

17-12-2023

# Analyse van Schuine en Kromme Liggers met de Macaulay- methode: Een Diepgaande Studie



**Auteur:** Ezzat Qadriyeh  
**BEGELEIDERS:** Tom Van Woudenberg en Pierre Hoogenboom

## Voorwoord

Dit verslag is opgesteld ten behoeve van de bacheloropleiding Civiele Techniek & Geowetenschappen aan de Technische Universiteit Delft. In dit rapport is onderzocht hoe Macaulay's methode kan worden uitgebreid met betrekking tot tweedimensionale constructies. De berekeningen en de plots zijn te vinden in de volgende website: <https://github.com/Ezzat1998/De-methode-van-Macaulay>

Dit rapport richt zich op professionals in de civiele techniek als doelgroep.

Daarbij zou ik mijn begeleiders T.R. van Woudenberg en P.C.J. Hoogenboom willen bedanken voor de hulp tijdens de hele periode van dit project. Door middel van tussenliggende bijeenkomsten en feedbackmomenten heeft dit onderzoek de mogelijkheid gehad om zich op te weken naar een meer gevorderd niveau.

Delft, Januari 2024

Ezzat Qadriyeh

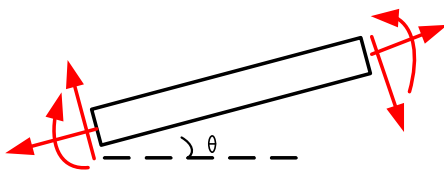
## Samenvatting

De methode van Macaulay is een methode die de mogelijkheid biedt om zowel de interne krachten als de vervormingen van constructies te analyseren. De discontinue belastingen die op de constructie werken zijn in één vergelijking te beschrijven door gebruik van de singulariteitsfunctie te maken. Hierdoor kan de volledige constructie op een gestructureerde manier worden gemodelleerd met slechts één differentiaalvergelijking.

In het werkelijkheid kunnen liggers schuin geplaatst zijn of een gebogen vorm hebben. Echter, is er nog geen onderzoek gedaan naar de toepassing van Macaulay's methode met niet rechte liggers. Dit rapport probeert de volgende vraag en de te beantwoorden:

Hoe kan de methode van Macaulay worden toegepast met betrekking tot zowel schuine liggers als kromme liggers?

Om de schuine liggers te kunnen analyseren, worden de evenwichtsvergelijkingen eerst opgesteld voor een hellingsnede (snede van een balk die onder hoek  $\theta$  staat met de horizontale as).



Figuur 1: hellingsnede.

Daarmee worden de volgende differentiaalvergelijkingen verkregen die later worden toegepast op verschillende constructies.

$$\frac{dV}{dx} = -\sin(\theta) \cdot q_x - \cos(\theta) \cdot q_z$$

$$\frac{dN}{dx} = -\cos(\theta) \cdot q_x + \sin(\theta) \cdot q_z$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{V}{\cos(\theta)}$$

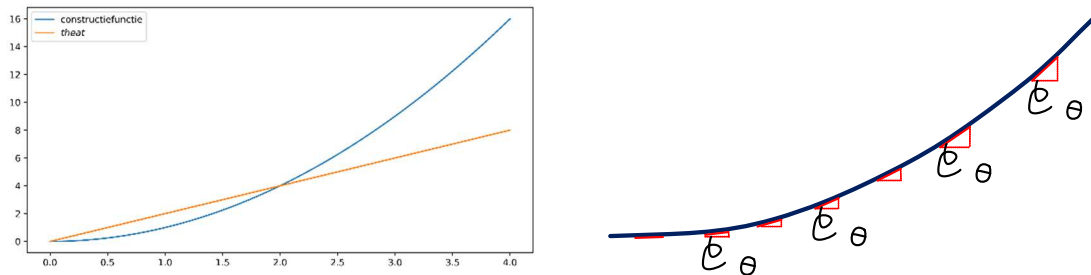
Er blijkt dat deze differentiaalvergelijkingen de juiste waarden geven voor zowel de interne krachten als de vervormingen van de constructies.

Op dezelfde manier worden differentiaalvergelijkingen afgeleid voor een kniksnede (snede van een geknikte constructie waar de eerste staaf onder een hoek  $\theta$  staat met de horizontale as en de tweede staaf onder een hoek  $\Delta\theta$  staat ten opzicht van de eerste staaf).



Figuur 2: kniksnede.

Onder de aanname dat een kromme lijn is een opeenvolging van lijnsegmenten die elkaar opvogen met kleine hoekverschillen, kan  $\Delta\theta$  als klein worden beschouwd. Door deze aanname, in combinatie van de drie evenwichtsvergelijkingen voor de kinksnode, worden opnieuw dezelfde differentiaalvergelijkingen verkregen die al eerder zijn afgeleid voor de hellingssnode. Het enige verschil nu is dat de hoek  $\theta$  niet langer constant maar varieert telkens wanneer de kromme van richting verandert. De hoek  $\theta$  kan zowel globaal (globale  $\theta$  is de afgeleide van de constructiefunctie) als lokaal (lokale  $\theta$  is de hoek onder elke lijnsegment van de kromme) worden bepaald. Het blijkt dat het toepassen van de lokale  $\theta$  een nauwkeurige analyse oplevert van zowel de krachten als de doorbuiging.



*Figuur 3: globale en lokale  $\theta$ .*

Dit onderzoek illustreert de veelzijdigheid van de Macaulay-methode en presenteert nieuwe inzichten in het omgaan met schuine en kromme liggers, inclusief een innovatieve aanpak voor geknikte constructies.

# Inhoudsopgave

<b>Voorwoord</b> .....	1
<b>Samenvatting</b> .....	2
<b>1. Inleiding</b> .....	5
<b>2. Macaulay's methode</b> .....	6
2.1. Macaulay's functies .....	6
2.2. Euler-Bernoulli .....	6
2.3. Modelleren van krachten .....	7
2.4. Verbindingen .....	7
2.4.1. Opleggingen.....	7
2.4.2 Scharnierverbindingen .....	7
2.5. Randvoorwaarden .....	8
<b>3. Schuine liggers</b> .....	9
3.1. Differentiaalvergelijkingen afleiding.....	9
3.2. Toepassing .....	11
3.2.1. Voorbeeld 1: Ligger op twee steunpunten .....	12
3.2.2. Voorbeeld 2: Ingeklemd ligger.....	13
3.2.3. Voorbeeld 3: statische onbepaalde constructie .....	15
<b>4. Kromme liggers</b> .....	17
4.1. Differentiaalvergelijkingen afleiding.....	17
4.2. Op weg naar kromme ligger .....	18
4.2.1. Globale $\theta$ .....	18
4.2.2. Lokale $\theta$ .....	19
4.3. Toepassing .....	19
4.3.1. Voorbeeld 4: parabolische constructie.....	19
4.3.2. Voorbeeld 5: parabolische constructie.....	21
Discussie .....	23
Conclusie .....	26
Bibliografie.....	27
Bijlagen .....	28
Bijlage 1: Euler-Bernoulli Afleiding .....	28
Bijlage 2: Voorbeelden oplossingen .....	29
Bijlage 3: MatrixFrame Check.....	31
Bijlage 4 : gekinkte constructies .....	45

## 1. Inleiding

De Macaulay-methode toegepast in de constructiemechanica, stelt ons in staat de krachten- en doorbuigingsvergelijkingen van constructies te bepalen volgens de balktheorie van Euler-Bernoulli, zoals beschreven door (Stephen, 2007). Door gebruik te maken van Singulariteitsfuncties, maakt deze methode het mogelijk om discontinue belastingen die op een constructie werken, in één enkele krachtenvergelijking te beschrijven. Door deze krachtenvergelijking te integreren en de geschikte randvoorwaarden op te stellen, is het mogelijk om de alle onbekende te bepalen en dus de alle interne krachten- en de vervormingslijnen van de constructie te plotten.

Nadat de methode van Macaulay alleen op eenvoudige eendimensionale liggers was toegepast, bleek uit eerdere onderzoeksresultaten dat de methode met behulp van differentiaalvergelijkingen kan worden toegepast op complexere tweedimensionale constructies (Wulp, 2023). Tot op heden is er echter geen onderzoek uitgevoerd naar het gebruik van de Macaulay-methode wanneer de constructie onder een bepaalde hoek staat ten opzichte van de horizontale as of de constructie die een parabolische functie volgt. Dat komt omdat het onderzoek van Justus stelt om een kracht zowel in de horizontale als de verticale richting toe te voegen waar een knik in de constructie voorkomt maar dat is niet het geval bij schuine liggers of bij een kromme liggers.

In dit onderzoek is de theorie en toepassing van Macaulay's methode uitgebreid met betrekking op schuine liggers en kromme liggers. Veder geeft dit verslag antwoord op de volgende vraag:

Hoe kan de methode van Macaulay worden uitgebreid met betrekking tot zowel schuine liggers als kromme liggers?

Om de hoofvraag van dit rapport te beantwoorden, vindt een inleiding in hoofdstuk 1 plaats. Verder beschrijft hoofdstuk 2 de theoretische achtergrond van de Macaulay's methode en hoe er wordt omgegaan met de werkende krachten op de constructie en de opleggingen om de krachtenvergelijkingen op te stellen. Vervolgens worden differentiaalvergelijkingen in hoofdstuk 3 afgeleid voor ligger die onder een hoek staat met de horizontale as en daarna worden die differentiaalvergelijkingen toegepast op drie voorbeelden. In hoofdstuk 4 worden differentiaalvergelijkingen afgeleid voor een kromme ligger. Vervolgens worden twee voorbeelden met kromme liggers behandeld. Daarna volgt een bespreking waarin mogelijke uitbreidingen worden beschreven die niet zijn onderzocht in dit onderzoek. Uiteindelijk wordt dit rapport afgesloten met een conclusie. De interne krachten en vervormingslijnen worden gecheckt in MatrixFrame.

## 2. Macaulay's methode

In dit hoofdstuk wordt de Macaulay's methode besproken, waarbij zowel de theoretische aspecten als de toepassingen van deze methode worden belicht.

### 2.1. Macaulay's functies

De methode van Macaulay maakt gebruik van zogenoemde singulariteitsfunctie of Macaulay's haakjes. Door deze singulariteitsfuncties te hanteren, is het mogelijk om werkende, discontinue belastingen op een constructie in één regel op te stellen. De functie is gedefinieerd als volgt:

Voor  $n \geq 0$ :

$$f(x) = \langle x - a \rangle^n = \begin{cases} (x - a)^n, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases} \quad (1) \quad (\text{Caprani, 2010})$$

Voor  $n < 0$ :

$$f(x) = \langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0, & x \neq a \\ \infty, & x = a \end{cases} \quad (2) \quad (\text{Caprani, 2010})$$

Hierbij:

$n$  geeft aan de orde van de differentiaalvergelijking.

$a$  is de positie van de singulariteit (kracht, moment of verdeelde belasting).

Verder is er een specifieke naam voor elke orde ' $n$ ' die later wordt gebruikt om de belastingen op de constructie te modelleren zie 2.3.

Het integreren van de singulariteitsfunctie hangt van de orde van de differentiaalvergelijking  $n$  af. De integratie van deze functie wordt in formule 3 hieronder weergegeven.

$$\int \langle x - a \rangle^n dx = \begin{cases} \langle x - a \rangle^{n+1} & , n < 0 \\ \frac{\langle x - a \rangle^{n+1}}{n+1} & , n \geq 0 \end{cases} \quad (3) \quad (\text{Caprani, 2010})$$

### 2.2. Euler-Bernoulli

Door gebruik te maken van zowel de kinematische, constitutieve als statische vergelijkingen voor zowel buiging als extensie, kan men de Euler-Bernoulli vergelijkingen afleiden. Deze vergelijkingen beschrijven het verband tussen de doorbuiging van een balk en de toegepaste belastingen op die balk. ze worden als volgt gedefinieerd:

Voor buiging wordt de Euler-Bernoulli vergelijking als volgt:  $EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q_z$  (4)

Voor extensie wordt de Euler-Bernoulli vergelijking als volgt:  $EA \frac{d^2 u}{dx^2} = q_x$  (5)

Waarbij:  $E$  staat voor de elasticiteitsmodulus,  $I$  voor de traagheidsmoment van de balk en  $A$  voor de oppervlakte van de doorsnede. Daarnaast vertegenwoordigen  $q_z$  en  $q_x$  de toegepaste belastingen in respectievelijk de verticale en de horizontale richtingen.

### 2.3. Modelleren van krachten

In deze paragraaf worden het modelleren van krachten besproken met wat betreft de toepassing op Macaulay's methode.

Zoals wat eerder vermeld, worden de verschillende ordes van de singulariteitfunctie gebruikt om de krachten op een constructie te modelleren. Hieronder wordt vermeld welke orde van toepassing is op welk type kracht.

- **Eenheidsmoment**

Voor het modelleren van een koppel wordt de orde -2 gebruikt, bekend onder de naam 'unit doublet functie'. Een koppel met een waarde van  $M$  op een locatie  $a$ , wordt hij in de krachtvergelijking gerepresenteerd als  $M \cdot \langle x - a \rangle^{-2}$  (Wulp, 2023).

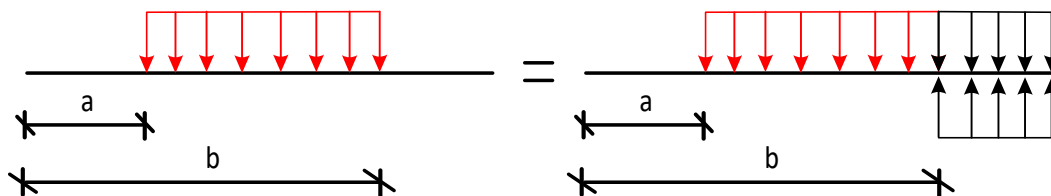
- **Eenheidskracht**

Voor het modelleren van een puntlast wordt de orde -1 gebruikt, bekend onder de naam 'diracdelta functie'. Een puntlast met een waarde van  $F$  op een locatie  $a$ , wordt hij in de krachtvergelijking gerepresenteerd als  $F \cdot \langle x - a \rangle^{-1}$  (Wulp, 2023).

- **Uniform verdeelde belasting**

Voor het modelleren van een koppel wordt de orde 0 gebruikt, bekend onder de naam 'Unit step functie' (Wulp, 2023). Een uniform verdeelde belasting met een waarde van  $q$ , die locatie  $a$  begint en tot het einde van de constructie werkt, wordt in de krachtvergelijking weergegeven als  $q \cdot \langle x - a \rangle^0$ .

Wanneer de uniform verdeelde belasting zich uitstrekt van locatie  $a$  tot  $b$  werkt, wordt hij in de krachtvergelijking gerepresenteerd als  $q \cdot \langle x - a \rangle^0 - q \cdot \langle x - b \rangle^0$ . Figuur 4 ligt uit waar deze uitdrukking vandaan komt.



Figuur 4: weergave van een uniform verdeelde belasting.

### 2.4. Verbindingen

In deze sub-paragraaf wordt de toepassing van Macaulay's methode in relatie tot de verbindingen uitgelegd.

#### 2.4.1. Opleggingen

De reactiekrachten worden gemodelleerd als krachten op de locatie van de oplegging en dit geldt voor alle soorten opleggingen oplegtypen (Inklemming, Scharnieroplegging en Roloplegging). Daarnaast worden deze oplegkrachten als onbekenden geïntroduceerd in de krachtvergelijking. Dat is belangrijk voor het toepassen van de Macaulay's methode omdat de evenwichtsvergelijkingen (evenwicht in zowel de verticale als de horizontale richting) niet mogen worden gebruikt.

#### 2.4.2 Scharnierverbindingen

Zoals bekend is geeft een scharnierverbinding de mogelijkheid voor de staafdelen te roteren. Daarom zal een sprong op de locatie van de scharnier in de rotatievergelijking plaatsvinden. Om de discontinuïteit in de krachtvergelijking te voorkomen, is het mogelijk deze sprong te modelleren met behulp van de singulariteitfunctie. De orde van deze functie is -3.



Dus een scharnierverbinding met op een locatie  $a$ , wordt in de krachtvergelijking gerepresenteerd als  $\varphi_s \cdot \langle x - a \rangle^{-3}$  waar  $\varphi_s$  onbekend is (Wulp, 2023).

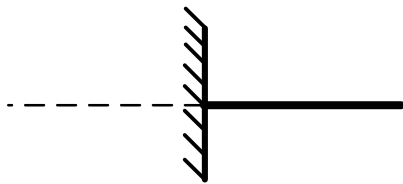
## 2.5. Randvoorwaarden

In deze paragraaf wordt er uitgelegd hoeveel randvoorwaarden minimaal vereist zijn en hoe ze worden verkregen.

Omdat Macaulay methode is gebaseerd erop om alles in één functie op te stellen, worden de alle reactiekrachten als onbekenden beschouwd. Daarnaast geeft het integreren van de Euler-Bernoulli vergelijkingen integratieconstanten ( $C_V, C_M, C_\varphi, C_w$  en  $C_n$ ). Dus het aantal benodigde randvoorwaarden is gelijk aan vrij randvoorwaarden opgeteld met het aantal reactiekrachten. Wanneer er een scharnierverbinding in de constructie plaatsvindt, is een extra randvoorwaarde nodig.

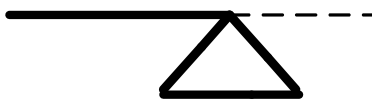
De eerste vijf randvoorwaarden worden verkregen door te kijken naar de opleggingen. Bijvoorbeeld, bij een inklemming zijn de doorbuiging en de rotatie nul, en bij een scharnieroplegging zijn het moment en de doorbuiging nul.

De andere voorwaarden worden verkregen door de constructie denkbeeldig te verlangen. Dan kunnen we bepalen wat de krachten zijn net voor ( $0^-$ ) en net na ( $L^+$ ) de constructie. Figuur 5 kan laten zien hoe dit kan worden gedaan.



Figuur 5: Snede net voor de inklemming.

Hier is  $V(0^-) = 0$ ,  $N(0^-) = 0$  en  $M(0^-) = 0$  omdat de krachten in de constructie gaan naar de opleg en na de constructie is er niks.



Figuur 6: snede net na de oplegging.

Hier is  $V(L^+) = 0$  en  $N(L^+) = 0$

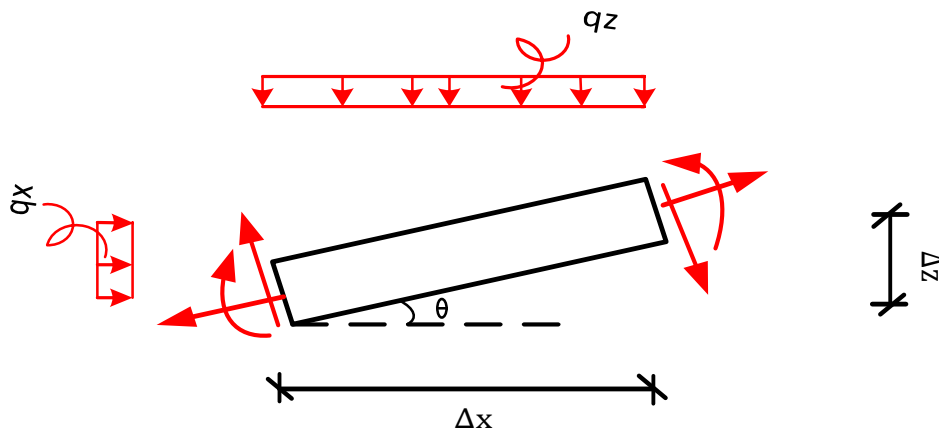
### 3. Schuine liggers

Het formuleren van de differentiaalvergelijkingen wordt beschouwd als de basis van Macaulay's methode. In dit hoofdstuk worden differentiaalvergelijkingen voor een hellingsnede afgeleid. Vervolgens worden deze vergelijkingen op drie voorbeelden toegepast.

#### 3.1. Differentiaalvergelijkingen afleiding

In deze paragraaf worden de vragen beantwoord over hoe de statische vergelijkingen worden beïnvloed wanneer de ligger onder een bepaalde hoek  $\theta$  met de horizontale as staat en welke effecten dit heeft op de Euler-Bernoullie vergelijkingen.

Normaal gesproken wordt een doorsnede gemaakt van een rechte ligger. Echter, om de statische vergelijkingen voor een schuine liggers af te leiden, wordt gekeken naar een doorsnede van dergelijke liggers (hellingsnede) die onder zowel verticale belasting  $q_z$  als horizontale belasting  $q_x$  staat. Verder werken  $V$ ,  $N$  en  $M$  aan de linkerzijde van de hellingsnede terwijl  $(V + \Delta V)$ ,  $(N + \Delta N)$  en  $(M + \Delta M)$  aan de rechterzijde actief zijn.



Figuur 7: hellingsnede (snede van een balk die onder hoek  $\vartheta$  staat met de horizontale as).

