

Eolisch sediment transport

Pim Jager

Delft University of Technology

Eolisch sediment transport

door

Pim Jager

Studentnummer: 4729161
Begeleiders TW: Prof. dr. H.M. Schuttelaars,
Dr. O. Jaïbi
Dr. ir. D. den Ouden-van den Horst,
Begeleiders TN: Prof. dr. ir. C.R. Kleijn,
Dr. B. Bera
Duur van het project: Maart 2023 - Juli 2023
Instituut: Technische Universiteit Delft

Cover: Zandduinen in de woestijn van Marokko.
Style: TU Delft Report Style, met modificaties van Daan Zwaneveld

Samenvatting

In dit verslag is een eolisch sedimenttransport model geformuleerd en het model van De Vries geïmplementeerd en geanalyseerd. Na de afleiding van de eendimensionale advection-diffusievergelijking vanuit de driedimensionale continuïteitsvergelijking is eerst het model van De Vries zonder diffusie onderzocht. In het model kan er onderscheid gemaakt worden tussen 3 verschillende situaties: Geen (toevoer van) sediment, Sediment-gelimiteerd en Erosie-gelimiteerd. In elke situatie zijn voor lange tijdschalen de toestanden van het model afgeleid vanuit de advectionvergelijking. In de resultaten kwam naar boven dat de theoretische toestanden sterk overeenkwamen met de toestanden in de numerieke simulatie. Verder is het effect van numerieke diffusie van het model van De Vries geconstateerd en de grootte van dit effect afgeleid. Om het effect van numerieke diffusie te verminderen is diffusie in het model geïntroduceerd samen met het Lax-Wendroff numerieke schema. Dit schema gebruikt de gewogen upwind methode samen met de gewogen centrale Euler methode om de nauwkeurigheid van het model te verbeteren. In de resultaten is aangetoond dat numerieke diffusie kan worden gecompenseerd door het juist kiezen van dit gewicht. Uit een stabiliteitsanalyse blijkt dat de Lax-Wendroff methode een betere stabiliteitscriterium heeft dan de upwind methode. Hierdoor kan een grotere tijdstap gekozen in een numerieke simulatie. De maximale tijdstap is getest door het model te runnen met verschillende tijdstappen rondom het theoretische maximum. Uit de resultaten bleek dat het model op tijdstap die een fractie kleiner was dan de theoretische maximale tijdstap, stabiele oplossingen simuleerde. Zodra de tijdstap de maximale waarde behaalde werden de oplossingen instabiel. Door het toevoegen van diffusie aan het model is een extra voorgeschreven randvoorwaarde nodig. Door implementatie van verschillende randvoorwaarden aan het einde van het domein is gebleken dat de randvoorwaarde 'extrapoleren tweede orde' het best is. De dimensie-analyse van de advection-diffusievergelijking wijst uit de eolischsedimenttransport gedomineerd wordt door advection transport en het effect van diffusie verwaarloosd mag worden.

Inhoudsopgave

Samenvatting	i
1 Introductie	1
1.1 Zandsuppleties	1
1.2 Beperkte hoeveelheid erodeerbaar zand	2
1.3 Onderzoeksvragen	2
2 Modelafleiding en -beschrijving	3
2.1 Modelformulering	3
2.2 Afleiding 1D hoogte geïntegreerde advection-diffusievergelijking	4
2.2.1 Vlakke bodem en oneindige bovengrens	8
2.3 Model van De Vries	9
2.3.1 Verzadigde sedimentconcentratie in lucht	9
2.3.2 Erodeerbaar sediment op het strandoppervlak	10
3 Evenwichtstoestanden en een dimensie-analyse	11
3.1 Dimensieloze vergelijkingen	11
3.2 Evenwichtstoestanden	12
4 Numerieke methodes	17
4.1 Eindige differentie	17
4.2 Lax-Wendroff	19
4.3 Stabiliteit	20
4.4 Randvoorwaarden	22
5 Resultaten	25
5.1 Numerieke diffusie	25
5.2 Randvoorwaarden	28
5.3 Stabiliteit	30
6 Discussie en aanbevelingen	33
6.1 Discussie van de resultaten	33
6.2 Aanbevelingen voor verder onderzoek	34
7 Conclusie	35
7.1 Conclusie op de onderzoeksvragen	35
A Source Code	39

1

Introductie

Eolisch sedimenttransport verwijst naar het proces waarbij sedimentdeeltjes, zoals zandkorrels, door wind worden verplaatst over het aardoppervlak. Dit proces is van groot belang voor verschillende vakgebieden, waaronder ecologie, geologie en engineering. In Nederland speelt eolisch sedimenttransport een cruciale rol bij het vormgeven van het landschap. Met name in kustgebieden waar de zee, wind en stroming interactie hebben om complexe sedimentdynamiek te creëren en veiligheid van de achterliggende gebieden een belangrijk onderwerp is. De kustlijn van Nederland verandert elk jaar door wind- en waterstromingen. Langetermijneffecten op de kustlijn zijn vooral te wijten aan de scheef invallende golven op een strand, waarbij golven parallel aan de kust zorgen voor het meeste transport. Deze golven transporteren het zand, gemiddeld over de lange termijn, van het zuiden naar het noorden. Door het bouwen van havendammen zoals Zeebrugge, Hoek van Holland en IJmuiden wordt de aanvoer van het sediment geblokkeerd, wat ertoe leidt dat de Nederlandse kustlijn op bepaalde plekken erodeert [18]. Om dit tegen te gaan wordt er zand gesuppleerd. Het uitvoeren van zandsuppleties heeft twee doeleinden. Ten eerste het waarborgen van de veiligheid van achterliggende gebieden, ten tweede het behouden van de kustlijn.

1.1. Zandsuppleties

Veiligheid is een van de redenen om zandsuppleties uit te voeren. Door deze suppleties worden achterliggende gebieden beschermd tegen stormen. Een voorbeeld dat vaak wordt genoemd is de watersnoodramp van 1953 [20] waar een noordwesterstorm tijdens springtij de dijken lieten breken, waardoor een groot gedeelte van Nederland overspoelde en er veel schade is aangericht. Zandsuppleties worden uitgevoerd waar er zwakke plekken in de kustlijn zijn. Hierdoor worden de duinen opgehoogd hetgeen voor betere bescherming zorgt. Een ander doeleinde is het behouden van de kustlijn. Door het stijgen van de zeespiegel komt meer strand onder water te liggen en komt de kustlijn meer landwaarts te liggen. Dit is sinds de 20e eeuw een groeiend probleem en daarom heeft Rijkswaterstaat in de kustnota van 1990 [1] vastgesteld om de kustlijn die er op dat moment lag, de Basis-kustlijn (BKL), te handhaven en niet verder te laten verdwijnen. Om de BKL te behouden worden er maatregelen getroffen zoals het aanleggen van harde en zachte kustverdediging. Harde kustverdediging is een technische aanpak die gebruik maakt van kunstmatige materialen zoals beton en stenen om de kust te beschermen. Dijken, dammen en grote constructies zoals de stormvloedkeringen zijn voorbeelden van harde kustverdediging. Dit kan effectief zijn bij het voorkomen van overstromingen en erosie. Het nadeel is echter dat deze methode ecologisch minder verantwoord is en kan leiden tot veranderingen in het landschap en de biodiversiteit. Ook is ondervonden dat deze methodes grote onderhoudskosten met zich meebrengen. Daarom geeft men de voorkeur aan zachte kustverdediging.

Zachte kustverdediging is een aanpak die gebruik maakt van natuurlijke materialen en processen om de kust te beschermen tegen erosie en overstromingen. Een voorbeeld van zo'n natuurlijk materiaal is zand. De wind- en waterstromingen zijn de natuurlijke processen die het zand verplaatsen naar hun bestemming. De duinen ophogen en het strand verbreden zodat ze aan de BKL voldoen hebben de hoogste prioriteit. Het storten van zand wordt ook wel een suppletie genoemd en kan op verschil-

lende manieren gebeuren. De eerste manier is strandsuppletie, dit is een directe methode waarbij zand wordt gestort op het strand en door wind naar de duinen wordt geblazen. Echter, deze methode kost veel geld en zorgt voor overlast voor de bezoekers van het strand. Daarnaast kan men ook gebruiken maken van oeversuppletie. Hierbij wordt het zand op de bodem van de zee ongeveer 20 meter van de kust gestort. Vervolgens komt dit zand door waterstromingen op het strand en het wordt verspreid door wind. Deze methode is goedkoper en vermindert overlast. Echter, het duurt langer voordat het zand eenmaal op de duinen ligt. Deze methode is dus alleen op lange termijn bruikbaar. De meest recente methode is het uitvoeren van een megasuppletie. Dit is een uitbreiding op de oeversuppletie, waarbij in één keer zand wordt gestort. Een opmerkelijk voorbeeld hiervan is de Zandmotor in Scheveningen. De Zandmotor is een bijzonder project dat in 2011 is gestart als samenwerking tussen de Nederlandse overheid, onderzoeksinstituten en de bouwindustrie. Het project omvatte het storten van ongeveer 21 miljoen kubieke meter zand voor de kust van Scheveningen.

Het is duidelijk dat er veel zand per jaar voor de Nederlandse kust moet worden gestort om het zand dat per jaar erodeert te compenseren. Om deze reden, is het belangrijk om het transport van zand goed te kunnen modelleren en voorspellen.

1.2. Beperkte hoeveelheid erodeerbaar zand

Het modelleren van eolisch sedimenttransport is een uitdaging [14]. Dit komt door vele fysische verschijnselen die moeilijk te beschrijven zijn met vergelijkingen en parameters. Bagnold heeft in 1937 een eerste grondslag gelegd voor het model dat eolisch sedimenttransport goed beschrijft [3]. Echter, dit model is ontworpen op basis van experimentele resultaten onder homogene condities van een windtunnel en is daardoor niet toepasbaar op sedimenttransport buiten de windtunnel. Er zijn velen die Bagnold's model probeerden uit te breiden zodat deze ook toegepast kon worden op de condities van stranden waar vegetatie, luchtvochtigheid en de aanwezigheid van schelpen een rol spelen. Dit wordt gedaan door die factoren mee te nemen in het bepalen van de dynamische windsnelheid, de minimale windsnelheid die nodig is om sedimenttransport te laten plaatsvinden, etc. Echter, deze gemodificeerde modellen zijn nog niet accuraat genoeg. Er is bijvoorbeeld meer sedimenttransport van de Zandmotor voorspeld dan er daadwerkelijk is waargenomen. Het is daarom van belang om de modellen te blijven verbeteren.

1.3. Onderzoeksvragen

De Vries [6] heeft in 2014 de bestaande modellen voor eolisch sedimenttransport uitgebreid met een extra partiële differentiaalvergelijking. Deze vergelijking is gekoppeld aan de advection-diffusievergelijking voor zandtransport in de lucht en beschrijft de hoeveelheid zand op het strandoppervlak dat geërodeerd kan worden. Inmiddels heeft De Vries zijn model verder ontwikkeld [8] en het blijkt potentie te hebben voor het accuraat beschrijven van sedimenttransport.

Dit verslag beschrijft een wiskundig onderzoek naar het model van De Vries waarbij het model geïmplementeerd wordt in Python. Hierbij zijn de volgende onderzoeksvragen worden geformuleerd:

- Is het gerechtvaardigd om de diffusie-term te verwaarlozen en hoe beïnvloedt deze diffusie-term de stabiliteit en de nauwkeurigheid van het model?
- Is er een numeriek schema dat nauwkeuriger/snel is dan het upwind schema dat gebruikt wordt in het model van De Vries?
- Wat voor invloed hebben verschillende randvoorwaarden op de oplossing binnen het model en welke kan het best gebruikt worden in een numerieke simulatie?

In hoofdstuk 2 wordt de afleiding gegeven voor de eendimensionale advection-diffusievergelijking en wordt benodigde theoretische kennis verstrekt. Hoofdstuk 3 beschrijft een modelanalyse van de evenwichtstoestanden in de ruimte en tijd. In hoofdstuk 4 wordt het Lax-Wendroff schema voor de advection-diffusievergelijking getoond en de verschillende randvoorwaarden uitgewerkt. Resultaten worden gegeven in hoofdstuk 5 en daarna een discussie met aanbevelingen in hoofdstuk 6. Als laatste bevat hoofdstuk 7 een conclusie van dit onderzoek.

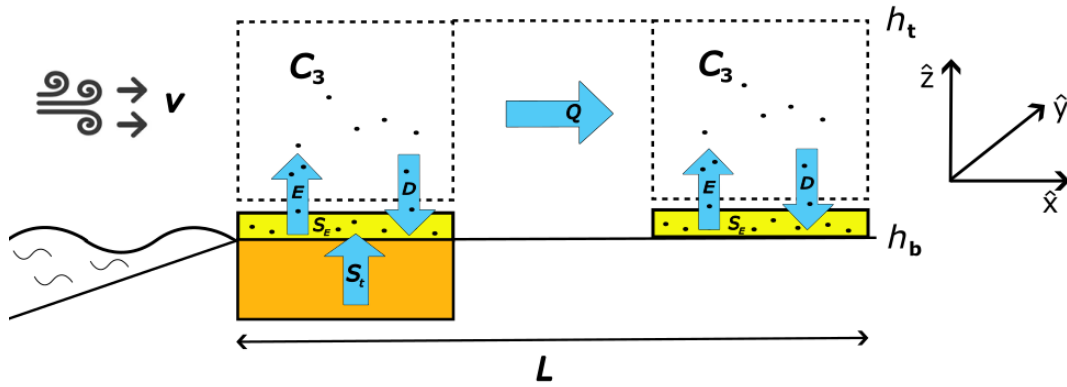
2

Modelafleiding en -beschrijving

Om voorspellingen te doen over het transport van sediment in de kustzone wordt in dit hoofdstuk een model geformuleerd. Het volledige model bestaat uit een deel dat het sedimenttransport onder water simuleert en deel dat het sedimenttransport boven water simuleert. In dit verslag focussen we op de modelontwikkeling voor zandtransport boven water door luchtstromen (eolisch sedimenttransport). In dit hoofdstuk wordt een beschrijving van het model gegeven en wordt de eendimensionale advection-diffusievergelijking afgeleid.

2.1. Modelformulering

Om eolisch sedimenttransport, dat in het vervolg sedimenttransport zal worden genoemd, te modelleren wordt een dwarsdoorsnede van een stuk strand van Nederland genomen. Het strand begint bij de overgang van water naar zand wanneer het eb is en eindigt bij de voet van de eerste duinen. Aan de voet van de duinen begint vegetatie te groeien, wat weer heeft invloed op het sedimenttransport. Hier wordt niet op in wordt gegaan in dit model. Een schematische weergave van het model met alle parameters wordt gegeven in Figuur 2.1. De lengte van dit stuk strand wordt aangegeven met L [m]. De hoogte van het oppervlak van het strand wordt aangegeven met h_b [m] en de bovengrens van het model wordt aangegeven met h_t [m], waar de waterstand bij eb een hoogte representeert van $h = 0$. De windrichting is aanlandig en is een driedimensionale vector $\vec{v} = (u, v, w)$ [m/s], die beschreven zal worden als een combinatie van een horizontale en verticale windsnelheid $\vec{v} = \vec{u} + w\hat{z}$ met $\vec{u} = (u, v)$. Door windwervelingen vindt erosie plaats en wordt het aanwezige sediment op de bodem S_e [kg/m²] opgetild. De concentratie van sediment in een controlevolume wordt gegeven met C_3 [kg/m³]. Na enige afstand valt het sediment door gravitatie naar het strandoppervlak waar het gedeponeerd wordt. Erosie en depositie worden gegeven door E [kg/(m² · s)] en D [kg/(m² · s)] respectievelijk. Het transport van sediment Q [kg/(m² · s)] is de verplaatsing van de concentraties over het oppervlak. Tijdens vloed wordt een groter deel van het strand overspoelt met water dat sedimentdeeltjes met zich mee neemt. Deze dalen op de bodem dat bij eb verschijnt als erodeerbaar zand. Deze stroom wordt aangegeven met S_t [kg/(m² · s)]. De breedte van het stuk strand B [m] is constant over de gehele lengte van het strand. Merk op dat de breedte niet zichtbaar is in Figuur 2.1.



Figuur 2.1: Schematisch zijaanzicht van het stuk strand. L [m] is de lengte van het domein. E en D worden respectievelijk gegeven door de erosie- en depositeterm [$kg/(m^2 \cdot s)$]. De wind waait met een snelheid \vec{v} [m/s] over het domein. C_3 [kg/m^3] is de sedimentconcentratie in de lucht en het transport wordt aangegeven met Q [$kg/(m^2 \cdot s)$]. S_e [$kg/(m^2)$] is het erodeerbare sediment op de bodem en het toevoer van sediment aan het model wordt gegeven door S_t [$kg/(m^2 \cdot s)$]. Als laatste worden de boven- en ondergrens van het model aangegeven door h_t [m] en h_b [m] respectievelijk.

