \end{cases}.$$

Nu is $\tilde{h} : X \to X$ een injectieve functie. Echter h is niet surjectief, want $f(0) \notin \operatorname{Im} h$. Er volgt dus dat X Dedekind-oneindig is.

Stel dat X een Dedekind-oneindige verzameling is. Laat $f : X \to X$ een injectieve, niet surjectieve functie zijn. Laat $a \in X$ met $a \notin \operatorname{Im} f$. Dan is de verzameling $Y = \{f^{(n)}(a) : n \in \omega\}$ aftelbaar oneindig en een deelverzameling van X. Immers de functie $g : \omega \to Y$ gedefinieerd als $g(n) = f^{(n)}(a)$ is duidelijk surjectief, het resteert aan te tonen dat f injectief is. Zij $m, n \in \omega$ zodanig dat $g(m) = g(n)$, we nemen zonder verlies van algemeenheid aan dat $n \leq m$. Er geldt dat $f^{(m)}(a) = f^{(n)}(a)$, wegens de injectiviteit van f geldt dan dat $f^{(m-1)}(a) = f^{(n-1)}(a)$. Inductief volgt er dat $f^{(m-n)}(a) = a$. Echter a is zo gekozen dat $a \notin \operatorname{Im} f$, er moet dus wel gelden dat $m - n = 0$, dus $m = n$. Er volgt dat wanneer geldt dat $g(m) = g(n)$, er moet gelden dat $m = n$. De verzameling Y is dus aftelbaar oneindig.

$\square$

Hopelijk zal de lezer het ermee eens zijn dat dit resultaat op zijn minst de schijn wekt dat Dedekind-oneindigheid en oneindigheid equivalent zijn. Immers iedere verzameling met een aftelbaar oneindige deelverzameling moet wel oneindig zijn. Daarnaast kost het de meesten waarschijnlijk niet veel moeite om zich ervan te overtuigen dat iedere oneindige verzameling een aftelbaar oneindige deelverzameling heeft. Dit laatste blijkt niet zo simpel te zijn als het lijkt en behoeft het keuzeaxioma. Het eerste is direct te bewijzen met inductie.

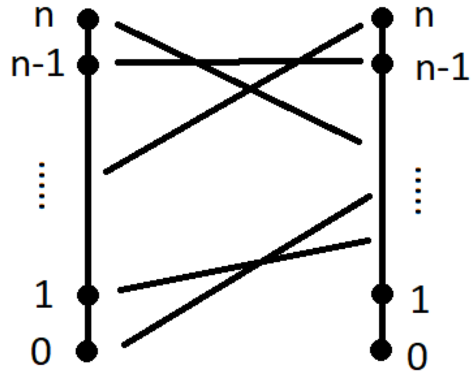
Stelling 3.4. *Iedere eindige verzameling is Dedekind-eindig.*

Bewijs. Het volstaat te bewijzen dat ieder natuurlijk getal Dedekind-eindig is. Er bestaat immers voor iedere eindige verzameling een bijectie met een natuurlijk getal. Dus als er een injectieve en niet surjectieve functie bestaat van een eindige verzameling naar zichzelf, bestaat er een injectieve en niet surjectieve functie van een natuurlijk getal naar zichzelf.

We zullen de stelling bewijzen met behulp van inductie. 0 is Dedekind-eindig. Immers $0 = \emptyset$ en er is slechts één functie van de lege verzameling naar zichzelf, de lege functie. De lege functie is een bijectie. Stel nu dat $n \in \omega$ Dedekind-eindig is, we bewijzen dat $n + 1$ Dedekind-eindig is. Laat $f : n + 1 \to n + 1$ een injectie zijn. Stel dat $n \notin \operatorname{Im} f$. We bekijken dan $f|_n : n \to n$, dit is een injectieve functie van n naar zichzelf en dus surjectief. Echter er geldt $f(n) \in n$, maar dit is in tegenspraak met de injectiviteit van f, omdat er dan een $k \in n$ bestaat met $f(k) = f(n)$. Er moet dus zeker gelden dat $n \in \operatorname{Im} f$. Figuur 1 geeft een visualisatie van f. We kunnen nu een nieuwe functie definiëren, die n naar zichzelf stuurt en het element dat naar n wordt gestuurd naar $f(n)$ stuurt. Dit kan formeel worden geschreven als: definieer de functie $\tilde{f} : n + 1 \to n + 1$ als

$$\tilde{f}(m) = \begin{cases} n, & \text{als } m = n \\ f(n), & \text{als } f(m) = n \\ f(m), & \text{anders} \end{cases}$$

De injectiviteit van f blijft behouden in $\tilde{f}$. Immers stel dat $\tilde{f}(k) = \tilde{f}(l)$.
Als $\tilde{f}(k) = \tilde{f}(l) = n$, volgt dat $k = n$ en $l = n$, dus $k = l$.
Anders als $\tilde{f}(k) = \tilde{f}(l) = f(n)$, dan volgt dat $f(k) = n$ en $f(l) = n$. Dus met de injectiviteit van f volgt dat $k = l$.
Ten slotte als $\tilde{f}(k) = \tilde{f}(l) \neq n$ en $\tilde{f}(k) = \tilde{f}(l) \neq f(n)$, dan geldt $\tilde{f}(k) = f(k)$ en $\tilde{f}(l) = f(l)$. Dus geldt $f(k) = f(l)$ en met de injectiviteit van f geldt dan ook $k = l$.



Figuur 1: Een visualisatie van f.