#### Evenwicht in x-richting:

$$q_x \cdot \Delta z - \cos(\theta) \cdot N - \sin(\theta) \cdot V + \sin(\theta) \cdot (V + \Delta V) + \cos(\theta) \cdot (N + \Delta N) = 0$$

$$q_x \cdot \Delta z + \cos(\theta) \cdot \Delta N + \sin(\theta) \cdot \Delta V = 0 \quad (6)$$

#### Evenwicht in z-richting:

$$q_z \cdot \Delta x + \sin(\theta) \cdot N - \cos(\theta) \cdot V + \cos(\theta) \cdot (V + \Delta V) - \sin(\theta) \cdot (N + \Delta N) = 0$$

$$q_z \cdot \Delta x - \sin(\theta) \cdot \Delta N + \cos(\theta) \cdot \Delta V = 0 \quad (7)$$

#### Moment evenwicht:

$M + \Delta M - M - V \cdot \frac{\Delta x}{\cos(\theta)} + q_z \cdot \frac{\Delta x^2}{2} + q_x \cdot \frac{\Delta z^2}{2} = 0$  in deze vergelijking zijn  $\Delta z^2$  en  $\Delta x^2$  zo klein dat ze kunnen worden verwaarloosd. Dat geeft de volgende vergelijking:

$$\Delta M = V \cdot \frac{\Delta x}{\cos(\theta)} \quad (8)$$

$\tan(\theta) = \frac{\Delta z}{\Delta x}$  kan worden gebruikt als een relatie tussen  $\Delta x$  en  $\Delta z$ . Door deze relatie toe te passen, verkrijgen we de volgende vergelijkingen als statische vergelijkingen.

$$\frac{dV}{dx} = -\sin(\theta) \cdot \tan(\theta) \cdot q_x - \cos(\theta) \cdot q_z$$

$$\frac{dN}{dx} = (-q_x + q_z) \cdot \sin(\theta)$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{V}{\cos(\theta)}$$

Om te bepalen of de bovenstaande vergelijkingen geldig zijn, stellen we  $\theta$  gelijk aan nul (rechte ligger). Hierdoor zouden de statische vergelijkingen in bijlage 1 verkregen moeten worden, maar dit blijkt niet het geval te zijn omdat dat  $\frac{dN}{dx} = 0$  levert.

Toen deze vergelijkingen op de voorbeelden toegepast zijn, verkregen we de goede resultaten wanneer de constructie met alleen verticale belastingen is belast. Dat voldoet aan de verwachtingen.

Een andere relatie tussen  $\Delta x$  en  $\Delta z$  is  $\Delta z \approx \Delta x$  (9), het is geldig als de hellingsnede zo klein is.

Door  $\Delta z$  uit vergelijking 9 te substitueren in vergelijking 6, verkrijgen we de volgende vergelijking:

$$q_x \cdot \Delta x + \cos(\theta) \cdot \Delta N + \sin(\theta) \cdot \Delta V = 0 \quad (10)$$

Door vergelijkingen 7 en 10 op te lossen naar  $\frac{\Delta V}{\Delta x}$  en  $\frac{\Delta N}{\Delta x}$ . Daarna laten we  $\Delta x$  naar 0 gaan, krijgen we de volgende Vergelijkingen:

$$\frac{dV}{dx} = -\sin(\theta) \cdot q_x - \cos(\theta) \cdot q_z \quad (11)$$

$$\frac{dN}{dx} = -\cos(\theta) \cdot q_x + \sin(\theta) \cdot q_z \quad (12)$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{V}{\cos(\theta)} \quad (13)$$

Wanneer  $\theta$  gelijk aan nul is (rechte ligger), worden de statische vergelijkingen in bijlage 1 verkregen. Er wordt verwacht om deze vergelijkingen de juiste oplossingen te garanderen.

Het is ook op te merken dat deze vergelijkingen worden ook verkregen door het toepassen van de rotatiematrix.

$$\begin{pmatrix} \frac{dN}{dx} \\ \frac{dV}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -q_x \\ q_z \end{pmatrix}$$

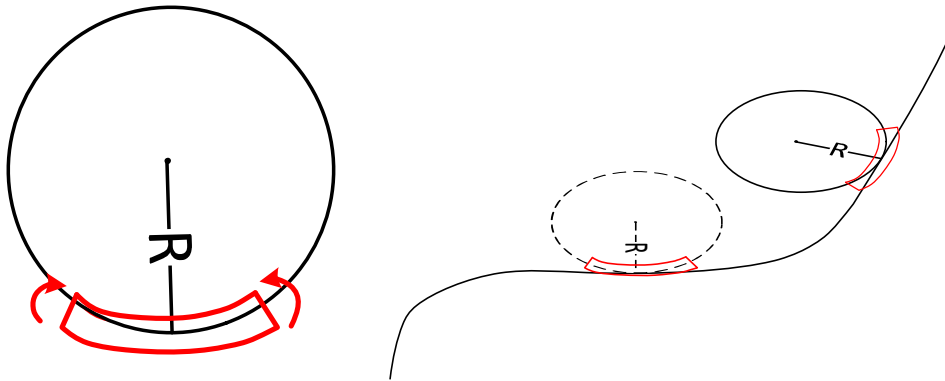
De vergelijkingen 11, 12 en 13 worden verder gebruikt als de statische vergelijkingen voor een balk onder een hoek  $\theta$  met de horizontale as. Hiermee is het mogelijk om de alle interne krachten te bepalen.

Op dit moment dienen we ons af te vragen of de kinematische vergelijkingen nog steeds van toepassing zijn op de zogenaamde hellingsnede. Hieronder wordt onderzocht of dit het geval is.

Het is belangrijk op te merken dat de relaties  $M = EI \cdot \kappa$  en  $k = \frac{1}{R}$  altijd geldig zijn, ongeachte of de constructie onder een hoek staat of niet. Daardoor kunnen we de volgende vergelijking concluderen.

$$\frac{1}{R} = \frac{EI}{M} \quad (14)$$

Vergelijking 14 geeft aan de relatie tussen de kromming en het moment in de ligger. Daarom speelt de hoek waar de ligger plaatsvindt geen rol.



Figuur 8:  $R$  is gelijk ongeachte of de balk onder een hoek staat met de horizontale as of die balk horizontaal is.

De doorbuiging van een balk kan gerelateerd worden met  $R$  door de volgende wiskundige vergelijking:

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (15)$$

Door vergelijkingen 14 en 15 gelijk aan elkaar te stellen, verkrijgen we vergelijking 16 die een verband toont tussen de doorbuiging  $w$  en de moment  $M$ .

$$\frac{EI}{M} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (16)$$

omdat we ons beperken tot elastische vervorming en aannemen dat de helling van de elastische curve klein is, zal  $\frac{dw}{dx}$  gering zijn. Hierdoor zal  $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2$  nog kleiner zijn en kan dus worden verwaarloosd. Door deze aannames aan vergelijking 16 toe te brengen, kunnen we concluderen dat er geen veranderingen aan de kinematische vergelijking komt die hieronder plaatsvindt.

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (17)$$

### 3.2. Toepassing

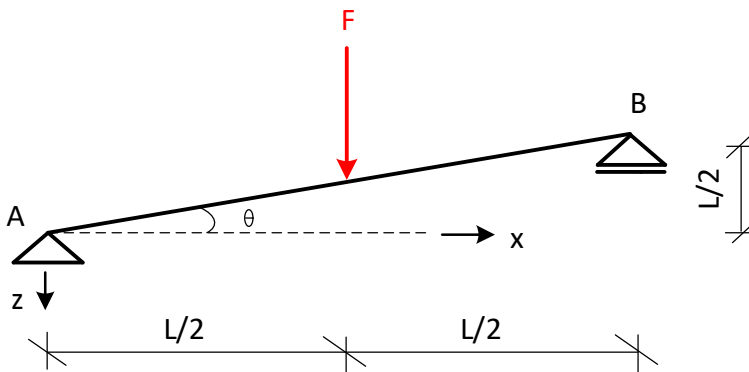
In dit hoofdstuk worden enkele voorbeelden behandeld om de beschreven theorie te verduidelijken. De kracht  $F$  heeft in alle voorbeelden een waarde van  $10 \text{ KN}$ , en de lengte  $L$  is gelijk aan  $4 \text{ m}$ . Het assenstelsel is zodanig gedefinieerd dat positieve verticale richting naar beneden wijst, de positieve horizontale richting rechts en momenten linksom als positief worden genomen.

De titel van de vervormingslijnen wordt weergegeven als  $(EI * w \text{ en } EI * \varphi)$ . Dat komt omdat  $EI$  als een onbekende grootte wordt beschouwd.

In bijlage 3 worden de figuren weer getoond en vergeleken met de figuren die met MatrixFrame gemaakt.

### 3.2.1. Voorbeeld 1: Ligger op twee steunpunten

In dit voorbeeld wordt een eenvoudige constructie behandeld die onder een hoek  $\theta$  staat met de horizontale as en wordt belast met een verticale kracht in het middel van de constructie, met behulp van Macaulay's methode. Figuur 9 laat de constructie zien.



Figuur 9: Constructie voorbeeld 1.

De krachtvergelijkingen worden opgesteld door de aanwezige puntlast en de verticale en de horizontale oplegreacties bij de opleggingen met behulp van de singulariteitsfunctie in één functie op te schrijven. De verticale oplegreacties worden in dit voorbeeld naar boven gericht en de horizontale oplegreactie naar rechts genomen. De vergelijkingen worden als volgt dan geformuleerd:

$$q_z(x) = -A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^{-1} + F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^{-1} - B_v \cdot \langle x - L \rangle^{-1}$$

$$q_x(x) = A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^{-1}$$

Door de vergelijking 11 vier keer te integreren is de doorbuigingsvergelijking te bepalen. Het integreren van de benoemde vergelijking geeft de volgende vergelijkingen:

$$V(x) = -\sin(\theta) \cdot A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^0 - \cos(\theta) \cdot \left( -A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^0 + F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^0 - B_v \cdot \langle x - L \rangle^0 \right) + C_v$$

$$M(x) = -\tan(\theta) \cdot A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^1 + \left( A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^1 - F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^1 + B_v \cdot \langle x - L \rangle^1 \right) + C_v \cdot x + C_M$$

$$EI \cdot \varphi(x) = -\tan(\theta) \cdot \frac{A_h}{2} \cdot \langle x - 0 \rangle^2 + \frac{1}{2} \left( A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^2 - F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^2 + B_v \cdot \langle x - L \rangle^2 \right) + C_v \cdot \frac{x^2}{2} + C_M \cdot x + C_\varphi$$

$$EI \cdot w(x) = \tan(\theta) \cdot \frac{A_h}{6} \cdot \langle x - 0 \rangle^3 - \frac{1}{6} \left( A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^3 - F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^3 + B_v \cdot \langle x - L \rangle^3 \right) - C_v \cdot \frac{x^3}{6} - C_M \cdot \frac{x^2}{2} - C_\varphi \cdot x + C_w$$

Vervolgens moet vergelijking 12 twee keer worden geïntegreerd om de normaalkrachtsvergelijking en de horizontale verplaatsing te verkrijgen:

$$N(x) = -\cos(\theta) \cdot A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^0 + \sin(\theta) \cdot \left( -A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^0 + F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^0 - B_v \cdot \langle x - L \rangle^0 \right) + C_N$$

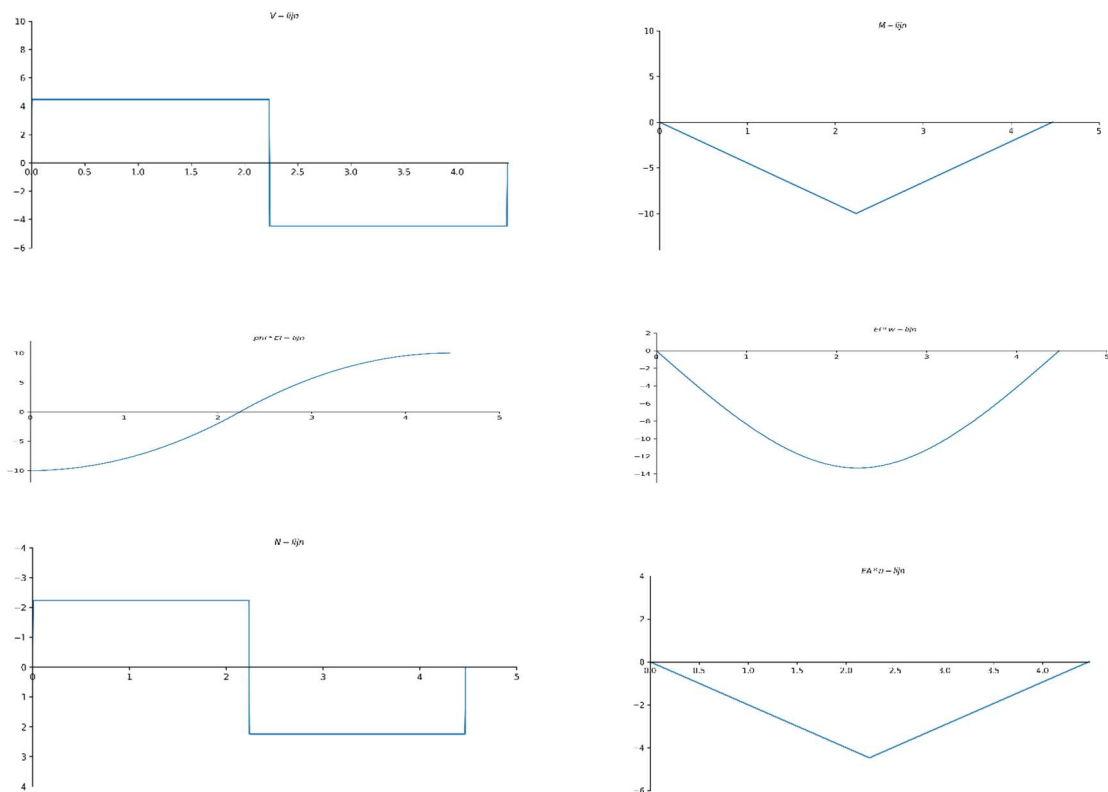
$$EA \cdot u(x) = -\cos(\theta) \cdot A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^1 + \sin(\theta) \cdot \left( -A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^1 + F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^1 - B_v \cdot \langle x - L \rangle^1 \right) + C_N \cdot x + C_u$$

In totaal zijn er negen onbekenden in de bovenstaande vergelijkingen. Daarom hebben we ook negen randvoorwaarden nodig. Het verkrijgen van de randvoorwaarden is uitgelegd in de hoofdstuk 1.4 en voor dit voorbeeld zijn ze als volgt:

$$M(0) = 0 ; w(0) = 0 ; M(L) = 0 ; w(L) = 0 ; u(0) = 0$$

$$V(0^-) = 0 ; N(0^-) = 0 ; V(L^+) = 0 ; N(L^+) = 0$$

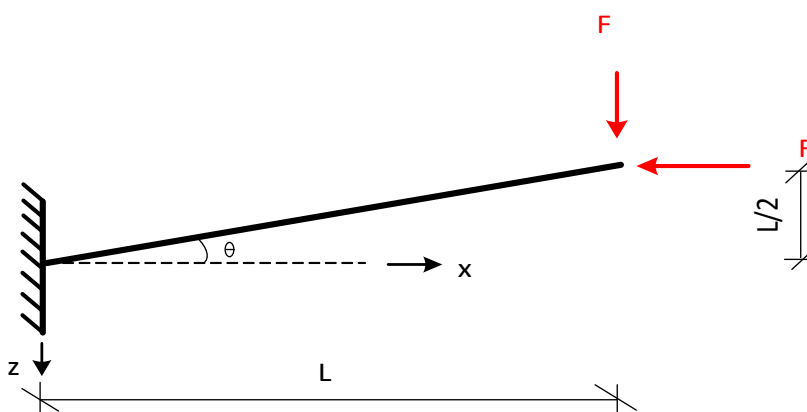
Na het oplossen van alle onbekenden is het mogelijk om alle interne krachten- en de vervormingslijnen van de ligger te visualiseren met behulp van python. De resultaten zijn hieronder te zien.



Figuur 10: De interne krachten en de vervormingen lijnen van constructie in voorbeeld 1.

### 3.2.2. Voorbeeld 2: Ingeklemd ligger

In dit voorbeeld wordt een vrij ingeklemde ligger behandeld die onder een hoek  $\theta$  staat ten opzichte van de horizontale as en wordt belast met zowel een verticale kracht als een horizontale kracht, met behulp van Macaulay's methode. Figuur 11 toont de constructie.



Figuur 11: Constructie van voorbeeld 2.

De krachtvergelijkingen worden opgesteld door de aanwezige puntlasten en de verticale en de horizontale oplegreacties en het moment bij de inklemming met behulp van de singulariteitfunctie in één functie op te schrijven. In dit voorbeeld wordt de verticale oplegreactie naar boven gericht en de

horizontale oplegreactie naar rechts gekozen en de moment linksom gewerkt. Dat geeft de volgende krachtenvergelijkingen.

$$q_z(x) = -A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^{-1} + F \cdot \langle x - L \rangle^{-1} + M_A \cdot \langle x - 0 \rangle^{-2}$$

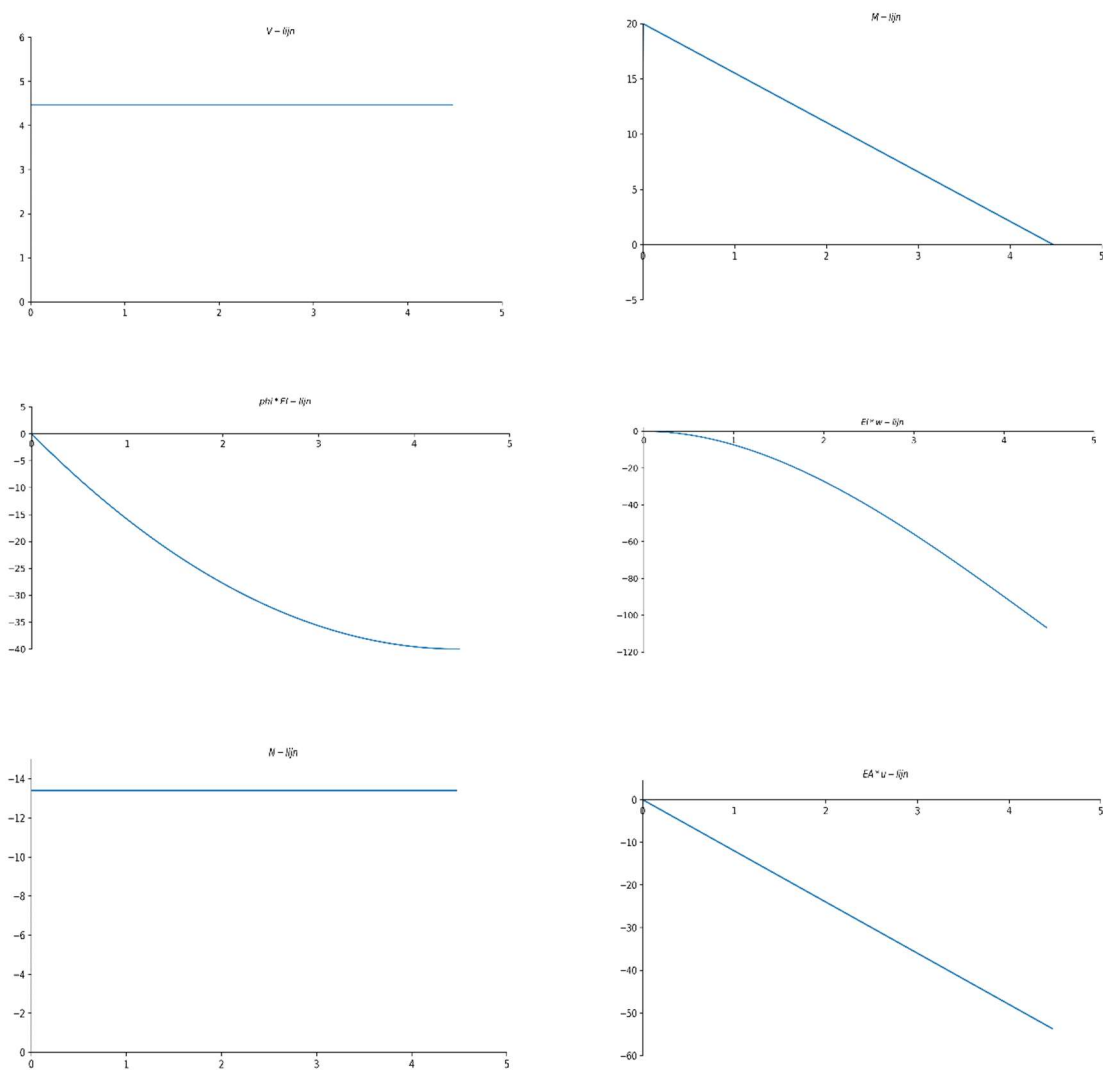
$$q_x(x) = A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^{-1} - F \cdot \langle x - L \rangle^{-1}$$

Om de onbekenden op te lossen, zijn acht randvoorwaarden in totaal nodig. De randvoorwaarden worden hieronder genoemd:

$$\varphi(0) = 0 ; w(0) = 0 ; u(0) = 0 ; M(L) = 0, u(0) = 0$$

$$V(0^-) = 0 ; N(0^-) = 0 ; M(0^-) = 0 ; V(L^+) = 0 ; N(L^+) = 0$$

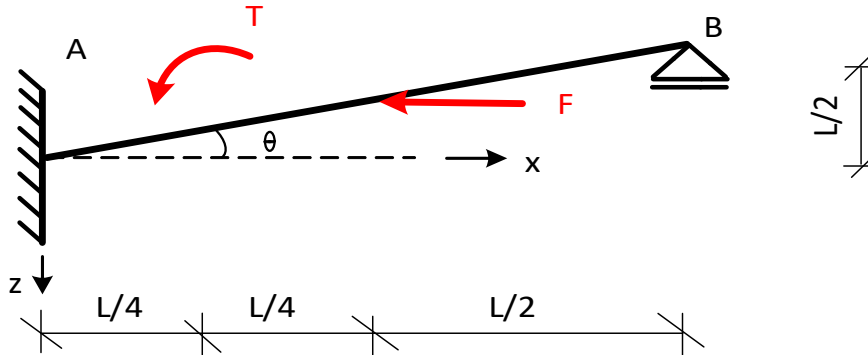
Nadat alle onbekenden zijn opgelost, kunnen de plotten worden gemaakt met Python. De resultaten bevinden zich in figuur 12.



Figuur 12: De interne krachten en de vervormingen lijnen van constructie in voorbeeld 2.

