

De methode van Macaulay voor tweedimensionale constructies

Bachelor Eindproject
J.D. van der Wulp
Technische Universiteit Delft
23 juni 2023

Voorwoord

De scriptie die voor u ligt betreft 'De methode van Macaulay voor tweedimensionale constructies'. Deze scriptie is geschreven ten behoeve van de bacheloropleiding Civiele Techniek & Geowetenschappen aan de Technische Universiteit Delft. In de periode van 24 april tot 23 juni 2023 ben ik bezig geweest met het uitvoeren en schrijven van dit onderzoek.

Hierbij wil ik mijn begeleiders T.R. van Woudenberg en P.C.J. Hoogenboom bedanken voor de ondersteuning gedurende het project. Op basis van feedback en advies heb ik de mogelijkheid gekregen mijn scriptie naar een hoger niveau te brengen. Het schrijven van het onderzoek heeft mij op deze manier veel plezier gedaan.

Justus van der Wulp

23 juni 2023

Samenvatting

Macaulay's methode is een methode om de kracht en doorbuiging eigenschappen van constructies te bepalen aan de hand van de differentiaalvergelijking voor buiging. Met gebruik van singularity functies is het mogelijk discontinue belastingen werkend op een constructie in één vergelijking te schrijven. Op deze wijze is de gehele constructie te beschrijven met behulp van één differentiaalvergelijking. Dit in tegenstelling tot de klassieke integratie methode, waar voor elke discontinuïteit de constructie wordt opgedeeld in verschillende vergelijkingen.

De methode van Macaulay biedt als voordeel dat de integratieconstanten gering blijven. Daarnaast wordt de invloed van een desbetreffende kracht op de constructie zichtbaar. Uitbreidingen op de methode zijn er op basis van discontinuïteiten in de buigstijfheid, doorbuiging en rotatie van de constructie. De methode is echter nooit uitgebreid voor tweedimensionale constructies.

In dit onderzoek wordt met behulp van exploratief en toegepast onderzoek een antwoord gezocht op de volgende onderzoeksvraag:

Hoe kan de methode van Macaulay voor tweedimensionale constructies worden uitgebreid, en vervolgens worden toegepast?

De differentiaalvergelijking voor extensie blijkt de mogelijkheid te bieden, om op eenzelfde wijze als voor de situatie bij buiging, de methode van macaulay toe te passen voor constructies die normaalkracht bevatten. Axiale krachten worden met singularity functies met de desbetreffende orde geschreven in deze differentiaalvergelijking. Daarnaast worden discontinuïteiten in de axiale verplaatsing van de constructie met een singularity functie met orde -2 geschreven. De betreffende axiale verplaatsing wordt hierin als onbekend verondersteld. De extra voorwaarde die wordt verkregen is dat de normaalkracht ter plaatse van deze discontinuïteit gelijk aan nul dient te zijn. Eveneens als voor de situatie bij buiging is het mogelijk verende verbindingen en opleggingen te modelleren. De extra voorwaarde die hiervoor wordt verkregen is gebaseerd op de theorie van lineaire veren.

Vervolgens blijkt dat tweedimensionale constructies beschreven dienen te worden met de differentiaalvergelijkingen voor buiging en extensie. Met een discrete aanpak worden per hoekpunt vier onbekenden geïntroduceerd. Deze onbekenden hebben betrekking op de verplaatsing in axiale richting, de verplaatsing in dwarsrichting (doorbuiging), de normaalkracht en de dwarskracht. Op basis van vier verkregen relaties per hoekpunt is het mogelijk de onbekenden te achterhalen en zo de karakteristieken van de tweedimensionale constructie te bepalen. De relaties hebben betrekking op de wisselwerking tussen de normaalkracht en dwarskracht, en de wisselwerking tussen de axiale verplaatsing en de doorbuiging.

Het is te concluderen dat de gevonden methode voor de uitbreiding van Macaulay voor tweedimensionale constructies correct en toepasbaar is. Met betrekking tot effectiviteit is de vergelijking gemaakt met de methode van het klassiek integreren. Op basis van de veronderstelling dat de gevonden methode vier extra onbekenden introduceert per hoekpunt en de klassieke integratiemethode zes, is te concluderen dat deze methode een duidelijk te overwegen alternatief is op de klassieke integratie methode.

Inhoud

Voorwoord	2
Samenvatting	3
Inhoud	4
Inleiding	6
1 Macaulay's methode	8
1.1 Euler-Bernoulli.....	8
1.2 Macaulay's functies.....	8
1.3 Modelleren van krachten.....	11
1.4 Opleggingen.....	12
1.5 Verbindingen in de constructie.....	13
1.6 Veren.....	15
1.7 Toepassing.....	18
Voorbeeld 1: Eenvoudige ligger met puntlast.....	18
Voorbeeld 2: Statisch onbepaalde constructie met uniform verdeelde belasting.....	19
Voorbeeld 3: Ligger met scharnier.....	20
Voorbeeld 4: Ligger met veren.....	22
2 Macaulay's methode voor normaalkracht	24
2.1 Differentiaalvergelijking voor extensie.....	24
2.2 Modelleren van krachten.....	24
2.3 Opleggingen.....	25
2.4 Verbindingen in de constructie.....	26
2.5 Veren.....	27
2.6 Toepassing.....	28
Voorbeeld 5: Ligger met normaalkracht.....	28
Voorbeeld 6: Ligger met een verend telescoopscharnier.....	29
3 Macaulay's methode voor tweedimensionale constructies	30
3.1 Assenstelsel.....	30
3.2 Differentiaalvergelijkingen.....	30
3.3 Hoek in de constructie.....	31
3.4 Transformatie naar originele constructie.....	33
3.5 Toepassing.....	35
Voorbeeld 7: Tweedimensionale uitkraging.....	35
Voorbeeld 8: Driescharnierspant.....	37
Discussies	40
Continue methode voor tweedimensionale constructies.....	40
Aanbevelingen vervolgonderzoek.....	42
Conclusies	43
Referenties	44
Bijlage	45
Voorbeeld 1: Eenvoudige ligger met puntlast.....	45
Voorbeeld 2: Statisch onbepaalde constructie met uniform verdeelde belasting.....	47
Voorbeeld 3: Ligger met scharnier.....	49

Voorbeeld 4: Ligger met veren.....	51
Voorbeeld 5: Ligger met normaalkracht.....	53
Voorbeeld 6: Ligger met een verend telescoopscharnier.....	54
Voorbeeld 7: Tweedimensionale uitkraging.....	55
Voorbeeld 8: Driescharnierspant.....	59

Inleiding

De methode van Macaulay is een methode die wordt toegepast in de constructiemechanica waarmee de kracht en doorbuiging eigenschappen van constructies worden bepaald (Macaulay, 1919). Het uitgangspunt van de methode is de differentiaalvergelijking afkomstig van de balktheorie van Euler-Bernoulli. Met het gebruik van zogenoemde 'Singularity functions' biedt de methode van Macaulay de mogelijkheid om discontinue belastingen die werken op een constructie in één regel te schrijven. Door middel van integratie is het vervolgens mogelijk de desbetreffende eigenschappen van de constructie te verkrijgen. Met de klassieke integratie methode wordt, bij aanwezigheid van een discontinue belasting, de differentiaalvergelijking voor de constructie voor elk deel geschreven waar een continue belasting aanwezig is. Dit betekent dat de op te lossen integratieconstanten en de nodige randvoorwaarden per discontinuïteit toenemen. Met de aanwezigheid van vele discontinue belastingen is deze klassieke methode vanuit een praktisch oogpunt lastig toepasbaar. Met de mogelijkheid om de discontinue belastingen in één regel te schrijven, biedt de methode van Macaulay een eenvoudiger alternatief. De onbekende integratieconstanten blijven in dit geval gering.

De methode van Macaulay wordt op dit moment met name voor eenvoudige eendimensionale liggers met een constante buigstijfheid toegepast. Er zijn uitbreidingen beschreven omtrent discontinuïteiten in de buigstijfheid, doorbuiging en rotatie van de constructie. Een uitbreiding voor tweedimensionale constructies ontbreekt echter. Het is tevens niet gebruikelijk om deze methode toe te passen wanneer er normaalkracht aanwezig is. In dit onderzoek wordt er gekeken naar een eventuele uitbreiding van de methode van Macaulay voor tweedimensionale constructies. Uitsluitend constructies waarbij in de knooppunten niet meer dan twee staven samenkomen worden behandeld. De buigstijfheid wordt in het gehele onderzoek als constant verondersteld.

De onderzoeksvraag van het project luidt:

Hoe kan de methode van Macaulay voor tweedimensionale constructies worden uitgebreid, en vervolgens worden toegepast?

Het antwoord op deze onderzoeksvraag is verkregen door een exploratief en toegepast onderzoek.

Door het opstellen van mechanica schema's en het analyseren van deze problemen is er gezocht naar patronen en vereisten voor het beantwoorden van de onderzoeksvraag. Bevindingen uit deze analyses werden genoteerd om uiteindelijk tot geldige methodes te komen.