De functie $\tilde{f}$ is dus injectief. Er volgt dat $\tilde{f}|_n : n \to n$ een injectieve functie is van n naar zichzelf. Dus $\tilde{f}|_n$ is surjectief met de Dedekind-eindigheid van n. Hieruit volgt dat $\tilde{f}$ surjectief is, immers $\tilde{f}(n) = n$. Maar dan is f ook surjectief, immers $\tilde{f}$ wisselt slechts twee functiewaarden van f om, de surjectiviteit blijft dan bewaard. Er volgt dat $n+1$ Dedekind-eindig is wanneer n Dedekind eindig is. Nu volgt met inductie dat iedere $n \in \omega$ Dedekind-eindig is. $\square$

Om de omgekeerde implicatie te bewijzen zullen we gebruik maken van het keuzeaxioma, dat het niet mogelijk is om dit te bewijzen met de alleen ZF, en dus het keuzeaxioma (of een zwakker extra axioma) echt nodig is, zal in sectie 6 worden aangetoond.

Stelling 3.5. *Als het keuzeaxioma geldt, volgt dat iedere oneindige verzameling Dedekind-oneindig is.*

Bewijs. Laat X een oneindige verzameling zijn en f een keuzefunctie op $\mathscr{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$. Definieer nu recursief een functie $g : \omega \to S$:

$$\begin{aligned} g(0) &= f(S), \\ g(n+1) &= f(S \setminus \{g(0), g(1), \ldots, g(n)\}), \quad \text{voor alle } n \in \omega. \end{aligned}$$

Merk op dat de verzameling $S \setminus \{f(0), f(1), \ldots, f(n)\}$ voor geen enkele $n \in \omega$ leeg is, aangezien S dan eindig zou zijn.

Het resteert nu aan te tonen dat g injectief is, dan volgt namelijk dat $g(\omega)$ een aftelbaar oneindige deelverzameling is van S. Dan volgt met lemma 3.3 dat S Dedekind-oneindig is. Zij $n, m \in \omega$ met $n \neq m$, neem zonder verlies van algemeenheid aan dat $n < m$. Er geldt dat $g(m) \in S \setminus \{g(0), g(1), \ldots, g(m-1)\}$, echter $g(n) \in \{g(0), g(1), \ldots, g(m-1)\}$, dus $g(n) \neq g(m)$. Er volgt dat g injectief is en daarmee is X Dedekind-oneindig. $\square$

4 Surjectie-eindigheid

We zullen in deze sectie nog een andere definitie van eindigheid bekijken. Deze definitie maakt weer gebruik van functies van een verzameling naar zichzelf die dan wel niet injectief of surjectief zijn, echter op de omgekeerde manier dat Dedekind dat deed:

Definitie 4.1. Een verzameling X is *surjectie-eindig* als iedere surjectieve functie $f : X \to X$ injectief is.

Eerst zullen we het volgende bewijzen:

Stelling 4.2. *Iedere eindige verzameling is surjectie-eindig.*

Bewijs. Aangezien iedere eindige verzameling bijectief is met een natuurlijk getal, is het voldoende aan te tonen dat ieder natuurlijk getal surjectie-eindig is. We zullen dit doen met inductie. Het is duidelijk dat 0 surjectie-eindig is, er is immers slechts één functie van 0 naar zichzelf en dit is een bijectie. Stel nu dat $n \in \omega$ surjectie eindig is.
Zij $f : n+1 \to n+1$ een surjectieve functie. We definiëren de aangepaste functie $\tilde{f} : n+1 \to n+1$ als:

$$\tilde{f}(m) = \begin{cases} n, & \text{als } m = n \\ f(n), & \text{als } f(m) = n \\ f(m), & \text{anders} \end{cases}$$

Eerst tonen we aan dat de surjectiviteit van f behouden blijft in $\tilde{f}$. Neem $m \in n+1$ willekeurig.

Stel dat $m = n$, dan geldt $\tilde{f}(n) = n$ en dus $n \in \operatorname{Im} \tilde{f}$.
Stel anders dat $m = f(n)$. Met de surjectiviteit van f volgt dat er een $k \in n+1$ bestaat met $f(k) = n$. Er volgt dat $\tilde{f}(k) = f(n)$, dus $f(n) \in \operatorname{Im} \tilde{f}$.
Stel ten slotte dat $m \neq n$ en $m \neq f(n)$. Neem nu $k \in n+1$ zodanig dat $f(k) = m$. Dan geldt $k \neq n$, immers $m \neq f(n)$. Ook geldt $f(k) \neq n$, immers $m \neq n$. Er volgt dat $\tilde{f}(k) = f(k) = m$, dus $m \in \operatorname{Im} \tilde{f}$. Dus volgt dat $\tilde{f}$ surjectief is.

Nu is de functie $\tilde{f}|_n$ een surjectieve functie van n naar zichzelf en dus injectief. Het volgt dat $\tilde{f}$ injectief is en daaruit volgt direct dat f ook injectief is.

Er volgt dat iedere surjectieve functie van $n+1$ naar zichzelf injectief is, dus is $n+1$ surjectie-eindig. Nu volgt met inductie dat ieder natuurlijk getal surjectie-eindig is. □

Het is ook weer waar dat met het keuzeaxioma bewezen kan worden dat iedere surjectie-eindige verzameling eindig is.