### 3.2.3. Voorbeeld 3: statische onbepaalde constructie

In dit voorbeeld wordt een statisch onbepaald constructie behandeld die onder een hoek  $\theta$  staat ten opzichte van de horizontale as en wordt belast met zowel een verticale kracht als een koppel ten waarde van  $10 \text{ KNm}$ , behulp van Macaulay's methode. Figuur 13 toont de constructie.



Figuur 13: Constructie voorbeeld 3.

De krachtenvergelijkingen worden op hetzelfde manier van de eerste twee voorbeelden opgesteld. In dit voorbeeld wordt de verticale oplegreactie naar boven gericht en de horizontale oplegreactie naar rechts gekozen en de moment linksom gewerkt. Dat geeft de volgende krachtenvergelijkingen.

$$q_z(x) = -A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^{-1} - B_v \cdot \langle x - L \rangle^{-1} + M_A \cdot \langle x - 0 \rangle^{-2} + T \cdot \langle x - \frac{L}{4} \rangle^{-2}$$

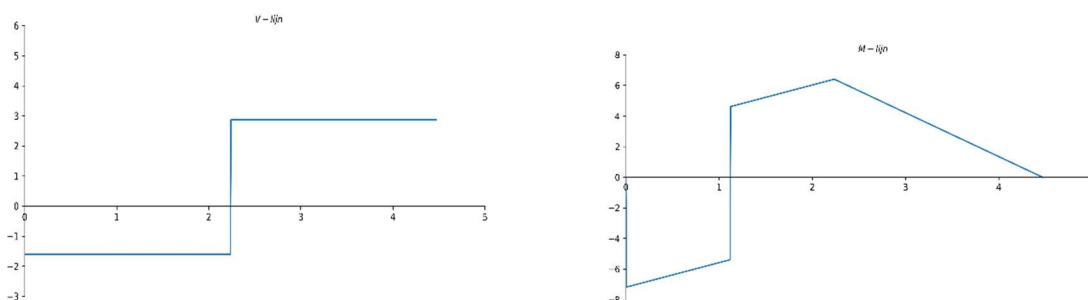
$$q_x(x) = A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^{-1} - F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^{-1}$$

De randvoorwaarden voor dit voorbeeld zijn als volgt:

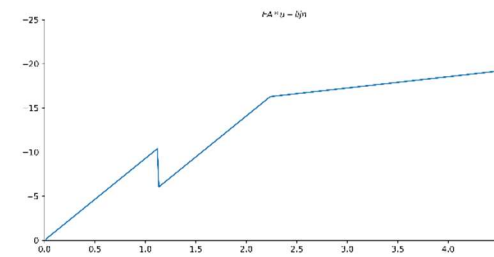
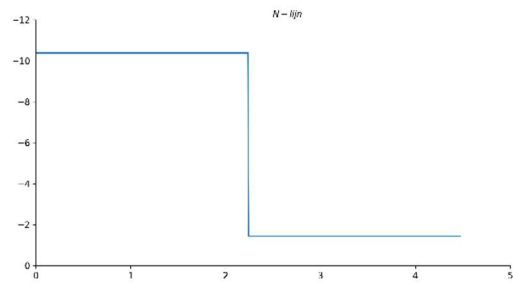
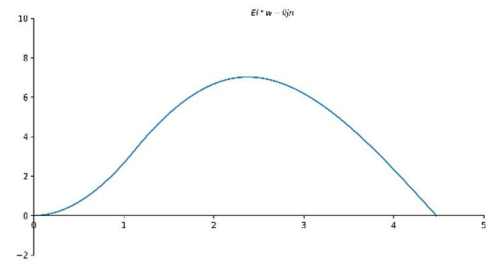
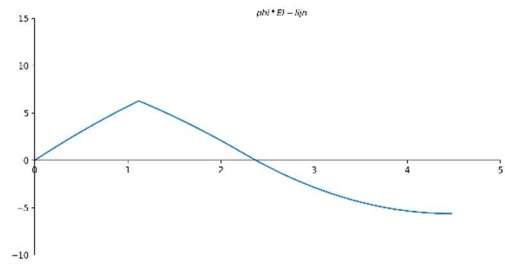
$$\varphi(0) = 0 ; w(0) = 0 ; M(L) = 0 ; w(L) = 0 ; u(0) = 0$$

$$V(0^-) = 0 ; N(0^-) = 0 ; M(0^-) = 0 ; V(L^+) = 0 ; N(L^+) = 0$$

Nadat alle onbekenden zijn opgelost, kunnen de resultaten worden gevisualiseerd met Python. De krachten en de doorbuigingslijnen bevinden zich in figuur 14.







Figuur 14: De interne krachten en de vervormingen lijnen van constructie in voorbeeld 3.

## 4. Kromme liggers

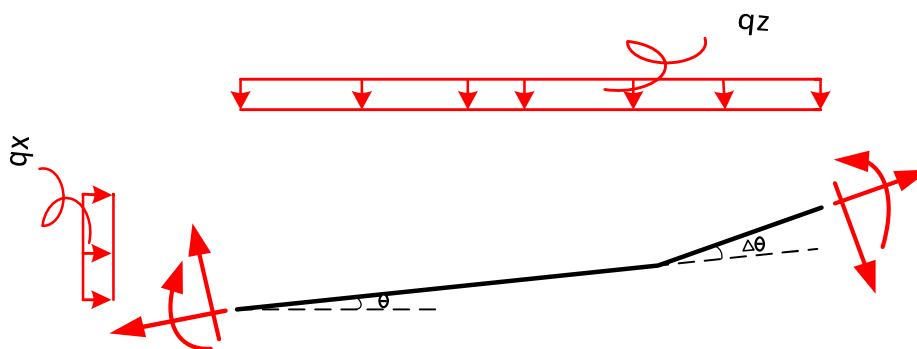
In dit hoofdstuk worden differentiaalvergelijkingen afgeleid voor een kniksnede die vervolgens kunnen worden toegepast om de krachten en de vervorming in een geknikte constructie te bepalen. Daarna wordt de afleiding verder verwerkt om differentiaalvergelijkingen te vinden voor een kromme ligger. Verder worden drie voorbeelden behandeld.

### 4.1. Differentiaalvergelijkingen afleiding

In deze paragraaf wordt de mogelijkheid onderzocht om statische vergelijkingen af te leiden voor kromme ligger met de globale assenstelsel.

Echter, om de statische vergelijkingen voor een af te leiden, wordt gekeken naar een kniksnede (snede van een geknikte constructie waar de eerste staaf onder een hoek  $\theta$  staat met de horizontale as en de tweede staaf onder een hoek  $\Delta\theta$  staat ten opzicht van de eerste staaf) die onder zowel verticale belasting  $q_z$  als horizontale belasting  $q_x$  staat.

Verder werken  $V, N$  en  $M$  aan de linkerzijde van de kniksnede terwijl  $(V + \Delta V)$ ,  $(N + \Delta N)$  en  $(M + \Delta M)$  aan de rechterzijde actief zijn. Verder houden we de rekening ermee dat beide staven op verschillende hoeken staan.



Figuur 15: snede van een geknikte constructie waar de eerste staaf onder een hoek  $\theta$  staat met de horizontale as en de tweede staaf onder een hoek  $\Delta\theta$  staat ten opzicht van de eerste staaf. Deze snede wordt kniksnede genoemd.

Evenwicht in x-richting:

$$q_x \cdot \Delta z - \cos(\theta) \cdot N - \sin(\theta) \cdot V + \sin(\theta + \Delta\theta) \cdot (V + \Delta V) + \cos(\theta + \Delta\theta) \cdot (N + \Delta N) = 0 \quad (18)$$

Evenwicht in z-richting:

$$q_z \cdot \Delta x + \sin(\theta) \cdot N - \cos(\theta) \cdot V + \cos(\theta + \Delta\theta) \cdot (V + \Delta V) - \sin(\theta + \Delta\theta) \cdot (N + \Delta N) = 0 \quad (19)$$

Moment evenwicht:

$$M + \Delta M - M - V \cdot \frac{\Delta x}{\cos(\theta)} - N \cdot \left( \frac{\tan(\Delta\theta) \cdot \Delta x_2}{\cos(\theta)} \right) + q_z \cdot \frac{\Delta x^2}{2} + q_x \cdot \frac{\Delta z^2}{2} = 0 \quad (20)$$

In de bovenstaande vergelijking is  $\Delta x^2 = \Delta z^2 \approx 0$  en  $\left( \frac{\tan(\Delta\theta) \cdot \Delta x_2}{\cos(\theta)} \right) \approx 0$

Wiskundige formules:

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b) \quad (21)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \sin(b) \quad (22)$$

Wanneer we vergelijkingen 21 en 22 in vergelijkingen 18 en 19 invullen, concluderen we de volgende vergelijkingen.

$$q_x \cdot \Delta z - \cos(\theta) \cdot N - \sin(\theta) \cdot V + (\sin(\theta) \cdot \cos(\Delta\theta) + \cos(\theta) \cdot \sin(\Delta\theta)) \cdot (V + \Delta V) + (\cos(\theta) \cdot \cos(\Delta\theta) - \sin(\theta) \cdot \sin(\Delta\theta)) \cdot (N + \Delta N) = 0 \quad (23)$$

$$q_z \cdot \Delta x + \sin(\theta) \cdot N - \cos(\theta) \cdot V + (\cos(\theta) \cdot \cos(\Delta\theta) - \sin(\theta) \cdot \sin(\Delta\theta)) \cdot (V + \Delta V) - (\sin(\theta) \cdot \cos(\Delta\theta) + \cos(\theta) \cdot \sin(\Delta\theta)) \cdot (N + \Delta N) = 0 \quad (24)$$

## 4.2. Op weg naar kromme ligger

In de sub-paragraaf 4.1 zijn differentiaalvergelijkingen afgeleid voor twee staven waarbij de tweede staaf onder een hoek  $\Delta\theta$  staat ten opzichte van de eerste staaf. Verder is een kromme lijn niets anders dan een opeenvolging van lijnsegmenten die elkaar opvolgen met kleine hoekverschillen. Dit impliceert dat de kromme lijn geleidelijk van richting verandert in plaats van scherp te knikken, waardoor een continue overgang tussen de verschillende lijnsegmenten ontstaat.

Daardoor kunnen we aannemen dat  $\Delta\theta$  klein is. Door deze aanname voor  $\Delta\theta$ , zijn de Taylorreeksen van toepassing op  $\sin(\Delta\theta)$  en  $\cos(\Delta\theta)$ .

$$\sin(\Delta\theta) = \Delta\theta - \frac{\Delta\theta^3}{3!} + \frac{\Delta\theta^5}{5!} \dots \quad (25)$$

$$\cos(\Delta\theta) = 1 - \frac{\Delta\theta^2}{2!} + \frac{\Delta\theta^4}{4!} \dots \quad (26)$$

Vandaar kunnen de volgende benaderingen worden geconcludeerd:

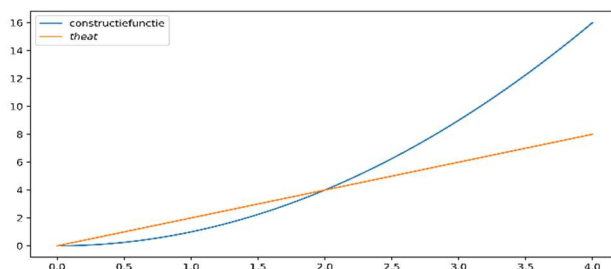
$$\begin{aligned} \cos(\theta) \cdot \sin(\Delta\theta) &= \cos(\theta) \cdot \left( \Delta\theta - \frac{\Delta\theta^3}{3!} + \frac{\Delta\theta^5}{5!} \right) \approx 0, & \sin(\theta) \cdot \sin(\Delta\theta) &= \cos(\theta) \cdot \left( \Delta\theta - \frac{\Delta\theta^3}{3!} + \frac{\Delta\theta^5}{5!} \right) \approx 0, \\ \cos(\theta) \cdot \cos(\Delta\theta) &= \cos(\theta) \cdot \left( 1 - \frac{\Delta\theta^2}{2!} + \frac{\Delta\theta^4}{4!} \right) \approx \cos(\theta), & \sin(\theta) \cdot \cos(\Delta\theta) &= \sin(\theta) \cdot \left( 1 - \frac{\Delta\theta^2}{2!} + \frac{\Delta\theta^4}{4!} \right) \approx \sin(\theta), \end{aligned}$$

Wanneer we de bovenstaande benaderingen in vergelijkingen 23 en 24 substitueren, verkrijgen we als resultaat vergelijkingen 7 en 8. Daarom kunnen vergelijkingen 11,12 en 13 ook worden toegepast als statische vergelijkingen voor kromme constructies.

Daarnaast is  $\theta$  nu geen constante meer over de hele lengte van de constructie omdat de kromme geen constante  $\theta$  heeft maar blijft variëren zolang  $x$  verandert. Daarom is  $\theta$  een functie van  $x$ , het betreft de afgeleide van de constructiefunctie. Bijvoorbeeld, als de ligger de functie  $x^2$  volgt, is  $\theta$  gelijk is aan  $2x$  en dus  $\cos(\theta) = \cos(2x)$ .

### 4.2.1. Globale $\theta$

In deze paragraaf wordt er onderzocht of de globale  $\theta$  (normale afgeleide van de constructiefunctie over de hele lengte) een oplossing geeft voor een kromme ligger. In Figuur 16 is het getoond wat er wordt bedoeld met de globale  $\theta$ .



Figuur 16: globale  $\theta$ .

De dwarskrachtfunctie in vergelijking 27 laten zien dat de integraal gecompliceerder is geworden omdat  $\theta$ ,  $q_z$  en  $q_x$  allemaal functies van  $x$  zijn. Daarna moet vergelijking 27 nog drie keer worden geïntegreerd om de doorbuigingsfunctie te vinden.

$$V(x) = \int (-\sin(\theta) \cdot q_x - \cos(\theta) \cdot q_z) dx \quad (27)$$

Toen deze methode in Python is geprobeerd, bleek het niet meer te reageren. Daarom zijn de volgende alternatieven overwogen om oplossingen te verkrijgen.

- **Alternatief 1: splitsen van functies**

$$V(x) = (\int q_z dx \cdot \int \cos(\theta) dx) - (\int q_x dx \cdot \int (\sin(\theta) dx))$$

- **Alternatief 2: Taylorreeks toepassen**

$$V(x) = \int -\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots\right) \cdot q_x - \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \dots\right) \cdot q_z dx$$

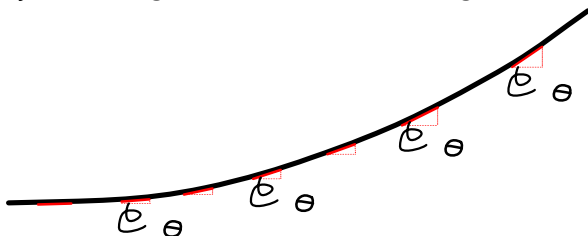
- **Alternatief 3 : Taylorreeks toepassen op alternatief 1**

$$V(x) = -\int \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\Delta\theta^5}{5!} \dots\right) dx \cdot \int q_x dx - \int \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \dots\right) dx \cdot \int q_z dx$$

Bij alle alternatieven kon Python de doorbuigingsfunctie niet kunnen afleiden dat komt door de bovenstaande redenen. Het was de plan om varianten 1 en 3 met de hand op te lossen maar aan het onderzoeken bleek dat het splitsen van de integraal van een product in het product van de integralen is niet toegestaan omdat  $\theta$ ,  $q_z$  en  $q_x$  allemaal van  $x$  zijn. Daarom zouden varianten 1 en 3 niet de goede oplossing geven.

#### 4.2.2. Lokale $\theta$

In deze paragraaf wordt er onderzocht of de lokale  $\theta$  een oplossing geeft voor een kromme ligger. In Figuur 17 is het getoond wat er wordt bedoeld met de lokale  $\theta$ . Het concept achter de lokale  $\theta$  is om te profiteren van het idee dat een kromme lijn een opeenvolging van kleine lijnsegmenten is die elkaar opvlogen. De lokale  $\theta$  is helling van elke lijnsegment en die wordt berekend door  $\tan(\theta) = \frac{dy}{dx}$  waarbij  $dy$  is de hoogteverschil en  $dx$  is de lengte van de lijnsegment in de x-richting.



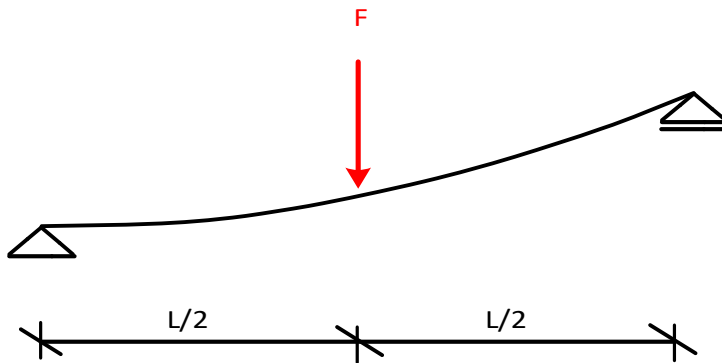
Figuur 17: De kromme lijn wordt verdeeld tot lijnsegmenten en voor elke segment wordt de hoogteverschil bepaald waardoor  $\theta$  kan worden berekend voor elke segment.

### 4.3. Toepassing

In dit hoofdstuk worden twee voorbeelden behandeld om de beschreven theorie in paragraaf 4.4.2 te verduidelijken. In bijlage 3 worden de figuren weer getoond en vergeleken met de figuren die met MatrixFrame gemaakt.

#### 4.3.1. Voorbeeld 4: parabolische constructie

In dit voorbeeld wordt een parabolische ligger behandeld die op twee steunpunten staat en met een kracht  $F$  van 10 KN halverwege is belast, Met behulp van Macaulay's methode. Figuur 18 laat de constructie zien.



Figuur 18: parabolische ligger die de functie  $\frac{x^2}{5 \cdot L}$  volgt.

De eerste stap is om de ligger tot kleine segmenten te verdelen die gelijke lengte hebben. Vervolgens wordt de hoogteverschil voor elke stuk berekend. Daarna kunnen we de hoek  $\theta$  voor iedere segment bepalen. Deze  $\theta$ 's worden later gebruikt in de vergelijkingen 11, 12 en 13.

De krachtenvergelijkingen van deze constructie zijn hieronder te zien. Verder worden de verticale oplegreacties in dit voorbeeld naar boven gericht en de horizontale oplegreactie naar rechts genomen.

$$q_z(x) = -A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^{-1} + F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^{-1} - B_v \cdot \langle x - L \rangle^{-1}$$

$$q_x(x) = A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^{-1}$$

Door de vergelijking 11 vier keer te integreren is de doorbuigingsvergelijking te bepalen. Het integreren van de benoemde vergelijking geeft de volgende vergelijkingen:

$$V(x) = -\sin(\theta) \cdot A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^0 - \cos(\theta) \cdot \left( -A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^0 + F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^0 - B_v \cdot \langle x - L \rangle^0 \right) + C_v$$

$$M(x) = -\tan(\theta) \cdot A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^1 + \left( A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^1 - F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^1 + B_v \cdot \langle x - L \rangle^1 \right) + C_v \cdot x + C_M$$

$$EI \cdot \varphi(x) = -\tan(\theta) \cdot \frac{A_h}{2} \cdot \langle x - 0 \rangle^2 + \frac{1}{2} \left( A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^2 - F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^2 + B_v \cdot \langle x - L \rangle^2 \right) + C_v \cdot \frac{x^2}{2} + C_M \cdot x + C_\varphi$$

$$EI \cdot w(x) = \tan(\theta) \cdot \frac{A_h}{6} \cdot \langle x - 0 \rangle^3 - \frac{1}{6} \left( A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^3 - F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^3 + B_v \cdot \langle x - L \rangle^3 \right) - C_v \cdot \frac{x^3}{6} - C_M \cdot \frac{x^2}{2} - C_\varphi \cdot x + C_w$$

Vervolgens moet vergelijking 12 één keer worden geïntegreerd om de normaalkrachtsvergelijking te verkrijgen:

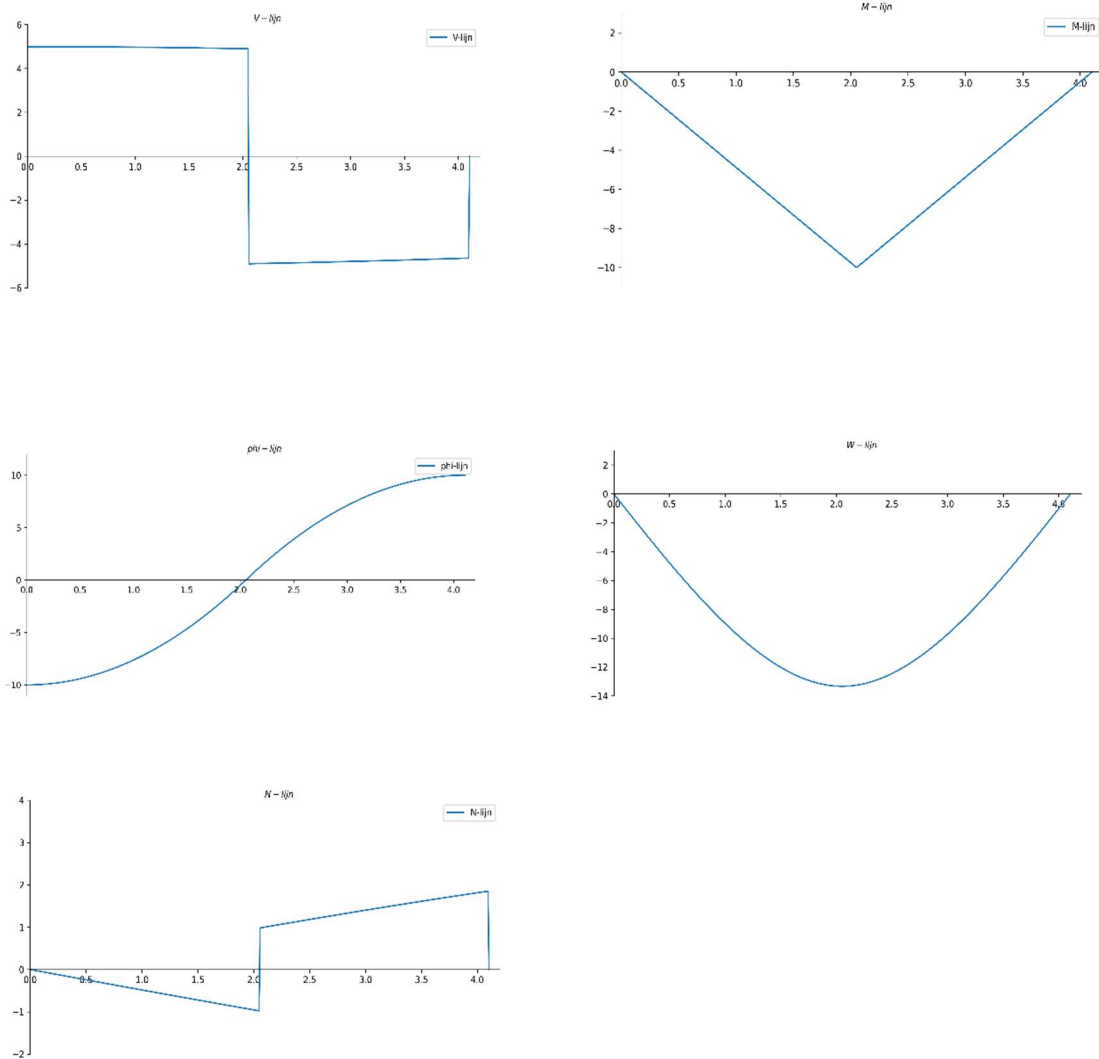
$$N(x) = -\cos(\theta) \cdot A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^0 + \sin(\theta) \cdot \left( -A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^0 + F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^0 - B_v \cdot \langle x - L \rangle^0 \right) + C_N$$

Het is belangrijk rekening te houden met het feit dat de lijnsegmenten verschillende waarden voor  $\theta$  hebben.