2.2. Afleiding 1D hoogte geïntegreerde advection-diffusievergelijking

In deze sectie wordt de eendimensionale advection-diffusievergelijking afgeleid die in de z -richting is geïntegreerd vanuit de continuïteitsvergelijking. De continuïteitsvergelijking voor behoud van massa in drie dimensies luidt

$$\frac{\partial C_3}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F} = 0, \quad (2.1)$$

waar C_3 [kg/m^3] staat voor de sedimentconcentratie in de lucht en de sedimentflux $\vec{F} = \vec{F}_a + \vec{F}_s + \vec{F}_d$, met

$$\vec{F}_a = C_3 \vec{u} + C_3 w \hat{z} \quad \text{Advection flux,} \quad (2.2)$$

$$\vec{F}_s = -C_3 w_s \hat{z} \quad \text{Bezinkingsflux,} \quad (2.3)$$

$$\vec{F}_d = -k_h \nabla_h C_3 - k_v \frac{\partial C_3}{\partial z} \hat{z} \quad \text{Diffusieve flux,} \quad (2.4)$$

waar $\vec{u} = (u, v)$ staat voor het horizontale windveld met u en v de componenten in x - en y -richting respectievelijk. w staat voor de verticale component van het windveld en w_s voor de bezinkingsnelheid van de deeltjes. De eenheidsvector in de verticale richting is \hat{z} . De partiële afgeleide in het horizontale vlak en wordt gegeven door $\nabla_h = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$.

en de diffusiecoëfficiënt k_v [m^2/s] wordt constant genomen in het controlevolume. De totale driedimensionale advection-diffusievergelijking voor sedimentconcentratie in de lucht luidt

$$\frac{\partial C_3}{\partial t} + \nabla \cdot \left(C_3 \vec{u} - k_h \nabla_h C_3 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(C_3 (w - w_s) - k_v \frac{\partial C_3}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.5)$$

De randvoorwaarde voor het model wordt gespecificeerd door de loodrechte componenten van de bezinkingsflux en de diffusieflux op de rand voor te schrijven door een erosie-depositieflux S_* [$kg/(m^2 \cdot s)$]

$$-\left(\vec{F}_s + \vec{F}_d \right) \cdot \hat{n} = S_*, \quad (2.6)$$

waar \hat{n} de normaalvector is op grenzen h_t en h_b en zijn respectievelijk in de positieve en de negatieve z -richting georiënteerd. Op een niet-erodeerbaar oppervlak geldt dat $S_* = 0$ en op een erodeerbaar oppervlak wordt de erosie-depositieflux door de erosie- en depositieterm voorgeschreven, $S_* = E -$

D. De depositieterm kan beschreven worden als het product van de bodemconcentratie c_b met de bezinkingsnelheid van het sediment,

$$D = w_s c_b, \quad \text{met} \quad c_b = \lim_{z \downarrow h_b} C_3. \quad (2.7)$$

Vergelijking (2.5) wordt over de hoogte geïntegreerd om de vergelijking te versimpelen met de randvoorwaarden op h_b en h_t . Deze randvoorwaarden worden later in deze sectie beschreven. De geïntegreerde vergelijking wordt gegeven door

$$\int_{h_b}^{h_t} \frac{\partial C_3}{\partial t} dz + \int_{h_b}^{h_t} \nabla \cdot (C_3 \vec{u} - k_h \nabla_h C_3) dz + \int_{h_b}^{h_t} \frac{\partial}{\partial z} \left(C_3 (w - w_s) - k_v \frac{\partial C_3}{\partial z} \right) dz = 0, \quad (2.8)$$

waar h_t de bovengrens van het domein aangeeft en h_b de ondergrens (bodem) van het domein aangeeft. Met behulp van de wet van Leibniz [7, 11] kunnen differentiëren en integreren van volgorde worden omgedraaid en kan vergelijking (2.8) geschreven worden als

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{h_b}^{h_t} C_3 dz + \nabla \cdot \int_{h_b}^{h_t} C_3 \vec{u} dz - k_h \nabla_h \cdot \int_{h_b}^{h_t} \nabla_h C_3 dz + \\ \left[-\frac{\partial h_t}{\partial t} C_3 - \nabla h_t \cdot \vec{u} C_3 + k_h \nabla_h h_t \cdot \nabla_h C_3 \right]_{z=h_t} + \\ \left[\frac{\partial h_b}{\partial t} C_3 + \nabla h_b \cdot \vec{u} C_3 - k_h \nabla_h h_b \cdot \nabla_h C_3 \right]_{z=h_b} + \\ \left[C_3 (w - w_s) - k_v \frac{\partial C_3}{\partial z} \right]_{h_b}^{h_t} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Bovenstaande vergelijking kan versimpeld worden door gebruik te maken van de bewegende randvoorwaarden aan de boven- en onderkant van het model

$$\left[\frac{\partial h_t}{\partial t} + \frac{\partial h_t}{\partial x} + \frac{\partial h_t}{\partial y} \right]_{z=h_t} = w|_{z=h_t}, \quad (2.10)$$

$$\left[\frac{\partial h_b}{\partial t} + \frac{\partial h_b}{\partial x} + \frac{\partial h_b}{\partial y} \right]_{z=h_b} = w|_{z=h_b}. \quad (2.11)$$

Deze randvoorwaarden staan voor het feit dat verandering in de grenzen van het domein samenhangen met de verticale windsnelheid. Vergelijking (2.9) wordt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{h_b}^{h_t} C_3 dz + \nabla \cdot \int_{h_b}^{h_t} C_3 \vec{u} dz - k_h \nabla_h \cdot \int_{h_b}^{h_t} \nabla_h C_3 dz + \\ k_h \nabla_h (h_t) \cdot \nabla_h C_3|_{z=h_t} - k_h \nabla_h (h_b) \cdot \nabla_h C_3|_{z=h_b} + \\ \left[-C_3 w_s - k_v \frac{\partial C_3}{\partial z} \right]_{h_b}^{h_t} = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Voor de volgende stap wordt de randvoorwaarde voor de erosie-depositieflux S_* gebruikt om bovenstaande vergelijking verder te versimpelen. Substitutie van vergelijking (2.3) en (2.4) in vergelijking (2.6) resulteert in

$$- \left(-C_3 w_s \hat{z} - k_h \nabla_h C_3 - k_v \frac{\partial C_3}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot \hat{n} = S_*. \quad (2.13)$$

Om de normaalvectoren aan beide randen te formuleren, wordt de hoogte van beide randen als functie van de positie geparametriseerd: $h = (x, y, f(x, y))$. Aangezien de normaalvector loodrecht staat op het raakvlak in een punt (x_0, y_0) kan deze vector geformuleerd worden als $\hat{n} = \frac{\partial h}{\partial x} \times \frac{\partial h}{\partial y}$. Met de gegeven parametrisatie is de vergelijking voor de normaalvector

$$\hat{n} = \frac{\partial h}{\partial x} \times \frac{\partial h}{\partial y} = \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial x}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1\right). \quad (2.14)$$

De normaalvectoren aan beide randen (h_t, h_b) worden gegeven door

$$\hat{n}_{\text{bovenkant}} = \left(-\frac{\partial h_t}{\partial x}, -\frac{\partial h_t}{\partial y}, 1\right), \quad (2.15)$$

en

$$\hat{n}_{\text{onderkant}} = \left(\frac{\partial h_b}{\partial x}, \frac{\partial h_b}{\partial y}, -1\right). \quad (2.16)$$

Met de normaalvectoren gegeven wordt de randvoorwaarde voor de erosie-depositie flux

$$C_3 w_s - k_h \nabla_h h_t \nabla_h C_3 + k_v \frac{\partial C_3}{\partial z} = 0 \quad \text{op} \quad z = h_t, \quad (2.17)$$

$$-C_3 w_s + k_h \nabla_h h_b \nabla_h C_3 - k_v \frac{\partial C_3}{\partial z} = E - D \quad \text{op} \quad z = h_b \quad (2.18)$$

Substitueer bovenstaande vergelijking in (2.12), Dit geeft

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} + \nabla \cdot \int_{h_b}^{h_t} C_3 \vec{u} dz - k_h \nabla_h \cdot \int_{h_b}^{h_t} \nabla_h C_3 dz = E - D. \quad (2.19)$$

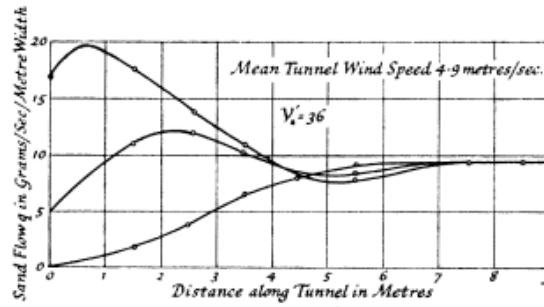
Hier is C_2 [kg/m^2] de sedimentconcentratie geïntegreerd over de hoogte, dat wil zeggen in de z-richting, $C_2 = \int_{h_b}^{h_t} C_3 dz$. Nu kunnen de concentratie en de windsnelheid geschreven worden door een hoogte gemiddelde vector en een hoogte afhankelijke vector. Voor de snelheid geldt dat $\vec{u} = \bar{u} + u'$, waar \bar{u} de hoogtegemiddelde horizontale windsnelheid is en u' de afwijking van het hoogtegemiddelde. Hetzelfde wordt gedaan voor de concentratie $C_3 = \bar{C}_3 + C'_3$, waar de hoogtegemiddelde concentratie wordt gegeven met $\bar{C}_3 = \frac{C_2}{h_t - h_b}$ en C'_3 de afwijking van het hoogtegemiddelde. Merk op dat de hoogtegemiddelde vector onafhankelijk is van de hoogte, in tegenstelling tot de afwijking. De integraal van vergelijking (2.19) kan worden geschreven als hoogtegemiddelde

$$\begin{aligned} \int_{h_b}^{h_t} C_3 \vec{u} dz &= \int_{h_b}^{h_t} (\bar{C}_3 + C'_3) (\bar{u} + u') dz \\ &= \bar{u} \bar{C}_2 + \bar{C}_3 \int_{h_b}^{h_t} u' dz + \bar{u} \int_{h_b}^{h_t} C'_3 dz + \int_{h_b}^{h_t} C'_3 u' dz \\ &= \bar{u} \bar{C}_2 + \int_{h_b}^{h_t} -k_d \nabla_h C_3 dz. \end{aligned} \quad (2.20)$$

In bovenstaande vergelijking vallen de termen waar geïntegreerd wordt over een enkele deviatie weg, aangezien dat gelijk is aan nul. Voor de term $C' u'$ wordt de aanname gemaakt dat het geïntegreerde product een bijdrage levert aan de diffusie in de horizontale x-richting [10]. Substitueer vergelijking (2.20) in vergelijking (2.19) en krijg

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} + \nabla \cdot C_2 \bar{u} - k \nabla_h \cdot \int_{h_b}^{h_t} \nabla_h C_3 dz = E - D, \quad (2.21)$$

waar $k = k_h + k_d$.



Figuur 2.2: Metingen van een windtunnelexperiment van Bagnold [3] waar hij het sedimenttransport Q tegen de afgelegde afstand in de windtunnel heeft gemeten.

Om de depositieterm D in termen van C_2 uit te drukken, nemen we aan dat de verticale diffusieflux in balans is met de bezinkingsflux. Metingen van een experiment van Bagnold [3] waar hij eolisch sedimenttransport in windtunnels onderzocht zijn te zien in Figuur 2.2. Daaruit kan worden afgeleid dat het sedimenttransport vanaf een zekere benedenwindse afstand constant wordt. Als we aannemen dat sedimenttransport kan worden benaderd als $Q = C_3 \vec{u}$ en we gebruiken dat in de experimentele opstelling de windsnelheid \vec{u} constant is. Volgt dat de concentratie ook constant is. Hieruit maken we op dat de bezinkingsflux gelijk is aan de verticale diffusieflux of dat deze beide gelijk zijn aan nul. Een eerste benadering wordt geformuleerd als

$$w_s C_3 = -k_v \frac{\partial C_3}{\partial z}. \quad (2.22)$$

Deze gewone differentiaalvergelijking kan opgelost worden met de randvoorwaarde $C_3|_{z=h_b} = c_b$ die we eerder in deze sectie hebben aangenomen. We krijgen een oplossing voor de concentratie in de hoogte.

$$C_3(z) = c_b e^{-\frac{w_s}{k_v}(z-h_b)}. \quad (2.23)$$

Bovenstaande vergelijking wordt over de hoogte geïntegreerd en resulteert in een relatie tussen c_b en C_2

$$c_b = \frac{w_s}{k_v} \beta_b C_2, \quad \text{met} \quad \beta_b = \frac{1}{1 - e^{-\frac{w_s}{k_v}(h_t-h_b)}}. \quad (2.24)$$

Substitutie van bovenstaande uitdrukking in de vergelijking (2.7) geeft

$$D = \frac{w_s^2}{k_v} \beta_b C_2. \quad (2.25)$$

Naast de diffusieterm is vergelijking (2.21) bijna geheel uitgedrukt in termen van C_2 . Om de diffusieterm om te schrijven wordt de wet van Leibniz [7, 11] gebruikt

$$\begin{aligned} -k \nabla_h \cdot \int_{h_b}^{h_t} \nabla_h C_3 dz &= -k \nabla_h \cdot \left[\nabla_h \int_{h_b}^{h_t} C_3 dz - \nabla_h (h_t) C_3|_{z=h_t} + \nabla_h (h_b) C_3|_{z=h_b} \right] \\ &= -k \nabla_h \cdot [\nabla_h C_2 - \nabla_h (h_t) c_t + \nabla_h (h_b) c_b], \end{aligned} \quad (2.26)$$

waar $c_t = C_3|_{z=h_t}$ en $c_b = C_3|_{z=h_b}$ de sedimentconcentraties respectievelijk van de bovenrand en de bodem van het model zijn. De waarde voor c_b is bekend wegens vergelijking (2.24). De waarde voor c_t wordt verkregen door $z = h_t$ in vergelijking (2.23) te substitueren: $c_t = c_b e^{-\frac{w_s}{k_v}(h_t-h_b)}$. Hierdoor wordt de uitdrukking voor c_t :

$$c_t = \frac{w_s}{k_v} \beta_t C_2, \quad \text{met} \quad \beta_t = \frac{1}{e^{\frac{w_s}{k_v}(h_t-h_b)} - 1}. \quad (2.27)$$

Gegeven de concentraties c_t, c_b en de depositieterm D kan vergelijking (2.21) verder versimpeld worden

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} + \nabla \cdot C_2 \bar{u} - k \nabla_h \cdot \left[\nabla_h C_2 - \nabla_h (h_t) \frac{w_s}{k_v} \beta_t C_2 + \nabla_h (h_b) \frac{w_s}{k_v} \beta_b C_2 \right] = E - \frac{w_s^2}{k_v} \beta_b C_2. \quad (2.28)$$

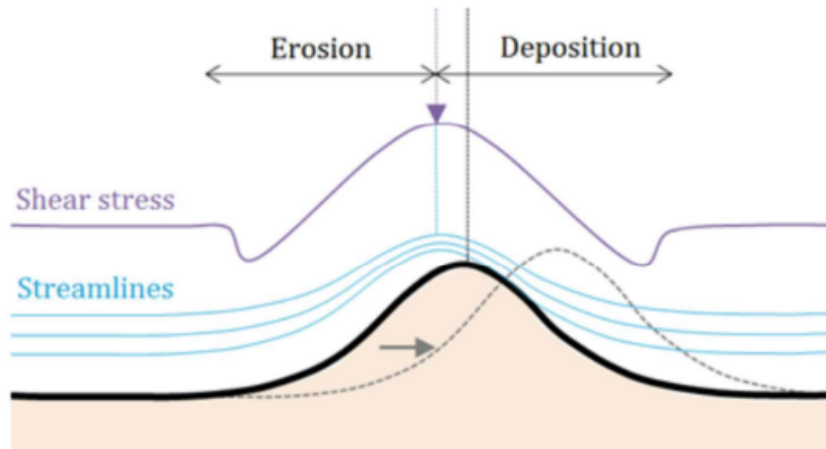
Alleen de erosie term E moet nog uitgedrukt worden in bekende termen. Om naar de eendimensionale concentratievergelijking te gaan, nemen we aan dat alle variabelen constant zijn in de breedte en dit resulteert in

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - k \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + k \frac{w_s}{k_v} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_t C \frac{\partial h_t}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_b C \frac{\partial h_b}{\partial x} \right] \right) = E - \frac{w_s^2}{k_v} \beta_b C. \quad (2.29)$$

In bovenstaande vergelijking is de hoogte-geïntegreerde sedimentconcentratie C [kg/m^2] de vervanging van C_2 en de hoogtegemiddelde windsnelheid wordt gegeven door u [m/s].

2.2.1. Vlakke bodem en oneindige bovengrens

Sedimenttransport zorgt voor morfologische veranderingen van het aardoppervlak door bijvoorbeeld het ontstaan van duinen of het vormen van kleine rimpels op het strand. De morfologie is een belangrijke factor in het bepalen van het windveld omdat het invloed heeft op de erosie- en depositieterm. In Figuur 2.3 is te zien dat windlijnen compacter worden aan de loefzijde en verbreden aan de lijzijde van de duin. Door het Bernoulli effect versnelt wind aan de loefzijde en vertraagt wind aan de lijzijde van de duin dat respectievelijk voor meer erosie en depositie zorgt [4]. Op lange tijdschalen zal de duin zich verplaatsen in de richting van de wind. Op korte tijdschalen zijn morfologische veranderingen verwaarloosbaar omdat de wind relatief niet veel sediment kan dragen.



Figuur 2.3: Schematische weergave van het bewegende duin effect. Aan de loefkant van de duin worden windlijnen compacter en dit verhoogt de afschuifspanning dat tot meer erosie leidt. Aan de lijzijde breiden de windlijnen zich uit waardoor de afschuifspanning verlaagt wordt en de depositie toeneemt.

In het geval van een vlakke bodem en een constante bovengrens, op 1 meter, kan er gesteld worden dat $h_b(x, t) = 0$, $h_t(x, t) = 1$. Nu kunnen wij vergelijking (2.29) versimpelen tot

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - k \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = E - \frac{w_s^2}{k_v} \beta_B C, \quad \text{met} \quad \beta_b = \frac{1}{1 - e^{-\frac{w_s}{k_v}}} \quad (2.30)$$

2.3. Model van De Vries

De Vries [6] definieert de erosie- en depositieterm op basis van het verschil tussen de verzadigde concentratie C_v [kg/m^3] en de concentratie C in de lucht. De verzadigde concentratie is de maximale concentratie die lucht met een bepaalde windsnelheid kan transporteren. Deze erosie- en depositie-term wordt gelimiteerd door het erodeerbare sediment dat op het strandoppervlak ligt oftewel het oppervlakte-sediment. Dit houdt in dat de sedimentconcentratie in de lucht niet kan toenemen als er geen sediment beschikbaar voor erosie op de bodem ligt. In deze sectie worden de erosie- en depositieterm uitgewerkt en afgeleid.

2.3.1. Verzadigde sedimentconcentratie in lucht

Als eerst wordt een uitdrukking voor de verzadigde sedimentconcentratie in lucht C_v afgeleid. Bagnold [3] heeft in 1937 eolisch sedimenttransport als volgt geformuleerd

$$Q = C_d \frac{\rho}{g} \left(\frac{d}{D} \right)^\alpha (u_*)^\beta, \quad (2.31)$$

waar Q [$kg/(m \cdot s)$] staat voor mate van sedimenttransport, als functie van de korreldiameter d [mm] relatief tot een referentiekorreldiameter D [mm], de luchtdichtheid ρ [kg/m^3], de gravitatieversnelling g [m/s^2], de afschuifnelheid u_* [m/s] en een dimensieloze empirische constante C_d [–]. Formule (2.31) is op empirische wijze verkregen. Daarom lopen de waarden van α en β in de literatuur uiteen. Zo heeft Zingg in 1953 een model geformuleerd met $\alpha = \frac{3}{4}$ terwijl Kawamura deze term niet heeft meegenomen, wat leidde tot $\alpha = 0$ [17]. Werner heeft in zijn studie $\beta \approx 3.42$ afgeleid, terwijl Ungar en Haff $\beta = 2$ hebben gevonden [16]. De meeste studies hebben de coëfficiënten $\alpha \approx 0.5$ en $\beta \approx 3$ en deze zullen we ook verder in dit verslag gebruiken.