In het eerste hoofdstuk wordt er gekeken naar de al bekende methode van Macaulay en uitbreidingen op deze methode die relevant zijn voor dit onderzoek. In dit hoofdstuk wordt eerst ingegaan op de theorie. Vervolgens wordt de toepassing behandeld op basis van verschillende voorbeelden.

In het tweede hoofdstuk wordt ingegaan op een uitbreiding en de toepassing van de methode voor eendimensionale constructies met normaalkracht.

Het derde hoofdstuk beschrijft een uitbreiding van de methode van Macaulay voor tweedimensionale constructies. Eveneens wordt eerst de theorie behandeld en daarna de toepassing.

Daaropvolgend worden in de vorm van een discussie eventuele uitbreidingen beschreven waar in dit onderzoek niet naar is gekeken, samen met vervolgonderzoek op de beschreven methodes.

Het rapport eindigt met een conclusie van de bevindingen uit de beschreven hoofdstukken.

1 Macaulay's methode

In dit hoofdstuk wordt de methode van Macaulay behandeld. Hierbij wordt ingegaan op de theorie en de gevonden uitbreidingen uit de literatuur. Uiteindelijk wordt de toepassing van de methode behandeld op basis van verschillende voorbeelden die de eerder beschreven theorie duidelijk maakt.

1.1 Euler-Bernoulli

Ten grondslag van de methode van Macaulay ligt de differentiaalvergelijking voor buiging afkomstig van de balkentheorie van Euler-Bernoulli. Op basis van de kinematische, constitutieve en statische vergelijkingen voor buiging is deze differentiaalvergelijking af te leiden. Deze vergelijkingen zijn als volgt:

-Kinematische vergelijkingen:

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} \quad (1) \quad ; \quad \kappa = \frac{d\varphi}{dx} \quad (2) \quad ; \quad \kappa = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (3)$$

-Constitutieve vergelijkingen:

$$M = EI \cdot \kappa \quad (4)$$

-Statische vergelijkingen:

$$\frac{dV}{dx} + q_z = 0 \quad (5) \quad ; \quad \frac{dM}{dx} - V = 0 \quad (6) \quad ; \quad \frac{d^2M}{dx^2} + q_z = 0 \quad (7)$$

In deze vergelijkingen is w de verplaatsing, φ de rotatie, κ de kromming, M het moment, EI de buigstijfheid, V de dwarskracht en q_z de externe belasting in z richting.

Met gebruik van substitutie is het mogelijk met vergelijkingen (3), (4) en (7) de uiteindelijke differentiaalvergelijking voor buiging te bepalen. Deze is als volgt:

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2w}{dx^2}) = q_z \quad (8)$$

Op het moment dat de buigstijfheid als constant kan worden beschouwd vereenvoudigd de vergelijking tot het volgende:

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} = q_z \quad (9)$$

1.2 Macaulay's functies

De methode van Macaulay biedt de mogelijkheid om discontinuïteiten werkend op de constructie in één vergelijking te schrijven. Om dit te realiseren wordt er gebruikgemaakt van zogenoemde singularity functies. Dit is een familie van functies die gebaseerd is op de diracdelta functie. Het differentiëren en integreren van deze diracdelta functie vormt deze familie. De singularity functie is wiskundig als volgt gedefinieerd:

Voor $n \geq 0$:

$$f(x) \equiv \langle x - a \rangle^n = \begin{cases} (x - a)^n & x \geq a, \\ 0 & x < a. \end{cases} \quad (10) \quad (\text{Caprani, 2010})$$

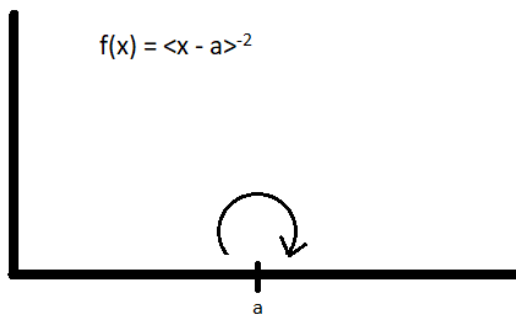
Voor $n < 0$:

$$f(x) \equiv \langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0 & x \neq a, \\ \infty & x = a. \end{cases} \quad (11) \quad (\text{Caprani, 2010})$$

Hierin geeft a de positie aan waar de singulariteit voorkomt, en is n de orde van de functie. De meest voorkomende ordes voor de singularity functie zijn van -2 tot 2, waarbij iedere orde een specifieke functie benaming heeft. Deze benamingen zijn 'unit doublet', 'unit impulse (diracdelta)', 'unit step (heaviside)', 'unit ramp' en 'unit parabolic'.

-Unit doublet

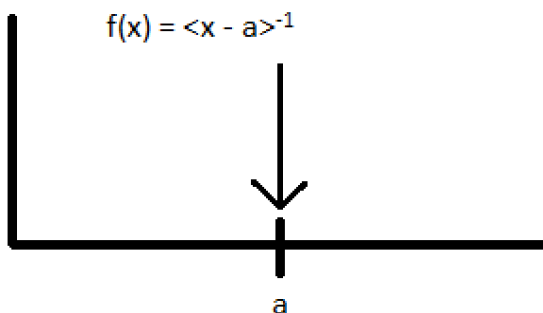
De unit doublet functie is de afgeleide van de diracdelta functie. In de familie van de singularity functies heeft deze functie een orde van -2. De Unit doublet is een functie waarbij de waarde overal gelijk is aan nul, met uitzondering van het punt ' a '. De visualisatie van de functie is weergegeven in figuur 1.



Figuur 1: Unit doublet functie.

-Diracdelta (Unit impulse)

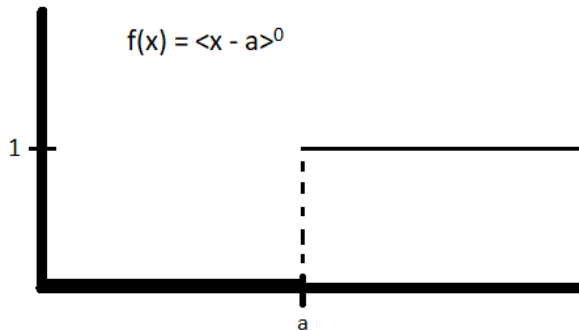
De diracdelta functie heeft in de familie van de singularity functies een orde gelijk aan -1. De functie is overal gelijk aan nul, met uitzondering van punt ' a ', waar de functie een impuls representeert. In figuur 2 is deze functie weergegeven.



Figuur 2: Diracdelta functie.

-Unit step (Heaviside)

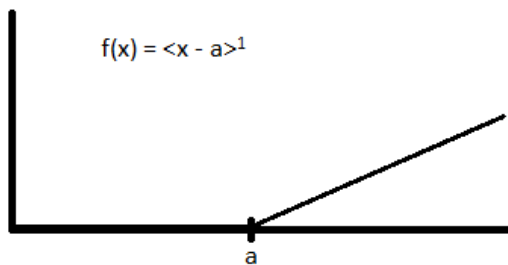
De unit step of ook wel heaviside functie is de eerste functie die verkregen wordt bij het integreren van de diracdelta functie. De functie heeft een orde gelijk aan nul in de familie van de singularity functies en representeert een sprong van 1 ter plaatse van 'a'. In figuur 3 is deze functie weergegeven.



Figuur 3: Unit step functie.

-Unit ramp

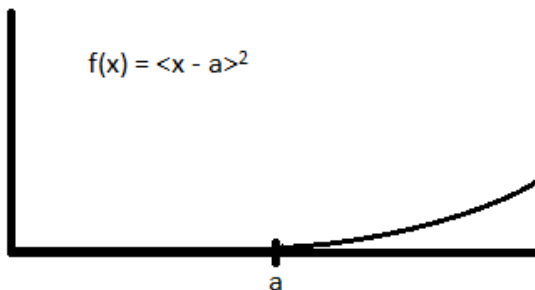
De unit ramp functie heeft een orde van 1 in de familie van singularity functies. De functie is weergegeven in figuur 4.



Figuur 4: Unit ramp functie.

-Unit parabolic

De unit parabolic functie heeft in de familie van singularity functies een orde gelijk aan 2. In figuur 5 is deze functie weergegeven.



Figuur 5: Unit parabolic functie.

Het integreren van de singularity functie is afhankelijk van zijn orde. De integratie van de functie wordt als volgt gedefinieerd:

$$\int \langle x - a \rangle^n dx = \begin{cases} \langle x - a \rangle^{n+1}, & n < 0 \\ \frac{\langle x - a \rangle^{n+1}}{n+1}, & n \geq 0 \end{cases} \quad (12) \quad (\text{Caprani, 2010})$$

1.3 Modelleren van krachten

Voor het modelleren van krachten op een constructie wordt er gebruikgemaakt van de singularity functies. Elke kracht heeft een bijbehorende functie op basis van welk gedrag het vertoont in de kracht vergelijking. Door de toepassing van superpositie en door de omvang van de kracht te vermenigvuldigen met zijn functie, is het vervolgens mogelijk om alle aanwezige krachten werkend op de constructie in één regel te schrijven. Naar aanleiding van het gekozen assenstelsel wordt een kracht positief of negatief gemodelleerd.