Stelling 4.3. *Als het keuzeaxioma geldt, volgt dat iedere oneindige verzameling surjectie-oneindig is.*

Bewijs. Zij X een oneindige verzameling. Met stelling 3.5 en het keuzeaxioma volgt dat X Dedekind-oneindig is. Nu geldt met lemma 3.3 dat er een aftelbaar oneindige deelverzameling $A \subseteq X$ bestaat. Schrijf $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, \}$ en definieer de functie $f : A \to A$ door:

$$f(a_n) = \begin{cases} a_0, & \text{als } n = 0 \\ a_{n-1}, & \text{als } n > 0 \end{cases}$$

Het is duidelijk dat f surjectief is, maar niet injectief. Definieer nu de uitbreiding $g : X \to X$

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{als } x \in A \\ x, & \text{anders} \end{cases}$$

Dus er bestaat een surjectieve functie $g : X \to X$ die niet injectief is. Dus X is surjectie-oneindig. □

Nu is het aangetoond dat als het keuzeaxioma wordt aangenomen, zowel Dedekind-eindigheid en surjectie-eindigheid equivalent zijn. Hiermee geldt dus dat onder het keuzeaxioma het volgende geldt.

Stelling 4.4. *Zij X een verzameling, als het keuzeaxioma geldt zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(i) X is eindig.

(ii) X is surjectie-eindig.

(iii) X is Dedekind-eindig.

De volgende stelling legt de relatie tussen surjectie-eindigheid en Dedekind-eindigheid vast als het keuzeaxioma niet wordt aangenomen.

Stelling 4.5. *Zij X een verzameling, de volgende uitspraken staan op volgorde van sterk naar zwak (d.w.z. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii)):*

(i) X is eindig.

(ii) X is surjectie-eindig.

(iii) X is Dedekind-eindig.

Bewijs. De implicatie $(i) \Rightarrow (ii)$ is stelling 4.2.
Stel dat X Dedekind-oneindig is. Dan bestaat er een aftelbaar oneindige $A \subseteq X$, schrijf $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots, \}$. Definieer de functie $f : A \to A$ door:

$$f(a_n) = \begin{cases} a_0, & \text{als } n = 0 \\ a_{n-1}, & \text{als } n > 0 \end{cases}.$$

Definieer nu de uitbreiding $g : X \to X$ door:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{als } x \in A \\ x, & \text{anders} \end{cases}.$$

Het is duidelijk dat g surjectief, maar niet injectief. Dus X is surjectie-oneindig, dit bewijst de contrapositie van $(ii) \Rightarrow (iii)$. □

5 Modellen & Permutatiemodellen

Het doel is nu om aan te tonen dat in ZF eindigheid, Dedekind-eindigheid en surjectie-eindigheid niet equivalent zijn. Aangezien het keueaxioma consistent is met ZF (dat wil zeggen het tegendeel van het keuzeaxioma is niet te bewijzen) en met het keuzeaxioma de equivalenties te bewijzen zijn (zie stelling 4.4), kunnen we niet simpelweg de negatie van de equivalenties bewijzen. We zullen gebruik maken van logische modellen. Deze sectie geeft een korte uitleg over wat een model is en specifiek wat een permutatiemodel is. In *Introduction to Mathematical Logic* [3, p. 54-59] is meer te vinden over modellen en interpretaties, in *The Axiom of Choice* [2, p. 45-47] is meer te vinden over permutatiemodellen.

5.1 Logische Modellen

Verzamelingenleer is geschreven in een eerste-orde logica taal. Zo'n taal wordt door Mendelson als volgt gedefinieerd.

Definitie 5.1. Een *eerste-orde taal* $\mathscr{L}$ bestaat uit de volgende symbolen:

(i) De logische symbolen $\forall, \neg, \Rightarrow$,

(ii) De linker en rechter haakjes (en) en de komma ,,

(iii) Aftelbaar veel variabelen $x_1, x_2, x_3, \ldots$,

(iv) Aftelbaar (mogelijk eindig) veel functieletters,

(v) Atelbaar (mogelijk eindig) veel constanten,

(vi) Een niet lege verzameling predicaten.

In het geval van verzamelingenleer hebben we geen functieletters, de constante $\emptyset$ en de predicaten $\in$ en $=$.

Een interpretatie M van $\mathscr{L}$ bestaat uit een domein D en een betekenis voor de functieletters, constanten en predicaten van $\mathscr{L}$. Ten slotte kunnen we nu definiëren wat een model is.

Definitie 5.2. Een *model* M van een verzameling uitspraken Γ in de taal $\mathscr{L}$ is een interpretatie van $\mathscr{L}$ zodanig dat alle uitspraken in Γ waar zijn.

Een model voor ZF bestaat dus uit een domein, bestaande uit alle dingen die we verzamelingen noemen, en een betekenis voor het predicaat $\in$. We zullen ons voor dit verslag beperken tot modellen waarbij $\in$ gewoon "is een element van" betekent.

5.2 Permutatiemodellen

Om het niveau passend te houden zullen we niet kijken naar modellen van ZF, maar van ZF met atomen, ookwel ZFA genoemd. ZFA is bijna gelijk aan ZF, echter er bestaat een verzameling A

bestaande uit atomen. Dit zijn dingen die geen elementen hebben, maar niet de lege verzameling zijn. Door gebruik te maken van permutaties van A kunnen we modellen voor ZFA maken, deze modellen heten permutatiemodellen. Deze permutatiemodellen zijn voor het eerst gebruikt door Fraenkel [1] en later verfijnt door Mostowski [4] en Specker [5]. De definitie zoals deze hier zal worden gegeven komt direct uit *The Axiom of Choice* [2, p. 45-47].