De 'Law of the wall' beschrijft het profiel van de windsnelheid boven een oppervlak waar een 'geen slip conditie' geldt. Dit houdt in dat de windsnelheid bij het oppervlak nul moet zijn. De 'Law of wall' wordt beschreven met de vergelijking

$$u(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z-v}{z_0}. \quad (2.32)$$

In bovenstaande formule is u [m/s] de windsnelheid gegeven op een hoogte z [m]. κ [–] de dimensieloze von Kàrman constante ($\kappa \sim 0.41$), v [m] is de hoogte van windvertragende obstakels zoals helmgrasvegetatie (gemeten vanaf de grond). Deze hoogte corrigeert het snelheidsprofiel. In dit model nemen we vegetatie niet meer in ons model en kan v gelijk worden gesteld aan nul. Als laatste is z_0 [m] de oppervlakteruwheid. Voor $z-v = z_0$ gaat de theoretisch gemiddelde snelheid naar nul. Bagnold merkte in zijn metingen op dat het windsnelheidsprofiel overeenkwam met de 'Law of wall' als de zandkorrels niet [3]. De korrels werden aan het oppervlak gehecht door er water overheen te spuiten. Door capillaire krachten kleven korrels aan elkaar en kunnen ze niet los bewegen [5]. Droog zand kan vrij bewegen met de wind, dit beïnvloedt het windsnelheidsprofiel. Als gevolg van het bewegende zand wordt de theoretische hoogte z_0 verhoogd naar z'_0 . Op deze hoogte heeft de windsnelheid een constante waarde in tegenstelling tot de theoretische waarde nul, deze waarde wordt de dynamische windsnelheid u_s [m/s] genoemd. Met deze bevindingen luidt de nieuwe 'Law of wall'

$$u(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z'_0} + u_s. \quad (2.33)$$

Substitueer vergelijking (2.33) in vergelijking (2.31),

$$Q = \frac{C_d \rho}{\gamma g} \left(\frac{d}{D} \right)^\alpha (u - u_s)^\beta, \quad \text{met} \quad \gamma = \left(\frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{z'_0} \right)^\beta. \quad (2.34)$$

Met bovenstaande formule beschrijft Bagnold [3] hoeveel sediment er hypothetisch kan worden getransporteerd. Hier ligt de nadruk op aangezien er geen sedimenttransport is als er geen erodeerbaar zand aanwezig is. Als we het sedimenttransport benaderen als het product van de concentratie en de windsnelheid $Q = C_3 \vec{u}$ dan volgt dat de verzadigde concentratie wordt gegeven door

$$C_v = \frac{C_d \rho}{\gamma g} \left(\frac{d}{D} \right)^\alpha \frac{(u - u_s)^\beta}{u}, \quad (2.35)$$

waar C_v staat voor de concentratie die hypothetisch in de lucht kan zitten als er genoeg erodeerbaar zand aanwezig is. Als de lucht de hypothetische sedimentconcentratie bevat, noemen we de lucht verzadigd.

2.3.2. Erodeerbaar sediment op het strandoppervlak

Vergelijkingen (2.35) en (2.34) alleen in het geval dat er genoeg erodeerbaar zand aanwezig is op het oppervlak. Schelpen en (lucht)vochtigheid zijn oorzaken die ervoor zorgen dat er niet genoeg erodeerbaar sediment opgepikt kan worden door de wind. De Vries [6] voegde daarom een tweede differentiaalvergelijking toe aan zijn model.

$$\frac{\partial S_e}{\partial t} = S_t - (E - D), \quad (2.36)$$

waar S_e [kg/m^2] de hoeveelheid erodeerbaar zand op de bodem representeert. De variabele S_t [$kg/(m^2 \cdot s)$] staat voor de aanvoersnelheid van erodeerbaar sediment aan het oppervlak. Vergelijkingen (2.29) en (2.36) gekoppeld via de erosie-depositieterm. Als zand eenmaal wordt opgepikt door wind, $E - D > 0$, verdwijnt het van de bodem en vice versa. Door aanwezigheid van sediment op de bodem aan het model toe te voegen onderscheidt het model van De Vries zich van anderen. De depositieterm D wordt geformuleerd als de concentratie die met een bepaalde tijdschaal T_1 [s] valt op het bodemoppervlak

$$D = \frac{C}{T_1}. \quad (2.37)$$

Merk op dat er een verschil is tussen de vergelijkingen van De Vries en de vergelijkingen die in dit model worden gegeven. De Vries gebruikt in zijn vergelijking de sedimentconcentratie die nog niet over de hoogte is geïntegreerd. Dit wordt opgelost door de concentratie te vermenigvuldigen met een factor h , dat voor de hoogte van het model van De Vries staat. Aangezien wij in ons model de hoogte geïntegreerde concentratie gebruiken, verschillen de vergelijking van De Vries en dit model met een factor h .

De erosieterm E wordt in het model gelimiteerd door de hoeveelheid erodeerbaar zand op de bodem. De erosieterm wordt daarom beschreven door de verzadigde concentratie in lucht over een tijdschaal T_2 [s] of door de hoeveelheid potentiële depositie plus de hoeveelheid erodeerbaar sediment over een tijdschaal T_3 [s]. Dus de erosieterm wordt beschreven als

$$E = \min \left(\frac{C_v}{T_2}, \frac{C + S_e}{T_3} \right). \quad (2.38)$$

Er wordt in De Vries zijn model aangenomen dat de tijdschalen van gelijke orde grootte zijn, $T = T_1 = T_2 = T_3$. Substitutie van vergelijking (2.37) en (2.38) in vergelijking (2.30) en (2.36) en geeft de complete modelvergelijkingen.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - k \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \min \left(\frac{C_v - C}{T}, \frac{S_e}{T} \right), \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial S_e}{\partial t} = S_t - \min \left(\frac{C_v - C}{T}, \frac{S_e}{T} \right). \quad (2.40)$$

Dit zijn de modelvergelijkingen die we zullen gebruiken voor het beantwoorden van de onderzoeksvragen. Om het model op te lossen zijn de volgende twee aspecten noodzakelijk: de beginvoorwaarde van het model en de randvoorwaarden aan de rand van het domein. De beginvoorwaarde beschrijft het model aan het begin van de simulatie. In numerieke simulaties kunnen verschillende initiële condities leiden tot uiteenlopende oplossingen en dus belangrijk dat de juiste gekozen wordt. Het gebruik van randvoorwaarden zijn van groot belang bij partiële differentiaalvergelijkingen omdat ze de eigenschappen van de oplossing op en binnen de grenzen van het domein kunnen beïnvloeden. Voor het model van De Vries die alleen advectie meeneemt in de transportvergelijking is een Dirichlet-randvoorwaarde noodzakelijk die de concentratie op de rand voorschrijft. Bij ons model dat ook diffusie meeneemt in de transportvergelijking is de extra Neumann-randvoorwaarde nodig om het model te kunnen oplossen.

3

Evenwichtstoestanden en een dimensie-analyse

3.1. Dimensieloze vergelijkingen

In deze sectie wordt een schalingsanalyse uitgevoerd op vergelijking (2.39). Deze analyse wordt toegepast om te inzicht te krijgen in de respectievelijke contributies van de termen in de partiële differentiaalvergelijking. De variabelen worden geschaald met typische waarden

$$\begin{aligned} C &= \widehat{C}_v \widetilde{C}, & x &= \widehat{L} \widetilde{x}, & u &= \widehat{U} \widetilde{u}, \\ C_v &= \widehat{C}_v \widetilde{C}_v, & t &= \widehat{T} \widetilde{t}, & Se &= \widehat{S}_e \widetilde{S}_e, \\ k &= \widehat{K} \widetilde{k}, & T &= \widehat{T} \widetilde{T}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

waar een dakje boven de grootheid voor de typische waarde met fysische eenheden staat. Een tilde boven de grootheid staat voor een dimensieloze waarde, waarmee wij de contributie meten. Substitueer de geschaalde variabelen in (2.30)

$$\frac{\widehat{C}_v}{\widehat{T}} \frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \widetilde{t}} + \frac{\widehat{U} \widehat{C}_v}{\widehat{L}} \widetilde{u} \frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \widetilde{x}} - \frac{\widehat{K} \widehat{C}_v}{\widehat{L}^2} \widetilde{k} \frac{\partial^2 \widetilde{C}}{\partial \widetilde{x}^2} = \min \left(\frac{\widehat{C}_v}{\widehat{T}} \frac{\widetilde{C}_v - \widetilde{C}}{\widetilde{T}}, \frac{\widehat{S}_e}{\widehat{T}} \frac{\widetilde{S}_e}{\widetilde{T}} \right). \quad (3.2)$$

Bovenstaande vergelijking delen door $\frac{\widehat{C}_v}{\widehat{T}}$ en introduceer de schaalparameter $a = \frac{\widehat{S}_e}{\widehat{C}_v}$ om de volgende vergelijking te krijgen

$$\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \widetilde{t}} + \frac{\widehat{U} \widehat{T}}{\widehat{L}} \widetilde{u} \frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \widetilde{x}} - \frac{\widehat{K} \widehat{T}}{\widehat{L}^2} \widetilde{k} \frac{\partial^2 \widetilde{C}}{\partial \widetilde{x}^2} = \min \left(\frac{\widetilde{C}_v - \widetilde{C}}{\widetilde{T}}, a \frac{\widetilde{S}_e}{\widetilde{T}} \right). \quad (3.3)$$

In vergelijking (3.3) zijn nu voor alle dimensievolle termen de dimensieloze getallen te vinden. Deze dimensieloze getallen staan voor het belang van die term voor de totale transportvergelijking en geeft de relatie ten opzichte van de andere termen, waar een hoog dimensieloos getal staat voor een significante bijdrage en een laag dimensieloos getal voor een minder significante bijdrage voor de transportvergelijking. Voor de advectieterm staat het Courant getal, $Cr = \frac{\widehat{U} \widehat{T}}{\widehat{L}}$. Het Courant getal is gebaseerd op de lengteschaal van een rekencel en de grootte van de numerieke tijdstap en vermenigvuldigd met de typische snelheid. Voor de diffusie-term staat het dimensieloze diffusiegetal, $Di = \frac{\widehat{K} \widehat{T}}{\widehat{L}^2}$. Het diffusiegetal is het product van de diffusiecoëfficiënt en de typische tijdschaal gedeeld door de typische lengte in het kwadraat. De schalingsparameter a staat voor de hoeveelheid erodeerbaar sediment geschaald met de typische concentratie in de lucht. In het geval van $a \ll 1$, is er weinig sediment beschikbaar.

Grootheden	
$\widehat{U} = 7$	ms^{-1}
$\widehat{T} = 1$	s

Tabel 3.1: Typische waarden voor het model

Hierdoor kan de wind niet meer zand meenemen dan op het oppervlak aanwezig is. Tegenovergesteld staat $a \gg 1$ voor genoeg sediment op het oppervlak en is de windsnelheid de beperkende factor. Het waait dan niet hard genoeg om het sediment te kunnen transporteren.

Typische waarden voor de grootheden gegeven in Tabel 3.1 zijn: Als typische windsnelheid is de gemiddelde windsnelheid van Scheveningen over een jaar [21] gekozen. De typische tijdschaal is overgenomen van het model van De Vries [6]. Met deze waarden kan ook de typische lengteschaal berekend worden, $\widehat{L} = \widehat{U} \cdot \widehat{T} = 7 [m]$. Substitutie van deze schalen in vergelijking (3.3) resulteert in

$$\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial t} + \widetilde{u} \frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \widetilde{x}} - \frac{\widehat{K}}{\widehat{U}\widehat{L}} \widetilde{k} \frac{\partial^2 \widetilde{C}}{\partial \widetilde{x}^2} = \min \left(\frac{\widetilde{C}_v - \widetilde{C}}{\widehat{T}}, a \frac{\widetilde{S}_e}{\widehat{T}} \right). \quad (3.4)$$

Het belang van de diffusie-term ten opzicht van de advectie-term wordt gegeven door het Péclet getal, $Pe = \left(\frac{\widehat{K}}{\widehat{U}\widehat{L}} \right)^{-1}$. Het Péclet-getal geeft aan of convectie of diffusie de belangrijkste factor is bij het transport. In het geval van $Pe \gg 1$ is convectie de belangrijkste factor voor het totale transport. Een laag Péclet-getal, $Pe \ll 1$ wijst op dat diffusie de belangrijkste factor is. Herrmann heeft een diffusiecoëfficiënt gevonden van ongeveer $\widehat{K} \sim 0.05 [m/s^2]$ voor hoogtes tussen 0.01 en 1 meter boven de grond [9]. Het Péclet getal is nu gelijk aan $Pe \sim 10^3$. Er kan gesteld worden dat het transport vooral advectief is. De bijdrage van diffusie is zoveel kleiner dat het verwaarloosd mag worden. Voor het algemene geval zal diffusie wel meegenomen worden in de transportvergelijking.

3.2. Evenwichtstoestanden

In deze sectie kijken we naar de evenwichtstoestanden waar het model van De Vries naartoe neigt met een homogene windsnelheid $u = \text{constant}$ op lange tijdschaal $t \rightarrow \infty$, waarbij de oplossing niet verandert, $\frac{\partial C}{\partial t} \rightarrow 0$. Net zoals in het model van De Vries wordt diffusie in de analyse niet meegenomen. De evenwichtstoestanden van de concentratie C en het erodeerbare sediment op het strandoppervlak S_e worden besproken.

Sedimenttransport is van nature geneigd om de sedimentconcentratie in de lucht verzadigd te maken. In Figuur 2.2 is te zien dat na enige tijd en na een bepaalde afstand de concentratie constant blijft. Verschillende initiële condities leiden tot hetzelfde evenwicht. Ons model wil naar ditzelfde evenwicht toe dat wordt uitgedrukt in de eerste term van de erosie- en depositie-term: $(C_v - C)/T$. Echter, de sedimentconcentratie kan niet naar de verzadigde concentratie gaan als er geen zand op het oppervlak is. Hier wordt rekening mee gehouden door een tweede term toe te voegen die de beschikbaarheid van sediment aangeeft. De fysische interpretatie van het minimum van beide termen is dat de sedimentconcentratie alleen naar de verzadigde concentratie gaat voor zolang voldoende erodeerbaar sediment op het oppervlak aanwezig is. De transportvergelijking voor sedimentconcentratie in evenwicht wordt gegeven door

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \min \left(\frac{C_v - C}{T}, \frac{S_e}{T} \right). \quad (3.5)$$

Om de evenwichtsprofielen van de concentratie en het oppervlakesediment te analyseren, wordt er onderscheid gemaakt tussen drie verschillende situaties: geen toestroom van sediment aan het oppervlak, sediment-gelimiteerd en erosie-gelimiteerd. De eerste situatie is als er geen sediment aan het oppervlak wordt toegevoegd vanuit de ondergrond van het strand, $S_t = 0$. Nu zal voor elke situatie het evenwichtsprofiel bepaald worden voor een homogene windsnelheid.

Geen (toevoer van) sediment

In deze situatie is er geen toevoer van sediment, $S_t = 0$. Dit resulteert in dat de erosie-depositieterm gelijk is aan nul, $E - D = 0$. De differentiaalvergelijking voor de concentratie wordt

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = 0.$$

En de differentiaalvergelijking voor het oppervlakesediment wordt

$$\frac{\partial S_e}{\partial t} = 0.$$

Als we de differentiaalvergelijkingen oplossen zien we dat de concentratie en het oppervlakesediment constant zijn en volledig afhangen van de initiële condities. Beide grootheden zijn constant in de tijd en kunnen we stellen dat ze in evenwicht zijn.

Sediment-gelimiteerd

In een sediment-gelimiteerde situatie is er wel sediment aanwezig en wordt er ook sediment aan het oppervlak toegevoegd. Echter, dit is niet genoeg om de lucht te verzadigen met sediment, er geldt dan dat $S_e < C_v - C$. De erosie- en depositieterm wordt gegeven door S_e/T . Dit betekent dat het zand dat op het oppervlak ligt door erosie zal worden meegenomen door de wind. Het sediment dat overblijft, is wat er opnieuw wordt toegevoegd, S_t . De vergelijking voor de evolutie van sediment aan het oppervlak wordt gegeven door

$$\frac{\partial S_e}{\partial t} = S_t - \frac{S_e}{T}.$$

Los deze vergelijking op met de initiële conditie $S_e(0) = 0$ en krijg

$$S_e(t) = S_t T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right). \quad (3.6)$$

Met $S_e = S_t T$ voor $t \rightarrow \infty$. We zien dat voor een lange tijdschaal de hoeveelheid sediment op het strand constant en in evenwicht is. Vul dit evenwicht in de sediment-gelimiteerde transportvergelijking en krijg de volgende vergelijking

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{S_t}{u}.$$

Integreer bovenstaande vergelijking met de randvoorwaarde $C(x_0) = C_0$ en krijg

$$C(x) = C_0 + \frac{S_t}{u} (x - x_0) \quad (3.7)$$

Uit bovenstaande vergelijking kan worden opgemaakt dat in een sediment-gelimiteerde situatie de sedimentconcentratie lineair toeneemt met de afstand.

Erosie-gelimiteerd

De laatste situatie is erosie-gelimiteerd en houdt in dat er veel sediment op het oppervlak is en veel wordt toegevoegd vanuit de ondergrond. De wind kan niet al het sediment meenemen en een deel blijft op het strand liggen. In deze situatie geldt: $S_e > C_v - C$ en wordt de erosie- en depositieterm gereduceerd tot $(C_v - C)/T$. De vergelijking voor de evolutie van sediment aan het oppervlak wordt gereduceerd tot

$$\frac{\partial S_e}{\partial t} = S_t - \frac{C_v - C}{T}.$$

Oplossen van bovenstaande ODE geeft dat het sediment op het oppervlak lineair toeneemt voor een constante evenwichtconcentratie en sedimentconcentratie in de tijd. De oplossing wordt gegeven door

$$S_e(t) = \left(S_t - \frac{C_v - C}{T}\right) t. \quad (3.8)$$

In de werkelijkheid zal de wind variëren vanwege plaatselijke windvlagen die zich over het oppervlak bewegen. Met de wind zal ook de evenwichtconcentratie veranderen en dus de mate waarin het

sediment op het oppervlak toeneemt. In het extreme geval kan de windsnelheid zo erg toenemen dat het verschil in evenwichtconcentratie en de daadwerkelijke sedimentconcentratie in de lucht de toevoersnelheid van sediment aan het oppervlak S_t overschrijdt. In dit geval zal er netto sediment van de bodem verdwijnen. In welke mate het sediment aan het oppervlak wordt opgenomen, is dus afhankelijk van windsnelheid en de sedimentconcentratie in de lucht. In het specifieke geval dat de windsnelheid niet verandert, kunnen we stellen dat het sediment op de bodem lineair toeneemt. Op dezelfde wijze kan de transportvergelijking worden versimpeld tot

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C_v - C}{uT}.$$

Los bovenstaande ODE op met randvoorwaarden $C(x_0) = C_0$ en $C \rightarrow C_v$ voor $x \rightarrow \infty$ en krijg

$$C(x) = (C_0 - C_v) e^{\frac{1}{uT}(x_0 - x)} + C_v \quad (3.9)$$

Uit bovenstaande vergelijking kan worden opgemaakt dat de sedimentconcentratie exponentieel groeit tot de horizontale asymptoot $C = C_v$.