Hieronder zijn de randvoorwaarden voor dit voorbeeld:

$$M(0) = 0 ; w(0) = 0 ; M(L) = 0 ; w(L) = 0 ; V(0^-) = 0 ; N(0^-) = 0 ; V(L^+) = 0 ; N(L^+) = 0$$

Na het oplossen van alle onbekenden is het mogelijk om alle interne krachten, de rotatie en de doorbuiging van de ligger te visualiseren met behulp van python. De resultaten zijn in figuur 19 te zien.

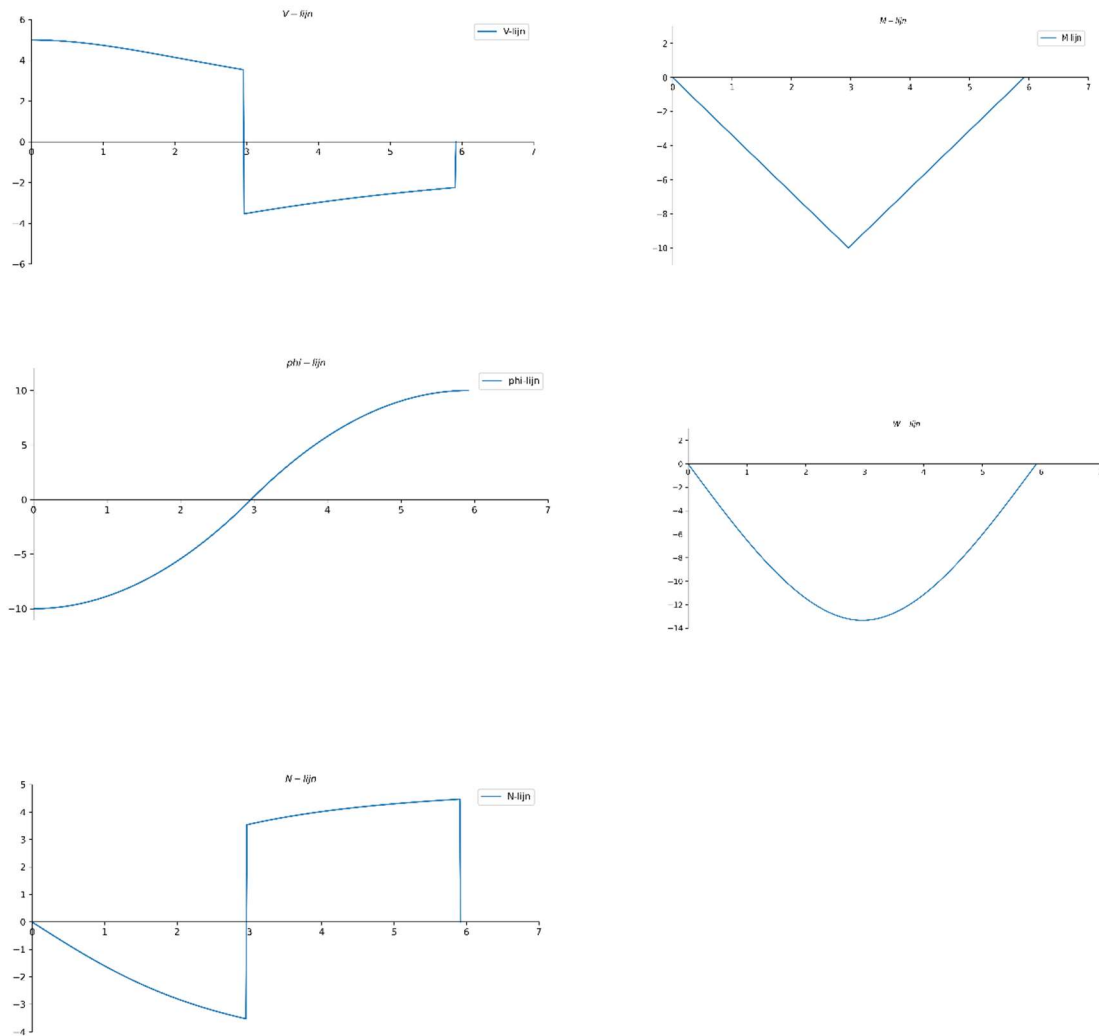


Figuur 19: De interne krachten en de vervormingen lijnen van constructie in voorbeeld 4.

#### 4.3.2. Voorbeeld 5: parabolische constructie

In dit voorbeeld wordt een parabolische ligger behandeld die op twee steunpunten staat en met een kracht  $F$  van 10 KN halverwege is belast. Met behulp van Macaulay's methode. Figuur 18 laat de constructie zien. Het enige verschil met het bovenstaande voorbeeld is dat de constructie de functie  $\frac{x^2}{L}$  volgt waardoor de hoek  $\theta$  scherper zal zijn.

Dezelfde methode van het bovenstaande voorbeeld is van toepassing in dit voorbeeld. De verkregen resultaten zijn hieronder in figuur 20 te zien.



Figuur 20: De interne krachten en de vervormingen lijnen van constructie in voorbeeld 5.

Met betrekking tot gekikte constructies wordt een voorbeeld in bijlage 4 behandeld waarbij een nieuwe methode geïntroduceerd. De methode is als volgt:

de constructie beschouwd als twee afzonderlijke staven, waarbij elke staaf onder een bepaalde hoek staat met de horizontale as. Dit stelt ons in staat om de eerdergenoemde differentiaalvergelijking afzonderlijk toe te passen op elke staaf. Om de staven weer met elkaar te verbinden, wordt een iteratiemethode gebruikt. Deze interactiemethode stelt om twee correctiekrachten zowel aan het einde van de eerste staaf als aan het begin van de tweede staaf toe te voegen. De correctiekrachten worden bepaald door de horizontale en de verticale componenten van de normale en de dwarse krachten in beide staven. De correctiekrachten dienen voortdurend aangepast te worden totdat de krachten niet meer veranderen of de verandering te verwaarlozen is (zie bijlage 4).

## Discussie

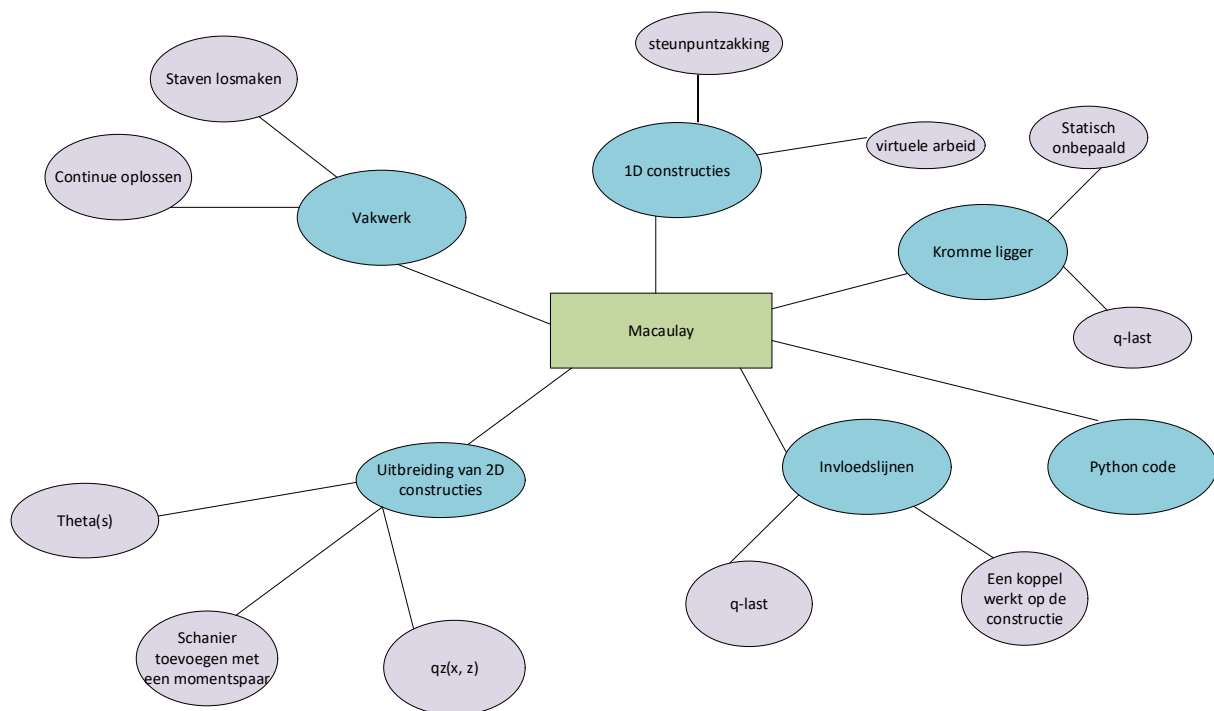
In dit hoofdstuk worden de gevonden uitkomsten besproken. Daarna worden suggesties gemaakt voor mogelijk vervolgonderzoek.

Met de beschreven methode konden alle interne krachten- en vervormingslijnen worden geplot voor de schuine en kromme statische bepaalde ligger.

Het is opmerkelijk dat een ( $\sim 1\%$ ) verschil tussen de waarden van Python en de waarden van MatrixFrame. Dat komt omdat de kromme ligger in MatrixFrame tot 20 lijnsegmenten was verdeeld terwijl de kromme ligger in Python tot 550 lijnsegmenten was verdeeld.

## Aanbevelingen vervolgonderzoek

Het is interessant om te kijken naar de volgende onderwerpen om Macaulay's methode uit te bereiden:



Figuur 21: Mogelijke onderwerpen om de methode van Macaulay uit te bereiden.

Deze spindigram toont verschillende punten die nog openstaan en waarover onderzoek worden verricht. De meeste belangrijke punten zijn als volgt:

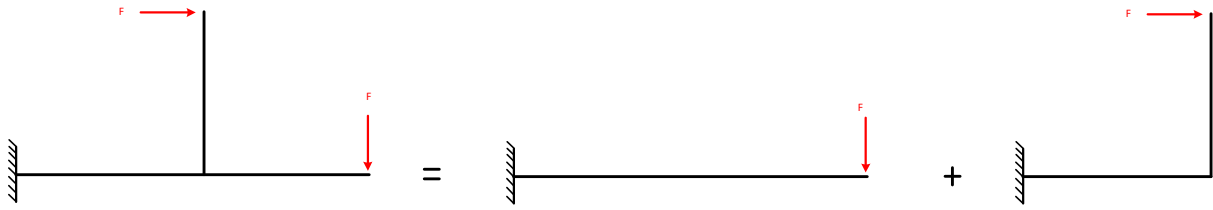
- Tweedimensionale constructies analyseren waar drie staven bij een knooppunt.

Er zijn drie mogelijke methodes geprobeerd om tot een oplossing te komen voor constructies waar drie staven samen bij een knooppunt komen:

### 1. Splitsen van de constructie:

Het concept achter deze methode was om de constructie te verdelen tot twee constructies. Daarna worden de twee constructies opgeteld.

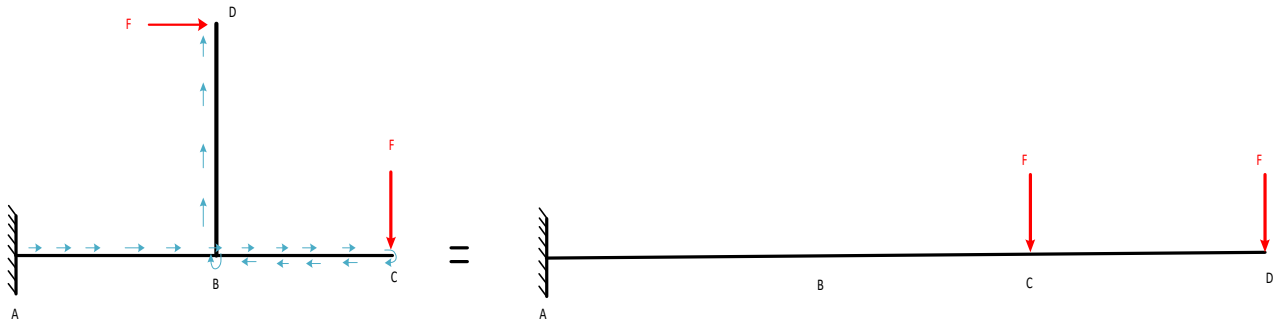




Figuur 22: Splitsen van constructie.

Deze methode geeft geen juiste oplossing.

2. De constructie denkbeeldig plat te visualiseren:



Figuur 23: De blauwe pijlen geven de route langs de constructie nemen.

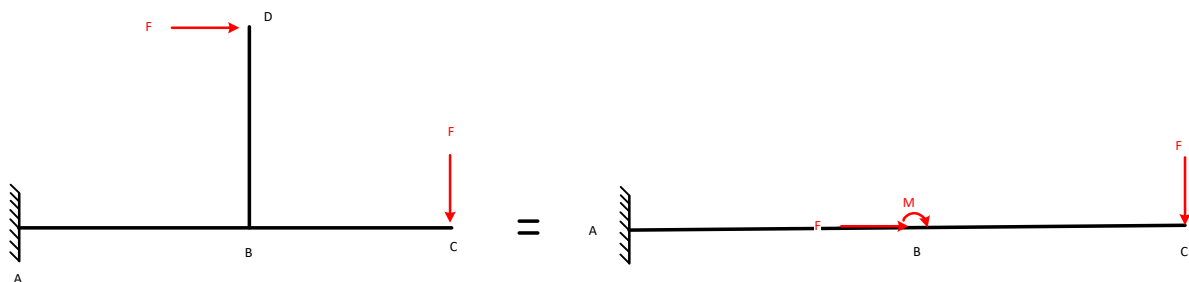
Het concept was om de constructie plat denkbeeldig te visualiseren. Verder worden één onbekende horizontale kracht en één onbekende verticale kracht op de locatie waar een knik plaatsvindt. De hoek bij de knooppunt C is  $180^\circ$  en bij de knooppunt B is  $270^\circ$  wanneer we teruggaan naar de verticale staaf. De voorwaarden zijn volgens de beschreven methode in (Wulp, 2023).

$$N(a^+) = \cos(\theta) \cdot N(a^-) - \sin(\theta) \cdot V(a^-)$$

$$V(a^+) = \sin(\theta) \cdot N(a^-) + \cos(\theta) \cdot V(a^-)$$

Deze methode geeft geen oplossing omdat het aantal voorwaarden waren meer dan het aantal van de onbekenden. Dat komt omdat staaf BC twee keer is meegenomen. Als er een methode kon worden gevonden die laat de interne krachten van BC gelijk te stellen aan CB, zou deze methode misschien kunnen werken.

3. De constructie van drie staven naar twee staven brengen:



Figuur 24: constructie omzetten naar twee staven.

Deze methode is niet geprobeerd maar het lijkt het meest te werken omdat deze methode al is gewerkt voor de normale differentiaalvergelijkingsmethode.

- Onderzoeken of Macaulay's methode van toepassing is op vakwerken.
- Het lijkt ook interessant om een Python code op te schrijven die voor alle eendimensionale of tweedimensionale constructies geldt.
- Er kan worden gekeken naar invloedslijnen voor een constructies die met q-last wordt belast.

## Conclusie

Het doel van dit rapport was om de volgenden vragen te onderzoeken:

*Hoe kan de methode van Macaulay worden uitgebreid met betrekking tot zowel schuine liggers als kromme liggers?*

Door de uitgelegde theorie en de toegepaste methodes in dit verslag kan de volgende conclusie worden getrokken:

- Het is gelukt om differentiaalvergelijkingen voor schuine constructies af te leiden.

Als resultaat van de evenwichtsvergelijkingen voor een hellingsnede zijn de volgende vergelijkingen verkregen:

$$\frac{dV}{dx} = -\sin(\theta) \cdot q_x - \cos(\theta) \cdot q_z \quad (28)$$

$$\frac{dN}{dx} = -\cos(\theta) \cdot q_x + \sin(\theta) \cdot q_z \quad (29)$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{V}{\cos(\theta)} \quad (30)$$

De bovenstaande vergelijkingen kunnen worden gebruikt als statische vergelijkingen voor constructies die onder een hoek staan met de horizontale as. Bovendien worden er geen wijzigingen aangebracht in de kinematische vergelijkingen of de constitutieve vergelijkingen. Met behulp van deze vergelijkingen en onder de juiste voorwaarden kunnen de krachtenvergelijkingen worden opgesteld, waardoor zowel de interne krachten als de doorbuigingen worden bepaald.

- Dezelfde differentiaalvergelijkingen zijn ook van toepassing voor kromme constructies.

Nadat de evenwichtsvergelijkingen voor een kniksnede, zijn de volgende vergelijkingen gevonden:

$$q_x \cdot \Delta z - \cos(\theta) \cdot N - \sin(\theta) \cdot V + (\sin(\theta) \cdot \cos(\Delta\theta) + \cos(\theta) \cdot \sin(\Delta\theta)) \cdot (V + \Delta V) + (\cos(\theta) \cdot \cos(\Delta\theta) - \sin(\theta) \cdot \sin(\Delta\theta)) \cdot (N + \Delta N) = 0 \quad (31)$$

$$q_z \cdot \Delta x + \sin(\theta) \cdot N - \cos(\theta) \cdot V + (\cos(\theta) \cdot \cos(\Delta\theta) - \sin(\theta) \cdot \sin(\Delta\theta)) \cdot (V + \Delta V) - (\sin(\theta) \cdot \cos(\Delta\theta) + \cos(\theta) \cdot \sin(\Delta\theta)) \cdot (N + \Delta N) = 0 \quad (32)$$

Een aanname stelt dat een kromme lijn een opeenvolging van lijnsegmenten is die elkaar opvlogen met kleine hoekverschillen. Hierdoor zou  $\Delta\theta$  zo klein zijn voor een kromme lijn. Daarom kunnen de volgende Taylorreeksen worden gebruikt voor de functies  $\sin(\theta)$  en  $\cos(\theta)$ :

$$\sin(\Delta\theta) = \Delta\theta - \frac{\Delta\theta^3}{3!} + \frac{\Delta\theta^5}{5!} \dots \quad (33)$$

$$\cos(\Delta\theta) = 1 - \frac{\Delta\theta^2}{2!} + \frac{\Delta\theta^4}{4!} \dots \quad (34)$$

Hierna worden vergelijkingen 28, 29 en 30 verkregen als statische vergelijkingen voor kromme constructies. Verder is het bepalen van  $\theta$  kan zowel globaal als lokaal. Er blijkt dat de statische vergelijkingen met de lokale  $\theta$  een oplossing geven voor statisch bepaald kromme constructies.