We zullen nu het universum definiëren, alle verzamelingen die we toestaan. We beginnen met A, de verzameling der atomen. Vervolgens staan we ook deelverzamelingen van A toe, dus elementen uit $\mathscr{P}^1(A) = \mathscr{P}(A) \cup A$. We willen ook verzamelingen van deelverzamelingen van A toestaan, dus verzamelingen uit $\mathscr{P}^2(A) = \mathscr{P}(\mathscr{P}^1(A)) \cup \mathscr{P}^1(A)$. Van deze $\mathscr{P}^2(A)$ willen we ook weer deelverzamelingen toestaan, en zo willen we verder voor ieder natuurlijk getal. Voor ieder natuurlijk getal n staan we dus de verzamelingen uit $\mathscr{P}^n(A)$ toe, waar $\mathscr{P}^0(A) = A$ en $\mathscr{P}^n(A) = \mathscr{P}(\mathscr{P}^{n-1}(A)) \cup \mathscr{P}^{n-1}(A)$ voor iedere $n > 0$.

Als we dit alleen voor de natuurlijke getallen definiëren is het nog niet voldoende. We kunnen bijvoorbeeld geen n vinden zodat ω bevat is in $\mathscr{P}^n(A)$. We veralgemeniseren eerst de definitie van $\mathscr{P}^\alpha(A)$. We houden $\mathscr{P}^0(A)$ en definiëren voor ieder ordinaalgetal α $\mathscr{P}^{\alpha+1}(A)$ als:

$$\mathscr{P}^{\alpha+1} = \mathscr{P}(\mathscr{P}^\alpha(A)) \cup \mathscr{P}^\alpha(A).$$

Dit geeft ons nog niet een definitie van $\mathscr{P}^\alpha(A)$ voor ieder ordinaalgetal. ω is een voorbeeld van een limietordinaal. Een limietordinaal is een ordinaalgetal dat niet een opvolger is van een ander ordinaalgetal. Voor de limietordinalen definiëren we:

$$\mathscr{P}^\alpha(A) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathscr{P}^\beta(A).$$

Ten slotte definiëren we dan het universum $V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ON}} \mathscr{P}^\alpha(A)$, waar ON de klasse der ordinaalgetallen is.

Nu kunnen we echt beginnen met het definiëren van permutatiemodellen. Permutatiemodellen berusten erop dat er geen onderscheid wordt gemaakt voor individuele atomen in ZFA. We gaan permutaties op de atomen gebruiken om een model te maken. Laat π een permutatie op A zijn. We willen nu π uitbreiden tot een functie op het universum V.

Stel dat we een deelverzameling van A hebben. Als π willen toepassen op deze verzameling, is het logish om simpelweg π toe te passen op alle atomen in deze deelverzameling en deze in een nieuwe verzameling te stoppen. Omdat we V op een soort gelaagde manier als vereniging van $\mathscr{P}^\alpha(A)$'s hebben geschreven, kunnen we steeds $\pi(x)$ voor een verzameling definiëren door π toe te passen op alle elementen van x voor iedere verzameling $x \in V$. Door recursie komen we uiteindelijk op $\pi(B)$ voor een deelverzameling $B \subseteq A$. En $\pi(B)$ is dan simpelweg de verzameling bestaande uit alle functiewaarden van de atomen in B (dus als B leeg is, is $\pi(B)$ dat ook). Iets formeler definiëren we $\pi(x) = \{\pi(y) | y \in x\}$ voor iedere $x \in V$.

Zij $\mathscr{G}$ een groep permutaties van A.

Definitie 5.3. Een verzameling $\mathscr{F}$ van deelgroepen van $\mathscr{G}$ is een *normaal filter* op $\mathscr{G}$ als voor alle deelgroepen B, C van $\mathscr{G}$ geldt:

(i) $\mathscr{G} \in \mathscr{F}$,

(ii) als $B \in \mathscr{F}$ en $B \subseteq C$ dan $C \in \mathscr{F}$,

(iii) als $B, C \in \mathscr{F}$ dan $B \cap C \in \mathscr{F}$,

(iv) als $\pi \in \mathscr{G}$ en $B \in \mathscr{F}$ dan $\pi B \pi^{-1} \in \mathscr{F}$,

(v) voor iedere $a \in A$ geldt $\{\pi \in \mathscr{G} | \pi a = a\} \in \mathscr{F}$.

Als de eerste drie eigenschappen van de bovenstaande definitie gelden, is $\mathscr{F}$ een filter op $\mathscr{G}$. Je kunt intuïtief over een filter nadenken als een collectie verzamelingen die 'groot genoeg' zijn.

Voor een verzameling x definiëren we de symmetriegroep:

$$\mathrm{sym}(x) = \{\pi \in \mathscr{G} | \pi x = x\}.$$

Een verzameling x noemen we symmetrisch als $\mathrm{sym}(x) \in \mathscr{F}$. Ten slotte kunnen we het permutatiemodel definiëren:

$$\mathscr{V} = \{x | x \text{ is symmetrisch en } x \subseteq \mathscr{V}\}.$$

We definiëren ook $\mathrm{fix}(x) = \{\pi \in \mathscr{G} : \pi y = y \text{ voor iedere } y \in x\}$. Merk op dat de verzamelingen $\mathrm{sym}(x)$ en $\mathrm{fix}(x)$ afhankelijk zijn van $\mathscr{G}$ en niet noodzakelijk gelijk zijn!