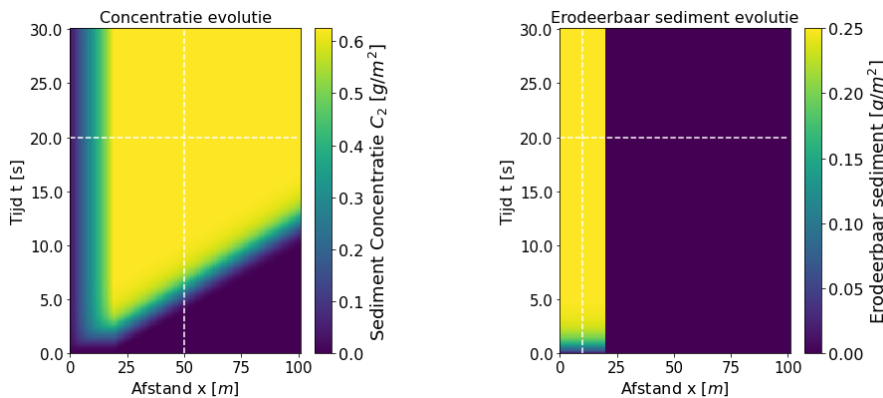
Omdat slechts een deel van het sediment wordt opgenomen, blijft het andere deel op het strand liggen. Dit zal zich in de tijd ophopen totdat er een berg ontstaat. Kortom, er is in een erosie-gelimiteerde situatie geen evenwicht in de sedimentconcentratie en de sedimentevolutie.

Een overzicht voor elke situatie met de bijbehorende gereduceerde transportvergelijking en bode-evolutie. Als eerst zal het model worden gesimuleerd voor de sediment-gelimiteerde situatie. De

Geen (toevoer) sediment	Sediment-gelimiteerd	Erosie-gelimiteerd
$u \frac{\partial C}{\partial x} = 0$	$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{S_e}{T}$	$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C_v - C}{T}$
$\frac{\partial S_e}{\partial t} = 0$	$\frac{\partial S_e}{\partial t} = S_t - \frac{S_e}{T}$	$\frac{\partial S_e}{\partial t} = S_t - \frac{C_v - C}{T}$

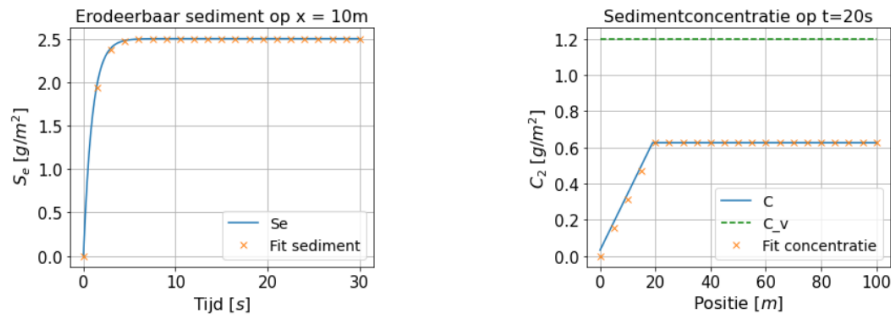
Table 3.2: Caption

parameters waarop het model is ingesteld zijn $S_t = 2.5g/m^2$ voor $x \in [0m, 20m]$, $T = 1s$, $u = 8m/s$ en het totaal aantal seconden dat het model loopt is $30s$. Voor de lengte van het domein wordt 100 meter gekozen. Forward-Euler wordt gebruikt om het model numeriek te benaderen. Resultaten worden weergegeven in Figuur 3.1. In Figuur 3.1 is de $x-t$ diagram te zien voor sedimentconcentratie en



Figuur 3.1: 2D colorplot van het model in een sediment-gelimiteerde situatie waar $S_s = 2.5g/m^2$ voor $x \in [0m : 20m]$. Links: x-t diagram van de sedimentconcentratie. Rechts: x-t diagram van het erodeerbare sediment op het strandoppervlak.

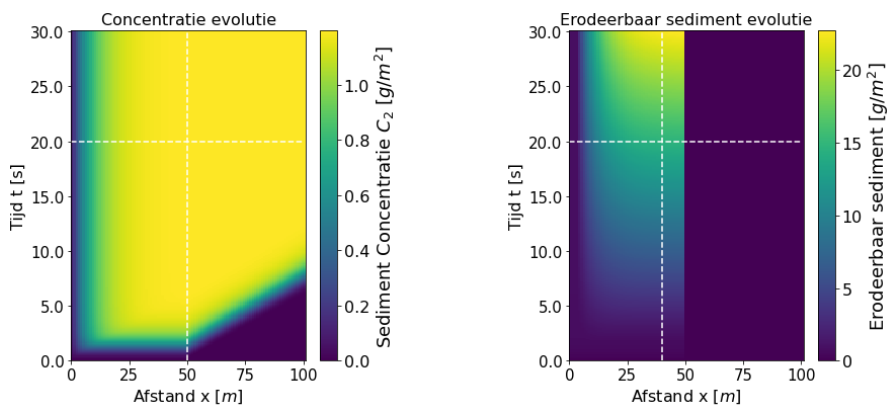
voor het erodeerbare sediment op het strandoppervlak. Op de concentratie evolutie is te zien dat de concentratie de eerste 20 meter toeneemt, daarna blijft de concentratie gelijk aangezien er alleen in de eerste 20 meter sediment wordt toegevoegd aan de bodem. Ook is te zien dat het ongeveer 15 seconden duurt voordat de concentratie aan het einde van het domein is. De lijn waarover de concentratie zich beweegt, wordt ook wel een karakteristieke lijn genoemd en is een functie van de vorm $f(x - ut)$.



Figuur 3.2: Doorsnede van 2D colorplot. Links: Tijdsevolutie van erodeerbaar sediment op het strandoppervlak op $x = 10m$. De kruissymbolen geeft vergelijking (3.6) weer. Rechts: Plot van sedimentconcentratie door het domein op $t = 20s$. De kruissymbolen geeft vergelijking (3.7) weer.

In Figuur 3.2 is links te zien hoe de evolutie van erodeerbaar sediment verloopt in de tijd op $x = 10$ meter. Hier is ook vergelijking (3.6) geplott. Rechts in Figuur 3.2 is te zien hoe de sedimentconcentratie verloopt in de ruimte op $t = 20$ seconden en vergelijking (3.7) is geplott en beide komen sterk overeen. De sedimentconcentratie neemt dus lineair toe in de ruimte. De concentratie in de lucht bereikt de evenwichtconcentratie niet aangezien het sediment-gelimiteerd is.

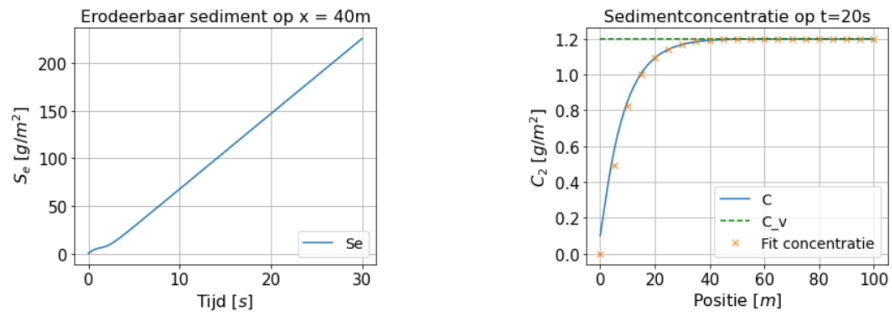
Dit wordt nog een keer herhaald voor de erosie-gelimeerde situatie. De modelparameters blijven hetzelfde, behalve $S_t = 8 \text{ g}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ voor $x \in [0m : 50m]$. De resultaten zijn te zien in Figuur 3.3. Links



Figuur 3.3: 2D colorplot van het model in een sediment-gelimeerde situatie waar $S_t = 8 \text{ g}/\text{m}^2$ voor $x \in [0m : 50m]$. Links: x-t diagram van de sedimentconcentratie. Rechts: x-t diagram van het erodeerbare sediment op het strandoppervlak.

in Figuur 3.3 is te zien hoe de sedimentconcentratie in de tijd en ruimte evolueert. Rechts in Figuur 3.3 is de hoeveelheid sediment aan het oppervlak gevisualiseerd. Het is goed te zien dat met de tijd meer sediment aan het oppervlak ligt dan het begin. Dit is niet overal het geval aangezien er aan de linkerrand van het domein geen sediment blijft liggen. Aangezien de initiële conditie in het model ervoor zorgt dat de lucht geen sediment bevat zal er erosie plaatsvinden in het eerste gedeelte van het domein. Wanneer de lucht verzadigd is, zal er geen sediment meer geërodeerd worden en hoopt het zich op. Van Figuur 3.3 is een doorsnede gemaakt voor de sedimentconcentratie op $x = 50$ meter en voor de hoeveelheid oppervlaktседiment op $t = 20$ seconden.

In de linkerplot van Figuur 3.4 is te zien hoe de hoeveelheid bodemsediment toeneemt met de tijd. Dit komt overeen met onze voorspelling in vergelijking (3.8). In het begin is de verhouding niet lineair aangezien hier de simulatie nog moet opstarten. In de rechterplot van Figuur 3.4 is te zien hoe de sedimentconcentratie in de lucht evolueert in de ruimte samen vergelijking (3.9) en de evenwichtconcentratie C_v . Het is te zien dat de analytische oplossing sterk overeenkomt met de gesimuleerde oplossing. Aangezien de situatie erosie-gelimeerd is, is het te verwachten dat de concentratie uiteindelijk toeneemt tot de evenwichtconcentratie, dit is ook in te zien in de rechterplot.



Figuur 3.4: Doorsnede van 2D colorplot. Links: Tijdsevolutie van erodeerbaar sediment op het strandoppervlak op $x = 40m$. Rechts: Plot van sedimentconcentratie door het domein op $t = 20s$. De kruissymbolen geeft de vergelijking (3.9) weer.

4

Numerieke methodes

4.1. Eindige differentie

De oplossing van de advection-diffusievergelijking wordt numeriek benaderd met de eindige differentie methode. Het ruimte-tijd domein wordt gedefinieerd als het carthesisch product van de subdomeinen $[0, L] \times [0, \mathcal{T}]$, waar L [m] de lengte is van het gemodelleerde stuk strand en \mathcal{T} [s] de tijd die simulatie moet berekenen. In dit vakgebied worden simulaties gedaan voor meerdere maanden en soms zelfs enkele jaren. Dit is ongeveer de tijd die nodig is om het effect van een oeversuppletie terug te zien in de morfologie van de duinen. Het ruimte-tijd domein wordt gediscretiseerd in de ruimte over een gebied van lengte L door $x_j = j\Delta x$ met $j = 1, 2, \dots, m$ en in de tijd \mathcal{T} [s] door $t_n = n\Delta t$ met $n = 1, 2, \dots, l$. De randen van het domein hebben als index respectievelijk $j = 0$ en $j = m + 1$. De concentratie op positie x_j en tijdstip t_n wordt aangegeven met respectievelijk een subscript en een superscript $C(x_j, t_n) = C_j^n$. Deze notatie geldt ook voor het oppervlaktesediment S_e als voor de verzadigde sedimentconcentratie C_v . De vector C^n wordt gedefinieerd als $C^n = (C_0^n, C_1^n, \dots, C_m^n)^T$. De vectoren S_e en C_v zijn op dezelfde manier gedefinieerd.

In het model van De Vries wordt de tijdsafgeleide met de voorwaartse Euler methode benaderd. Dit houdt in dat de oplossing van de volgende tijdstap ($n + 1$) berekend wordt met de oplossing van de huidige tijdstap (n). Dit zorgt ervoor dat het numerieke schema en in zijn geheel expliciet is en dat direct berekend kan worden. Dit scheelt in rekentijd per tijdstap, maar zorgt ervoor dat de oplossing snel instabiel kan worden. De tegenhanger van deze methode is de achterwaartse Euler waarbij de oplossing van de volgende tijdstap impliciet wordt berekend. Hierdoor duurt het berekenen langer, maar heeft als voordeel dat het stabiel is, waardoor de tijdstap groter gekozen kan worden.

De advectionterm wordt met de upwind methode benaderd. Upwind is een numerieke methode die vaak wordt gebruikt om stromingsproblemen op te lossen. Deze methode houdt rekening met de richting van de stroming, in ons model de windrichting, om een nauwkeurige benadering van de oplossing te verkrijgen. In ons model wordt er gekeken naar aanlandige wind die van links naar rechts loopt. Vanuit een vast punt op het domein, bijvoorbeeld x_j wordt de 'upwind'-kant gedefinieerd als de punten die links van x_j liggen. Dit zijn de punten $x_{j-1}, x_{j-2}, \dots, x_0$. Het idee achter upwind is dat de informatie vanuit de upwind-richting de oplossing meer beïnvloedt dan de informatie vanuit de tegenovergestelde (downwind) richting. Dit komt doordat de wind de informatie in die richting meeneemt. Daarom wordt er gekozen voor C_{j-1} en niet C_{j+1} .

In ons model hebben we de diffusie term toegevoegd die in het model van De Vries is verwaarloosd. Deze term wordt met de centrale methode benaderd. Deze methode houdt in dat er de diffusie term wordt benaderd door punten aan beide kanten mee te nemen, dat het nauwkeuriger maakt (dit wordt afgeleid in vergelijking (4.5)). Discretisatie van vergelijking (2.39) geeft

$$\frac{C_j^{n+1} - C_j^n}{\Delta t} + u \frac{C_j^n - C_{j-1}^n}{\Delta x} - k \frac{C_{j+1}^n - 2C_j^n + C_{j-1}^n}{\Delta x^2} = \min \left(\frac{C_{v,j}^n - C_j^n}{T}, \frac{S_{e,j}^n}{T} \right). \quad (4.1)$$

simulatie. Deze extra diffusie kan gecompenseerd worden door aanpassing van de diffusiecoëfficiënt k . Deze wordt minder en kan zelfs negatief worden. De formule voor de nieuwe coëfficiënt wordt gegeven door

$$k_{sim} = k - \frac{u\Delta x}{2} \left(1 - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\right). \quad (4.11)$$

Hier is k_{sim} de diffusiecoëfficiënt die in de simulatie wordt gebruikt. Merk op dat een negatieve diffusiecoëfficiënt de oplossingsmethode instabiel maakt. Als deze methode gebruikt wordt is het belangrijk dat k_{sim} mee schaal met de windsnelheid.

4.3. Stabiliteit

In deze sectie bestuderen wij de verschillende stabiliteitscriteria van de Lax-Wendroff methode. Een numerieke methode of systeem wordt *stabil* genoemd als een fout in een tijdstap er niet voor zorgt dat de fout in de volgende tijdstap groter wordt als berekeningen doorgaan. Een systeem is *stabil* als de fout gelijk blijft naarmate de berekeningen vorderen, een systeem wordt pas *absoluut stabil* genoemd als de fout vermindert of uiteindelijk gedempt wordt. Een systeem wordt *instabil* genoemd als de fout groter wordt naarmate berekeningen vorderen. De stabiliteit van de numerieke methode wordt volgens het Von Neumann criterium achterhaald.

het Von Neumann criterium is gebaseerd op de decompositie van de fouten in het Fourierdomein. De fout wordt gedefinieerd als

$$\epsilon_j^n = \tilde{C}_n^j - C_n^j, \quad (4.12)$$

waar \tilde{C}_n^j de exacte oplossing is en C_n^j de numerieke oplossing. De fout ϵ_j^n is het verschil tussen de exacte en de numerieke oplossing. Aangezien de exacte oplossing \tilde{C}_n^j aan de discretisatie voldoet, moet ook de fout ϵ_j^n aan de discretisatie voldoen. Hierbij nemen we aan dat de numerieke oplossing C_n^j aan de discretisatie voldoet. Deze aanname geldt alleen als de computer het systeem extreem nauwkeurig kan oplossen. Tegenwoordig zijn de meeste computers dermate nauwkeurig dat deze aanname kan worden gemaakt. Verder worden de volgende getallen gedefinieerd $Cr = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$ en $Di = k \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$. Dit wordt gedaan om de leesbaarheid van de volgende afleiding te vergroten. De Lax-Wendroff recursievergelijking voor de fout geeft

$$\epsilon_j^{n+1} = \frac{1}{2} [2Di + Cr(1 + \theta)] \epsilon_{j-1}^n + [1 - 2Di - Cr\theta] \epsilon_j^n + \frac{1}{2} [2Di - Cr(1 - \theta)] \epsilon_{j+1}^n. \quad (4.13)$$

Vervang ϵ_j^n door $\xi^n e^{ik_m j \Delta x}$ met de golflengte $k_m = \frac{\pi m}{L}$ met $m = 1, 2, \dots, M$ en $M = \frac{L}{\Delta x}$ en $i^2 = -1$. Neem $k_m \Delta x = \psi$ en definieer de amplificatiefactor met $\xi = \frac{\epsilon_j^{n+1}}{\epsilon_j^n}$. De amplificatiefactor heeft de volgende vergelijking als functie van de fasehoek ψ

$$\xi = \frac{1}{2} [2Di + Cr(1 + \theta)] e^{-i\psi} + [1 - 2Di - Cr\theta] + \frac{1}{2} [2Di - Cr(1 - \theta)] e^{i\psi}. \quad (4.14)$$

Met behulp van de goniometrische identiteiten $2i \sin \theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ en $2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ kan bovenstaande vergelijking gesimplificeerd worden tot

$$\xi = 1 - 2Di(1 - \cos \psi) - Cr\theta(1 - \cos \psi) - iCr \sin \psi. \quad (4.15)$$

Eerder is gezegd dat de numerieke methode *stabil* is als de fout per tijdstap niet groter wordt. Er moet dan gelden dat $|\xi| \leq 1$ voor alle $\psi \in \mathbb{R}$. Het volgende stabiliteitscriterium kan worden afgeleid [12].

$$\left[\frac{(Cr)^2 - Cr\theta}{2} \right] \leq Di \leq \left[\frac{1 - Cr\theta}{2} \right]. \quad (4.16)$$

Nu zal gekeken worden naar de specifieke stabiliteitscriteria voor de upwind methode $\theta = 1$ en de Lax-Wendroff methode $\theta = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$.