- Door deze differentiaalvergelijkingen en Macaulay's methode kunnen de interne krachten- en vervormingslijnen geplot worden

## Bibliografie

- Stephen, N. G. (2007, oktober). Macaulay's Method for a Timoshenko Beam. *Geraadpleegd 2 November 2023*. Opgehaald van [https://www.researchgate.net/publication/233488590\\_Macaulay's\\_Method\\_for\\_a\\_Timoshenko\\_Beam](https://www.researchgate.net/publication/233488590_Macaulay's_Method_for_a_Timoshenko_Beam)
- Caprani, C. (2010, november). *Deflection of Flexural Members - Macaulay's Method 3rd Year Structural Engineering*. *Geraadpleegd 2 November 2023*. Opgehaald van <https://www.colincaprani.com/files/notes/SAIII/Macaulay%27s%20Method%201011.pdf#:~:text=Macaulay%E2%80%99s%20Method%20is%20a%20means%20to%20find%20the,beams%20could%20not%20be%20found%20in%20closed%20form.>
- Wulp, J. v. (2023, Juni 23). De methode van Macaulay voor tweedimensionale constructies. *Geraadpleegd 2 November 2023*. opgehaald van *TU Delft Repositories*: <https://repository.tudelft.nl/islandora/search/author%3A%22van%20der%20Wulp%2C%20Justinus%22?collection=education>

## Bijlagen

### Bijlage 1: Euler-Bernoulli Afleiding

#### Kinematische vergelijkingen:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \quad ; \quad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \quad ; \quad \kappa = -\frac{d^2w}{dx^2}$$

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

#### Constitutieve vergelijkingen:

$$M = EI \cdot \kappa$$

$$N = EA \cdot \varepsilon$$

#### Statische vergelijkingen:

$$\frac{dV}{dx} + q_z = 0 \quad \frac{dM}{dx} - V = 0 \quad \frac{d^2M}{dx^2} + q_z = 0$$

$$\frac{dN}{dx} + q_x = 0$$

## Bijlage 2: Voorbeelden oplossingen

### Voorbeeld 1:

$$A_V = 5 \text{ KN}, A_h = 0 \text{ KN}, B_V = 5 \text{ KN}, C_\varphi = -10, C_V = 0, C_N = 0, C_m = 0, C_w = 0, C_u = 0$$

Om de waarden te controleren, passen we  $\sum F_V = 0, \sum F_h = 0, \text{ en } \sum T = 0$ .

$$\sum F_V = -5 - 5 + 10 = 0$$

$$\sum F_h = 0$$

$$\sum T = -10 * 2 + 5 * 4 = 0$$

### Voorbeeld 2:

Nu dient vergelijking 11 vier keer geïntegreerd te worden. Daardoor worden de onderstaande vergelijkingen verkregen:

$$V(x) = -\sin(\theta) \cdot (A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^0 - F \cdot \langle x - L \rangle^0) - \cos(\theta) \cdot (-A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^0 + F \cdot \langle x - L \rangle^0 + M_A \cdot \langle x - 0 \rangle^{-1}) + C_V$$

$$M(x) = -\tan(\theta) \cdot (A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^1 - F \cdot \langle x - L \rangle^1) + (A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^1 - F \cdot \langle x - L \rangle^1 - M_A \cdot \langle x - 0 \rangle^0) + C_V \cdot x + C_M$$

$$EI \cdot \varphi(x) = -\tan(\theta) \cdot \frac{1}{2} \cdot (A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^2 - F \cdot \langle x - L \rangle^2) + \left( \frac{A_v}{2} \cdot \langle x - 0 \rangle^2 - \frac{F}{2} \cdot \langle x - L \rangle^2 - M_A \cdot \langle x - 0 \rangle^1 \right) + C_V \cdot \frac{x^2}{2} + C_M \cdot x + C_\varphi$$

$$EI \cdot w(x) = \tan(\theta) \cdot \frac{1}{6} \cdot (A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^3 - F \cdot \langle x - L \rangle^3) - \left( \frac{A_v}{6} \cdot \langle x - 0 \rangle^3 - \frac{F}{6} \cdot \langle x - L \rangle^3 - \frac{M_A}{2} \cdot \langle x - 0 \rangle^2 \right) - C_V \cdot \frac{x^3}{6} - C_M \cdot \frac{x^2}{2} - C_\varphi \cdot x + C_w$$

Vervolgens moet vergelijking 12 twee keer worden geïntegreerd om de normaalkrachtsvergelijking en de horizontale verplaatsing te bepalen.

$$N(x) = -\cos(\theta) \cdot (A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^0 - F \cdot \langle x - L \rangle^0) + \sin(\theta) \cdot (-A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^0 + F \cdot \langle x - L \rangle^0 + M_A \cdot \langle x - 0 \rangle^{-1}) + C_N$$

$$u(x) = -\cos(\theta) \cdot (A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^1 - F \cdot \langle x - L \rangle^1) + \sin(\theta) \cdot (-A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^1 + F \cdot \langle x - L \rangle^1 + M_A \cdot \langle x - 0 \rangle^0) + C_N \cdot x + C_u$$

De verkregen waarden zijn:

$$A_V = 10 \text{ KN}, A_h = 10 \text{ KN}, M_A = 20 \text{ KN/m}, C_\varphi = 0, C_V = 0, C_N = 0, C_m = 0, C_w = 0, C_u = -8.94$$

Om de waarden te controleren, passen we  $\sum F_V = 0, \sum F_h = 0, \text{ en } \sum T = 0$ .

$$\sum F_V = 10 - 10 = 0$$

$$\sum F_h = 10 - 10 = 0$$

$$\sum T = 10 * 2 - 10 * 4 + 20 = 0$$

### Voorbeeld 3:

Om de doorbuigingsfunctie te bepalen, dient vergelijking 11 geïntegreerd. De krachten- en de doorbuigingsvergelijkingen zijn dan als volgt:

$$V(x) = -\sin(\theta) \cdot (A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^0 - F \cdot \langle x - \frac{l}{2} \rangle^0) - \cos(\theta) \cdot (-A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^0 - B_V \cdot \langle x - L \rangle^0 + M_A \cdot \langle x - 0 \rangle^{-1} + T \cdot \langle x - \frac{l}{4} \rangle^{-1}) + C_V$$

$$M(x) = -\tan(\theta) \cdot (A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^1 - F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^1) + (A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^1 + B_v \cdot \langle x - L \rangle^1 - M_A \cdot \langle x - 0 \rangle^0 - T \cdot \langle x - \frac{L}{4} \rangle^0) + C_v \cdot x + C_m$$

$$EI \cdot \varphi(x) = -\tan(\theta) \cdot \frac{1}{2} \cdot (A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^2 - F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^2) + (\frac{A_v}{2} \cdot \langle x - 0 \rangle^2 + \frac{B_v}{2} \cdot \langle x - L \rangle^2 - M_A \cdot \langle x - 0 \rangle^1 - T \cdot \langle x - \frac{L}{4} \rangle^1) + C_v \cdot \frac{x^2}{2} + C_m \cdot x + C_\varphi$$

$$EI \cdot w(x) = \tan(\theta) \cdot \frac{1}{6} \cdot (A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^3 - F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^3) + (\frac{A_v}{6} \cdot \langle x - 0 \rangle^3 + \frac{B_v}{6} \cdot \langle x - L \rangle^3 - \frac{M_A}{2} \cdot \langle x - 0 \rangle^2 - \frac{T}{2} \cdot \langle x - \frac{L}{4} \rangle^2) - C_v \cdot \frac{x^3}{6} - C_m \cdot \frac{x^2}{2} - C_\varphi \cdot x + C_w$$

Vervolgens dient vergelijking 12 twee keer worden geïntegreerd om de normaalkrachtsvergelijking te verkrijgen.

$$N(x) = -\cos(\theta) \cdot (A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^0 - F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^0) + \sin(\theta) \cdot (-A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^0 - B_v \cdot \langle x - L \rangle^0 + M_A \cdot \langle x - 0 \rangle^{-1} + T \cdot \langle x - \frac{L}{4} \rangle^{-1}) + C_n$$

$$u(x) = -\cos(\theta) \cdot (A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^1 - F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^1) + \sin(\theta) \cdot (-A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^1 - B_v \cdot \langle x - L \rangle^1 + M_A \cdot \langle x - 0 \rangle^0 + T \cdot \langle x - \frac{L}{4} \rangle^0) + C_n \cdot x + C_u$$

De verkregen waarden zijn:

$$A_v = 3.203125 \text{ KN}, B_v = -3.203125 \text{ KN}, A_h = 10 \text{ KN}, M_A = -7.1875 \text{ KN/m}, C_\varphi = 0, C_v = 0, C_n = 0, C_m = 0, C_w = 0, C_u = 3.21$$

Om de waarden te controleren, passen we  $\sum F_v = 0, \sum F_h = 0, \text{ en } \sum T = 0$ .

$$\sum F_v = 3.2 - 3.2 = 0$$

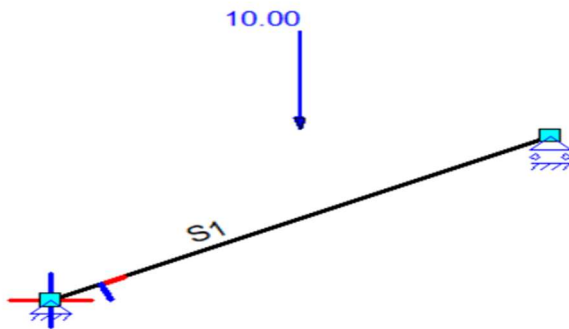
$$\sum F_h = 10 - 10 = 0$$

$$\sum T = 10 + 10 * 1 - 3.203125 * 4 - 7.1875 = 0$$

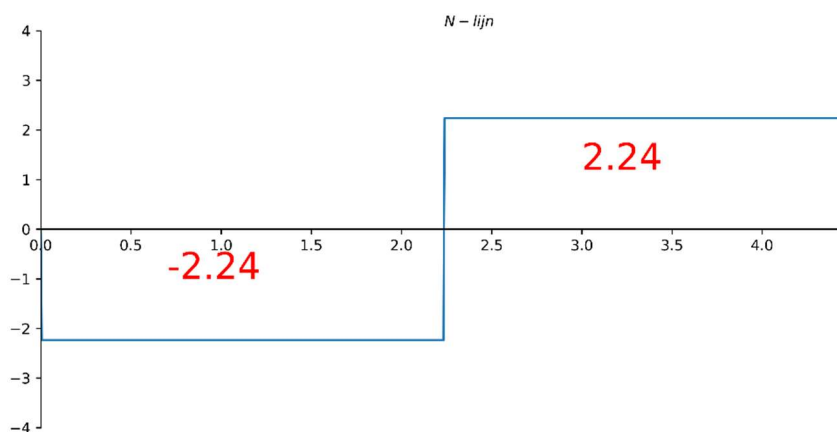
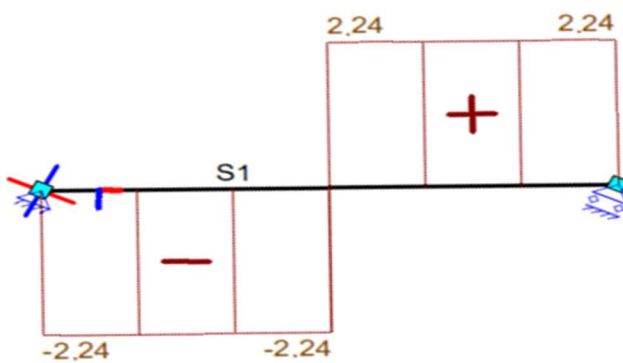
### Bijlage 3: MatrixFrame Check

In deze bijlage worden de waarden van de interne krachten en de vorm van de vervormingen van alle behandelde constructie in dit rapport gecheckt.

#### Voorbeeld 1:

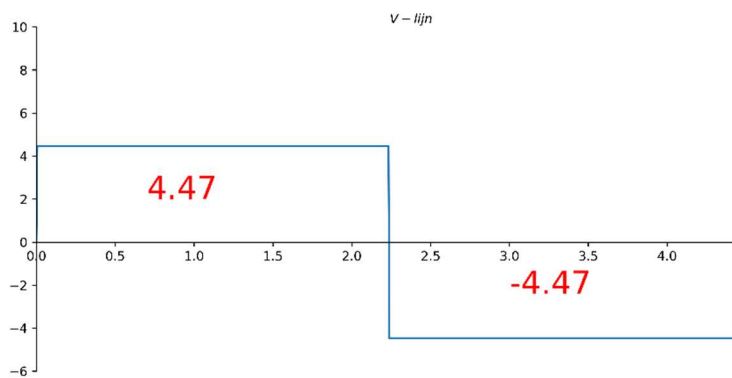
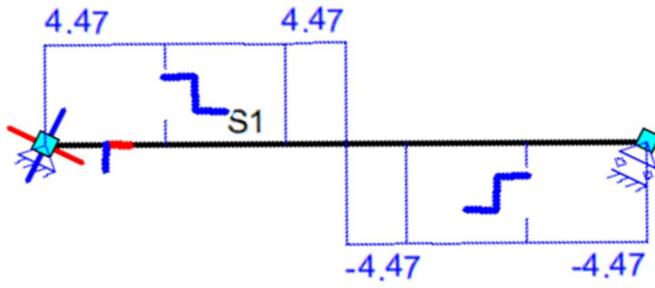


Figuur 25: Constructie die in MatrixFrame is getekend voor voorbeeld 1.

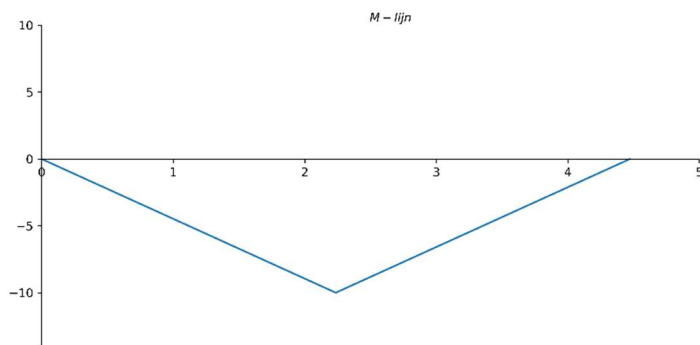


Figuur 26: N-lijn voor de constructie in voorbeeld 1 zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.

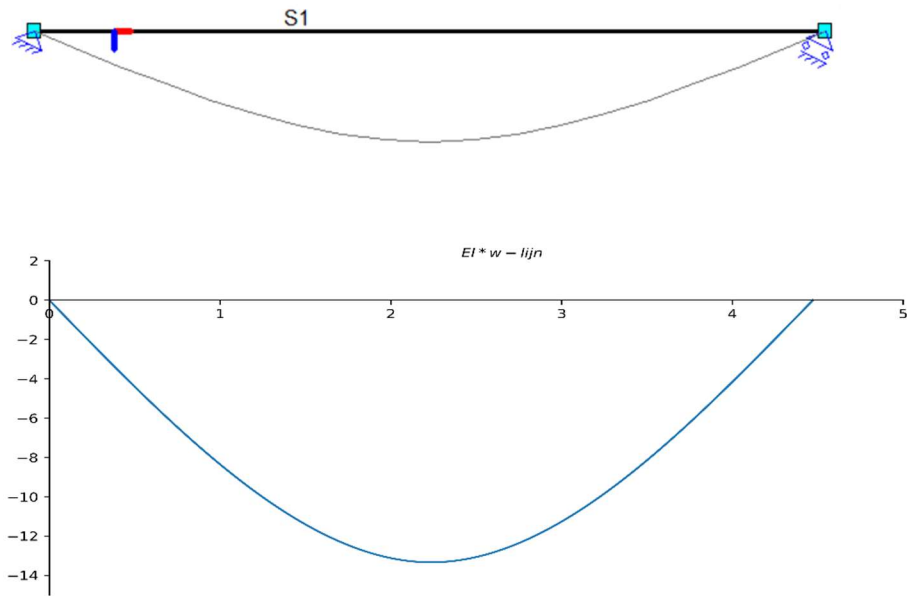




Figuur 27: V-lijn voor de constructie in voorbeeld 1 zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.

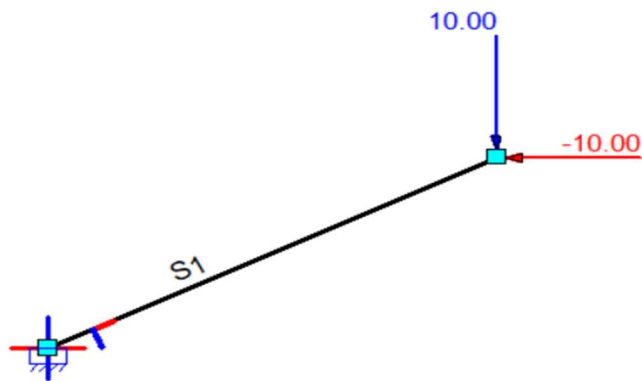


Figuur 28: M-lijn voor de constructie in voorbeeld 1 zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.

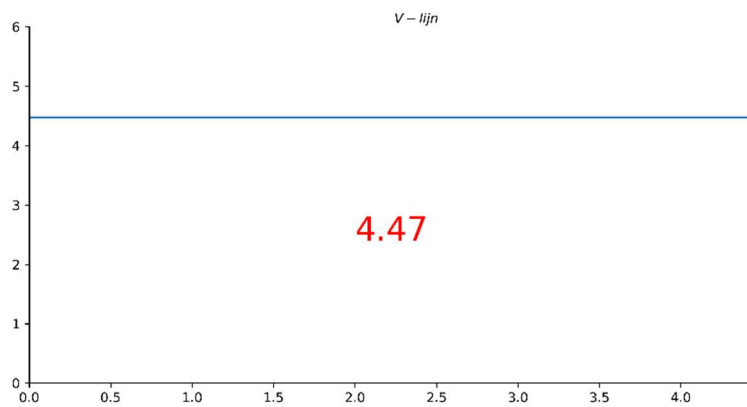
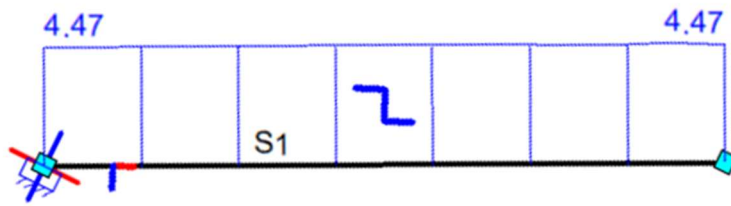


Figuur 29: *w*-lijn voor de constructie in voorbeeld 1 zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.

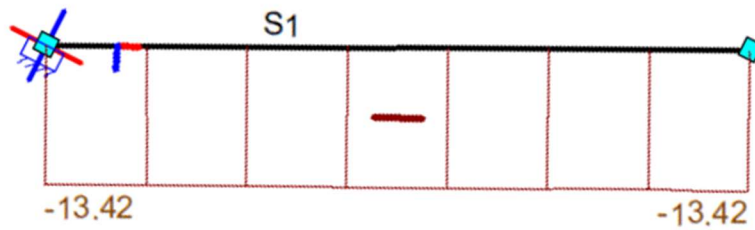
**Voorbeeld 2:**

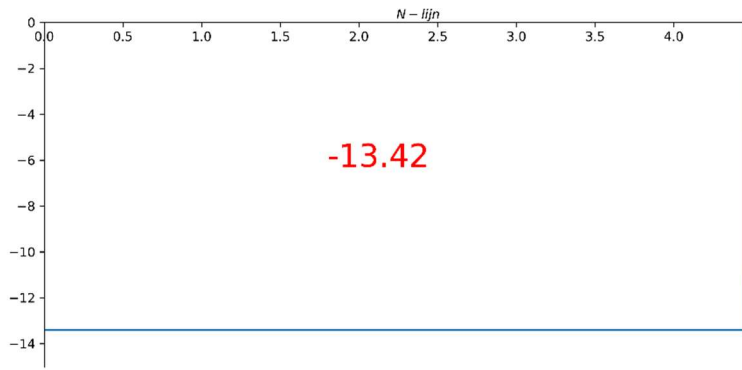


Figuur 30: Constructie die in MatrixFrame is getekend voor voorbeeld 2.

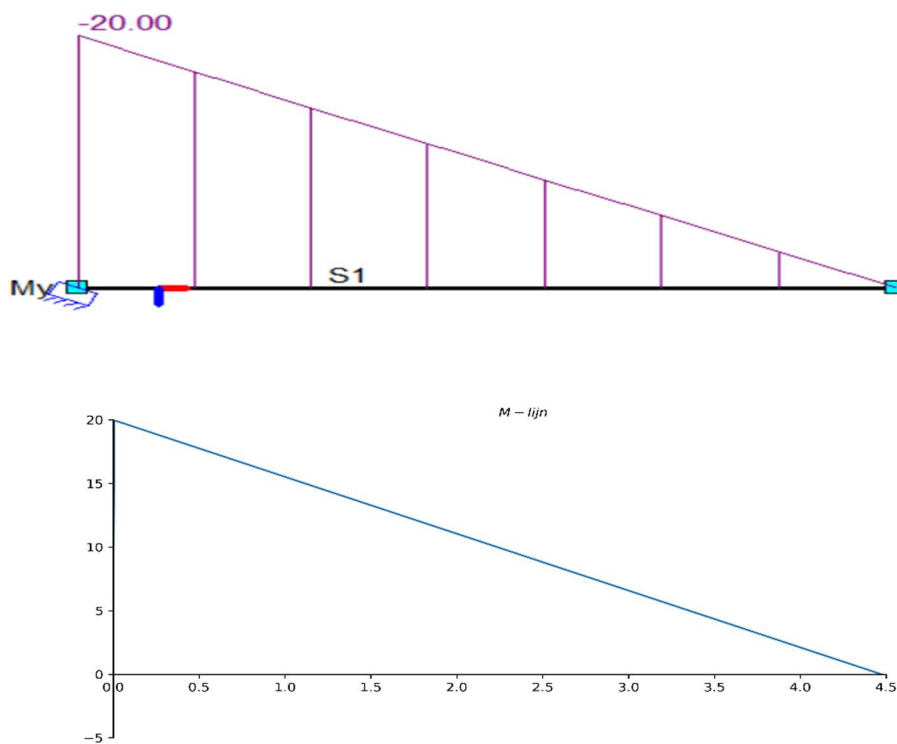


Figuur 31: V-lijn voor de constructie in voorbeeld 2 zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.