In de permutatiemodellen die we in dit verslag zullen zien, wordt altijd gebruik gemaakt van een bepaald type normaal filter. We zullen eerst een normaal ideaal definiëren.

Definitie 5.4. Een collectie I bestaande uit deelverzamelingen van A heet een *normaal ideaal* als voor alle deelverzamelingen E, F van A geldt:

(i) $\emptyset \in I$,

(ii) als $E \in I$ en $F \subseteq E$ dan $F \in I$,

(iii) als $E \in I$ en $F \in I$ dan $E \cup F \in I$,

(iv) als $\pi \in \mathscr{G}$ en $E \in I$ dan $\pi(E) \in I$.

(v) voor iedere $a \in A$ geldt $\{a\} \in I$.

Bij zo'n normaal ideaal definiëren we de bijbehorende filter $\mathscr{F} = \{F : \text{er is een eindige } E \in I \text{ met } \mathrm{fix}(E) \subseteq F\}$. Om aan te tonen dat $\mathscr{F}$ een filter is, volstaat het te bewijzen dat de doorsnede van twee elementen uit $\mathscr{F}$ een element uit $\mathscr{F}$ is. Neem $B, C \in \mathscr{F}$. Dan bestaan er $E, F \in I$ zodanig dat $\mathrm{fix}(E) \subseteq B$ en $\mathrm{fix}(F) \subseteq C$. Nu geldt er $\mathrm{fix}(E \cup F) \subseteq \mathrm{fix}(E) \cap \mathrm{fix}(F)$. Immers voor iedere $\pi \in \mathrm{fix}(E \cup F)$ en $e \in E \cup F$ geldt $\pi(e) = e$. Dan geldt dus $\pi(e) = e$ voor iedere $e \in E$ en $\pi(e) = e$ voor iedere $e \in F$. Dat wil zeggen $\pi \in \mathrm{fix}(E)$ en $\pi \in \mathrm{fix}(F)$, dus $\pi \in \mathrm{fix}(E) \cap \mathrm{fix}(F)$. Hieruit volgt

$$\mathrm{fix}(E \cup F) \subseteq \mathrm{fix}(E) \cap \mathrm{fix}(F) \subseteq B \cap C.$$

Omdat $E \cup F \in I$ volgt dus dat $B \cap C \in \mathscr{F}$. Het volgt dat $\mathscr{F}$ een filter is.

Om aan te tonen dat $\mathscr{F}$ een normaal filter is, volstaat het om eigenschappen $(iv), (v)$ te bewijzen van definitie 5.3.

Lemma 5.5. *Zij I een normaal ideaal van A. Het filter behorend bij I is een normaal filter.*

Bewijs. Zij $\pi \in \mathscr{G}$ en $B \in \mathscr{F}$. Dan bestaat er een $E \in I$ zodang dat $\mathrm{fix}(E) \subseteq B$. Er geldt $\pi(E) \in I$, merk op dat $\mathrm{fix}(\pi(E)) = \pi\,\mathrm{fix}(E)\pi^{-1}$. Immers als $\rho \in \mathrm{fix}(E)$, geldt voor iedere $e \in E$ dat $\pi\rho\pi^{-1}(\pi e) = \pi e$, dus $\pi\,\mathrm{fix}(E)\pi^{-1} \subseteq \mathrm{fix}(\pi E)$. En wanneer $\rho \in \mathrm{fix}(\pi E)$ geldt voor iedere $e \in E$ dat $\pi^{-1}\rho\pi(e) = e$. Dus $\pi^{-1}\rho\pi \in \mathrm{fix}(E)$ en daarmee $\rho \in \pi\,\mathrm{fix}(E)\pi^{-1}$ en dus $\mathrm{fix}(\pi E) \subseteq \pi\,\mathrm{fix}(E)\pi^{-1}$. Er volgt nu dat

$$\mathrm{fix}(\pi E) = \pi\,\mathrm{fix}(E)\pi^{-1} \subseteq \pi B\pi^{-1}.$$

Dus volgt dat $\pi B\pi^{-1} \in \mathscr{F}$.

Voor iedere $a \in A$ geldt dat $\{a\} \in I$ dus geldt dat $\mathrm{fix}(\{a\}) = \{\pi \in \mathscr{G} | \pi a = a\} \in \mathscr{F}$. □

Voor de permutatiemodellen in dit verslag zullen we een normaal ideaal van A definiëren, daarbij krijgen we dan vanzelf het normale filter $\mathscr{F}$ gegenereerd door I.

6 Eindigheid zonder het Keuzeaxioma

In deze sectie zullen twee permutatiemodellen worden behandeld om de relaties tussen de ingevoerde noties van de eindigheid te bepalen. Deze beide modellen zijn voor het eerst geformuleerd door Fraenkel, ze zijn ook te vinden in *The Axiom of Choice* [2, p. 48-49].

6.1 Het eerste model van Fraenkel

Laat de verzameling A der atomen aftelbaar oneindig zijn. Laat $\mathscr{G}$ de groep van alle permutaties van A zijn en I de collectie eindige deelverzamelingen van A.

Lemma 6.1. *I is een normaal ideaal van A.*

Bewijs. Voor dit bewijs zullen we simpelweg de punten van definitie 5.4 nagaan. Laat E en F deelverzamelingen zijn van A.

(i) Het is duidelijk dat $\emptyset \in I$.