Upwind

Invullen van $\theta = 1$ in vergelijking (4.16) geeft

$$\left[\frac{(Cr)^2 - Cr}{2} \right] \leq Di \leq \left[\frac{1 - Cr}{2} \right]. \quad (4.17)$$

Gegeven de definities van Cr en Di wordt vergelijking (4.17) herschreven als

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{u\Delta t}{\Delta x} \right)^2 - \frac{u\Delta t}{\Delta x} \right] \leq \frac{k\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \left[1 - \frac{u\Delta t}{\Delta x} \right] \quad (4.18)$$

Uit bovenstaande vergelijking kunnen twee stabiliteitscriteria worden afgeleid voor de upwind methode

$$\Delta t \leq \frac{2k + u\Delta x}{u^2}, \quad \text{en} \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2k + u\Delta x}, \quad (4.19)$$

waar het linker en het rechterstabiliteitscriterium respectievelijk uit de eerste en de tweede ongelijkheid van vergelijking (4.19) komt. Merk op dat bij de limiet van $k \rightarrow 0$ er fysisch geen sprake is van diffusie. Dit is ook te merken bij beide bovengrenzen van de tijdstap uit vergelijking (4.19) waar het Courant–Friedrichs–Lewy stabiliteitscriterium terugkomt [15] bij de limiet $k \rightarrow 0$. De Courant–Friedrichs–Lewy wordt gegeven met $u\Delta t \leq \Delta x$. Op dezelfde wijze kan er ook worden gekeken worden naar het stabiliteitscriterium waarin er geen advection is, $u \rightarrow 0$. De rechter ongelijkheid van vergelijking (4.19) komt in het geval zonder advection uit op $2k\Delta t \leq \Delta x^2$. Dit is ook het typische stabiliteitscriterium van een diffusieprobleem [13]. Verder onderzoek van vergelijking (4.19) geeft dat geen van de bovengrenzen de overhand heeft, daarom is het voor elke simulatie belangrijk om te berekenen wat de orde van de tijdstap maximaal mag zijn.

Lax-Wendroff

Invullen van $\theta = Cr$ en de dimensieloze getallen Di en Cr in vergelijking (4.16) geeft

$$0 \leq \frac{k\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{u\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right]. \quad (4.20)$$

Oplossen voor Δt geeft de volgende ongelijkheid

$$\frac{-k - \sqrt{k^2 + u^2\Delta x^2}}{u^2} \leq \Delta t \leq \frac{-k + \sqrt{k^2 + u^2\Delta x^2}}{u^2}, \quad (4.21)$$

waar duidelijk de ondergrens onder nul ligt. Aangezien de tijdstap in onze simulatie niet negatief kan worden, versimpelt vergelijking (4.21) tot

$$\Delta t \leq \frac{-k + \sqrt{k^2 + u^2\Delta x^2}}{u^2}. \quad (4.22)$$

Dit geeft de tijdstap die nodig is om het systeem stabiel te krijgen voor de Lax-Wendroff methode met een gegeven diffusiecoëfficiënt, windsnelheid en grootte van het rooster in de ruimte van de simulatie. De Lax-Wendroff methode is stabiel voor grotere tijdstappen dan de upwind methode [12].

4.4. Randvoorwaarden

Randvoorwaarden zijn van cruciaal belang bij het numeriek (of analytisch) oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen vanwege hun fundamentele rol bij het bepalen van de eigenschappen van de oplossing op en binnen de grenzen van het domein. Zo kunnen verschillende type randvoorwaarden verschillende effecten beschrijven binnen het systeem. Bekende randvoorwaarden zijn Dirichlet-voorwaarden, Neumann-voorwaarden en Cauchy-voorwaarden. Dirichlet-voorwaarden schrijven de exacte waarde van de oplossing voor op de grenzen van het domein. Neumann-voorwaarden specificeren daarentegen de waarde van de afgeleide van de oplossing loodrecht op de rand. Cauchy-voorwaarden combineren zowel de waarde van de oplossing als de waarde van de afgeleide op de rand. De zorgvuldige selectie en formulering van geschikte randvoorwaarden zijn nodig om de unieke oplossing van de differentiaalvergelijking te bepalen en leiden tot fysisch betekenisvolle resultaten. Het ontbreken van geschikte randvoorwaarden zou resulteren in een simulatie zonder realistische oplossingen die niet overeenkomen met het werkelijke gedrag van het fysieke systeem dat wordt gemodelleerd.

De randvoorwaarden die De Vries in zijn model gebruikt zullen eerst worden besproken. Daarna zal worden besproken welke randvoorwaarden voor ons model nodig zijn en hoe ze het best kunnen worden gekozen.

In het model van De Vries wordt de diffusieterm verwaarloosd en wordt het transport alleen door de advectieterm voortgebracht. Hierdoor is er slechts één randvoorwaarde nodig aan beide uiteinden van het domein, dit is de Dirichlet-randvoorwaarde. De Vries schrijft aan het begin van zijn domein de randvoorwaarde $C(0, t) = 0$ voor. Dit vertaald zich fysisch dat er geen sedimentconcentratie in de lucht zit als het van de zee afkomt. Dit is een juiste keuze aangezien er geen oppervlakesediment zich boven de zee bevindt. Aan het eind van het domein noemt De Vries niet specifiek in zijn artikel welke randvoorwaarde wordt gebruikt. Door het gebruik van de van de upwind discretisatie wordt de oplossing binnen het domein goed beschreven.

In ons model is diffusie meegenomen. Door dit effect, dat wordt beschreven door de tweede afgeleide, op te nemen in het model is het genoodzaakt om aan de randen een extra randvoorwaarde voor te schrijven. Deze extra randvoorwaarde is de Neumann-voorwaarde en wordt specificieerd door de afgeleide loodrecht op de rand. Merk op dat in het geval $k = 0$ er geen effectieve diffusie is en er ook geen tweede randvoorwaarde nodig is. Met de randvoorwaarde $C(0, t) = 0 \equiv C_0^n = 0$ reduceert vergelijking (4.1) voor $j = 1$ tot

$$\frac{C_1^{n+1}}{\Delta t} + u \left(\theta \left[\frac{C_1^n}{\Delta x} \right] + (1 - \theta) \left[\frac{C_2^n}{2\Delta x} \right] \right) - k \frac{C_2^n - 2C_1^n}{\Delta x^2} = \min \left(\frac{C_{v,1} - C_1^n}{T}, \frac{S_{e,1}}{T} \right).$$

Aangezien matrices A en D al op deze manier zijn gedefinieerd, heeft deze randvoorwaarde geen effect op onze eindige differentieschema.

Het einde van domein van ons model is geen 'fysische rand'. Het domein wordt bepaald door de lengte van een stuk strand wat interessant is om te simuleren. Aan het einde van dit domein is er geen 'muur' dat het sedimenttransport tegenhoudt. Integendeel, er is geen reden dat het transport wordt gehinderd. In ons model willen we daarom ook dat het einde van dit domein geen invloed heeft op de oplossing binnen het domein. We spreken in dit geval van een transparante rand met een transparante randvoorwaarde. Anders dan aan het begin van het domein kunnen wij deze concentratie niet voorschrijven aangezien de waarde tijdens de simulatie kan veranderen. Daarom zoeken aan de andere rand een randvoorwaarde die het transport van sediment zo min mogelijk beïnvloedt. Dit kunnen we het best doen door gebruik te maken van punten die al gegeven zijn dicht bij de rand en op basis daarvan de conditie op de rand te voorspellen. De rand aan het einde van het domein wordt gegeven als, $L = (m + 1)\Delta x$. Op het einde van het domein geldt $j = m$ en vergelijking (4.1) geeft

$$\frac{C_m^{n+1} - C_m^n}{\Delta t} + u \left(\theta \left[\frac{C_m^n - C_{m-1}^n}{\Delta x} \right] + (1 - \theta) \left[\frac{C_{m+1}^n - C_{m-1}^n}{2\Delta x} \right] \right) - m \frac{C_{m+1}^n - 2C_m^n + C_{m-1}^n}{\Delta x^2} = \min \left(\frac{C_{v,m} - C_m^n}{T}, \frac{S_{e,m}}{T} \right). \quad (4.23)$$

In bovenstaande vergelijking zien we dat de advectieterm en de diffusieterm de coëfficiënt C_{m+1}^n bevat. De dimensies van beide matrices zijn $m \times m$ en de term C_{m+1}^n valt buiten de matrix. Effectief is dit de Dirichlet-randvoorwaarde voorschrijven $C(L, t) = 0$ met $C_{m+1}^n = 0$. Zoals eerder besproken is dit niet een gewenste randvoorwaarde, daarom zullen we de term op de rand voorschrijven op basis van eerdere punten binnen het domein. Als eerste zullen we de Neumann-randvoorwaarde, met voorgeschreven waarde van afgeleide is gelijk aan nul, toepassen op het model. Deze Neumann-randvoorwaarde geeft dat $\frac{\partial}{\partial x} C(L, t) = 0$. In het gediscretiseerde domein komt dit overeen met

$$\frac{C_{m+1}^n - C_{m-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (4.24)$$

De oplossing van bovenstaande vergelijking wordt gegeven met $C_{m+1}^n = C_{m-1}^n$. Substitutie van vergelijking (4.24) in vergelijking (4.23) geeft

$$\frac{C_m^{n+1} - C_m^n}{\Delta t} + u \left(\theta \left[\frac{C_m^n - C_{m-1}^n}{\Delta x} \right] \right) - m \frac{-2C_m^n + 2C_{m-1}^n}{\Delta x^2} = \min \left(\frac{C_{v,m} - C_m^n}{T}, \frac{S_{e,m}}{T} \right). \quad (4.25)$$

Hierdoor veranderen de laatste rijen van matrices A en D in

$$A = \frac{-u}{2\Delta x} \begin{bmatrix} & -(1+\theta) & 2\theta & 1-\theta \\ \mathcal{O} & & -2\theta & 2\theta \end{bmatrix}, \quad D = \frac{m}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} & 1 & -2 & 1 \\ \mathcal{O} & & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Merk op de Neumann randvoorwaarde een fout heeft van orde grootte $\mathcal{O}((\Delta x)^2)$. Met het bespreken van de implementaties van de komende randvoorwaarden zullen alleen de matrices A en D getoond worden en niet meer het numerieke schema zoals vergelijking (4.25).

In plaats van de Neumann randvoorwaarde kunnen we C_{m+1}^n benaderen met behulp van de helling in punt C_m^n . De helling wordt met een terugwaartse methode benaderd met fout $\mathcal{O}((\Delta x)^2)$ [2]. De benadering voor C_{m+1}^n wordt

$$C_{m+1}^n = C_m^n + \Delta x \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x_m}, \quad \text{met} \quad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{3C_m^n - 4C_{m-1}^n + C_{m-2}^n}{2\Delta x}.$$

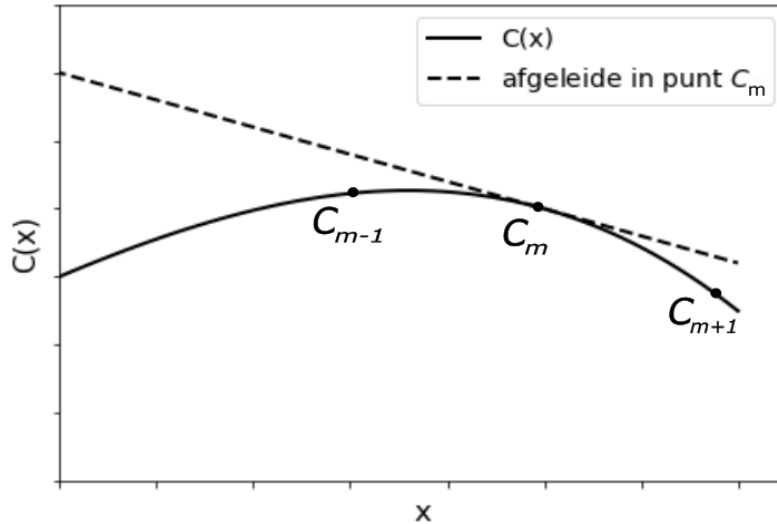
$$C_{m+1}^n = \frac{5}{2}C_m^n - 2C_{m-1}^n + \frac{1}{2}C_{m-2}^n \quad (4.26)$$

Substitueer vergelijking (4.26) in vergelijking (4.1) en de matrices A en D worden in dit geval

$$A = \frac{-u}{2\Delta x} \begin{bmatrix} \mathcal{O} & -(1+\theta) & 2\theta & 1-\theta \\ & .5-\theta & 1+\theta & 2.5-3\theta \end{bmatrix}, \quad D = \frac{m}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} \mathcal{O} & 1 & -2 & 1 \\ & .5 & -1 & .5 \end{bmatrix}.$$

In figuur 4.1 is deze eerste orde benadering gevisualiseerd. De methode van vergelijking (4.26) is equivalent aan de tweede afgeleide op de rand gelijkstellen aan nul, $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0$. Bovenstaande methode om de randvoorwaarde voor te schrijven wordt 'extrapoleren eerste orde' genoemd.

Om een betere benadering te maken wordt een extra correctieterm aan vergelijking (4.26) toegevoegd. Deze term maakt gebruik van de buiging (tweede partiële afgeleide in de ruimte) in het punt $x = L$.



Figuur 4.1: Schematische weergave van de benadering van het punt C_{m+1} op de rand $x = L$.

Zoals te zien in Figuur 4.1 is bij gebruik van alleen de afgeleide in punt C_m nog een verschil tussen de voorspelde waarde en de daadwerkelijke waarde C_{m+1} . Door gebruik te maken van de buiging kan dit verschil verkleind worden. Deze methode om de randvoorwaarde voor te schrijven wordt 'extrapoleren tweede orde' genoemd. Zoals eerder beschreven kan de tweede afgeleide met behulp van het centrale verschil goed benaderd worden. Dit zou dan gebeuren met de termen C_{m+1}^n , C_m^n en C_{m-1}^n . Echter, we willen de term C_{m+1}^n juist benaderen en hierdoor kan de centrale differentie niet worden toegepast. Dit kan verholpen worden door eerdere punten te gebruiken. De terugwaartse differentie methode om de dubbele afgeleide op de rand, $x = L$, te benaderen luidt [2]

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{2C_m^n - 5C_{m-1}^n + 4C_{m-2}^n - C_{m-3}^n}{\Delta x^2}. \quad (4.27)$$

Dus onze vergelijking voor voor C_{m+1}^n wordt

$$\begin{aligned} C_{m+1}^n &= C_m^n + \Delta x \frac{\partial C}{\partial x} + \Delta x^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \\ C_{m+1}^n &= 4C_m^n - 6C_{m-1}^n + 4C_{m-2}^n - C_{m-3}^n \end{aligned} \quad (4.28)$$

Hierdoor veranderen de laatste rijen van matrices A en D in

$$A = \frac{-u}{2\Delta x} \begin{bmatrix} \mathcal{O} & -(1+\theta) & 2\theta & 1-\theta \\ \theta-1 & 4-4\theta & -11+5\theta & 4-2\theta \end{bmatrix}, \quad D = \frac{m}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} \mathcal{O} & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

In hoofdstuk 5 bekijken welke randvoorwaarde de beste benadering geeft. Dit zal worden gedaan door de bovengenoemde randvoorwaarden te implementeren en te vergelijken met een oplossing van een half-oneindigdomein. De implementatie van het half-oneindigdomein is numeriek niet haalbaar en zal daarom benaderd worden door het domein zodanig te verlengen dat de oplossing op de plaats van interesse niet wordt beïnvloed. Hierdoor kan de oplossing van het domein met de rand correct worden vergeleken met de oplossing van het half-oneindigdomein. De randvoorwaarde die het meest lijkt op de oplossing op het half-oneindigdomein wordt als best verklaard.

5

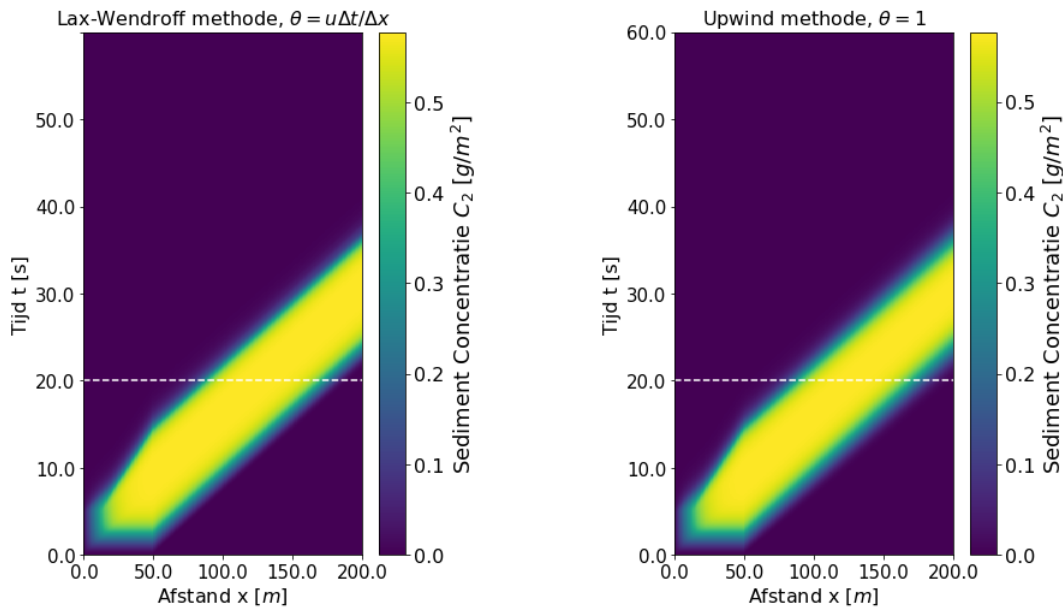
Resultaten

De resultaten worden in dit hoofdstuk gepresenteerd. De resultaten verkregen met de Lax-Wendroff methode wordt vergeleken met die van de klassieke upwind methode waarbij we de nauwkeurigheid van de oplossing en numerieke diffusie in acht nemen. Daarna kijken we naar de invloed van verschillende randvoorwaarden op de oplossing binnen het domein. Als laatste zal de stabiliteit van beide methodes worden vergeleken.