In de meeste methoden van Macaulay, die in de literatuur te vinden zijn, wordt meteen de stap gemaakt naar het modelleren van de momentenverdeling van de constructie.

Om het gehele overzicht te bewaren is er in dit rapport gekozen voor de meer volledige aanpak. Dit betekent dat er eerst gekeken wordt naar de vergelijking voor de aanwezige belasting, waaruit vervolgens de rest kan worden bepaald. Deze aanpak wordt aangehouden ten gunste voor verder onderzoek naar Macaulay's methode.

-Puntlast

Voor het modelleren van puntlasten wordt de diracdelta functie gebruikt. Hieruit volgt dat een puntlast met waarde F , ter plaatse van punt a wordt gemodelleerd in de kracht vergelijking als $F \langle x - a \rangle^{-1}$.

-Koppel

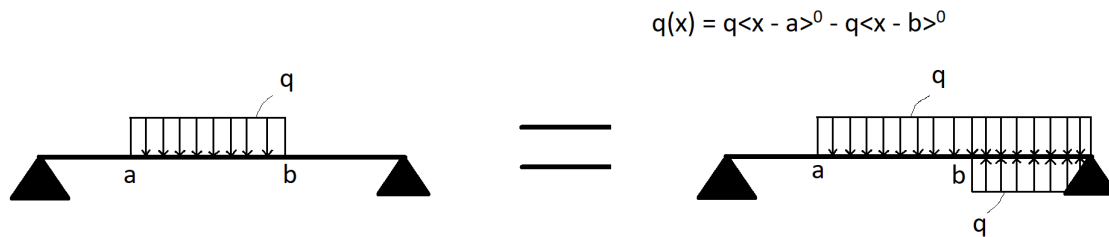
Bij het modelleren van een koppel (moment) wordt de unit doublet functie gebruikt. Een koppel met waarde M gelegen op punt a wordt in de kracht vergelijking gemodelleerd als $M \langle x - a \rangle^{-2}$.

-Uniform verdeelde belasting

Bij de aanwezigheid van een uniform verdeelde belasting wordt de unit step functie gebruikt. Deze functie wordt eveneens vermenigvuldigd met de grootte van de aanwezige belasting om de kracht te modelleren. Op het moment dat deze uniform verdeelde belasting tot het einde van de constructie werkt, wordt deze gemodelleerd door 'a' de waarde te geven waar deze belasting begint. Een uniform verdeelde belasting met waarde q die begint ter plaatse van punt a wordt zo dus in de kracht vergelijking gemodelleerd als $q \langle x - a \rangle^0$.

Wanneer de uniform verdeelde belasting eerder stopt dan het einde van de constructie, ontstaat er een complicatie. De uniform verdeelde belasting blijft namelijk werken vanaf het punt waar deze begint en stopt niet meer. Dit komt door de definitie van de unit step functie. Om deze complicatie op te lossen wordt er een nieuwe tegengestelde kracht ingeluid om de

aanvankelijk werkende kracht op te heffen. In figuur 6 is dit principe weergegeven, met 'q' de waarde van de uniform verdeelde belasting, 'a' het beginpunt van deze belasting en 'b' het eindpunt.



Figuur 6: Modelleren van een uniform verdeelde belasting.

Net zoals de uniform verdeelde belasting, kunnen ook lineair verlopende verdeelde belastingen, parabolisch verdeelde belastingen enz, worden gemodelleerd. Hier wordt dan telkens een singularity functie van een hogere orde voor toegepast.

1.4 Opleggingen

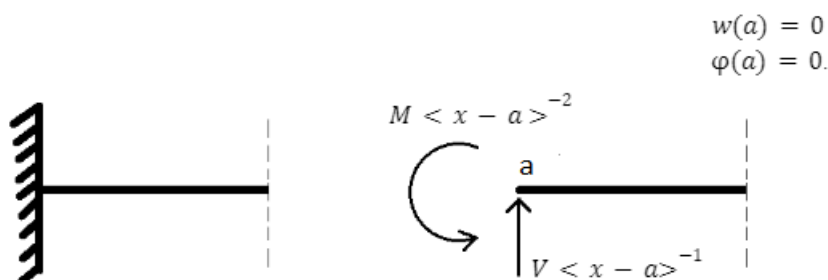
Opleggingen zijn verbindingen tussen de constructie en zijn omgeving. Er zijn verschillende soorten opleggingen met ieder zijn eigen restricties voor wat betreft translaties en rotaties van de constructie. Elke translatie en/of rotatie die een oplegging tegengaat, introduceert een kracht ter plaatse van de oplegging. Deze krachten zijn zogeheten oplegreacties. Voor de methode van Macaulay worden de oplegreacties gemodelleerd als krachten ter plaatse van de oplegging. Naast deze krachten brengen oplegging ook voorwaarden met zich mee. Deze voorwaarden worden in de methode van Macaulay gebruikt om de verkregen differentiaalvergelijking (9) op te lossen.

-Inklemming

Bij een inklemming zijn geen translaties en rotaties mogelijk. Dit betekent dat er ter plaatse van de inklemming een horizontale kracht, een verticale kracht en een moment geïntroduceerd worden. Daarnaast aangezien een inklemming geen vrijheidsgraden kent, zijn de verkregen voorwaarden dat de translaties en de rotatie ter plaatse van de inklemming gelijk zijn aan nul.

Relevant voor de differentiaalvergelijking voor buiging worden bij een inklemming ter plaatse van punt a het moment met waarde M en de verticale kracht met waarde V gemodelleerd in de kracht vergelijking als $M < x - a >^{-2}$ en $V < x - a >^{-1}$. Daarnaast worden de verkregen voorwaarden $w(a) = 0$ en $\varphi(a) = 0$.

In figuur 7 is het modelleren van een inklemming voor buiging weergegeven.



Figuur 7: Het modelleren van krachten voor een inklemming met betrekking tot buiging.

-Scharnieroplegging

Bij een scharnieroplegging zijn geen verticale en horizontale translaties mogelijk. Hierdoor worden er in deze richtingen krachten geïntroduceerd. Daarnaast zijn de verkregen voorwaarden voor een scharnieroplegging dat de translaties ter plaatse van de oplegging gelijk zijn aan nul.

Relevant voor de differentiaalvergelijking voor buiging wordt bij een scharnieroplegging ter plaatse van punt a de verticale kracht met waarde V gemodelleerd in de kracht vergelijking als $V < x - a >^{-1}$. Daarnaast wordt de verkregen voorwaarde $w(a) = 0$. In figuur 8 is het modelleren van een scharnieroplegging voor buiging weergegeven.



Figuur 8: Het modelleren van krachten voor een scharnieroplegging met betrekking tot buiging.

-Roloplegging

Bij een roloplegging is geen verticale translatie mogelijk ten opzichte van het oppervlak van de roloplegging. Dit betekent dat er een kracht loodrecht op het oppervlak van de roloplegging geïntroduceerd wordt. De verkregen voorwaarde voor een roloplegging is dat de verticale translatie, ten opzichte van het oppervlak van de roloplegging, gelijk is aan nul. Relevant voor de differentiaalvergelijking voor buiging wordt bij een roloplegging ter plaatse van punt a de verticale kracht met waarde V gemodelleerd in de kracht vergelijking als $V < x - a >^{-1}$. Daarnaast wordt de verkregen voorwaarde $w(a) = 0$. In figuur 9 is het modelleren van een roloplegging voor buiging weergegeven.



Figuur 9: Het modelleren van krachten voor een roloplegging met betrekking tot buiging.

1.5 Verbindingen in de constructie

In het werk van Falsone (2002) is een uitbreiding gegeven van de methode van Macaulay op het moment dat er verbindingen in de constructie aanwezig zijn. Deze uitbreiding biedt de mogelijkheid om de discontinuïteiten die verbindingen met zich meebrengen te schrijven in de vergelijking van de constructie. Hierdoor dient de constructie niet meer opgedeeld te worden ter plaatse van de verbinding, zodat het gedrag van de constructie in één vergelijking te beschrijven valt. De behandelde verbindingen zijn scharnierverbindingen en de zogeheten 'schuifscharnieren'.

-Scharnierverbindingen

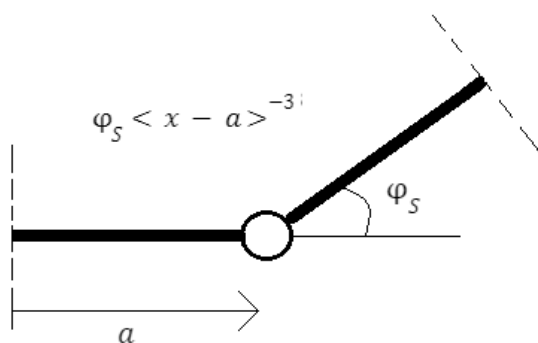
De definitie van een scharnierverbinding geeft aan dat twee verbonden delen niet ten opzichte van elkaar kunnen verschuiven, maar wel vrij ten opzichte van elkaar kunnen roteren. Dit is op te vatten als dat de rotatie de vrijheidsgraad van een scharnier is.