(ii) Zij $E \in I$ en $F \subseteq E$. Uit $E \in I$ volgt dat E eindig is, dus volgt met $F \subseteq E$ en propositie 2.8 (i) dat F eindig is. Dus $F \in I$.

(iii) Zijn $E, F \in I$. Dan zijn E en F eindig, dus ook $E \cup F$ eindig met propositie 2.8 (ii). Er volgt dat $E \cup F \in I$.

(iv) Zij $\pi \in \mathscr{G}$ en $E \in I$. Dan is E eindig. Aangezien $\pi(E)$ bijectief is met E volgt dat $\pi(E)$ ook eindig is. Dus geldt $\pi(E) \in I$.

(v) Zij $a \in A$. Er geldt $\{a\} \subseteq A$ eindig.

□

Laat $\mathscr{F}$ het normale filter behorend bij I zijn en laat $\mathscr{V}$ het bijbehorende permutatiemodel zijn. Het is duidelijk dat A oneindig is. Immers als A eindig zou zijn in het permutatiemodel, moeten er een natuurlijk getal n en een bijectie $f : A \to n$ bestaan in $\mathscr{V}$. Echter dan bestaat deze functie ook in V, en dus is A in V eindig. Maar dan is A ook Dedekind-eindig. Echter met lemma 3.3 volgt dan dat A geen aftelbaar oneindige deelverzameling heeft. Dit is een tegenspraak omdat A een deelverzameling van A is en A aftelbaar oneindig is.

We zullen bewijzen dat A wel surjectie-eindig is. Voordat we dat doen, zullen we eerst kort herinneren hoe functies gedefinieerd zijn en kijken hoe een permutatie werkt op een functie. Herinner allereerst dat een functie simpelweg een verzameling geordende paren $(e, f(e))$ is. Als $\pi \in \mathrm{sym}(f)$, dan moet gelden dat $\pi f = f$. Dus voor ieder paar $(e, f(e)) \in f$ geldt ook $\pi(e, f(e)) = (\pi(e), \pi(f(e))) \in f$. Dus $f(\pi(e)) = \pi(f(e))$. Merk op dat wanneer $\pi(e) = e$, er moet gelden dat $\pi(f(e)) = f(e)$.

Propositie 6.2. *De verzameling A is surjectie-eindig.*

Bewijs. Zij $f : A \to A$ een surjectieve functie. Dan bestaat er een eindige verzameling $E \subseteq A$ zodanig dat $\text{fix}(E) \subseteq \text{sym}(f)$. Voor iedere $\pi \in \text{fix}(E)$ en $e \in E$ geldt $\pi(e, f(e)) = (e, \pi(f(e)))$, dus $f(e) = \pi(f(e))$. Immers $(e, f(e)) \in f$ en $(e, \pi(f(e)) \in f$. Stel $f(e) \notin E$. Dan bestaat er een $\pi \in \text{fix}(E)$ met $\pi(f(e)) \neq f(e)$, dit is een tegenspraak met het voorgaande dus geldt $f(e) \in E$ voor iedere $e \in E$. Met andere woorden $f[E] \subseteq E$.

Zij nu $b \in A \setminus E$, er bestaat dan een $a \in A$ zodanig dat $f(a) = b$, f is immers surjectief. Er geldt echter dat $a \in A \setminus E$, immers als $a \in E$ dan $b = f(a) \in E$, een tegenspraak.

Als $f(a) \neq a$ kunnen we een $\pi \in \text{fix}(E)$ vinden met $\pi(a) = a$ en $\pi(f(a)) \neq f(a)$. Dan $\pi(a, f(a)) = (a, \pi(f(a)))$, dus $\pi \notin \text{sym}(f)$, immers $f(a) \neq \pi(f(a))$, dus f en πf zijn niet dezelfde functie. Maar dan $\text{fix}(E) \not\subseteq \text{sym}(f)$, echter we hadden E precies zo gekozen dat $\text{fix}(E) \subseteq \text{sym}(f)$, dus $f(a) = a$. Echter dan volgt $f(b) = f(f(a)) = f(a) = b$. Dus $f|_{A \setminus E} = \text{id}_{A \setminus E}$.

Omdat $f : A \to A$ surjectief is, volgt dat voor iedere $e \in E$ er een $d \in A$ bestaat met $f(d) = e$. Er moet gelden dat $d \in E$, immers als $d \in A \setminus E$ geldt $e = f(d) = d \notin E$, een tegenspraak. Dus $f|_E : E \to E$ is surjectief en E is eindig. Dan volgt met stelling 4.2 dat $f|_E$ injectief is. Ook geldt dat $f_{A \setminus E}$ bijectief is. Hieruit volgt dat f injectief is. Dus iedere surjectie van A naar zichzelf is injectief, dus A is surjectie-eindig. $\square$

Er bestaat dus een model van ZFA waarin er een oneindige verzameling bestaat die surjectie-eindig is. Het is dus niet mogelijk om te bewijzen dat iedere oneindige verzameling surjectie-oneindig is. Omdat dit wel te bewijzen is met behulp van het keuzeaxioma, volgt dat het tegendeel ook niet te bewijzen is. Dit vatten we samen in de volgende stelling.

Stelling 6.3. *De volgende uitspraak is noch te bewijzen, noch te weerleggen in ZFA:*

- $(\forall x)(x$ *is oneindig* $\Rightarrow x$ *is surjectie-oneindig*$)$.