5.1. Numerieke diffusie

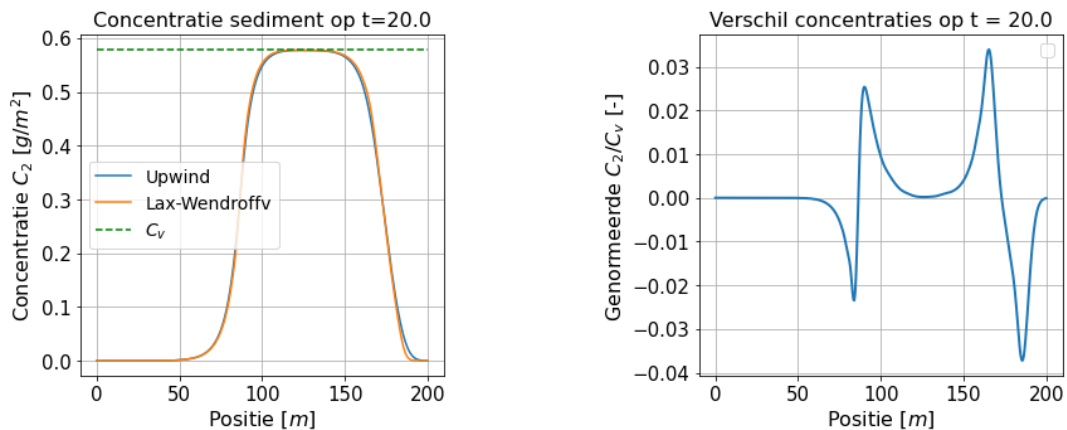
Om het effect van numerieke diffusie vast te stellen worden de Lax-Wendroff en de upwind methode met elkaar vergeleken. In hoofdstuk 4 hebben we gezien dat $\theta = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$ resulteert in een oplossing zonder numerieke diffusie.

Sedimenttransport wordt over een domein van 200 meter voor 60 seconden gesimuleerd. De windsnelheid is homogeen met $u = 7 [m/s]$. Gedurende de eerste 5 seconden wordt er sediment in het model aangebracht, $S_s = 0.2 [g/(m^2 \cdot s)]$ voor de eerste 50 meter. De diffusiecoëfficiënt is $k = 0 [m^2/s]$, dit is zo gekozen om het effect van numerieke diffusie goed te kunnen onderscheiden. Om een nauwkeurige oplossing te krijgen zijn $\Delta x = 0.5$ meter en $\Delta t = 0.05$ seconden. Het domein is in de simulatie groter gemaakt om beter het effect van numerieke diffusie te bestuderen. De reden dat er alleen de eerste vijf seconden sediment aan het model wordt toegevoegd is om zowel de opbouw als de vermindering van de sedimentconcentratie te kunnen simuleren. Op deze manier kan het effect twee keer worden bestudeerd en zijn insgelijke asymmetrieën te identificeren. Resultaten van de simulatie zijn te zien in Figuur 5.1.



Figuur 5.1: 2D colorplot van het model waar de $S_s = 0.2 \text{ g/m}^2$ voor $x \in [0\text{m} : 50\text{m}]$ en $t < 5$ seconden. Links: $x - t$ diagram van de sedimentconcentratie gesimuleerd met de Lax-Wendroff methode. Rechts: $x - t$ diagram van de sedimentconcentratie gesimuleerd met de upwind methode.

In Figuur 5.1 is links de Lax-Wendroff methode met $\theta = u \frac{\Delta t}{\Delta x}$ en rechts de upwind methode, die overeenkomt met $\theta = 1$, te zien. Beide figuren komen sterk overeen, maar bij de upwind methode is te zien dat de overgang van de verzadigde concentratie naar geen concentratie breder is. Om het verschil duidelijker te tonen wordt van beide simulaties een doorsnede op $t = 20$ seconden gemaakt. Op deze doorsnede wordt de verdeling van de concentratie in het domein getoond. De doorsnedes zijn beide in het linkerfiguur van Figuur 5.2 geplott. In hetzelfde figuur is rechts het verschil tussen beide concentraties weergegeven.

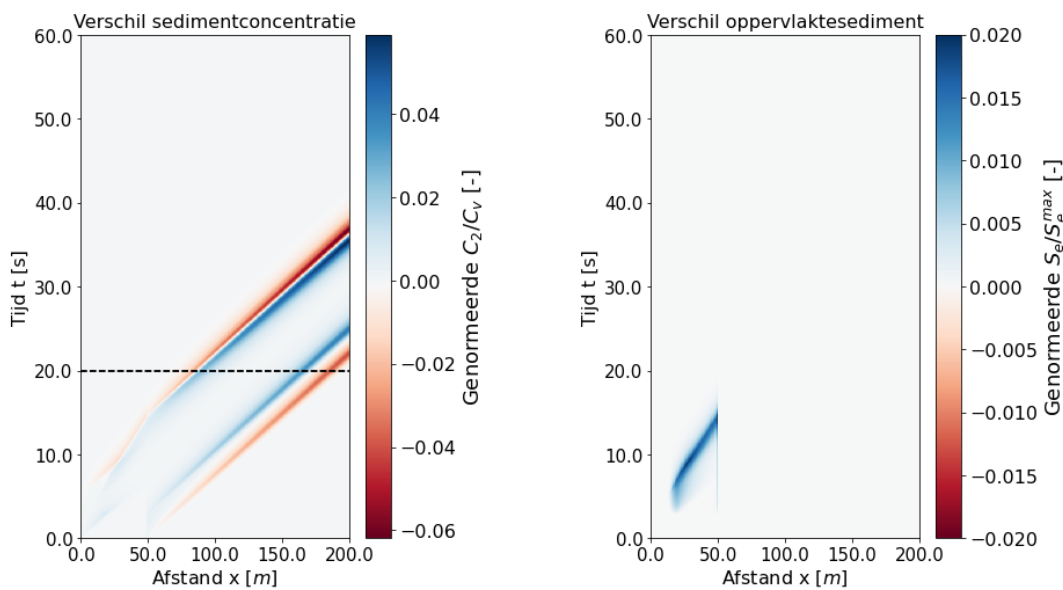


Figuur 5.2: Links: De doorsnede van de 2D colorplot van Figuur 5.1. Rechts: Het verloop van het verschil tussen de concentraties van Figuur 5.1.

Het verloop van beide concentraties komt ook op deze doorsnede sterk overeen. Er is wel een klein verschil op te merken, namelijk dat de upwind methode een hogere concentratie heeft aan het einde van de opbouw en een lagere concentratie op de top van de berg. Door het diffusie-effect is er sediment van een hoge naar een lagere concentratie gediffundeerd. Dit wordt in de rechterfiguur bevestigd. Hierbij is het verschil gedefinieerd als de concentratie van de Lax-Wendroff methode min de concentratie van de upwind methode. Verder is te zien dat de concentratieverschillen groter worden naarmate de afstand vordert. In deze doorsnede bereikt het grootste concentratieverschil een waarde

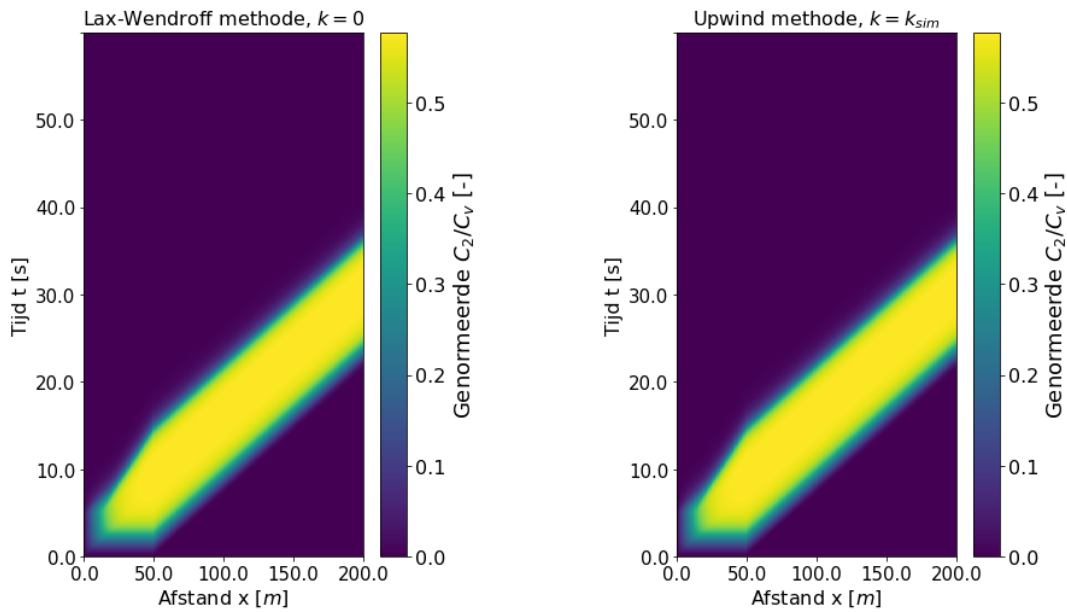
van 0.035. Deze waarde wordt genormeerd met de verzadigde concentratie en komt ongeveer neer op een foutmarge van 3.5%.

Hoe de concentratieverschillen verlopen door het domein heen is weergegeven in de linker $x - t$ diagram van Figuur 5.3. Ook is hier het verschil genormeerd met de waarde van de verzadigde concentratie. Aan het eind van het domein kan de fout oplopen tot 6%. Voor de volledigheid wordt ook besproken hoe het oppervlakesediment verschilt voor beide numerieke methodes. Rechts in Figuur 5.3 is het $x - t$ diagram weergegeven van de evolutie van het oppervlakesediment. Voor het grootste gedeelte is er geen verschil, behalve in het begin. Dit is op het moment dat er na 5 seconden geen nieuw sediment aan de simulatie wordt toegevoegd. Het verschil is ook in dit geval gedefinieerd als het resultaat verkregen met de Lax-Wendroff methode min het resultaat verkregen met de upwind methode. Er blijft dus meer sediment op de grond liggen bij de upwind methode. Dit komt doordat de numerieke diffusie het sediment gedeeltelijk terug het domein in laat lopen. De sedimentconcentratie wordt hoger en zorgt ervoor dat er minder sediment kan worden opgepakt en er dus meer blijft liggen. Deze fout wordt niet groter met de tijd of de afstand aangezien het alleen een plaatselijk effect heeft.



Figuur 5.3: 2D colorplot van het verschil tussen de resultaten van de Lax-Wendroff methode en de upwind methode. Links is de ontwikkeling van het verschil van de sedimentconcentratie te zien. Rechts is de ontwikkeling van het verschil van het oppervlakesediment te zien.

In Figuur 5.4 wordt de oplossing van de upwind methode met een diffusiecoëfficiënt k_{sim} volgens vergelijking (4.11) vergeleken met de oplossing van de Lax-Wendroff methode met $k = 0$. In hoofdstuk 4 is afgeleid dat de upwind methode geen numerieke diffusie zal hebben met deze diffusiecoëfficiënt. Het verschil tussen beide figuren is verwaarloosbaar klein en zal niet worden getoond. De upwind methode met de diffusiecoëfficiënt bijgesteld van k naar k_{sim} geeft een oplossing zonder numerieke diffusie.



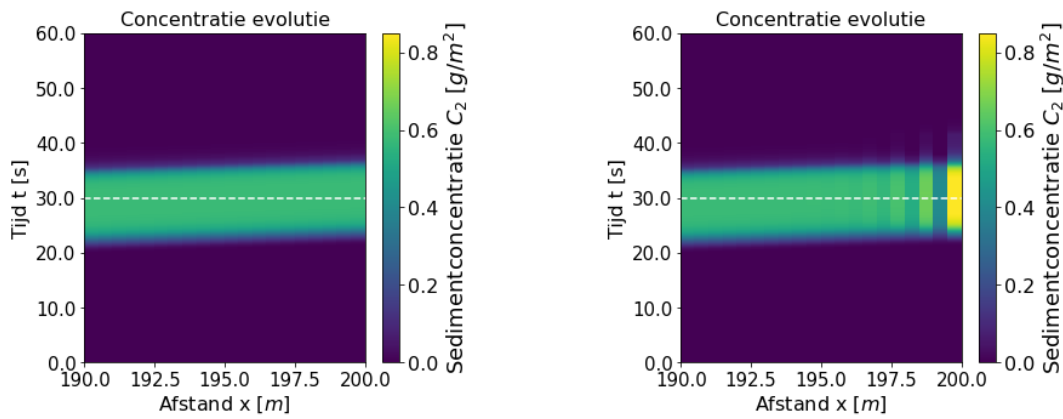
Figuur 5.4: 2D colorplot van de evolutie sedimentconcentratie. Links is het resultaat van de Lax Wendroff methode weergegeven met een diffusiecoëfficiënt van $k = 0$. Rechts is het resultaat van de upwind methode weergegeven met een diffusiecoëfficiënt van $k = k_{sim}$.

5.2. Randvoorwaarden

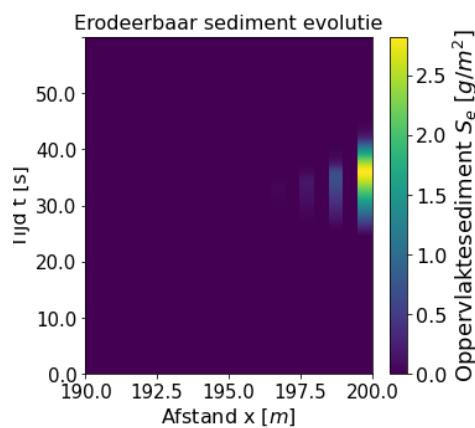
In deze sectie worden de resultaten van de verschillende randvoorwaarden op de oplossing binnen het domein besproken. De invloed van de rand wordt duidelijk gemaakt door de oplossing rond de rand te vergelijken met de oplossing zonder een rand. Idealiter wordt de oplossing zonder rand gesimuleerd op een half-oneindig domein. Dit is niet mogelijk om te programmeren, maar kan wel benaderd worden. Het domein wordt verlengd zodat de rand geen invloed heeft op de oplossing op de positie naar keuze. Hoever het domein verlengd moet worden is afhankelijk van het probleem zelf. In dit geval is het domein verlengd naar 250 meter, later zal duidelijk worden dat dit genoeg is. Eerst zal een Dirichlet-randvoorwaarde worden voorgeschreven. Daarna zal er gekeken worden wat de invloed van Neumann-randvoorwaarde en de randvoorwaarden gedefinieerd in vergelijkingen (4.26) en (4.28) zijn op de oplossing.

De typische Dirichlet-randvoorwaarde die als eerste wordt gebruikt is $C(L, t) = 0$. In Figuur 5.5 is het effect van deze randvoorwaarde weergegeven. Links is de oplossing op het half-oneindig domein en rechts met de rand. De laatste 10 meter voor de rand wordt getoond om het effect van de rand beter te kunnen onderscheiden. Het is te zien dat de oplossing instabiel wordt en oscilleert zodra het de rand nadert. Dit is op geen enkele fysische manier te verklaren en daarom willen wij dit effect verminderen.

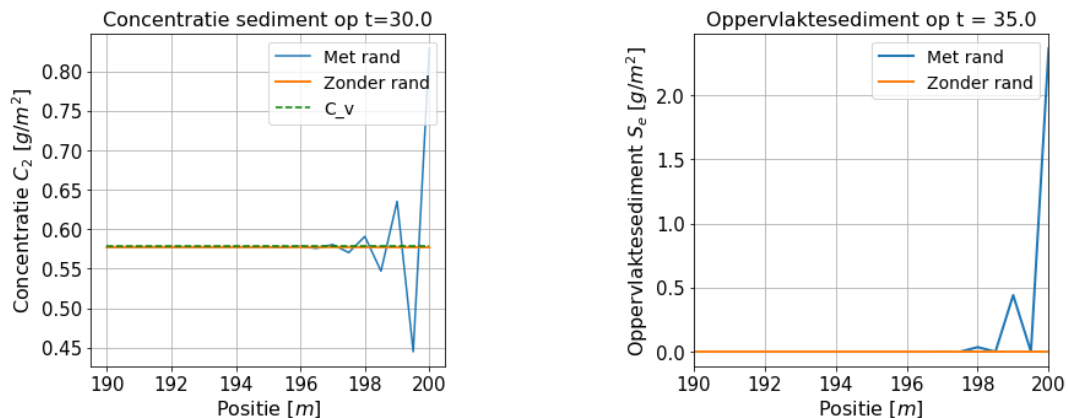
Figuur 5.6 laat de evolutie van het oppervlakesediment zien van de oplossing met een rand. De oplossing zonder rand is weggelaten omdat er geen sediment op de bodem aanwezig was. De grote schommelingen in de concentratie zorgen ervoor dat er sediment op het oppervlak komt te liggen terwijl dit in de exacte oplossing niet het geval is.



Figuur 5.5: Links: $x - t$ diagram van de concentratie evolutie gemodelleerd met een rand op $x = 250$ meter. Recht: $x - t$ diagram van de concentratie evolutie gemodelleerd met een rand op $x = 200$ meter.



Figuur 5.6: $x - t$ diagram van het oppervlakesediment gemodelleerd met een rand op $x = 200$ meter.

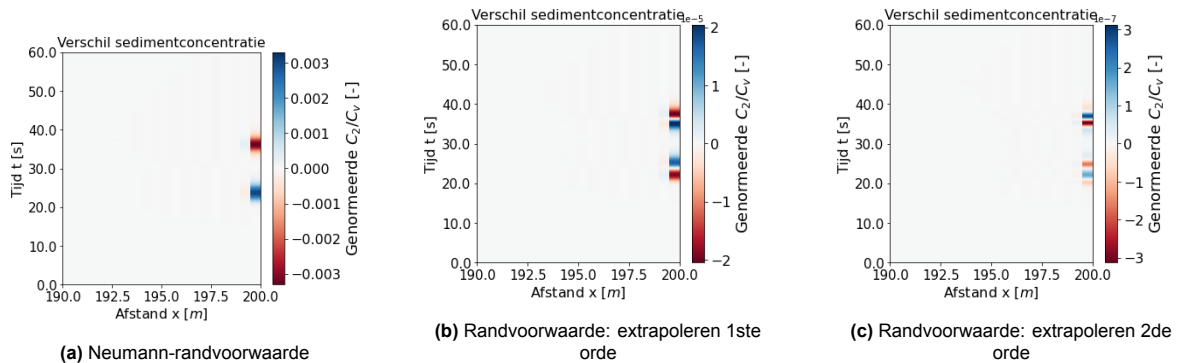


Figuur 5.7: Doorsnede van 2D colorplot van Figuur 5.5. Links wordt de sedimentconcentratie rondom de rand getoond. Rechts is hetzelfde geplot maar dan voor het oppervlakesediment.