Ter plaatse van het scharnier is de rotatie dus niet gedefinieerd, wat als een discontinuïteit in de rotatie vergelijking gezien kan worden. Dit betreft een sprong in de rotatie vergelijking.

Met de methode van Macaulay is het met behulp van de singularity functies mogelijk deze sprong te modelleren. De orde van de singularity functie moet in dit geval zo gekozen worden dat de heaviside functie in de rotatie vergelijking aanwezig is. Dit betekent dat de orde van de singularity functie gelijk is aan nul in de rotatie vergelijking. Vervolgens door terug te redeneren is het mogelijk de discontinuïteit van het scharnier direct op te schrijven in de kracht vergelijking. De singularity functie krijgt in dit geval een orde die gelijk is aan -3 en bevindt zich op de plaats van het scharnier.

De omvang van de waarde waarmee deze functie vermenigvuldigd wordt is echter nog niet bekend. Dit geeft een extra onbekende constante die opgelost dient te worden. Aan de andere kant biedt de toevoeging van een scharnier ook een extra voorwaarde. Doordat de rotatie de vrijheidsgraad is van een scharnier, is het niet mogelijk dat ter plaatse van het scharnier een moment aanwezig is. De voorwaarde die hieruit verkregen wordt is dat het moment ter plaatse van het scharnier gelijk is aan nul.

Doordat een scharnier zorgt voor een extra onbekende, maar ook voor een extra voorwaarde om deze onbekende op te lossen, is het te veronderstellen dat een constructie met een scharnierverbinding altijd oplosbaar is. In figuur 10 is weergegeven hoe een scharnier gemodelleerd wordt in de kracht vergelijking. Hier is de vervormde constructie gevisualiseerd, met a de plaats van het scharnier en φ_s de waarde van de onbekende constante.



Figuur 10: Het modelleren van een scharnierverbinding.

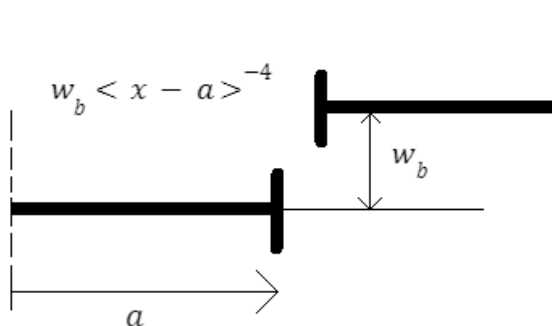
-Schuifscharnieren

Een schuifscharnier kent als vrijheidsgraad een verplaatsing loodrecht op de staaf-as. Hieruit volgt dat er een discontinuïteit optreedt ter plaatse van het schuifscharnier. De discontinuïteit betreft hier een sprong in de vergelijking voor de doorbuiging van de constructie.

In de methode van Macaulay is het modelleren van een sprong mogelijk door gebruik te maken van de heaviside functie. De orde van de singularity functie dient in dit geval gelijk te zijn aan nul in de vergelijking voor de doorbuiging. Vervolgens is te bepalen dat om een schuifscharnier direct te modelleren in de kracht vergelijking, er een singularity functie met orde -4 geschreven dient te worden. .

De waarde waarmee deze singularity functie vermenigvuldigd wordt is echter nog niet bekend. Dit is een extra onbekende constante.

Aan de andere kant geeft het schuifscharnier een extra voorwaarde. Aangezien het schuifscharnier de verplaatsing loodrecht op de staaf-as als vrijheidsgraad heeft, is het niet mogelijk dat op deze positie er een dwarskracht aanwezig is. De voorwaarde die hieruit verkregen wordt is dat ter plaatse van het schuifscharnier de dwarskracht gelijk is aan nul. Doordat een schuifscharnier zorgt voor een extra onbekende, maar ook voor een extra voorwaarde om deze onbekende op te lossen, is het te veronderstellen dat een constructie met deze verbinding altijd oplosbaar is. In figuur 11 is weergegeven hoe een schuifscharnier gemodelleerd wordt in de kracht vergelijking. Hier is de vervormde constructie gevisualiseerd, met a de plaats van het schuifscharnier en w_b de waarde van de onbekende constante.



Figuur 11: Het modelleren van een schuifscharnier.

1.6 Veren

Veren zijn elementen die een tegenkracht leveren bij het ondergaan van een bepaalde verplaatsing. Met betrekking tot de differentiaalvergelijking voor buiging zijn lineaire verplaatsingen en rotaties relevant. De theorie van lineaire en rotatieveren wordt onderstaand uitgewerkt.

Lineaire veren:

Lineaire veren gaan zoals de naam al aangeeft een lineaire verplaatsing tegen. Hieruit volgt dat de kracht die aanwezig is in de veer lineair in tegengestelde richting is. De formule voor lineaire veren is hieruit te bepalen en deze is als volgt:

$$F_{veer} = -K_u \cdot u \quad (13)$$

Hierin is F_{veer} de kracht aanwezig in de veer, K_u de lineaire veerconstante en u de verplaatsing van de veer.

Rotatieveren:

Rotatieveren gaan in plaats van een lineaire verplaatsing een rotatie tegen. Hieruit volgt dat de kracht die aanwezig is in de veer een moment is die tegengesteld werkt ten opzichte van de rotatie. De formule voor rotatieveren is als volgt:

$$M_{veer} = -K_\varphi \cdot \varphi \quad (14)$$

Hierin is M_{veer} het moment aanwezig in de veer, K_φ de rotatieveerconstante en φ de rotatie van de veer.

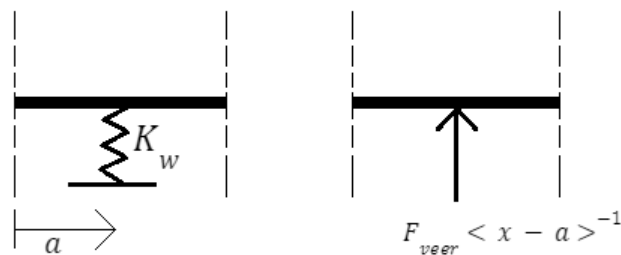
In het werk van Falsone (2002) is een uitbreiding gegeven van de methode van Macaulay wanneer zich veren in de constructie voordoen. Hierbij is er een onderscheid te maken tussen verende oplettingen en verende verbindingen.

De essentie voor het modelleren van een veer is telkens hetzelfde. De aanwezigheid van de veer zorgt voor een extra onbekende op de plaats van de veer met betrekking tot in welke vergelijking deze veer een discontinuïteit veroorzaakt. De aanwezigheid van de veer brengt echter ook een extra vergelijking met zich mee (vergelijking (13) of (14)) die omschreven kan worden in een extra voorwaarde om de onbekende op te lossen. Hierdoor is te veronderstellen dat met het toevoegen van een enkele of meerdere veren het systeem altijd oplosbaar blijft.

-Verende oplettingen

Verende oplettingen worden voor de methode van Macaulay gemodelleerd als een kracht ter plaatse van de opletting. De voorwaarde en de kracht bij de opletting zijn te bepalen aan de hand van de soort verplaatsing die de veer in de opletting tegengaat.

Een verende opletting die een lineaire verplaatsing loodrecht op de staaf-as tegengaat is weergegeven in figuur 12. De kracht wordt gemodelleerd als een puntlast ter plaatse van de opletting. Hierin is a de plaats van de opletting, K_w de lineaire veerconstante en F_{veer} de kracht van de veer werkend op de constructie.



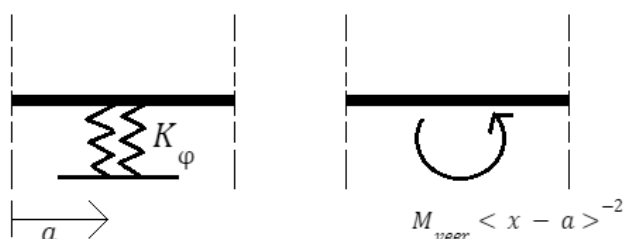
Figuur 12: Modelleren van een lineair verende opletting.

De verkregen voorwaarde bij deze opletting is te bepalen naar aanleiding van vergelijking (13). Deze is als volgt:

$$w(a) = -\frac{F_{veer}}{K_w} \quad (15)$$

Hierin is $w(a)$ de verticale verplaatsing van de constructie ter plaatse van de veer, F_{veer} de kracht werkend van de veer op de constructie en K_w de lineaire veerconstante.

Een verende opletting die een rotatie tegengaat is weergegeven in figuur 13. De kracht wordt gemodelleerd als een moment ter plaatse van de opletting. Hierin is a de plaats van de opletting, K_φ de rotatieveerconstante en M_{veer} het onbekende moment van de veer werkend op de constructie.



Figuur 13: Modelleren van een rotatie verende opletting.

De verkregen voorwaarde bij deze oplegging is te bepalen naar aanleiding van vergelijking (14). Deze is als volgt:

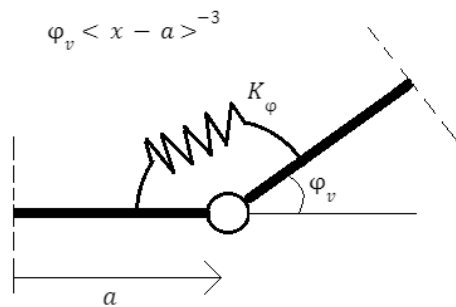
$$\varphi(a) = -\frac{M_{veer}}{K_{\varphi}} \quad (16)$$

Hierin is $\varphi(a)$ de rotatie van de constructie ter plaatse van de veer, M_{veer} het moment werkend van de veer op de constructie en K_{φ} de rotatieveerconstante.