6.2 Het tweede model van Fraenkel

Nu blijft nog over om aan te tonen dat het niet te bewijzen is dat iedere Dedekind-eindige verzameling surjectie-eindig is. Hiervoor zullen we nog een permutatiemodel gebruiken, ook dit permutatiemodel is eerst bedacht door Fraenkel. Het doel is om in dit permutatiemodel een verzameling te maken die surjectie-oneindig, maar Dedekind-eindig is. We doen dit door een collectie paren te maken waar geen keuzefunctie op bestaat.

We beginnen met oneindig veel disjuncte paren atomen

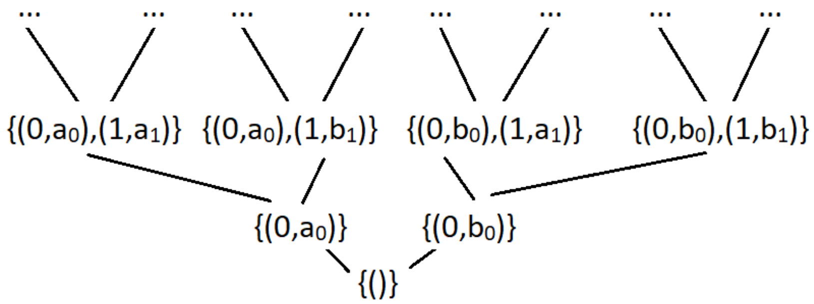
$$P_n = \{a_n, b_n\} \text{ voor } n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

De verzameling A der atomen is dan:

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n.$$

Laat $\mathscr{G}$ de groep permutaties op A zijn zó dat $\pi(\{a_n, b_n\}) = \{a_n, b_n\}$ voor iedere $n \in \omega, \pi \in \mathscr{G}$. Laat I de collectie eindige deelverzamelingen van A zijn. Het bewijs dat dit een normaal ideaal is, is precies analoog aan het bewijs bij het eerste model van Fraenkel. Laat $\mathscr{F}$ het normaal filter gegenereerd door I zijn en $\mathscr{V}$ het bijbehorende permutatiemodel.

Beschouw de verzamelingen $T_n = \{f : f \text{ is een functie, } \operatorname{dom} f = n, \forall k \in \operatorname{dom} f \ f(k) \in \{a_k, b_k\}\}$ voor iedere $n \in \omega$. We defininiëren de verzameling $T = \bigcup_{n\in\omega} T_n$.



Figuur 2: T gevisualiseerd als een boom.

Het is duidelijk dat T een oneindige verzameling is, we zullen aantonen dat T ook surjectie-oneindig is.

Stelling 6.4. *De verzameling T is surjectie-oneindig.*

Bewijs. Definieer de functie $g : T \to T$ door

$$g(f) = \begin{cases} f|_n, & \text{als } f \in T_{n+1} \text{ voor een } n \in \omega, \\ f|_0, & \text{anders.} \end{cases}$$

Als we T beschouwen als een soort boom zoals in figuur 2, dan stuurt de functie g iedere functie in T naar de functie een stap lager in de boom. Het onderste punt in de boom blijft gelijk onder g. Het is duidelijk dat g surjectief, maar niet injectief is. Nu resteert het te bewijzen dat g een valide functie is in het permutatiemodel $\mathscr{V}$. Dat wil zeggen, we moeten bewijzen dat $\operatorname{sym}(g) \in \mathscr{F}$.

Zij $\pi \in \mathscr{G}$ willekeurig. We bewijzen dat $\pi(g) = g$. Neem $(s,t) \in g$ willekeurig. We nemen zonder verlies van algemeenheid aan dat s niet het onderste punt van boom is, deze blijft onder π triviaal gelijk. Laat $n \in \omega$ zodanig dat $\operatorname{dom} s = n+1$ en $\operatorname{dom} t = n$. Definieer $u \in T_{n+1}$ door $u(i) = \pi^{-1}(s(i))$. Er geldt $\pi(u) = s$. Definieer ook de functie $v \in T_n$ door $v(i) = \pi^{-1}(s(i)) = \pi^{-1}(t(i))$. Er geldt $\pi(v) = t$. Er geldt dat $(s,t) = \pi(u,v) \in \pi(g)$, dus $g \subseteq \pi(g)$.

Neem nu een willekeurig element uit $\pi(g)$. We kunnen dit schrijven als $(\pi(s), \pi(t))$ voor een paar $(s,t) \in g$. Zij $n \in \omega$ zodanig dat $\operatorname{dom} s = n+1$ en $\operatorname{dom} t = n$. Definieer de functie u met $\operatorname{dom} n+1$ en $u(i) = \pi(s(i))$. Definieer ook een functie v met $\operatorname{dom} v = n$ en $v(i) = \pi(s(i)) = \pi(t(i))$. Het is duidelijk dat $(u,v) \in g$. Er geldt dus $(\pi(s), \pi(t)) = (u,v) \in g$. Er volgt $\pi(g) \subseteq g$.
Dan geldt er dus $g = \pi(g)$ en daarmee is g een functie in het permutatiemodel. Dus T is surjectie-oneindig. $\square$

Om aan te tonen dat T Dedekind-eindig is, zullen we eerst het volgende lemma bewijzen.