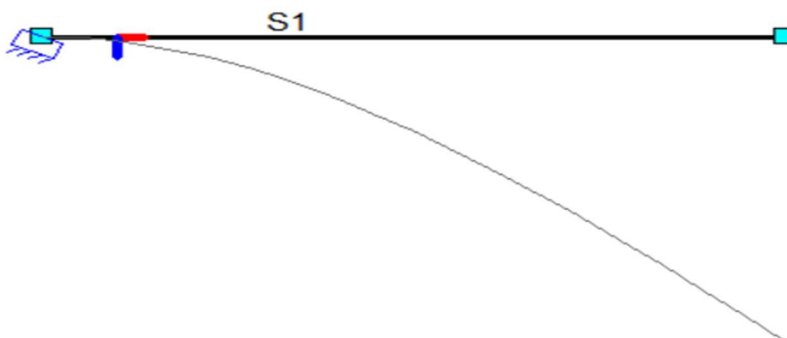


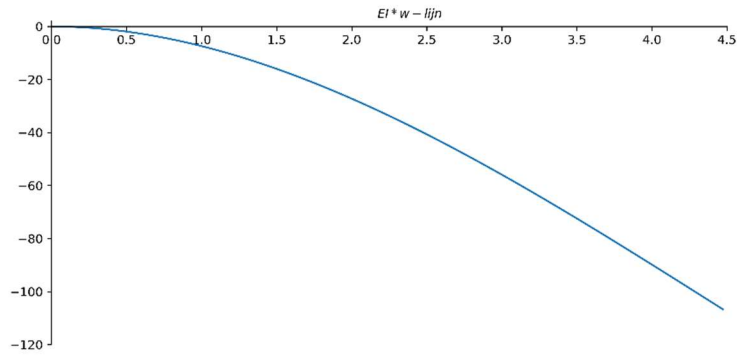


Figuur 32: N-lijn voor de constructie in voorbeeld 2 zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.



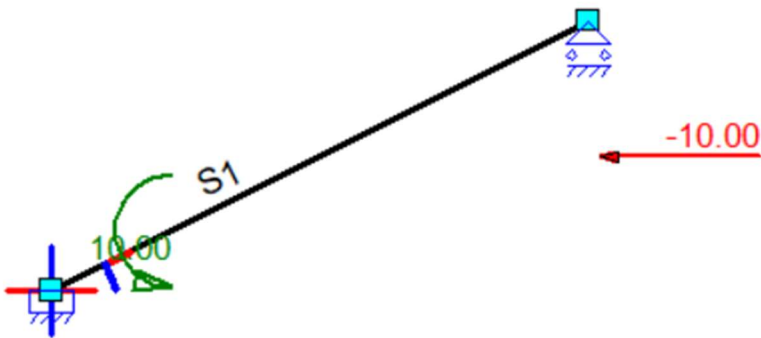
Figuur 33: M-lijn voor de constructie in voorbeeld 2 zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.



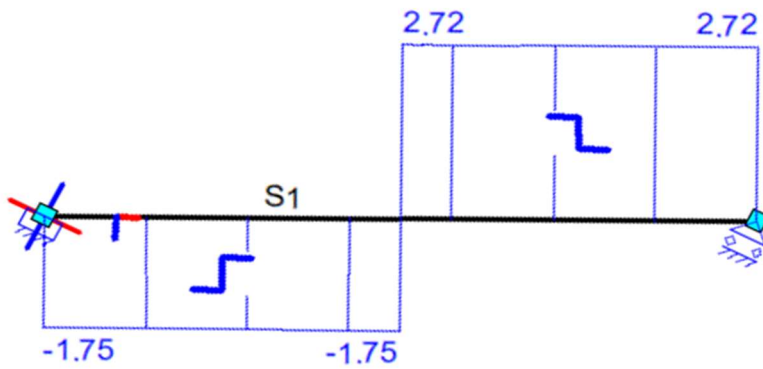


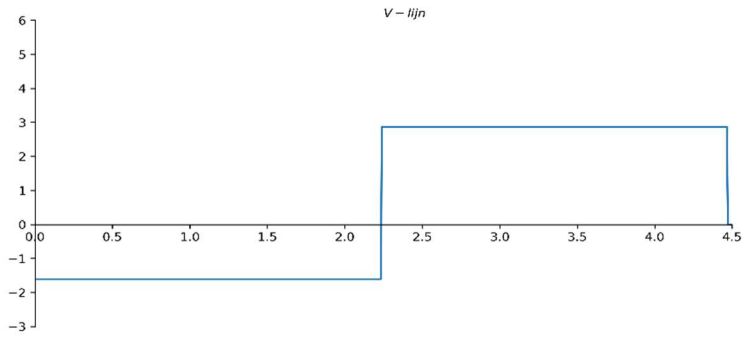
Figuur 34: w-lijn voor de constructie in voorbeeld 2 zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.

**Voorbeeld 3:**

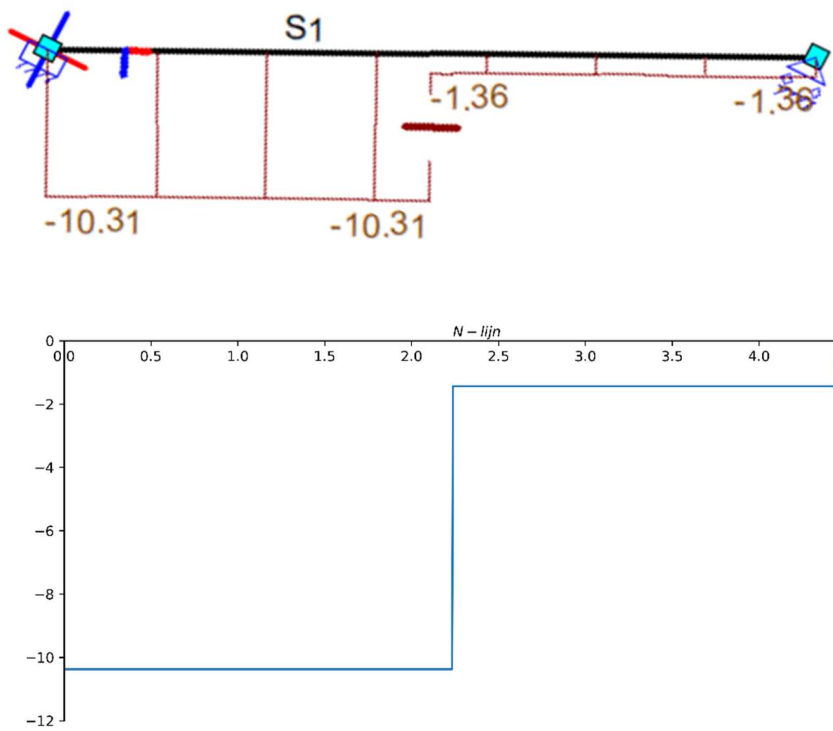


Figuur 35: Constructie die in MatrixFrame is getekend voor voorbeeld 3.

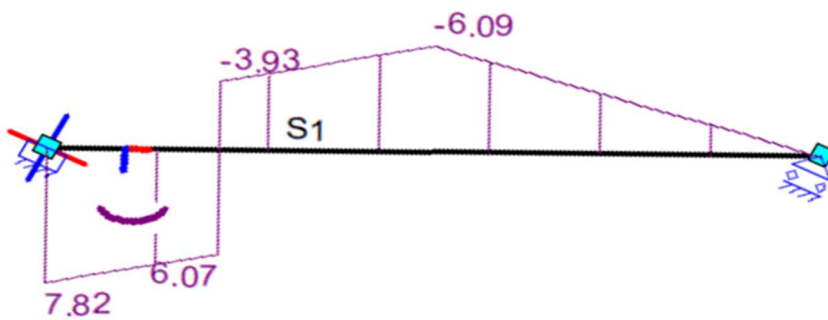


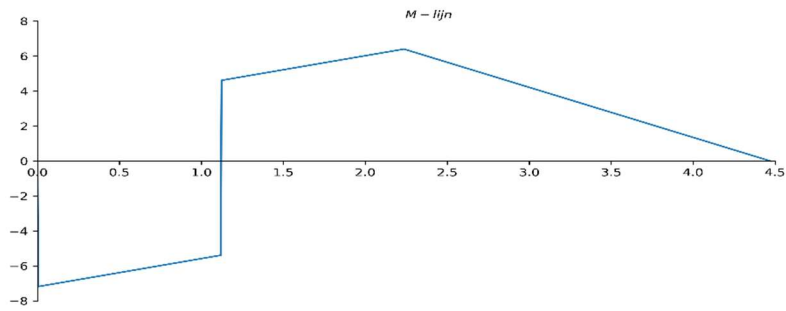


Figuur 36: V-lijn voor de constructie in voorbeeld 3 zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.

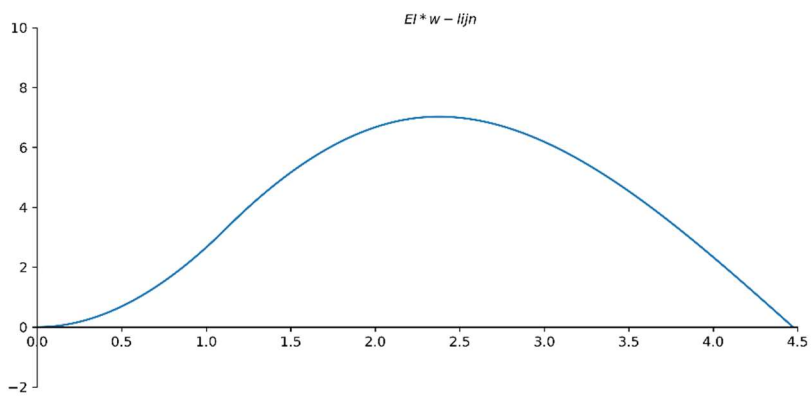
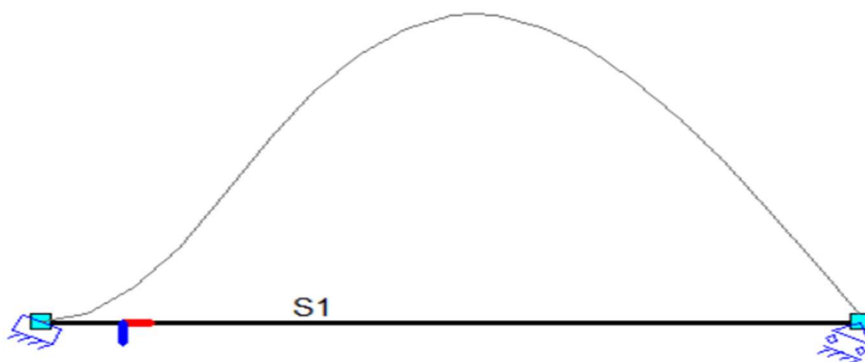


Figuur 37: N-lijn voor de constructie in voorbeeld 3 zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.



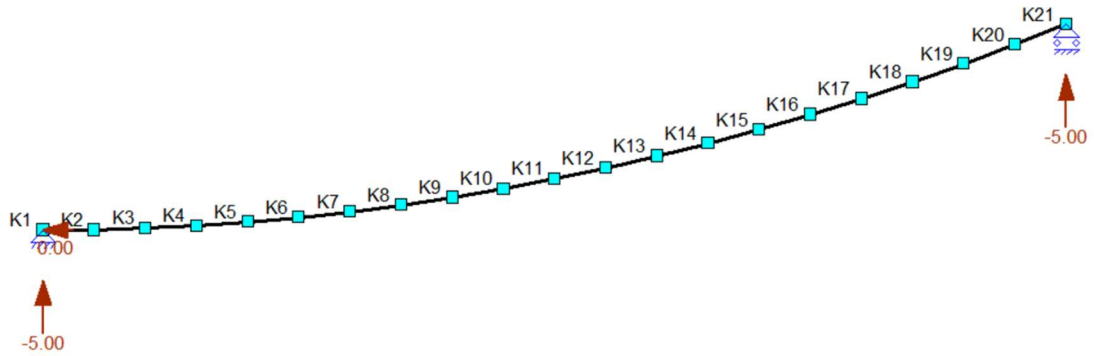


Figuur 38: M-lijn voor de constructie in voorbeeld 3 zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.

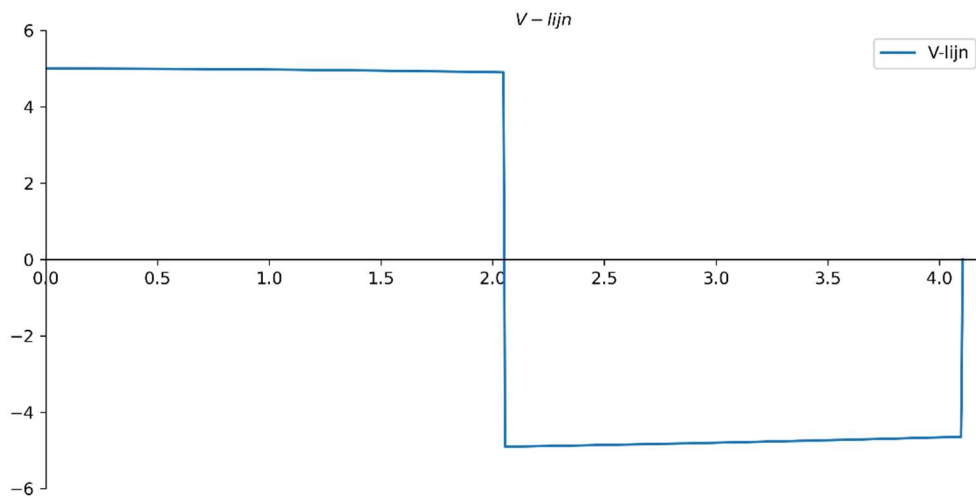
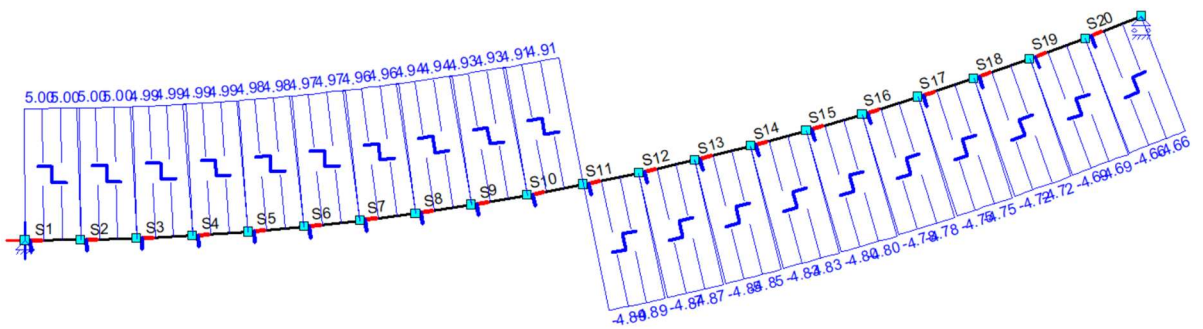


Figuur 39: w-lijn voor de constructie in voorbeeld 3 zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.

**Voorbeeld 4:**

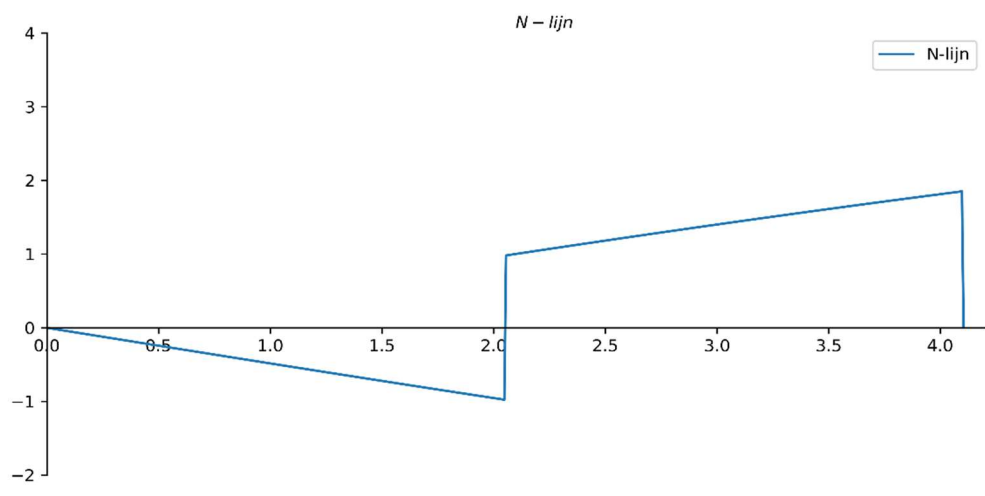
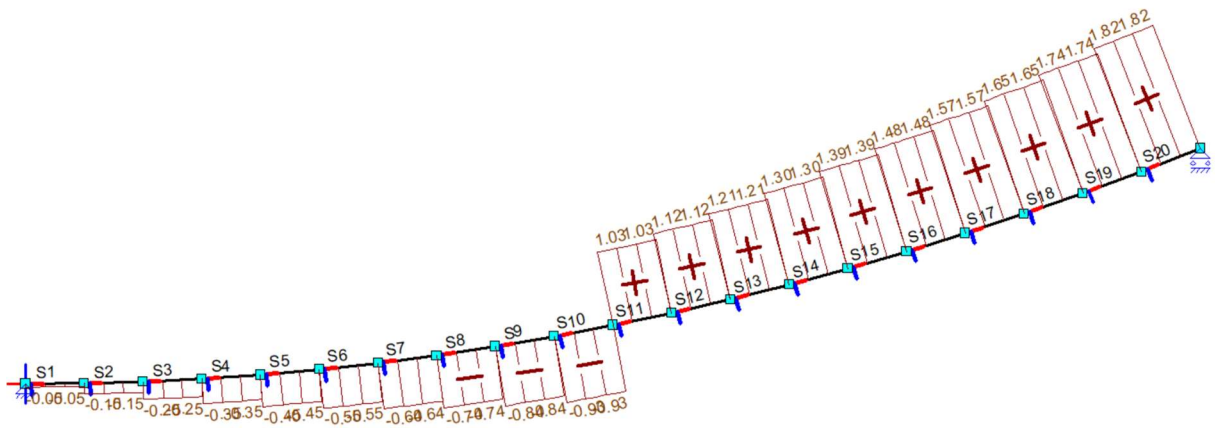


*Figuur 40: Constructie van voorbeeld 4 in MatrixFrame.*

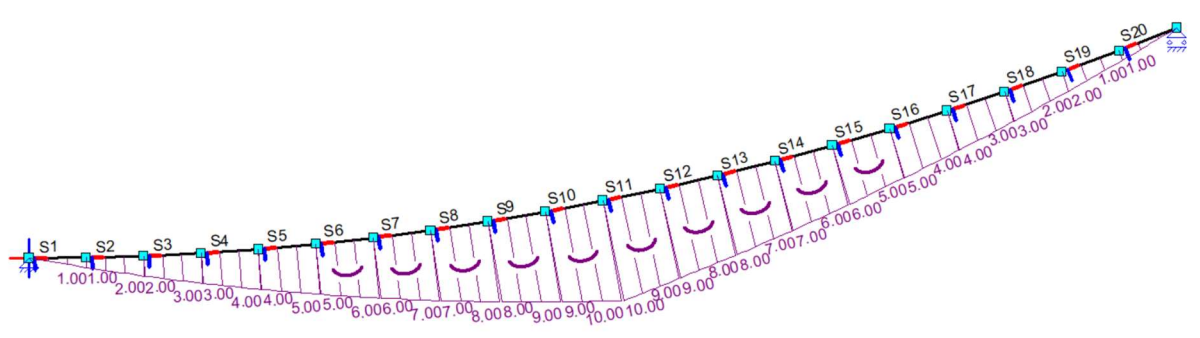


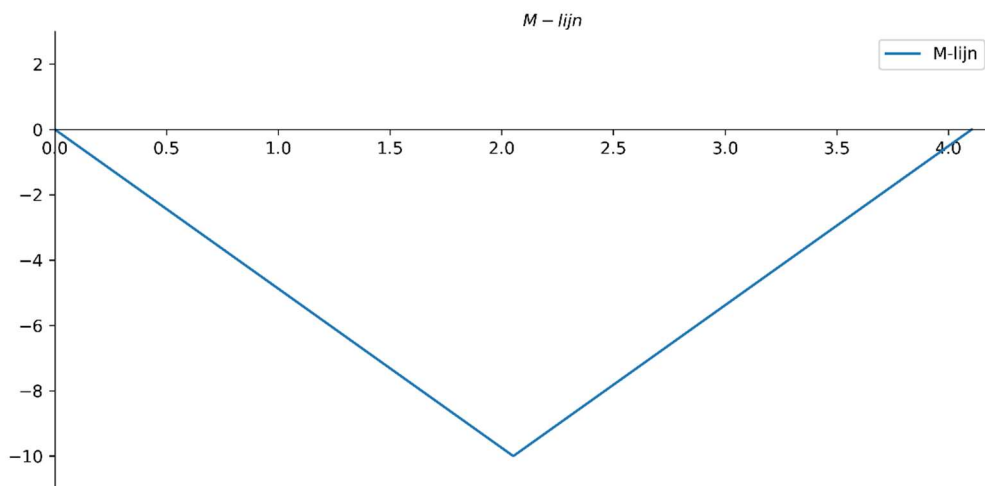
*Figuur 41: V-lijn voor de constructie in voorbeeld 4 zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.*





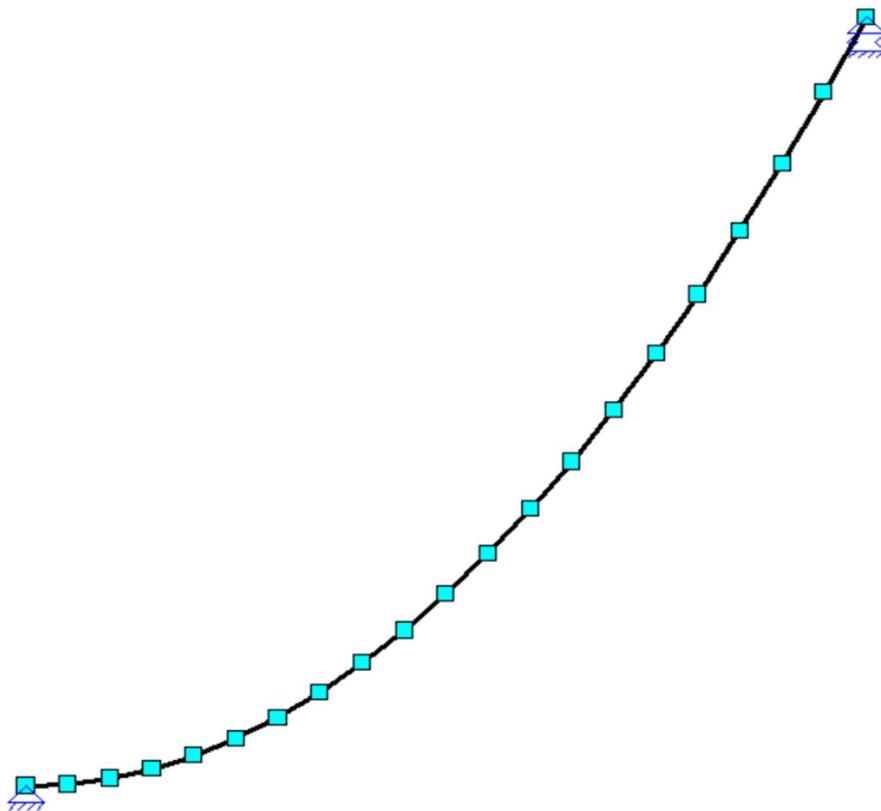
Figuur 42: N-lijn voor de constructie in voorbeeld 4 zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.