In Figuur 5.7 zijn de doorsnedes gegeven van Figuur 5.5 op $t = 30$ seconden en van Figuur 5.6 op $t = 35$ seconden. In het linkerfiguur zijn de doorsnedes van beide figuren van Figuur 5.7 geplott met de waarde van de verzadigingsconcentratie. Waar de oplossing op het half-oneindig domein goed overeenkomt met de verzadigingsconcentratie, begint de oplossing met rand te oscilleren naarmate de afstand naar de rand korter wordt. Het maximale procentuele verschil tussen de oplossingen is 50%, wat een erg groot foutpercentage is. Een belangrijke observatie is dat de rand de oplossing

vanaf 196 meter begint te beïnvloeden. Eerder hebben wij gesteld dat het genoeg is om 50 meter extra te simuleren om het effect van een half-oneindig domein te benaderen. Met dit resultaat wordt deze aanname bevestigd. In het rechterfiguur worden de oplossingen op het half-oneindig domein en het domein met rand geplot. Hier zien we dat in het geval van het half-oneindig domein er geen sediment op het oppervlak aanwezig is, dit is naar voorspelling van Hoofdstuk 3. De oplossing met rand laat zien dat er sediment dicht bij de rand wordt neergelegd. Dit komt door de grote oscillaties van de concentratie dicht bij de rand. Ook het verschijnen van oppervlakesediment is niet fysisch te verklaren en daarom willen wij dit effect ook verminderen.

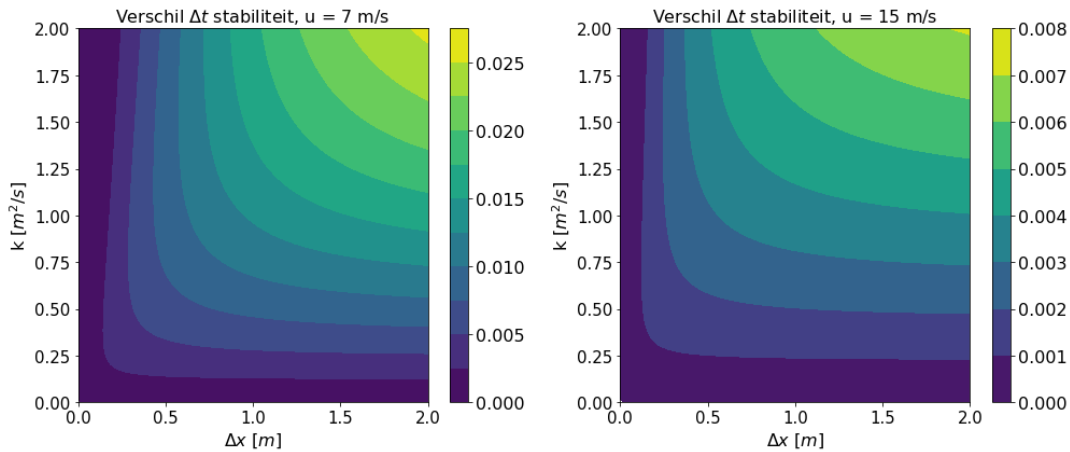
In Figuur 5.8 wordt het verschil tussen de oplossing met een rand op 250 meter en de oplossing met een rand op 200 meter met verschillende randvoorwaarden laten zien. In subfiguur 5.8a is de Neumann randvoorwaarde toegepast met een fout $\mathcal{O}((\Delta x)^2)$. Wat opvalt is hoe het gebruik van de Neumann randvoorwaarde al de foutmarge van 50% naar 0.3% laat dalen. Dit is een groot verschil vergeleken met de Dirichlet-randvoorwaarde. Het valt ook op dat een kleiner gedeelte van het domein wordt beïnvloed door de randvoorwaarde. Alleen het domein vanaf 199.5 meter verschilt met de exacte oplossing. In Figuur 5.8b is de randvoorwaarde 'extrapoleren eerste orde' te zien. Het maximale genormeerde verschil is hierbij aangegeven met $2 \cdot 10^{-5}$. De invloed van deze randvoorwaarde is ook zichtbaar vanaf 199.5 meter. Als laatste wordt de randvoorwaarde 'extrapoleren tweede orde' voorgeschreven. Hier is het maximale genormeerde verschil slechts $3 \cdot 10^{-7}$. Deze randvoorwaarde is ook zichtbaar vanaf 199.5 meter. Bij het gebruik van de extrapoleermethode hoeft het domein slechts met 0.5 meter verlengt te worden.



Figuur 5.8: Een 2D colorplot van het genormeerde verschil tussen de oplossing van het half-oneindig domein met de oplossing met een rand op $x = 200$ meter.

5.3. Stabiliteit

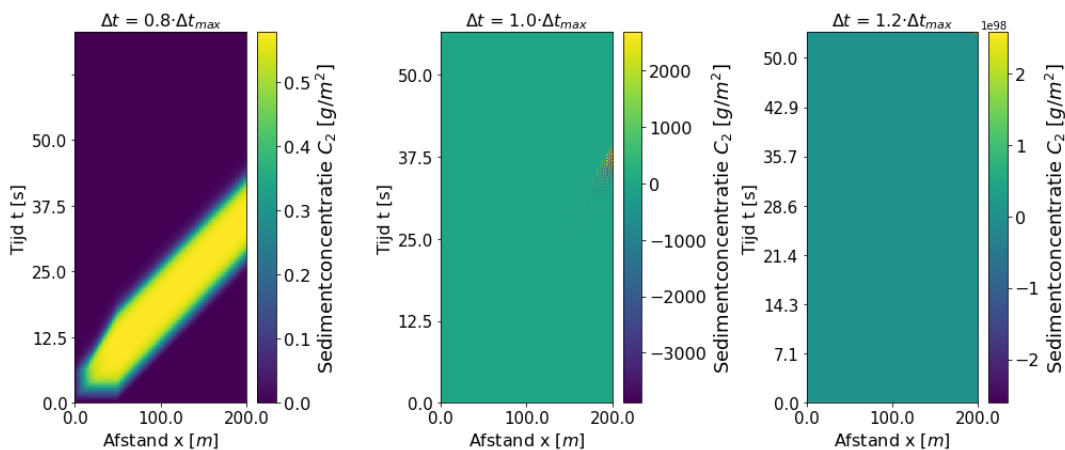
In Hoofdstuk 4 hebben wij de stabiliteitsregio's van de upwind methode en van de Lax-Wendroff methode afgeleid. De literatuur beweert dat de stabiliteit van de Lax-Wendroff methode groter is dan die van de upwind methode. In deze sectie zullen wij met resultaten laten zien of deze bewering juist is. Om te kijken welke methode betere stabiliteitseigenschappen hebben, worden de maximale tijdstappen met elkaar vergeleken. Het verschil wordt gedefinieerd als de maximale tijdstap van Lax-Wendroff methode, vergelijking (4.22), min de maximale tijdstap van de upwind methode, vergelijking (4.19). Links in Figuur 5.9 wordt het verschil getoond met een windsnelheid van $7 [m/s]$ en rechts een windsnelheid van $15 [m/s]$. Het is te zien dat voor beide windsnelheden het verschil positief is en dus dat de maximale tijdstap van de Lax-Wendroff methode groter is, alhoewel het verschil minder wordt naarmate de windsnelheid toeneemt.



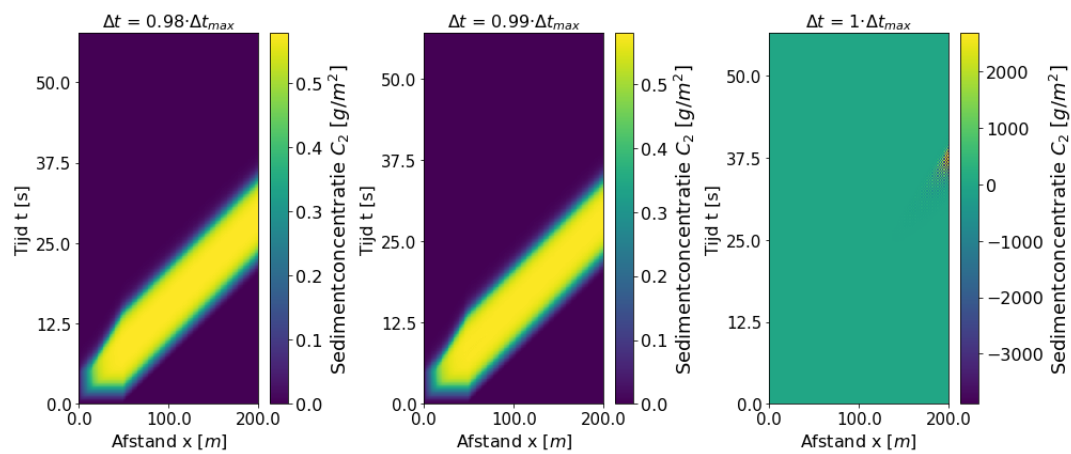
Figuur 5.9: Contourplot van het verschil van maximale tijdstap tussen de Lax-Wendroff methode en de opwind methode voor verschillende waarden van de diffusiecoëfficiënt k en stapgrootte in de ruimte Δx . Links voor een windsnelheid $u = 7$ [m/s] en rechts voor $u = 15$ [m/s]

Figuur 5.9 bewijst dat inderdaad de stabiliteit van de Lax-Wendroff methode groter is dan die van de opwind methode, dat wil zeggen dat een grotere tijdstap gekozen kan worden. Nu zal er gekeken worden of deze theoretische stabiliteit ook in de praktijk geldt en of de simulatie daadwerkelijk op deze maximale tijdstap van vergelijking (4.22) een stabiele oplossing verkrijgt. De eerder beschreven initiële condities worden ook voor de simulatie gebruikt, met uitsluiting van de diffusiecoëfficiënt $k = 0.5$ en $\Delta x = 1$ meter. Figuur 5.10 laat de concentratie evolutie zien met van links naar rechts respectievelijk een factor van de maximale tijdstap (Δt_{max}) gebruikt van 0.8, 1 en 1.2. De resultaten van Figuur 5.10 laten zien dat de een factor 0.8 van de maximale tijdstap wel stabiel in tegenstelling tot de maximale tijdstap zelf.

Om de stabiliteit verder te bestuderen, wordt dezelfde simulatie herhaald met de factoren 0.98, 0.98 en 1. De resultaten worden in Figuur 5.11 weergegeven. Dit Figuur laat zien dat de oplossing alleen instabiel met een tijdstap gelijk aan de maximale tijdstap aangezien een factor 0.99 nog een stabiele oplossing toont. Dat er bij de maximale tijdstap geen stabiele oplossing wordt verkregen, kan aan de afronding van het Python-programma liggen. Verder laten de resultaten zien dat de theoretische stabiliteit sterk overeenkomt met de stabiliteit van simulaties.



Figuur 5.10: 2D colorplot van de sedimentconcentratie evolutie met verschillende tijdstappen. Van links naar rechts zijn respectievelijk de factoren van de maximale tijdstap Δt_{max} gebruikt van 0.8, 1 en 1.2.



Figuur 5.11: 2D colorplot van de sedimentconcentratie evolutie met verschillende tijdstappen. Van links naar rechts zijn respectievelijk de factoren van de maximale tijdstap Δt_{max} gebruikt van 0.98, 0.99 en 1.

6

Discussie en aanbevelingen

In dit verslag is een analyse uitgevoerd op het model van De Vries. In dit hoofdstuk worden de resultaten van het model bediscussieerd en zal aan het eind aanbevelingen worden gedaan.

6.1. Discussie van de resultaten

Om een fysisch verschijnsel zo realistisch mogelijk te modelleren is een lastige opgave. Dit geldt ook voor het geval van eolisch sedimenttransport. Er zijn veel fysische interacties die op een manier geparametriseerd moeten worden. Een bijvoorbeeld de luchtvochtigheid: in experimenten is gezien dat door capillaire krachten korrels aan elkaar kleven wat het transport sterk kan beïnvloeden. Een ander voorbeeld is vegetatie: doordat het gras op de duinen dienen als een soort windschild, vertraagd de wind en wordt het sediment op het oppervlak gedeponerd. Verder kunnen ook de interacties van helmgras met het ecosysteem de evolutie sterk beïnvloeden.

Voor het eendimensionaal model dat in dit verslag is gepresenteerd is het numerieke schema van de Lax-Wendroff een goede uitbreiding aangezien numeriek diffusie kan worden uitgebalanceerd en daarmee de nauwkeurigheid van het model verbeterd kan worden. Echter, de Lax-Wendroff methode heeft een gewogen centrale Euler methode die van nature minder stabiel is. Verder heeft deze methode ook de gewogen upwind wat het model beperkt tot het simuleren van alleen aanlandige wind. Als het model wordt uitgebreid naar twee dimensies is het Lax-Wendroff schema hoogst waarschijnlijk niet zo accuraat als in het eendimensionaal model.

Met het gebruik van het Lax-Wendroff schema moet wel de randvoorwaarde aan de landwaartse kant goed gekozen worden. We hebben laten zien dat methode extrapoleren tweede orde het best werkt. In de eerste orde extrapoleren is de eerste afgeleide benaderd met een terugwaartse methode met een fout van orde grootte $\mathcal{O}((\Delta x)^2)$. Echter, de eerste afgeleide is in de tweede orde benaderd met de upwind methode met fout $\mathcal{O}(\Delta x)$. Als deze zou worden benaderd met de terugwaartse methode werd het verschil met de exacte oplossing juist groter in plaats van kleiner.

Dat de stapgrootte in de ruimte (Δx) effect heeft op de orde grootte van de fout is binnen verwachting. Inmiddels hoe kleiner de stapgrootte hoe beter de benadering. Echter ziet hier ook een limiet op want een te kleine stapgrootte zorgt juist voor een minder goede benadering. Dus er zit ergens een optimalisatie in de stapgrootte.

6.2. Aanbevelingen voor verder onderzoek

In dit verslag is een analyse gemaakt van het model van De Vries. Het model simuleert eolisch sedimenttransport over het strand. Mocht er nog verder onderzoek worden gedaan dan zijn de volgende vraagstukken interessant om aandacht aan te besteden.

Een voor de hand liggende aanbeveling is het uitbreiden van het model naar een tweedimensionaal systeem. Met het eendimensionaal model kan de wind alleen aanlandig of aflandig gekozen worden en met de uitbreiding kan de wind vanuit elke windrichting gekozen worden. Hiermee kunnen simulaties realistischer worden door middel van de windrichting en windkracht proportioneel met de data overeen te laten komen.

Binnen het een dimensionaal model is het interessant om de wind fysisch realistischer te maken. In het model is de wind nu nog homogeen over het domein en als de windsnelheid verandert, gebeurt dit instantaan over het hele domein. Dit is vanuit een fysisch oogpunt onmogelijk. Met het implementeren van windvlagen en drukverschillen wordt de wind inhomogeen, wat tot interessante oplossingen kan leiden. In dit verslag is het effect beschreven dat de wind de deeltjes versneld en zo meeneemt over het domein. Echter is het niet meegenomen dat de wind door impulsoverdracht zijn snelheid verliest en daardoor minder sediment kan dragen. Dit resulteert in sediment depositie en dat de sedimentconcentratie in de lucht afneemt. Hierdoor neemt de windsnelheid toe waardoor er meer sedimentconcentratie in de lucht kan zitten, etc. Deze vicieuze cirkel is al reeds waargenomen in resultaten van onder andere Bagnold [3]. Het model wordt al beschreven met een verzadigde sedimentconcentratie die afhankelijk is van de wind, maar een uitbreiding naar een windsnelheid die afhankelijk is van de sedimentconcentratie mist nog in de literatuur. Deze uitbreiding zorgt ervoor dat de partiële differentiaalvergelijking non-lineair wordt wat een interessant effect kan hebben op de oplossing.

7

Conclusie

In dit verslag is een wiskundige analyse uitgevoerd op het model van De Vries. De ééndimensionale advection-diffusievergelijking is vanuit de drie dimensionale continuïteitsvergelijking afgeleid door die over de diepte te integreren en alle variabelen constant te nemen in de breedte. Op de advectionvergelijking van De Vries is een analyse gemaakt voor de evenwichtstoestanden van het model. Daarna is het model van De Vries uitgebreid door het effect van diffusie toe te voegen. Verder zijn de beperkingen van het numerieke schema (upwind) van De Vries onderzocht en wordt deze vergeleken met het Lax-Wendroff schema. Met name de stabiliteit en het effect van numerieke diffusie wordt onderzocht. Verder zijn verschillende randvoorwaarden aan het einde van het model geïmplementeerd en vergeleken.

7.1. Conclusie op de onderzoeksvragen

In deze sectie zullen de onderzoeksvragen herhaald en beantwoord worden samen met de belangrijkste conclusies van elk hoofdstuk.

- Q_1 : Is het gerechtvaardigd om de diffusie-term te verwaarlozen en hoe beïnvloedt deze diffusie-term de stabiliteit en de nauwkeurigheid van het model?

Om deze vraag te beantwoorden is de ééndimensionale advection-diffusievergelijking afgeleid van de driedimensionale continuïteitsvergelijking voor massatransport. Door deze continuïteitsvergelijking over de diepte te integreren en de randvoorwaarden aan de bovenrand en de onderrand toe te passen, is een vergelijking die de advection en diffusie van sediment afgeleid, die ook de verandering van de bovengrens en ondergrens mee nam. De grenzen zijn in dit verslag constant genomen en daardoor kon de vergelijking versimpeld worden. Een dimensie-analyse heeft laten zien dat het transport gedomineerd wordt door advection en dat het diffusie-effect niet significant is. Echter, door het toevoegen van diffusie wordt het numerieke model minder gevoelig voor oscillerende oplossingen of instabiele oplossingen.

- Q_2 : Is er een numeriek schema dat nauwkeuriger/sneller is dan het upwind schema dat gebruikt wordt in het model van De Vries?

Het oorspronkelijke upwind schema van het model van De Vries is vergeleken met het Lax-Wendroff schema. Het upwind schema heeft een fout van de orde $\mathcal{O}(\Delta x)$ en deze fout is terug te zien in de oplossing als een extra diffusie effect. Het Lax-Wendroff schema gebruikt de upwind methode met gewicht θ samen met de centrale Euler methode met gewicht $(1 - \theta)$ om de orde grootte van de fout te verkleinen naar $\mathcal{O}((\Delta x)^2)$. Hierdoor wordt het effect van numerieke diffusie volledig verwijderd. Met het Lax-Wendroff schema kan ook met de upwind methode, $\theta = 1$, nog steeds worden verminderd. Het effect van numerieke diffusie kan worden opgeheven door de diffusiecoëfficiënt k te verminderen naar k_{sim} . Een andere methode is om het oplossingsraaster te kiezen dat $u\Delta t/\Delta x = 1$. Het stabiliteitscriterium

van de Lax-Wendroff methode is beter dan de upwind methode. De tijdstap kan hierdoor groter worden gekozen en kunnen lange simulaties korter gemaakt worden. Samenvattend is de Lax-Wendroff methode sterk aangeraden voor het één-dimensionale model.