-Verende verbindingen

Verende verbindingen zijn verbindingen in de constructie waarbij de veer de vrijheidsgraad van de verbinding tegengaat. Verende verbindingen worden voor de methode van Macaulay gemodelleerd als de vrijheidsgraad die de verbinding heeft. De bijbehorende voorwaarde wordt afgeleid op basis van welke vrijheidsgraad de veer tegengaat.

Een verende verbinding die de rotatie van een scharnier tegengaat is weergegeven in figuur 14. Hierin is a de plaats van de verbinding, K_{φ} de rotatieveerconstante en φ_v de onbekende rotatie ter plaatse van de verbinding.



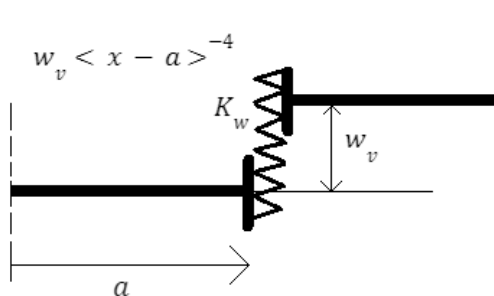
Figuur 14: Modelleren van een verende scharnierverbinding.

De verkregen voorwaarde bij deze verbinding is te bepalen naar aanleiding van vergelijking (14). Deze is als volgt:

$$M(a) = K_{\varphi} \cdot \varphi_v \quad (17)$$

Hierin is $M(a)$ het moment in de constructie ter plaatse van de verbinding, φ_v de rotatie van de verbinding en K_{φ} de rotatieveerconstante.

Een verende verbinding die de verplaatsing van een schuifscharnier tegengaat is weergegeven in figuur 15. Hierin is a de plaats van de verbinding, K_w de lineaire veerconstante en w_v de onbekende verplaatsing ter plaatse van de verbinding.



Figuur 15: Modelleren van een verend schuifscharnier.

De verkregen voorwaarde bij deze verbinding is te bepalen naar aanleiding van vergelijking (13). Deze is als volgt:

$$F(a) = K_w \cdot w_v \quad (18)$$

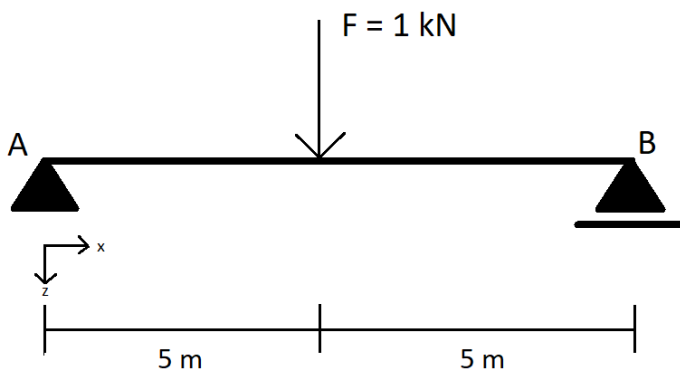
Hierin is $F(a)$ de kracht van de constructie op de veer ter plaatse van de verbinding, w_v de verplaatsing bij de verbinding en K_w de lineaire veerconstante.

1.7 Toepassing

Ter verheldering van de beschreven theorie worden er in deze sectie een aantal voorbeelden behandeld. Ieder voorbeeld heeft betrekking op een bepaald onderwerp.

Voorbeeld 1: Eenvoudige ligger met puntlast

In dit voorbeeld wordt een eenvoudige toepassing van de methode van Macaulay uitgewerkt. De constructie waar de methode op wordt toegepast is weergegeven in figuur 16.



Figuur 16: Eenvoudige ligger met puntlast.

De kracht vergelijking wordt verkregen door superpositie van de aanwezige puntlast en de verticale oplegreacties bij de opleggingen. De oplegreacties worden in dit geval naar boven toe gericht aangenomen. De vergelijking voor de belasting wordt dan als volgt geschreven:

$$q_z(x) = -A_v \langle x \rangle^{-1} + 1 \langle x - 5 \rangle^{-1} - B_v \langle x - 10 \rangle^{-1}$$

Met behulp van vergelijking (9) wordt vervolgens de vergelijking voor doorbuiging verkregen. De stappen zijn als volgt:

$$V(x) = A_v \langle x \rangle^0 - 1 \langle x - 5 \rangle^0 + B_v \langle x - 10 \rangle^0 + C_v$$

$$M(x) = A_v \langle x \rangle^1 - 1 \langle x - 5 \rangle^1 + B_v \langle x - 10 \rangle^1 + C_v x + C_M$$

$$EI \varphi(x) = \frac{1}{2} A_v \langle x \rangle^2 - \frac{1}{2} \langle x - 5 \rangle^2 + \frac{1}{2} B_v \langle x - 10 \rangle^2 + \frac{1}{2} C_v x^2 + C_M x + C_\varphi$$

$$EI w(x) = -\frac{1}{6} A_v \langle x \rangle^3 + \frac{1}{6} \langle x - 5 \rangle^3 - \frac{1}{6} B_v \langle x - 10 \rangle^3 - \frac{1}{6} C_v x^3 - \frac{1}{2} C_M x^2 - C_\varphi x + C_w$$

Zoals te zien in bovenstaande vergelijkingen, zijn er in totaal zes onbekenden die opgelost dienen te worden. Om deze onbekenden op te lossen, zijn er ook zes vergelijkingen nodig. De eerste vier vergelijkingen worden verkregen uit de randvoorwaarden van de ligger. Deze zijn als volgt:

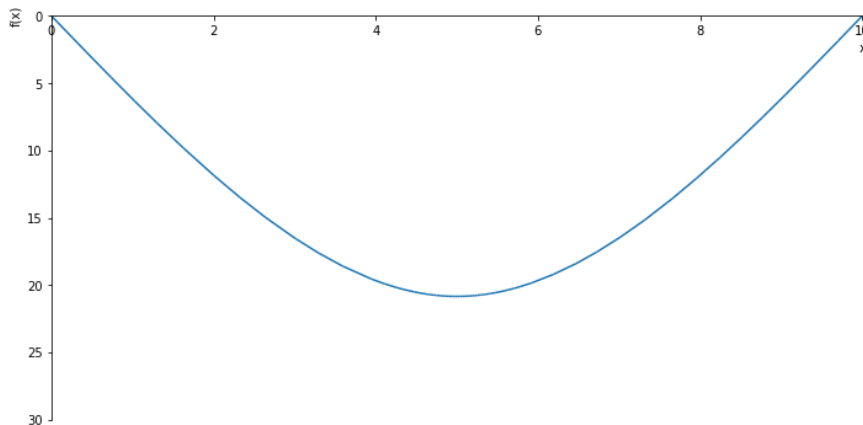
$$M(0) = 0 ; w(0) = 0 ; M(10) = 0 ; w(10) = 0$$

Daarnaast zijn er nog twee vergelijkingen vereist. Deze vergelijkingen worden verkregen door de ligger denkbeeldig te verlengen bij beide steunpunten. De twee extra voorwaarden zijn als volgt:

$$V(0^-) = 0 ; V(10^+) = 0$$

Hierin betekent de negatieve exponent een punt direct naast het betreffende punt aan de negatieve zijde volgens het assenstelsel. De positieve exponent beschrijft een punt direct naast het betreffende punt aan de positieve zijde volgens het assenstelsel.

Met bovenstaande zes vergelijkingen is het mogelijk alle zes onbekenden op te lossen en de vergelijking voor de doorbuiging van de ligger te verkrijgen. Uit deze vergelijking voor de doorbuiging is het vervolgens mogelijk alle andere karakteristieken van de ligger te bepalen. De doorbuiging is weergegeven in figuur 17. Hierbij is voor de buigstijfheid de waarde 1 aangehouden. Voor de volledige uitwerking van dit voorbeeld zie bijlage, voorbeeld 1.

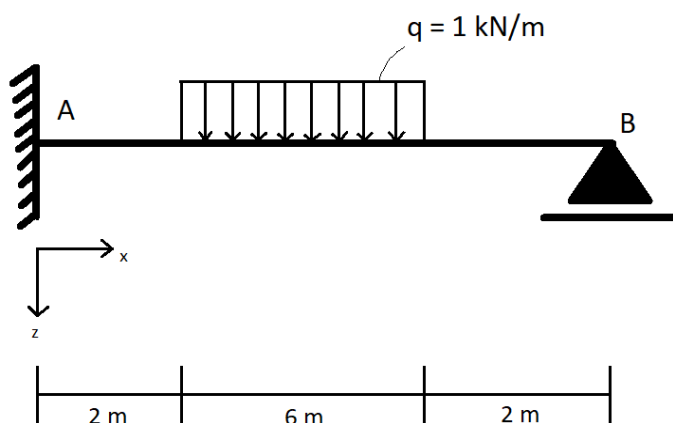


Figuur 17: Doorbuigingslijn (w-lijn), voorbeeld 1.