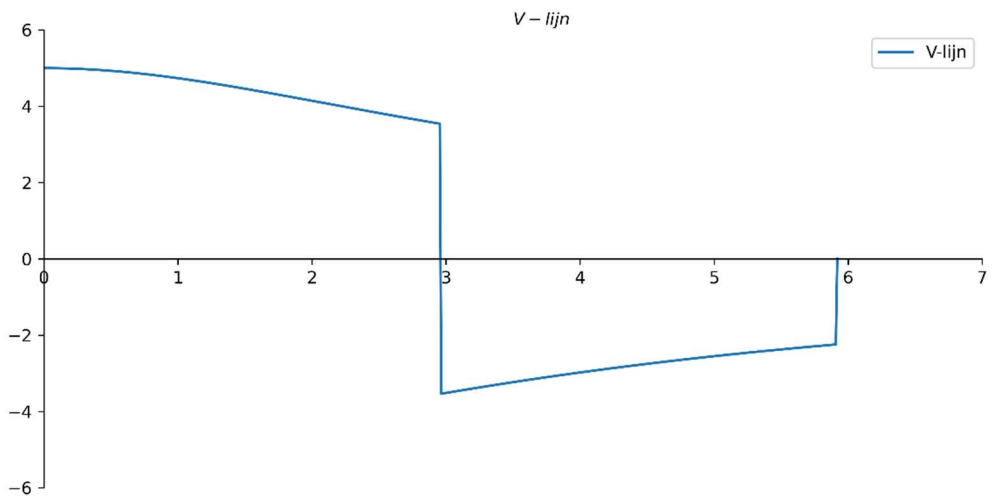
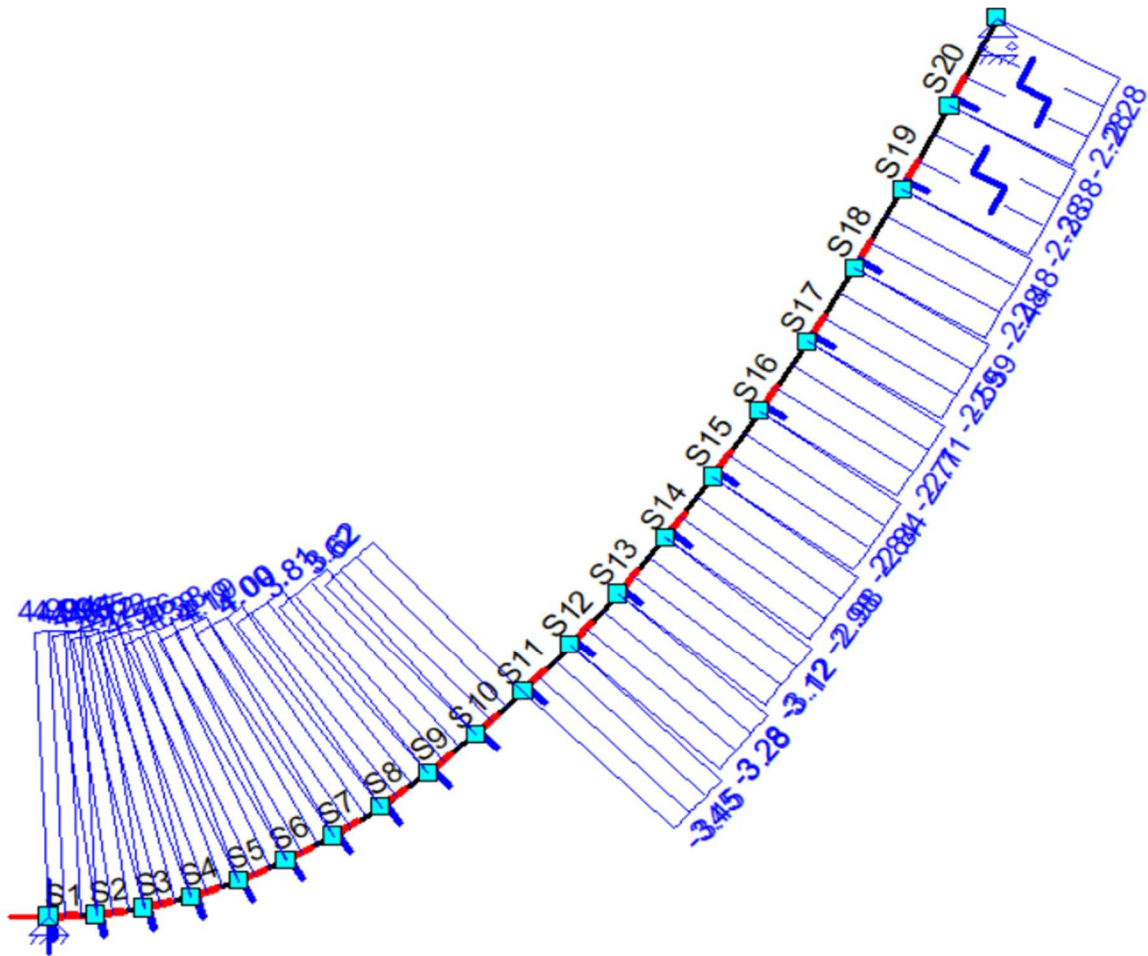


Figuur 43: M-lijn voor de constructie in voorbeeld 4 zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.

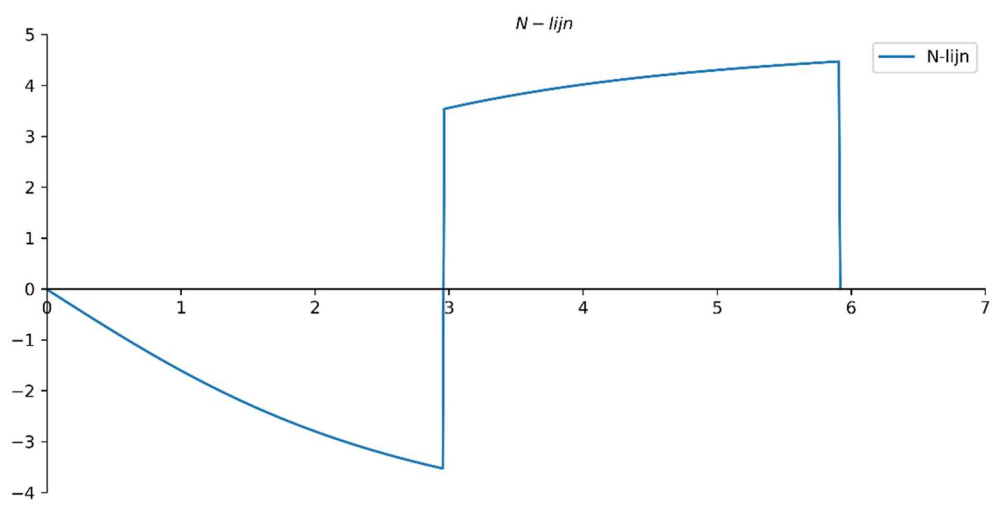
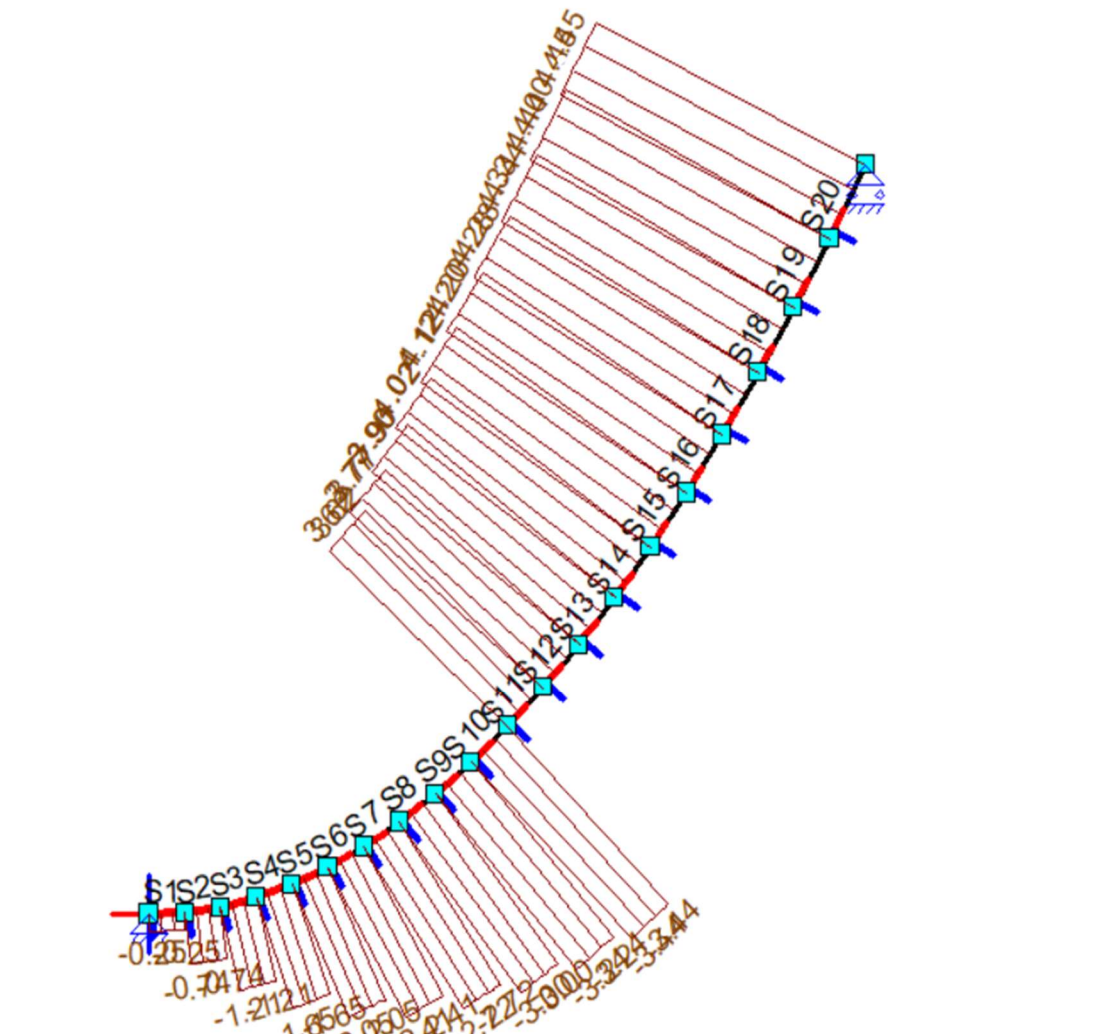
**Voorbeeld 5:**



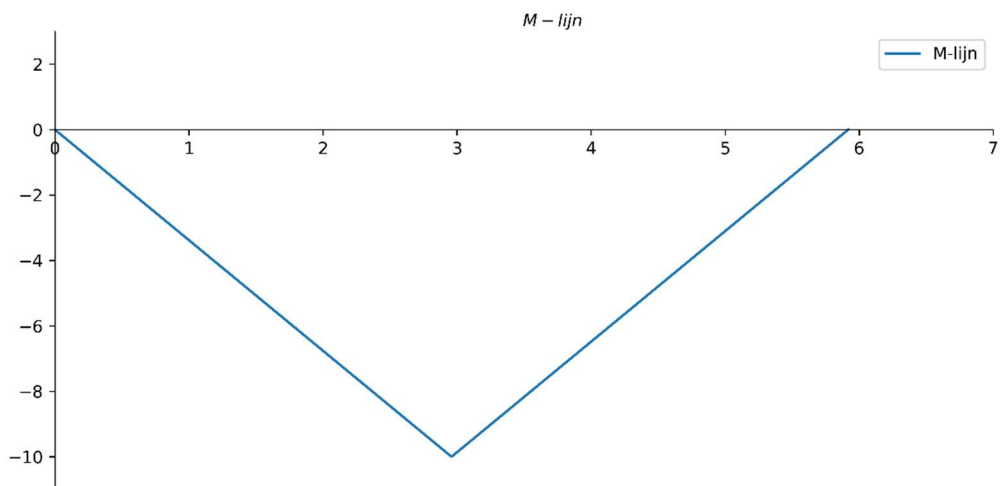
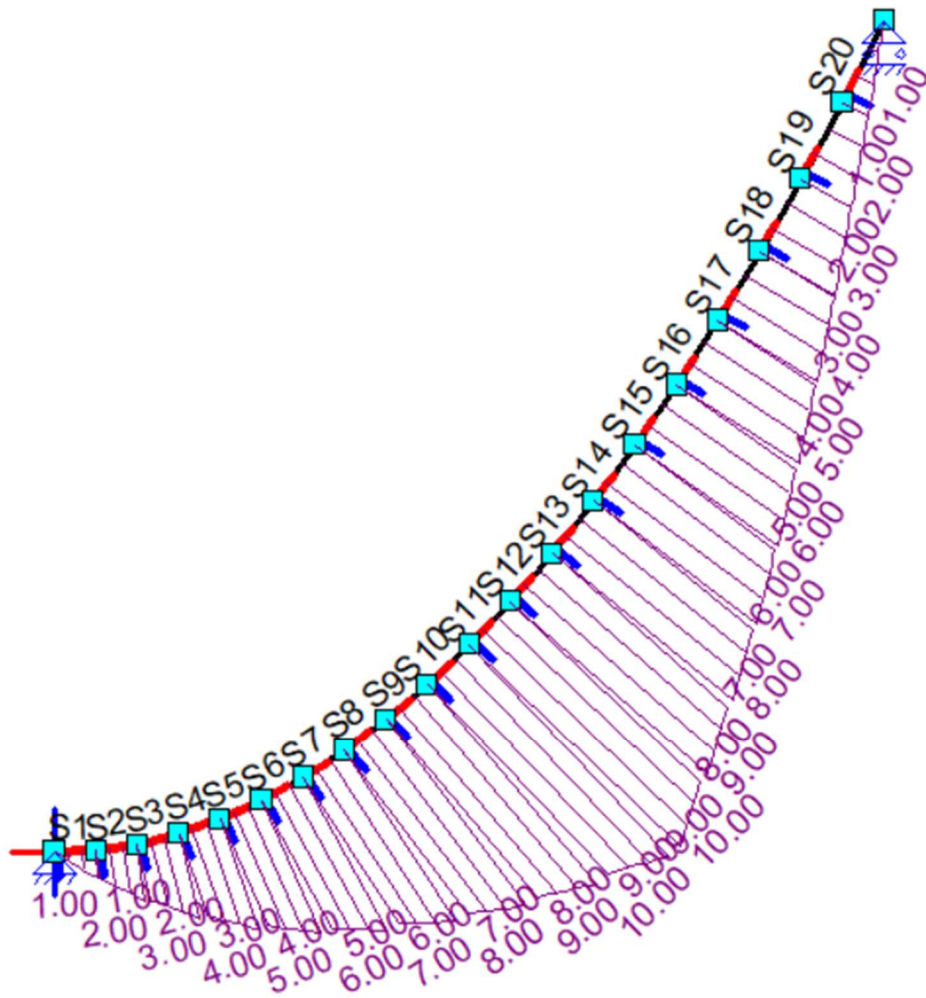
Figuur 44: Constructie van voorbeeld 5 in MatrixFrame.



Figuur 45: V-lijn voor de constructie in voorbeeld 5 zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.



Figuur 46: N-lijn voor de constructie in voorbeeld 5 zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.



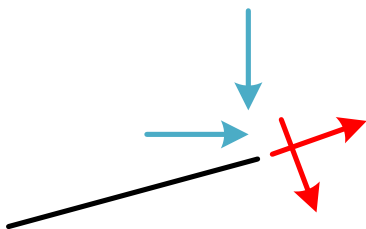
Figuur 47: M-lijn voor de constructie in voorbeeld 5 zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.

## Bijlage 4 : gekinkte constructies

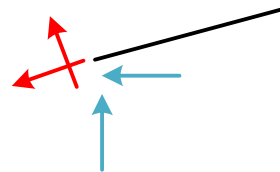
Voor een geknikte constructie kunnen vergelijkingen 23 en 24 niet verder vereenvoudigen. Daarom is er een voorstel gemaakt dat een geknikte constructie kan worden beschouwen als twee loze staven van elkaar waar elke staaf onder een bepaalde hoek staat met de horizontale as. Daarna worden de krachtenvergelijkingen normaal worden opgesteld voor iedere staaf. Vervolgens worden die vergelijkingen gecorrigeerd met een correctiekrachten.

In het rapport van Wulp, was het concept om onbekende krachten toe te voegen op de locatie waar een knik optreedt in de constructie. Daarna worden deze onbekende krachten opgelost door de juiste voorwaarden toe te passen waarbij de krachten voor de knik gelijkgesteld worden aan de krachten na de knik (Wulp, 2023).

Het idee achter de correctiekrachten is om te kijken naar de interne krachten (rode pijlen in figuren 13 en 14) in de beide staven zonder enkele krachten op de locatie waar de knik plaatsvindt toe te voegen. Daarna rekenen we de verticale en horizontale krachten ten gevolge van de interne krachten. Vervolgens gaan we deze twee krachten toevoegen aan de bijhorende staaf.



Figuur 48: correctiekrachten op de eerste staaf



Figuur 49: correctiekrachten op de tweede staaf

Deze methode laat de interne krachten zichzelf corrigeren. Hieronder vindt een stappenplan plaats om de methode te verduidelijken.

**Stap 1:** als eerste benadering worden de krachtenvergelijkingen opgesteld met alleen de werkende krachten op de constructie en de oplegreacties, waarbij rekening wordt gehouden met het feit dat de correctiekrachten later aan deze vergelijkingen zullen worden toegevoegd.

**Stap 2:** vergelijking 11 moet vier keer worden geïntegreerd en vergelijking 12 één keer geïntegreerd. Dan worden alle onbekenden opgelost met de geschikte randvoorwaarden. Hiermee kunnen we de normale en de dwarse krachten bepalen bij de knooppunt van de beide staven.

**Stap 3:** de correctiekrachten toevoegen aan de krachtenvergelijkingen. Deze krachten worden gedefinieerd als volgt:

Aan het einde van de eerste staaf voegen we  $V1 \cdot \sin(\theta) + N1 \cdot \cos(\theta)$  als een horizontale kracht en  $V1 \cdot \cos(\theta) - N1 \cdot \sin(\theta)$  als een verticale kracht toe zijn. Verder voegen we aan het begin van de tweede staaf  $-V2 \cdot \sin(\alpha) - N2 \cdot \cos(\alpha)$  als een horizontale kracht en  $N2 \cdot \sin(\alpha) - V2 \cdot \cos(\alpha)$  als een verticale kracht toe.

Waarbij:  $N1$  en  $V1$  zijn de interne krachten aan het einde van de eerste staaf.

$N2$  en  $V2$  zijn de interne krachten aan het begin van de tweede staaf.

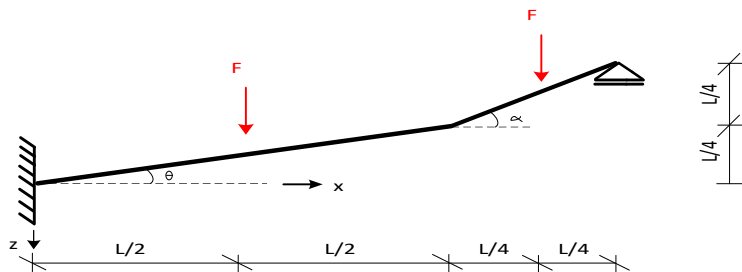
**Stap 4:** na het toevoegen van de correctiekrachten, rekenen we opnieuw N1, V1, N2 en V2 met behulp van de bijgewerkte krachtenvergelijkingen. Vervolgens vervangen we deze nieuwe waarden voor de interne krachten in de krachten vergelijkingen in plaats van de oude waarden.

**Step 5:** we blijven itereren en de interne krachten vervagen totdat de onbekenden niet meer worden veranderd of de veranderingen van de onbekenden te verwaarlozen is.

### Toepassing

In dit hoofdstuk wordt een voorbeeld behandeld om de beschreven theorie te verduidelijken. Verder heeft de puntlast F een waarde van 10 KN en de lengte L is 4 m. Dit voorbeeld wordt opgelost volgens de stappenplan hierboven. In bijlage 3 worden de figuren weer getoond en vergeleken met de figuren die met MatrixFrame gemaakt.