Lemma 6.5. *In het permutatiemodel $\mathscr{V}$ is er geen keuzefunctie op de collectie $\{P_n : n \in \omega\}$.*

Bewijs. Stel dat f een keuzefunctie is op de collectie $\{P_n : n \in \omega\}$. Dat wil zeggen $f : \omega \to A$ met $f(n) \in \{a_n, b_n\}$ voor alle $n \in \omega$. Dan bestaat er een eindige verzameling $E \subseteq A$ met $\text{fix}(E) \subseteq \text{sym}(f)$. Er bestaat een $n \in \omega$ zodanig dat $\{a_n, b_n\} \cap E = \emptyset$. E is immers een eindige deelverzameling van A. Kies zo'n n. Dan is er een $\pi \in \text{fix}(E)$ met $\pi(a_n) = b_n$ (en dus $\pi(b_n) = a_n$). Echter dan geldt $\pi(f(\{a_n, b_n\})) \neq f(\{a_n, b_n\})$ terwijl $\pi(\{a_n, b_n\}) = \{a_n, b_n\}$. Dus $\pi \notin \text{sym}(f)$, maar dit is in tegenspraak met $\text{fix}(E) \subseteq \text{sym}(f)$ en $\pi \in \text{fix}(E)$. □

Stelling 6.6. *De verzameling T is Dedekind-eindig.*

Bewijs. Stel dat T Dedekind-oneindig is, uit lemma 3.3 volgt dat er dan een injectieve functie $f : \omega \to T$ bestaat. We zullen deze functie gebruiken om een keuzefunctie op de collectie $\{P_n : n \in \omega\}$ te maken en zo een tegenspraak af te leiden. Voor iedere $n \in \omega$ is er ten minste één i zodat $n \in \text{dom}\, f(i)$. Er zijn immers slechts 2^n functies in iedere T_n. De functies in T met $\text{dom}\, f \leq n$ zijn de functies in $\bigcup_{i=0}^{n} T_n$. Dit is wederom een eindige verzameling door herhaaldelijk (eindig vaak) lemma 2.8(*ii*) toe te passen. De verzameling $\{i \in \omega : n \in \text{dom}\, f(i)\}$ heeft dus minimaal één element, anders heeft de eindige verzameling $\bigcup_{i=0}^{n} T_n$ een oneindige deelverzameling. Iedere niet-lege deelverzameling van ω heeft een kleinste element wegens lemma 2.5. We kunnen dus op een unieke manier het kleinste getal $i_n \in \omega$ nemen zodat $n \in \text{dom}\, f(i_n)$. Hiermee definiëren we de functie $f : \omega \to A$ als $f(i_n)(n)$. Dit induceert een keuzefunctie op de collectie $\{P_n : n \in \omega\}$, dit is echter in tegenspraak met lemma 6.5. Er volgt dat T Dedekind-eindig is.

□

Er is dus een model van ZFA met een Dedekind-eindige verzameling die zowel surjectie-oneindig als oneindig is. Het is dus niet te bewijzen in ZFA dat iedere oneindige verzameling Dedekind-oneindig is, ook is het niet te bewijzen dat iedere surjectie-oneindige verzameling Dedekind-oneindig is. Omdat deze twee implicaties wel te bewijzen zijn met behulp van het keuzeaxioma, is het tegendeel ook niet te bewijzen in ZFA. We vatten dit samen in de volgende stelling.

Stelling 6.7. *De volgende uitspraken zijn noch te bewijzen, noch te weerleggen in ZFA:*

- $(\forall x)(x$ *is oneindig* $\Rightarrow x$ *is Dedekind-oneindig*$)$.
- $(\forall x)(x$ *is surjectie-oneindig* $\Rightarrow x$ *is Dedekind-oneindig*$)$.

7 Conclusie

Er is dus een strikte hiërarchie in de geïntroduceerde definities van eindigheid in ZFA. Deze hiërarchie geldt ook in ZF, echter hier is een hoop extra wiskunde voor nodig dat buiten de omvang van dit verslag valt. Als de lezer interesse heeft in hoe dit precies werkt, raad ik aan om *The Axiom of Choice* [2] te lezen. De volgende stelling vat het hoofdresultaat van dit verslag samen.

Stelling 7.1. *De volgende drie eigenschappen van een verzameling X staan op volgorde van sterk naar zwak (d.w.z. $(i) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$).*

(i) Er bestaat een natuurlijk getal n zodat er een bijectie $f : X \to n$ bestaat.

(ii) Iedere surjectieve functie van $X \to X$ is injectief.

(iii) Iedere injectieve functie van $X \to X$ is surjectief.

De omgekeerde implicaties (d.w.z. $(iii) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (i)$) zijn noch te bewijzen, noch te weerleggen in ZFA. De hiërarchie is dus strikt.

Bewijs. De implicaties $(i) \Rightarrow (ii)$ en $(ii) \Rightarrow (iii)$ zijn bewezen in steling 4.5. Dat de implicatie $(ii) \to (i)$ niet geldt volgt uit stelling 6.3 en het bijbehorende permutatiemodel. Dat de implicatie $(iii) \to (ii)$ niet geldt volgt uit stelling 6.7 en het bijbehorende permutatiemodel. $\square$

Referenties

[1] Abraham A. Fraenkel. Der begriff 'definit' und die unabhängigkeit des auswahlaxioms. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse*, page 253–257, 1922.

[2] Thomas J. Jech. *The Axiom of Choice*. Dover Publications, 2008.

[3] Elliott Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. CRC Press/Taylor & Francis Group, 2015.

[4] Andrzej Mostowski. Über den begriff einer endlichen menge. *Sprawozdania Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*, page 13–20, 1938.

[5] Ernst Specker. Zur axiomatik der mengenlehre. *Zeitschrift fur mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 3:173–210, 1957.