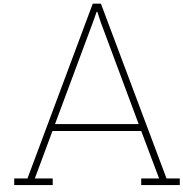
- Q_3 : Wat voor invloed hebben verschillende randvoorwaarden op de oplossing binnen het model en welke kan het best gebruikt worden in een numerieke simulatie?

Het model dat sedimenttransport met diffusie simuleert, vereist een randvoorwaarde aan het eind van het domein op $x = L$. Aangezien ons model geen fysieke rand heeft, is het toepasselijk om een randvoorwaarde voor te schrijven die zo min mogelijk de oplossing beïnvloedt. De Dirichlet- en Neumann-randvoorwaarden waren niet geschikt voor het model, waar de Neumann-randvoorwaarde nog het best was van beide. De methode van extrapoleren is onderzocht om de oplossing buiten het model te voorspellen. Dit werd gedaan met behulp van de afgeleide voor de eerste orde en met behulp van de dubbele afgeleide voor de tweede orde in het punt voor de rand. De relatieve fout van de methode eerste orde extrapoleren was orde 10^{-5} en de relatieve fout van de methode tweede orde extrapoleren was orde 10^{-7} . De tweede orde extrapoleren heeft van alle methodes de minste invloed op de oplossing. Als in het vervolg de tweede orde extrapoleren wordt gebruikt is het aan te raden, indien mogelijk, om het domein van interesse te verlengen met 1 stap in de ruimte om zo daadwerkelijk een ongestoorde oplossing te verkrijgen.

Literatuurlijst

- [1] In: *Kustverdediging na 1990: Beleidskeuze voor de kustlijnzorg* (1990).
- [2] URL: <https://www.dam.brown.edu/people/alcyew/handouts/numdiff.pdf>.
- [3] R. A. Bagnold. "The Transport of Sand by Wind". In: *The Geographical Journal* 89.5 (1937), pp. 409–438.
- [4] F. Charru and E. M. Franklin. "Subaqueous barchan dunes in turbulent shear flow. Part 2. Fluid flow". In: *Journal of Fluid Mechanics* 694 (2012), pp. 131–154. DOI: 10.1017/jfm.2011.528.
- [5] R.G.D. Davidson-Arnott, Kelvin MacQuarrie, and Troels Aagaard. "The effect of wind gusts, moisture content and fetch length on sand transport on a beach". In: *Geomorphology* 68.1 (2005). Fluid Flow and Sediment Transport Process in Geomorphology, pp. 115–129. ISSN: 0169-555X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geomorph.2004.04.008>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169555X04002922>.
- [6] S. de Vries et al. "Aeolian sediment transport in supply limited situations". In: *Aeolian Research* 12 (2014), pp. 75–85. ISSN: 1875-9637. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aeolia.2013.11.005>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1875963713000992>.
- [7] H. Flanders. "Differentiation Under the Integral Sign". In: *The American Mathematical Monthly* 80.6 (1973), pp. 615–627. ISSN: 00029890, 19300972. URL: <http://www.jstor.org/stable/2319163> (visited on 05/02/2023).
- [8] C. Hallin et al. "EVALUATION OF THRESHOLD-BASED MODELS TO ACCOUNT FOR SURFACE MOISTURE IN MESO-SCALE AEOLIAN SEDIMENT TRANSPORT SIMULATIONS". In: Mar. 2023, pp. 670–683. DOI: 10.1142/9789811275135_0063.
- [9] M. Herrmann et al. "On the contribution of chemical oscillations to ozone depletion events in the polar spring". In: *Atmospheric Chemistry and Physics* 19 (Aug. 2019), pp. 10161–10190. DOI: 10.5194/acp-19-10161-2019.
- [10] M. Stive J. Bosboom. *Coastal dynamics*. 1st ed. Delft: TU Delft OPEN, 2023.
- [11] S. Kailasa. *Differentiation under the integral sign*. URL: <https://brilliant.org/wiki/differentiate-through-the-integral/>.
- [12] H. Karahan. "Solution of weighted finite difference techniques with the advection–diffusion equation using spreadsheets". In: *Computer Applications in Engineering Education* 16.2 (2008), pp. 147–156. DOI: <https://doi-org.tudelft.idm.oclc.org/10.1002/cae.20140>. eprint: <https://onlinelibrary-wiley-com.tudelft.idm.oclc.org/doi/pdf/10.1002/cae.20140>. URL: <https://onlinelibrary-wiley-com.tudelft.idm.oclc.org/doi/abs/10.1002/cae.20140>.
- [13] Randall LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems (Classics in Applied Mathematics Classics in Applied Mathematics)*. USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. ISBN: 0898716292.
- [14] Arjen Luijendijk et al. "The initial morphological response of the Sand Engine: A process-based modelling study". In: *Coastal Engineering* 119 (Jan. 2017), pp. 1–14. DOI: 10.1016/j.coastaleng.2016.09.005.
- [15] Carlos A. de Moura and Carlos S. Kubrusly, eds. *The Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) Condition*. Birkhäuser Boston, 2013. DOI: 10.1007/978-0-8176-8394-8. URL: <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8394-8>.
- [16] Douglas J. Sherman and Bailiang Li. "Predicting aeolian sand transport rates: A reevaluation of models". In: *Aeolian Research* 3.4 (2012). The 7th International Conference on Aeolian Research (ICAR VII), Santa Rosa, Argentina, pp. 371–378. ISSN: 1875-9637. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aeolia.2011.06.002>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1875963711000449>.

- [17] Douglas J. Sherman et al. "Wind-blown sand on beaches: an evaluation of models". In: *Geomorphology* 22.2 (1998). Aeolian Environments, pp. 113–133. ISSN: 0169-555X. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0169-555X\(97\)00062-7](https://doi.org/10.1016/S0169-555X(97)00062-7). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169555X97000627>.
- [18] M. van Vliet. "Offshore golfbrekers langs de Nederlandse kust". In: *Hydraulic Engineering* 1.1 (1994), pp. 3–7.
- [19] Cornelis Vuik et al. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. English. This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY). Netherlands: TU Delft Open, 2023. DOI: 10.5074/t.2023.001.
- [20] Ministerie van Infrastructuur en Waterstaat. *Watersnoodramp 1953*. Apr. 2023. URL: <https://www.rijkswaterstaat.nl/water/waterbeheer/bescherming-tegen-het-water/watersnoodramp-1953>.
- [21] *Weer Archief Scheveningen*. May 2023. URL: https://www.meteoblue.com/nl/weer/archive/yearcomparison/scheveningen_nederland_2747599?fcstlength=1y&year=2022&month=5.



Source Code

De code van dit verslag is in deze appendix weergegeven. Eerst zullen de definities worden gegeven die het belangrijkste waren om het model mee op te lossen. Daarna wordt een voorbeeld gegeven hoe de modelparameters werden gekozen. Verder zal nog de implementatie van de verschillende randvoorwaarden te zien zijn. Als laatste, zijn de definities gegeven die alle Figuren hebben gemodelleerd.

```
1
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import time
5 import matplotlib as mpl
6
7 import math
8
9 def Erodeerbaar_sediment(Ss,L,gebied):
10     'Definieerd het gebied waar sediment wordt aangeleverd vanuit de bodem'
11     update_vector = np.zeros(len(L))
12     for i in range(gebied): # maak updatevector
13         update_vector[i] = Ss
14     return(update_vector)
15
16 # Bereken Q,Cu
17 def maximaleconc(u_w,t,L):
18     'Berekent maximale sedimentconcentratie in lucht'
19     u_t = 4*np.ones(len(t)) # m/s
20     zeta = 1
21     param = 0.00015
22     n = len(L)
23     Q, Cu = np.zeros((n, len(t))), np.zeros((n, len(t)))
24     for i in range(len(t)):
25         Q[:, i] = param*(u_w[i] - u_t[i])**3 # kg/(m^2*s)
26         Cu[:, i] = Q[0, i]/(u_w[i]*zeta) # equilibrium concentratie [kg/m^3]
27     return(Q,Cu,u_t)
28
29 # Erosie-depositie
30 def Erosie_depositie(L, Cu, Conc, Se, T):
31     'Berekent de mate erosie/depositie over het hele domein'
32     n = len(L)
33     E_D = np.zeros(n)
34     for i in range(n):
35         E_D[i] = min((Cu[i]-Conc[i])/T, Se[i]/T)
36     return(E_D)
37
38 # Advectie matrix upwind methode
39 def Forward_Euler(L):
40     'Maakt matrix op basis van forward euler berekeningen'
41     n = len(L)
42     K = np.eye(n)
43     for i in range(n-1):
44         K[i+1, i] = -1
45     return(K)
```

```

46
47 # Advectie matrix Lax-Wendroff methode
48 K1 = Forward_Euler(L1)
49 print('Laatste kolom A',K1[n1-1,n1-4:])
50 K1 = np.eye(n1)*theta
51 for i in range(n1-1):
52     K1[i+1, i] = -(1+theta)/2
53     K1[i,i+1] = (1-theta)/2
54
55 # Diffusie matrix
56 M = -2*np.eye(n)
57 for i in range(n-2):
58     M[i+2, i+1] = 1
59     M[i,i + 1] = 1
60 M[1,0] = 1
61 M[n-2,n-1] = 1
62
63
64
65 def Evolutie(t,L,deltat,u_w,Cu,K,update_vector,T):
66     n=len(L)
67     Conc = np.zeros((n, len(t)))
68     Se = np.zeros((n, len(t)))
69     Q_eind = np.zeros(len(t))
70     'Berekent de forward evolutie van sediment transport'
71     for i in range(len(t)-1):
72         #Se[:, i+1] = Se[:, i] + update_vector*deltat # tijd-evolutie for-loop
73         E_D = Erosie_depositie(L, Cu[:, i], Conc[:, i], Se[:, i],T)
74         Conc[:, i+1] = Conc[:, i] + deltat*(-u_w[i]/deltax*K.dot(Conc[:, i]) + E_D)
75         Se[:, i+1] = Se[:, i] + update_vector*deltat
76         Se[:, i+1] = Se[:, i+1] - deltat*E_D
77         Q_eind[i] = Conc[len(L)-1,i]*u_w[i]
78     return(Conc,Se,Q_eind)
79
80 def Diffusie(t,L,deltat,u_w,Cu,K,M,update_vector,T,k):
81     n = len(L)
82     Conc = np.zeros((n, len(t)))
83     #Conc[:int(10/deltax),0]= 0.0005
84     Se = np.zeros((n, len(t)))
85     Q_eind = np.zeros(len(t))
86     'Berekent de forward evolutie van sediment transport'
87     for i in range(len(t)-1):
88         #Se[:, i+1] = Se[:, i] + update_vector*deltat # tijd-evolutie for-loop
89         E_D = Erosie_depositie(L, Cu[:, i], Conc[:, i], Se[:, i],T)
90         Conc[:, i+1] = Conc[:, i] + deltat*(-u_w[i]/deltax*K.dot(Conc[:, i])+ k/(deltax**2)*M
91             .dot(Conc[:,i]) + E_D)
92         Se[:, i+1] = Se[:, i] + update_vector[:,i]*deltat
93         Se[:, i+1] = Se[:, i+1] - deltat*E_D
94         Q_eind[i] = Conc[len(L)-1,i]*u_w[i]
95     return(Conc,Se,Q_eind)

```

Definiëren modelparameters.

```

1
2 # Modelparam
3 deltat = .1
4 deltax = 1
5 Lengte = 50
6 Tijd = 100
7 L = np.linspace(0, Lengte, int(Lengte/deltax+1))
8 t = np.linspace(0, Tijd, int(Tijd/deltat + 1))
9
10 gebied = int(20/deltax) #Domein toestroom erodeerbaar sediment
11
12 k = 0.1 #diffusiecoëfficiënt
13
14 u_w = 7*np.ones(len(t)) # m/s
15
16 #Lax-Wendroff
17 theta = u_w[1]*deltat/deltax

```

De impelmentatie van de randvoorwaarden:

```

1
2 #optie 1, upwind dC/dx = 0
3 #M1[n1-1,n1-1] = -1
4 #optie 2, central dC/dx = 0
5 M1[n1-1,n1 -2] = 2
6 # fout wordt groter naarmate de stapgrote kleiner wordt? blijft gelijk bij andere tijdstap
7 #optie 3, 1st orde doorlatende rand:
8 #M1[n1-1,n1-2] = 0
9 #M1[n1-1,n1-1] = 0
10 #optie 4, hoge precisie eerste orde
11 M1[n1-1,n1-3] = .5
12 M1[n1-1,n1-2] = -1
13 M1[n1-1,n1-1] = .5
14 #optie 5, Betere backward difference 2de orde
15 getal = 1
16 M1[n1-1,n1-4] = -1/getal
17 M1[n1-1,n1-3] = 4/getal
18 M1[n1-1,n1-2] = -5/getal
19 M1[n1-1,n1-1] = 2/getal
20 #optie 6, Betere backward difference, gaat helemaal niet goed
21 getal = 1
22 #M1[n1-1,n1-4] = -1/getal
23 #M1[n1-1,n1-3] = .5 + 4/getal
24 #M1[n1-1,n1-2] = -1 -5/getal
25 #M1[n1-1,n1-1] = .5 + 2/getal
26
27 print('Laatste kolom D',M1[n1-1,n1-4:])
28
29 theta = u_w[1]*deltat/deltax
30 #theta = 1
31
32 K = np.eye(n)*theta
33 for i in range(n-1):
34     K[i+1, i] = -(1+theta)/2
35     K[i,i+1] = (1-theta)/2
36
37 K1 = Forward_Euler(L1)
38 print('Laatste kolom A',K1[n1-1,n1-4:])
39 K1 = np.eye(n1)*theta
40 for i in range(n1-1):
41     K1[i+1, i] = -(1+theta)/2
42     K1[i,i+1] = (1-theta)/2
43
44 #optie 1, upwind dC/dx = 0
45 #K1[n1-1,n1-1] = (3-theta)/2
46 #optie 2, central difference dC/dx = 0
47 K1[n1-1,n1-2] = - theta
48 getal1 = (1-theta)/2
49 #optie 3, eerste orde
50 #K1[n1-1,n1-1] = theta+ 2*getal1
51 #K1[n1-1,n1-2] = -(1+theta)/2 -1*getal1
52 #optie 4, hoge precisie eerste orde
53 K1[n1-1,n1-1] = theta + 5/2*getal1
54 K1[n1-1,n1-2] = -(1+theta)/2 -2*getal1
55 K1[n1-1,n1-3] = .5*getal1
56 #optie 5, tweede orde
57 orde1_2 = 1
58 K1[n1-1,n1-1] = theta+ 2*getal1 + 2*getal1/orde1_2
59 K1[n1-1,n1-2] = -(1+theta)/2 -1*getal1 - 5*getal1/orde1_2
60 K1[n1-1,n1-3] = 4*getal1/orde1_2
61 K1[n1-1,n1-4] = -1*getal1/orde1_2
62 #optie 6, hoge precisie tweede orde
63 #K1[n1-1,n1-1] = theta + 5/2*getal1+ 2*getal1/orde1_2
64 #K1[n1-1,n1-2] = -(1+theta)/2 -2*getal1 - 5*getal1/orde1_2
65 #K1[n1-1,n1-3] = .5*getal1 + 4*getal1/orde1_2
66 #K1[n1-1,n1-4] = -1*getal1/orde1_2

```

De definities om de plaatjes mee te modelleren:

```

1 def Plot_C_evolutie(Conc,ax):
2     'Plot sedimentconcentratie evolutie'
3     c = ax.pcolor(np.transpose(Conc)*1000)
4     ax.set_ylabel('Tijd t [s]', fontsize=16)
5     ax.set_xlabel('Afstand x [m$]', fontsize=16)
6     ax.set_title('Concentratie evolutie', fontsize=16)
7     ax.tick_params(axis='both', labels=15)
8     colorbar = fig.colorbar(c, ax=ax)# ,orientation = 'horizontal')
9     colorbar.set_label(label='Sedimentconcentratie $C_2$ [$g/m^2$]',size = 18)
10    colorbar.ax.tick_params(labels=16)
11
12 def Plot_Se_evolutie(Se,ax):
13     'Plot bodemsediment evolutie'
14     C = ax.pcolor(np.transpose(Se)*1000)
15     ax.set_ylabel('Tijd t [s]', fontsize=16)
16     ax.set_xlabel('Afstand x [m$]', fontsize=16)
17     ax.set_title('Erodeerbaar sediment evolutie', fontsize=16)
18     ax.tick_params(axis='both', labels=15)
19     cbar = fig.colorbar(C, ax=ax)
20     cbar.set_label(label='Oppervlaktensediment $S_e$ [$g/m^2$]',size = 18)
21     cbar.ax.tick_params(labels=16)
22
23 def X_doorsnede(t,x_Positie,Conc,Cu,ax):
24     'Maakt een verzorgde plot over de concentratie als evolutie in de ruimte'
25     ax.plot(t, Conc[x_Positie]*1000, label='C')
26     ax.plot(t, Cu[0]*1000, 'g--', label='C_v')
27     ax.legend(loc="center left",
28             bbox_transform=ax.transAxes, fontsize=14)
29     ax.set_ylabel('Concentratie $C_2$ [$g/m^2$]', fontsize=16)
30     ax.set_xlabel('Tijd $[s]$)', fontsize=16)
31     ax.set_title('Sedimentconcentratie op x = '+str(x_Positie), fontsize=16)
32     ax.tick_params(axis='both', labels=15)
33     ax.grid()
34
35 def T_doorsnede(L,T_t,Conc,Cu,ax):
36     'Maakt een verzorgde plot over de concentratie als evolutie in de tijd'
37     ax.plot(L, Conc[:, T_t]*1000, label='C')
38
39     ax.plot(L, Cu[:,T_t]*1000, 'g--', label='C_v')
40     ax.legend(loc="upper right",
41             bbox_transform=ax.transAxes, fontsize=14)
42     ax.set_ylabel('Concentratie $C_2$ [$g/m^2$]', fontsize=16)
43     ax.set_xlabel('Positie $[m]$)', fontsize=16)
44     ax.set_title('Concentratie sediment op t=' + str(T_t*deltat), fontsize=16)
45     ax.tick_params(axis='both', labels=15)
46     ax.grid()
47
48 def Vline(t,x_Positie,ax):
49     'Plot een verticale wit onderbroken lijn '
50     hline = [x_Positie, x_Positie]
51     line = [0, len(t)]
52     ax.plot(hline, line,'w--')
53
54 def Hline(L,T_tt,ax):
55     'Plot een horizontale wit onderbroken lijn'
56     hline = [0, len(L)]
57     line = [T_tt, T_tt]
58     ax.plot(hline, line,'w--')

```