### Voorbeeld : geknikte constructie



Figuur 50: Constructie voorbeeld 4

**Stap 1:** De eerste benadering de van de krachtenvergelijkingen is gedefinieerd als volgt:

$$q_{z1}(x) = -A_V \cdot \langle x - 0 \rangle^{-1} + F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^{-1} + M_A \cdot \langle x - 0 \rangle^{-2}$$

$$q_{x1}(x) = A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^{-1}$$

$$q_{z2}(x) = -B_V \cdot \langle x - \frac{3L}{2} \rangle^{-1} + F \cdot \langle x - \frac{5L}{4} \rangle^{-1}$$

$$q_{x2}(x) = 0$$

**Stap 2:** Door vergelijking 11 vier keer te integreren, verkrijgen we de volgende functies:

$$V(x) = -\sin(\theta) \cdot (A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^0) - \cos(\theta) \cdot \left( -A_V \cdot \langle x - 0 \rangle^0 + F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^0 + M_A \cdot \langle x - 0 \rangle^{-1} \right) - \cos(\alpha) \cdot \left( -B_V \cdot \langle x - \frac{3L}{2} \rangle^0 + F \cdot \langle x - \frac{5L}{4} \rangle^0 \right) + C_V$$

$$M(x) = -\tan(\theta) \cdot (A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^1) + \left( A_V \cdot \langle x - 0 \rangle^1 - F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^1 - M_A \cdot \langle x - 0 \rangle^0 \right) + \left( B_V \cdot \langle x - \frac{3L}{2} \rangle^1 - F \cdot \langle x - \frac{5L}{4} \rangle^1 \right) + C_V \cdot x + C_M$$

$$EI \cdot \varphi(x) = -\tan(\theta) \cdot \left( \frac{A_h}{2} \cdot \langle x - 0 \rangle^2 \right) + \left( \frac{A_V}{2} \cdot \langle x - 0 \rangle^2 - \frac{F}{2} \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^2 - M_A \cdot \langle x - 0 \rangle^1 \right) + \left( \frac{B_V}{2} \cdot \langle x - \frac{3L}{2} \rangle^2 - \frac{F}{2} \cdot \langle x - \frac{5L}{4} \rangle^2 \right) + C_V \cdot \frac{x^2}{2} + C_M \cdot x + C_\varphi$$

$$EI \cdot w(x) = \tan(\theta) \cdot \left( \frac{A_h}{2} \cdot \langle x - 0 \rangle^2 \right) - \left( \frac{A_V}{6} \cdot \langle x - 0 \rangle^3 - \frac{F}{6} \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^3 - \frac{M_A}{2} \cdot \langle x - 0 \rangle^2 \right) - \left( \frac{B_V}{6} \cdot \langle x - \frac{3L}{2} \rangle^3 - \frac{F}{6} \cdot \langle x - \frac{5L}{4} \rangle^3 \right) - C_V \cdot \frac{x^3}{6} - C_M \cdot \frac{x^2}{2} - C_\varphi \cdot x + C_w$$

Nu moet vergelijking 12 worden geïntegreerd:

$$N(x) = \sin(\theta) \cdot (-A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^0 - A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^0 + F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^0 + M_A \cdot \langle x - 0 \rangle^{-1}) + \sin(\alpha) \cdot (-B_v \cdot \langle x - \frac{3L}{2} \rangle^0 + F \cdot \langle x - \frac{5L}{4} \rangle^0) + C_N$$

De geschikte randvoorwaarden voor dit voorbeeld zijn de volgende:

$$\varphi(0) = 0 ; w(0) = 0 ; M\left(\frac{3L}{2}\right) = 0 ; w\left(\frac{3L}{2}\right) = 0$$

$$V(0^-) = 0 ; N(0^-) = 0 ; M(0^-) = 0 ; V\left(\frac{3L^+}{2}\right) = 0 ; N\left(\frac{3L^+}{2}\right) = 0$$

Deze benadering voor de krachtenvergelijkingen geeft de volgende waarden voor de onbekenden:

$$C_n = 0, C_v = 0, C_M = 0, C_\varphi = 0, C_w = 0, A_h = 0.234, A_v = 11.054, B_v = 8.920, M_A = 15.972,$$

Verder is  $V1 = V2 = 0.96565$  en  $N1 = N2 = -0.482825$ .

Zoals we zien, bieden deze waarden geen evenwicht situatie voor de constructie maar dat is te verwachten omdat de correctiekrachten nog niet aan de krachtenvergelijkingen zijn toegevoegd.

**Stap 3:** we voegen de correctiekrachten toe aan de krachtenvergelijkingen (Iteratie 1).

$$q_{z1}(x) = -A_v \cdot \langle x - 0 \rangle^{-1} + F \cdot \langle x - \frac{L}{2} \rangle^{-1} + M_A \cdot \langle x - 0 \rangle^{-2} + V1 \cdot \cos(\theta) - N1 \cdot \sin(\theta)$$

$$q_{x1}(x) = A_h \cdot \langle x - 0 \rangle^{-1} + V1 \cdot \sin(\theta) + N1 \cdot \cos(\theta)$$

$$q_{z2}(x) = -B_v \cdot \langle x - \frac{3L}{2} \rangle^{-1} + F \cdot \langle x - \frac{5L}{4} \rangle^{-1} + N2 \cdot \sin(\alpha) - V2 \cdot \cos(\alpha)$$

$$q_{x2}(x) = 0 - V2 \cdot \sin(\alpha) - N2 \cdot \cos(\alpha)$$

Waarbij  $V1 = V2 = 0.96565$  en  $N1 = N2 = -0.482825$ .

**Stap 4:** nu gaan we opnieuw vergelijking 11 vier keer integreren en vergelijking 12 één keer met behulp van de zelfde randvoorwaarden, krijgen we de volgende waarden voor de onbekenden:

$$C_n = 0, C_v = 0, C_M = 0, C_\varphi = 0, C_w = 0, A_h = 0.175, A_v = 10.987, B_v = 8.989, M_A = 15.936$$

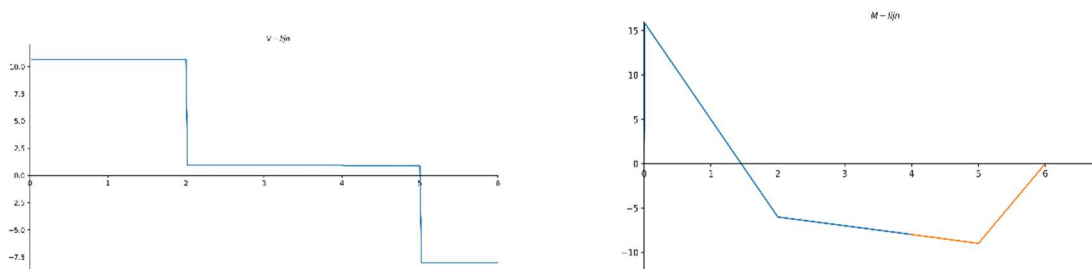
En  $V1 = 0.94680$ ,  $V2 = 0.904202$ ,  $N1 = -0.281692$ ,  $N2 = -0.45210$ .

**Stap 5:** Nu moeten de nieuwe  $V1$ ,  $V2$ ,  $N1$  en  $N2$  worden gebruikt in de krachtenvergelijkingen.

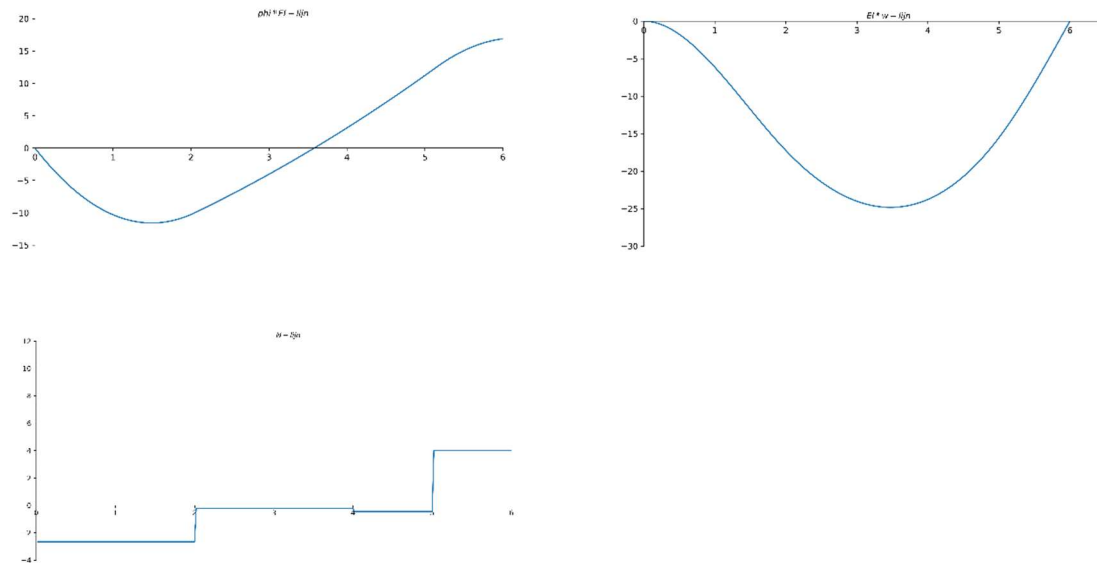
Dit methode is 5 keer herhaald in de python file. Na de vijfde iteratie zijn de waarden van de onbekenden als volgt:

$$C_n = 0, C_v = 0, C_M = 0, C_\varphi = 0, C_w = 0, A_h = 0.0005, A_v = 10.99, B_v = 8.99, M_A = 15.95$$

Na de vijfde iteratie kunnen we de resultaten worden gevisualiseerd met behulp van python.



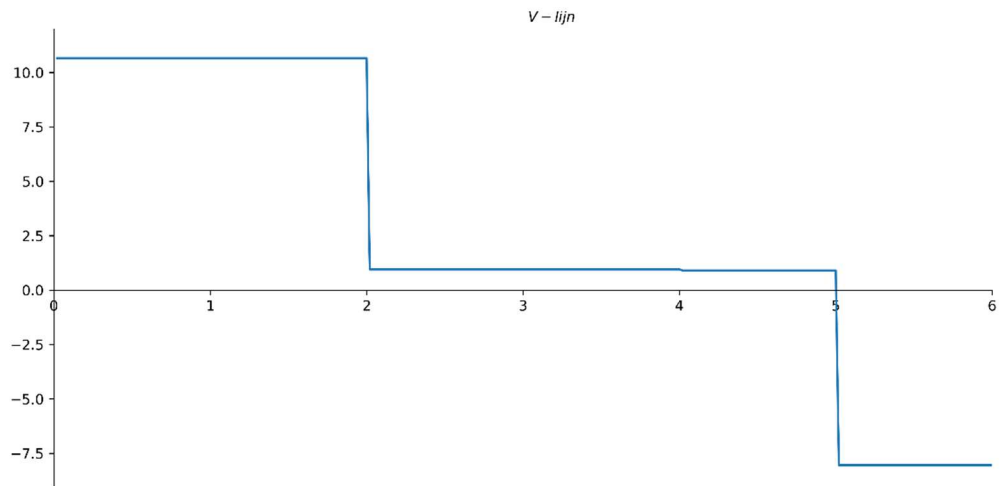
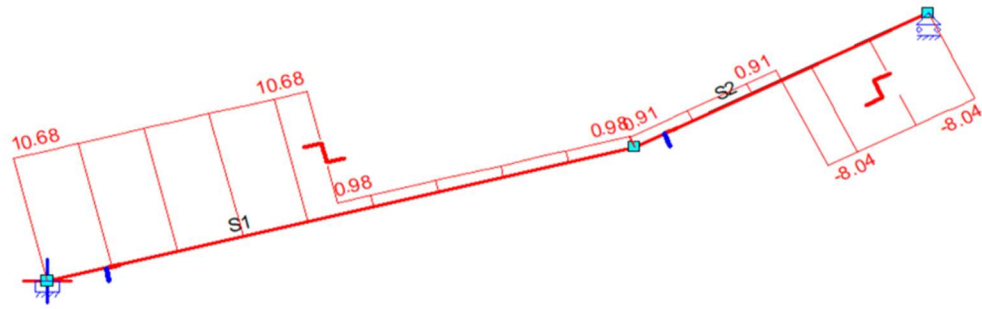




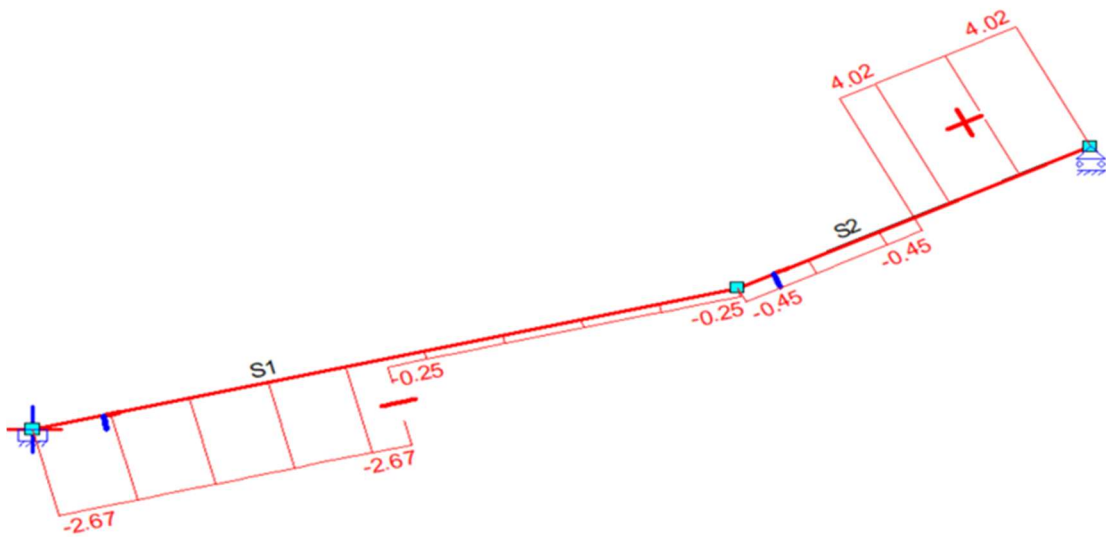
*Figuur 51: De interne krachten en de vervormingen lijnen van constructie.*

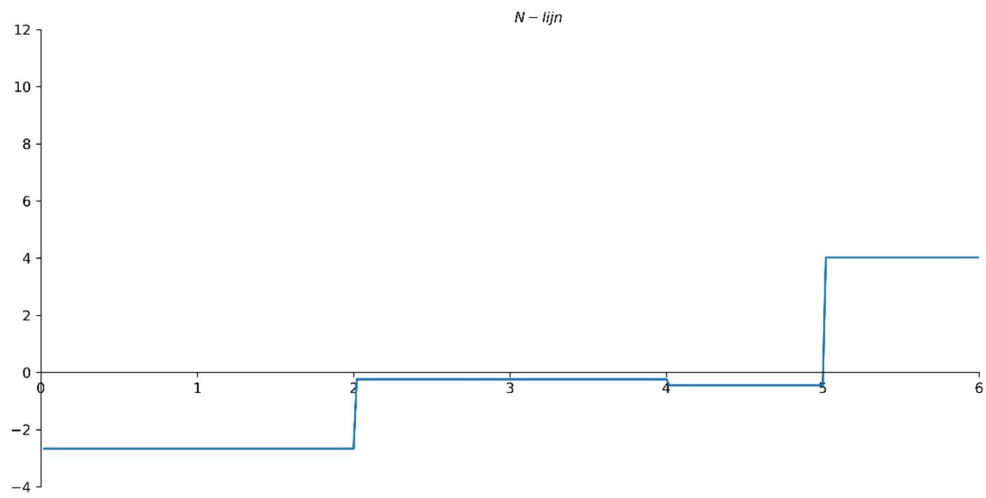
Het is niet zeker of deze methode altijd naar de goede krachten itereert.

Een andere methode die gebruikt kan worden is om de knik in de constructie te vermijden door zowel een onbekend horizontale kracht als een onbekend verticale kracht toe te voegen op de locatie waar de knik plaatsvindt. Daarmee kunnen we de constructie voorstellen als een doorgaande ligger die een hoek  $\theta$  met de horizontale as maakt. De twee onbekende krachten kunnen daarna opgelost worden door de juiste aansluitvoorwaarden (Wulp, 2023).

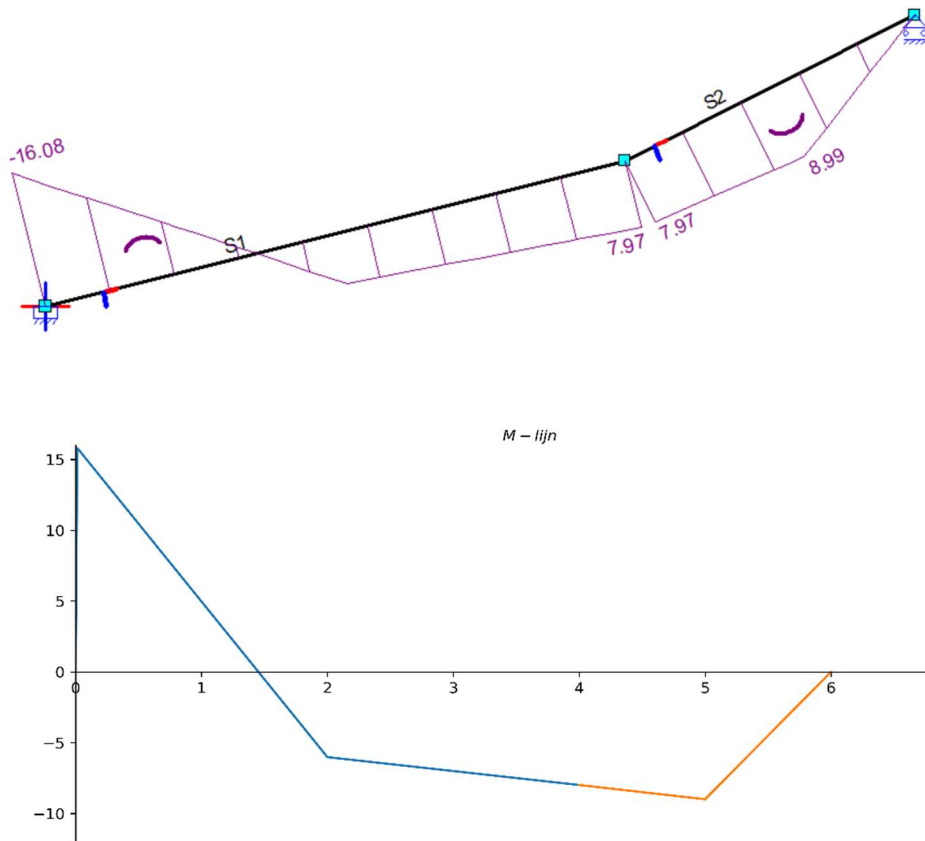


Figuur 52: V-lijn voor de constructie zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.

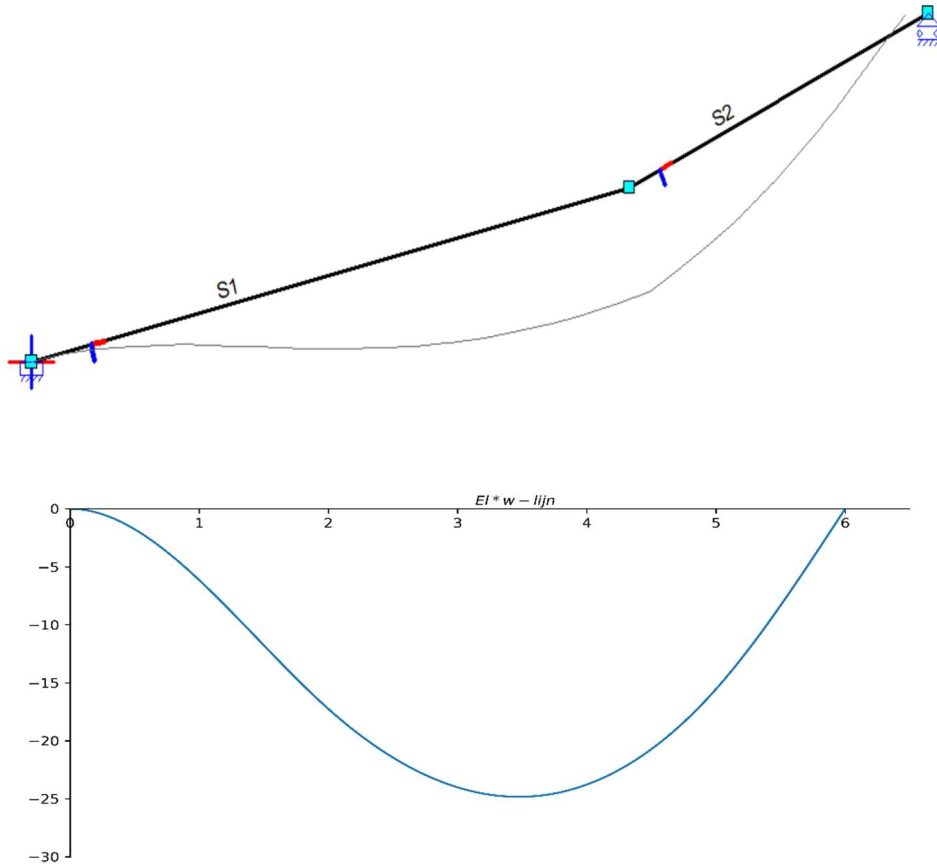




Figuur 53: N-lijn voor de constructie zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.



Figuur 54: M-lijn voor de constructie zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.



Figuur 55 w-lijn voor de constructie zowel in MatrixFrame als Python met toepassing van Macaulay's methode.