Voorbeeld 2: Statisch onbepaalde constructie met uniform verdeelde belasting

In dit voorbeeld wordt de toepassing van de beschreven methode met betrekking tot een statisch onbepaalde constructie en een uniform verdeelde belasting uitgewerkt.

De constructie waar de methode op wordt toegepast is weergegeven in figuur 18.



Figuur 18: Statisch onbepaalde ligger met uniform verdeelde belasting.

De vergelijking voor de aanwezige belasting wordt verkregen door de oplegreacties samen met de externe uniform verdeelde belasting te modelleren. De twee onbekende verticale oplegreacties voor punt A en B worden naar boven toe gericht aangenomen. Het onbekende moment bij de inklemming van A wordt positief aangenomen, dus linksom werkend. De vergelijking voor de belasting wordt dan als volgt:

$$q_z(x) = M_A \langle x \rangle^{-2} - A_v \langle x \rangle^{-1} + 1 \langle x - 2 \rangle^0 - 1 \langle x - 8 \rangle^0 - B_v \langle x - 10 \rangle^{-1}$$

Met behulp van vergelijking (9) wordt het volgende uitgewerkt:

$$V(x) = -M_A \langle x \rangle^{-1} + A_v \langle x \rangle^0 - 1 \langle x - 2 \rangle^1 + 1 \langle x - 8 \rangle^1 + B_v \langle x - 10 \rangle^0 + C_v$$

$$M(x) = -M_A \langle x \rangle^0 + A_v \langle x \rangle^1 - \frac{1}{2} \langle x - 2 \rangle^2 + \frac{1}{2} \langle x - 8 \rangle^2 + B_v \langle x - 10 \rangle^1 + C_v x + C_M$$

$$EI \varphi(x) = -M_A \langle x \rangle^1 + \frac{1}{2} A_v \langle x \rangle^2 - \frac{1}{6} \langle x - 2 \rangle^3 + \frac{1}{6} \langle x - 8 \rangle^3 + \frac{1}{2} B_v \langle x - 10 \rangle^2 + \frac{1}{2} C_v x^2 + C_M x + C_\varphi$$

$$EI w(x) = \frac{1}{2} M_A \langle x \rangle^2 - \frac{1}{6} A_v \langle x \rangle^3 + \frac{1}{24} \langle x - 2 \rangle^4 - \frac{1}{24} \langle x - 8 \rangle^4 - \frac{1}{6} B_v \langle x - 10 \rangle^3 - \frac{1}{6} C_v x^3 - \frac{1}{2} C_M x^2 - C_\varphi x + C_w$$

In bovenstaande vergelijkingen is te zien dat er zeven onbekenden opgelost dienen te worden om de vergelijking voor doorbuiging te bepalen. Dit betekent dat er zeven vergelijkingen nodig zijn om deze onbekende op te lossen. De eerste vergelijkingen worden verkregen uit de randvoorwaarden. Dit zijn de volgende:

$$\varphi(0) = 0 ; w(0) = 0 ; M(10) = 0 ; w(10) = 0$$

De overige drie vergelijkingen worden gehaald uit het principe om de ligger denkbeeldig te verlengen ter plaatse van de steunpunten. Deze extra voorwaarden zijn als volgt:

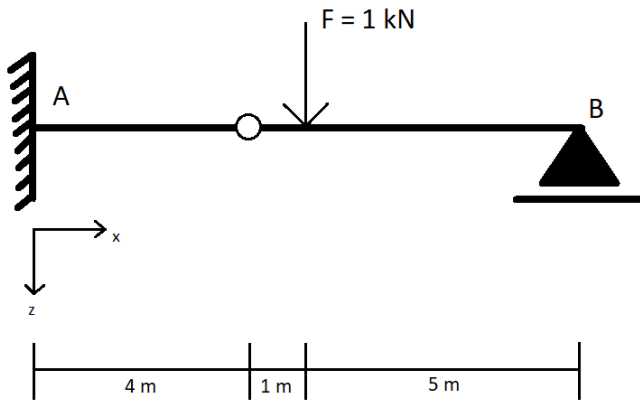
$$M(0^-) = 0 ; V(0^-) = 0 ; V(10^+) = 0$$

Met bovenstaande zeven vergelijkingen is het mogelijk de zeven onbekenden te bepalen, en zo ook de vergelijking voor de doorbuiging. Voor de volledige uitwerking van dit voorbeeld zie bijlage, voorbeeld 2.

In dit voorbeeld is op te merken dat de extra graad aan statische onbepaaldheid naast een extra onbekende oplegreactie, ook een extra randvoorwaarde met zich meebrengt. Hierdoor blijft het mogelijk het stelsel van vergelijkingen op te lossen. Aangezien dit voor elke extra graad telkens het geval zal zijn, kan worden verondersteld dat deze methode toepasbaar blijft voor elke vorm van statische onbepaaldheid.

Voorbeeld 3: Ligger met scharnier

In dit voorbeeld wordt de toepassing van de beschreven methode over verbindingen in een constructie uitgewerkt. De constructie waar deze methode op wordt toegepast is weergegeven in figuur 19.



Figuur 19: Ligger met scharnier.

De vergelijking voor de belasting wordt verkregen door naast het modelleren van de oplegreacties en de puntlast, nu ook het scharnier te modelleren. De onbekende constante voor het aandeel van het scharnier is ' φ_S '. De twee onbekenden verticale oplegreacties bij de steunpunten A en B worden naar boven toe gericht aangenomen. Het onbekende moment bij de inklemming A wordt positief aangenomen, dus linksom werkend. De vergelijking voor de belasting wordt dan als volgt:

$$q_z(x) = M_A \langle x \rangle^{-2} - A_v \langle x \rangle^{-1} + \varphi_S \langle x - 4 \rangle^{-3} + 1 \langle x - 5 \rangle^{-1} - B_v \langle x - 10 \rangle^{-1}$$

Met vergelijking (9) is vervolgens het volgende uit te werken:

$$V(x) = -M_A \langle x \rangle^{-1} + A_v \langle x \rangle^0 - \varphi_S \langle x - 4 \rangle^{-2} - 1 \langle x - 5 \rangle^0 + B_v \langle x - 10 \rangle^0 + C_v$$

$$M(x) = -M_A \langle x \rangle^0 + A_v \langle x \rangle^1 - \varphi_S \langle x - 4 \rangle^{-1} - 1 \langle x - 5 \rangle^1 + B_v \langle x - 10 \rangle^1 + C_v x + C_M$$

$$EI \varphi(x) = -M_A \langle x \rangle^1 + \frac{1}{2} A_v \langle x \rangle^2 - \varphi_S \langle x - 4 \rangle^0 - \frac{1}{2} \langle x - 5 \rangle^2 + \frac{1}{2} B_v \langle x - 10 \rangle^2 + \frac{1}{2} C_v x^2 + C_M x + C_\varphi$$

$$EI w(x) = \frac{1}{2} M_A \langle x \rangle^2 - \frac{1}{6} A_v \langle x \rangle^3 + \varphi_S \langle x - 4 \rangle^1 + \frac{1}{6} \langle x - 5 \rangle^3 - \frac{1}{6} B_v \langle x - 10 \rangle^3 - \frac{1}{6} C_v x^3 - \frac{1}{2} C_M x^2 - C_\varphi x + C_w$$

In bovenstaande vergelijkingen is te zien dat er acht onbekenden opgelost dienen te worden om de vergelijking voor doorbuiging te bepalen. Dit betekent dat er acht vergelijkingen nodig zijn om deze onbekende op te lossen. De eerste vergelijkingen worden verkregen uit de randvoorwaarden. Dit zijn de volgende:

$$\varphi(0) = 0 ; w(0) = 0 ; M(10) = 0 ; w(10) = 0$$

De volgende drie vergelijkingen worden gehaald uit het principe om de ligger denkbeeldig te verlengen ter plaatse van de steunpunten. Deze extra voorwaarden zijn als volgt:

$$M(0^-) = 0 ; V(0^-) = 0 ; V(10^+) = 0$$

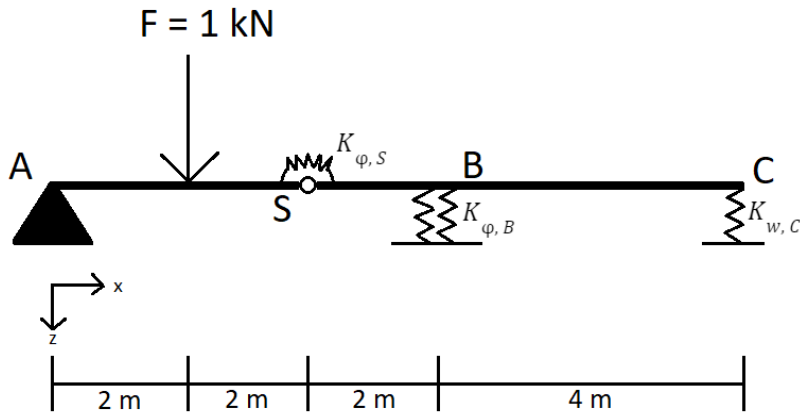
De laatste vergelijking wordt gehaald uit de voorwaarde die het scharnier met zich meebrengt. Dit is de volgende:

$$M(4) = 0$$

Met bovenstaande acht vergelijkingen is het mogelijk de acht onbekenden te bepalen, en zo ook de vergelijking voor de doorbuiging. Voor de volledige uitwerking van dit voorbeeld zie bijlage, voorbeeld 3.

Voorbeeld 4: Ligger met veren

In dit voorbeeld wordt de toepassing van de hierboven beschreven methode met betrekking tot veren uitgewerkt. De constructie waarvoor de methode wordt uitgewerkt is weergegeven in figuur 20.



Figuur 20: Ligger met veren.

De onbekende oplegreactie ter plaatse van punt A wordt naar boven toe gericht aangenomen. De veerconstanten $K_{\varphi, S}$, $K_{\varphi, B}$ en $K_{w, C}$ worden bekend verondersteld.

Daarnaast worden de verplaatsingen en krachten die gemodelleerd dienen te worden in de vergelijking positief aangenomen.

De vergelijking voor de belasting wordt dan als volgt:

$$q_z(x) = -A_v \langle x \rangle^{-1} + 1 \langle x - 2 \rangle^{-1} + \varphi_v \langle x - 4 \rangle^{-3} + M_{B, veer} \langle x - 6 \rangle^{-2} + F_{C, veer} \langle x - 10 \rangle^{-1}$$

Vervolgens is met vergelijking (9) het volgende te bepalen:

$$V(x) = A_v \langle x \rangle^0 - 1 \langle x - 2 \rangle^0 - \varphi_v \langle x - 4 \rangle^{-2} - M_{B, veer} \langle x - 6 \rangle^{-1} - F_{C, veer} \langle x - 10 \rangle^0 + C_v$$

$$M(x) = A_v \langle x \rangle^1 - 1 \langle x - 2 \rangle^1 - \varphi_v \langle x - 4 \rangle^{-1} - M_{B, veer} \langle x - 6 \rangle^0 - F_{C, veer} \langle x - 10 \rangle^1 + C_v x + C_M$$

$$EI \varphi(x) = \frac{1}{2} A_v \langle x \rangle^2 - \frac{1}{2} \langle x - 2 \rangle^2 - \varphi_v \langle x - 4 \rangle^0 - M_{B, veer} \langle x - 6 \rangle^1 - \frac{1}{2} F_{C, veer} \langle x - 10 \rangle^2 + \frac{1}{2} C_v x^2 + C_M x + C_\varphi$$

$$EI w(x) = -\frac{1}{6} A_v \langle x \rangle^3 + \frac{1}{6} \langle x - 2 \rangle^3 + \varphi_v \langle x - 4 \rangle^1 + \frac{1}{2} M_{B, veer} \langle x - 6 \rangle^2 + \frac{1}{6} F_{C, veer} \langle x - 10 \rangle^3 - \frac{1}{6} C_v x^3 - \frac{1}{2} C_M x^2 - C_\varphi x + C_w$$

In bovenstaande vergelijkingen is te zien dat er totaal acht onbekenden opgelost dienen te worden. Dit betekent dat er acht vergelijkingen zijn vereist. De eerste drie vergelijkingen volgen uit de randvoorwaarden. Dit zijn de volgende:

$$w(0) = 0 ; M(0) = 0 ; M(10) = 0$$

De volgende twee vergelijkingen worden verkregen uit het principe om de ligger te verlegen ter plaatse van de uiterste opleggingen. Deze voorwaarden zijn:

$$V(0^-) = 0 ; V(10^+) = 0$$

De overige drie vergelijkingen worden verkregen uit de eigenschappen van de aanwezige veren. De voorwaarden hiervoor zijn als volgt:

$$M(4) = K_{\varphi, S} \cdot \varphi_v \quad ; \quad \varphi(6) = -\frac{M_{B, veer}}{K_{\varphi, B}} \quad ; \quad w(10) = -\frac{F_{C, veer}}{K_{w, C}}$$

Bovenstaande vergelijkingen zijn respectievelijk bepaald naar aanleiding van de vergelijkingen (17), (16) en (15).

Met de aanwezigheid van deze acht vergelijkingen is het mogelijk de acht onbekende op te lossen en de vergelijking voor de doorbuiging van de ligger te verkrijgen. Voor de volledige uitwerking van dit voorbeeld zie bijlage, voorbeeld 4.

2 Macaulay's methode voor normaalkracht

In dit hoofdstuk wordt de methode van Macaulay uitgebreid voor één-dimensionale constructies met normaalkracht. Hierbij wordt eerst ingegaan op de theorie die deze uitbreiding beschrijft. Vervolgens wordt de toepassing van de beschreven methode behandeld op basis van voorbeelden die betrekking hebben op de beschreven theorie.

2.1 Differentiaalvergelijking voor extensie

Om de mogelijkheid te hebben om normaalkracht in een constructie te beschrijven is er een andere differentiaal vergelijking vereist. Het betreft de differentiaalvergelijking voor extensie, die af te leiden is op basis van de kinematische, constitutieve en statische vergelijkingen voor extensie.

Deze vergelijkingen zijn als volgt:

-Kinematische vergelijking:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (19)$$

-Constitutieve vergelijking:

$$N = EA \varepsilon \quad (20)$$

-Statische vergelijking:

$$\frac{dN}{dx} + q_x = 0 \quad (21)$$

In de bovenstaande vergelijkingen is ε de rek, u de verplaatsing, N de normaalkracht, E de elasticiteitsmodulus, A de oppervlakte van de doorsnede en q_x de externe belasting in x richting.

Met deze drie vergelijkingen is het vervolgens mogelijk de differentiaalvergelijking voor extensie te bepalen. Deze is als volgt:

$$\frac{d}{dx} (EA \frac{du}{dx}) + q_x = 0 \quad (22)$$

Op het moment dat het product EA , ook wel de axiale stijfheid, constant is vereenvoudigd de vergelijking in het volgende:

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} + q_x = 0 \quad (23)$$

2.2 Modelleren van krachten

De normaalkrachten die op de constructie werken worden gemodelleerd door gebruik te maken van de singularity functies beschreven in sectie 1.2. Hierbij wordt elke kracht gemodelleerd met een bijbehorende functie op basis van welk gedrag het vertoont in de kracht vergelijking in axiale richting. De omvang van de kracht wordt vermenigvuldigd met de bijbehorende singularity functie. Naar aanleiding van het gekozen assenstelsel wordt een kracht positief of negatief gemodelleerd. Het principe voor het modelleren van de normaalkracht is hetzelfde als bij de situatie voor buiging, beschreven in sectie 1.3. In dit geval werken al de krachten echter in axiale richting van de constructie.

-Axiale puntlasten

Voor het modelleren van axiale puntlasten wordt de diracdelta functie toegepast. Hieruit volgt dat een kracht van waarde F , ter plaatse van punt a , wordt gemodelleerd in de kracht vergelijking als $F \langle x - a \rangle^{-1}$.

-Axiale uniform verdeelde belastingen

Bij de aanwezigheid van axiale uniform verdeelde belastingen wordt de heaviside functie gebruikt. Deze functie wordt vermenigvuldigd met de waarde van de belasting om de kracht te modelleren. Op het moment dat de uniform verdeelde belasting niet tot het einde van de constructie werkt, wordt deze kracht opgeheven met een tegengestelde kracht die in werking treedt ter plaatse waar de te modelleren kracht stopt. Een axiale uniform verdeelde belasting met waarde q_x werkend van punt a tot b , wordt als volgt gemodelleerd:

$$q_x \langle x - a \rangle^0 - q_x \langle x - b \rangle^0$$

Eveneens als de uniform verdeelde belasting, kunnen ook lineair verlopende axiale verdeelde belastingen, parabolisch verlopende axiale verdeelde belastingen enz, worden gemodelleerd. Hier wordt dan telkens een singularity functie van een hogere orde voor toegepast.

2.3 Opleggingen

De opleggingen beschreven in sectie 1.4 van dit rapport, die een translatie in de axiale richting van de constructie tegengaan, zijn relevant voor deze uitbreiding met normaalkracht. Dit betreft de inklemming en de scharnierende oplegging.

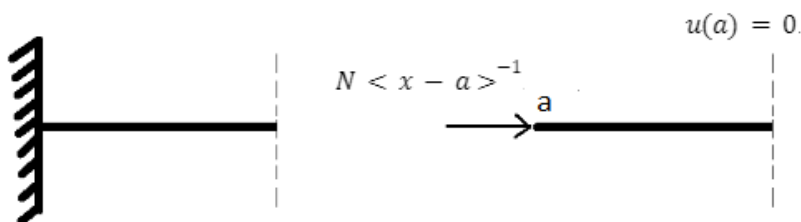
-Inklemming

De oplegreactie die in axiale richting werkt ter plaatse van de inklemming wordt gemodelleerd als een axiale puntlast.

De voorwaarde die verkregen wordt bij de inklemming is dat de verplaatsing in langsrichting gelijk is aan nul.

Relevant voor de differentiaalvergelijking voor extensie wordt bij een inklemming ter plaatse van punt a een horizontale kracht met waarde N gemodelleerd in de kracht vergelijking als $N \langle x - a \rangle^{-1}$. Daarnaast wordt de verkregen voorwaarden $u(a) = 0$.

In figuur 21 is het modelleren van een inklemming voor extensie weergegeven.



Figuur 21: Het modelleren van krachten voor een inklemming met betrekking tot extensie.

-Scharnieroplegging

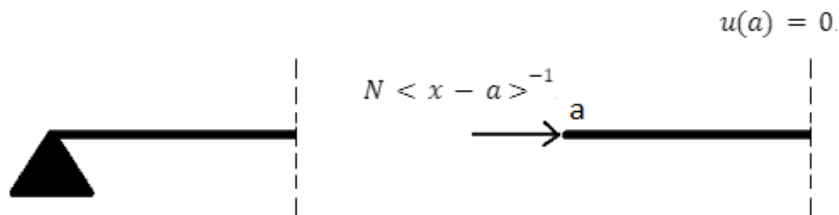
De oplegreactie die in axiale richting werkt ter plaatse van de scharnieroplegging wordt gemodelleerd als een axiale puntlast.

De voorwaarde die verkregen wordt bij de scharnieroplegging is dat de verplaatsing in langsrichting gelijk is aan nul.

Relevant voor de differentiaalvergelijking voor extensie wordt bij een scharnieroplegging ter plaatse van punt a de horizontale kracht met waarde N gemodelleerd in de kracht

vergelijking als $N \langle x - a \rangle^{-1}$. Daarnaast wordt de verkregen voorwaarden $u(a) = 0$.

In figuur 22 is het modelleren van een scharnieroplegging voor extensie weergegeven.



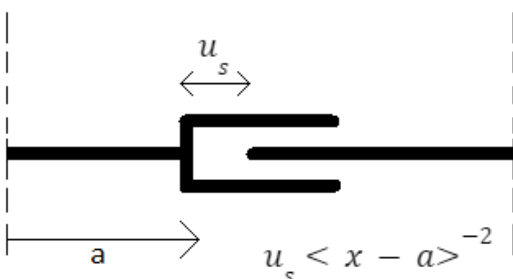
Figuur 22: Het modelleren van krachten voor een scharnieroplegging met betrekking tot extensie.

2.4 Verbindingen in de constructie

Telescoopscharnieren zijn verbindingen in een constructie met als vrijheidsgraad de axiale verplaatsing. Deze verbindingen zijn relevant voor de uitbreiding van constructies met normaalkracht. De vrijheidsgraad zorgt voor een discontinuïteit in de vorm van een sprong in de vergelijking voor de axiale verplaatsing. Deze sprong is te modelleren met de heaviside functie, wat betekent dat de singularity functie een orde gelijk aan nul dient te hebben.

Hieruit volgt dat om een telescoopscharnier direct in de axiale kracht vergelijking te modelleren, de bijbehorende singularity functie een orde gelijk aan -2 heeft.

De waarde waar deze singularity functie mee wordt vermenigvuldigd is niet bekend en wordt geïntroduceerd als een extra onbekende. Een telescoopscharnier biedt echter ook een extra voorwaarde om deze onbekende te bepalen. Doordat de vrijheidsgraad van een telescoopscharnier de verplaatsing langs de as van de constructie is, is het niet mogelijk dat op deze positie een normaalkracht in de constructie wordt opgenomen. De extra voorwaarde om de onbekende te bepalen is dat de normaalkracht ter plaatse van het telescoopscharnier gelijk is aan nul. Aangezien een telescoopscharnier zorgt voor een extra onbekende, maar ook voor een extra voorwaarde, is er te veronderstellen dat met het toevoegen van één of meerdere telescoopscharnieren de constructie altijd oplosbaar blijft. In figuur 23 is een telescoopscharnier weergegeven, en hoe deze gemodelleerd wordt in de axiale kracht vergelijking. De vervormde constructie is gevisualiseerd waarin a de plaats is van het telescoopscharnier en u_s de waarde van de onbekende constante.



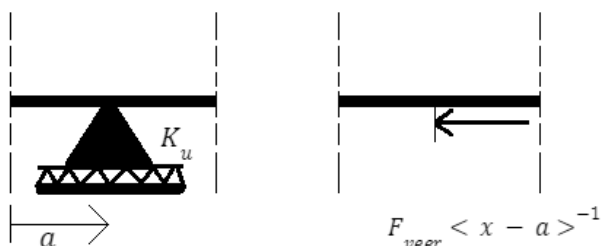
Figuur 23: Het modelleren van een telescoopscharnier.

2.5 Veren

Aangezien voor extensie alleen in axiale richting naar verplaatsingen en krachten wordt gekeken, zijn alleen de beschreven lineaire veren uit sectie 1.6 van dit rapport relevant. Daarnaast is er, net zoals in sectie 1.6, een onderscheid te maken tussen verende opleggingen en verende verbindingen.

-Verende opleggingen

De verende oplegging die beschouwd wordt, is een oplegging die een axiale verplaatsing van de constructie tegengaat. De verende oplegging wordt gemodelleerd als een axiale kracht ter plaatse van de oplegging. In figuur 24 is deze oplegging weergegeven, met hoe deze gemodelleerd wordt in de axiale kracht vergelijking. Hierin is a de plaats van de verende oplegging, K_u de lineaire veerconstante en F_{veer} de kracht van de veer werkend op de constructie.



Figuur 24: Modelleren van een axiale veeroplegging.

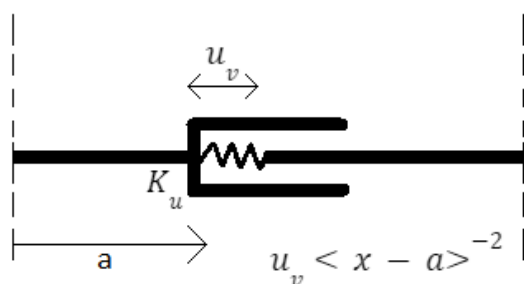
Op basis van vergelijking (13) uit sectie 1.6 is de voorwaarde voor deze oplegging af te leiden. Deze is als volgt:

$$u(a) = -\frac{F_{veer}}{K_u} \quad (24)$$

Hierin is $u(a)$ de axiale verplaatsing ter plaatse van de oplegging, F_{veer} de kracht van de veer op de constructie en K_u de lineaire veerconstante.

-Verende verbindingen

Bij normaalkracht is een verende verbinding die de axiale translatie van een telescoopscharnier tegengaat relevant. Deze verbinding is weergegeven in figuur 25, met daarbij hoe de verbinding gemodelleerd wordt in de axiale kracht vergelijking. Hierin is a de plaats van de verbinding, K_u de lineaire veerconstante en u_v de onbekende translatie ter plaatse van de verbinding.



Figuur 25: Modelleren van een verend telescoopscharnier.

Op basis van vergelijking (13) uit sectie 1.6 is de voorwaarde voor deze verbinding af te leiden. Deze is als volgt:

$$F(a) = K_u \cdot u_v \quad (25)$$

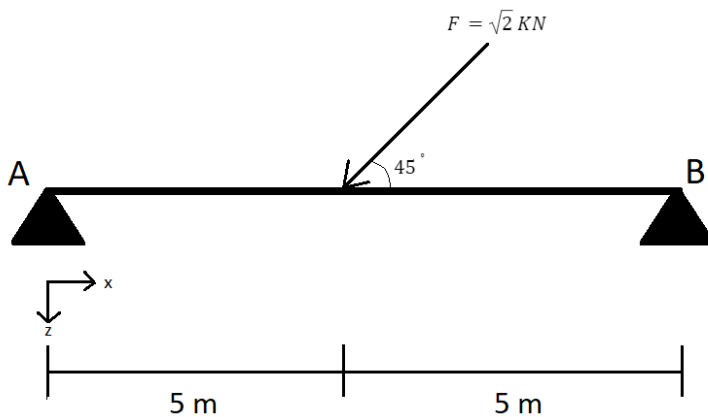
Hierin is $F(a)$ de kracht van de constructie op de veer ter plaatse van de verbinding, u_v de verplaatsing bij de verbinding en K_u de lineaire veerconstante.

2.6 Toepassing

Ter verheldering van de beschreven theorie worden er in deze sectie een aantal voorbeelden behandeld. Ieder voorbeeld heeft betrekking op een bepaald onderwerp.

Voorbeeld 5: Ligger met normaalkracht

In dit voorbeeld wordt een eenvoudige toepassing van Macaulay's methode voor een constructie die normaalkracht bevat uitgewerkt. De constructie waarop deze methode wordt toegepast is weergegeven in figuur 26.



Figuur 26: Ligger met normaalkracht.

Voor deze situatie wordt er alleen gekeken naar het aandeel van de normaalkracht. De werkende kracht wordt ontbonden in een verticale kracht en een horizontale kracht volgens het gegeven assenstelsel. De horizontale kracht in x -richting grijpt hier op hetzelfde punt aan en heeft een omvang van $\cos(45) \cdot \sqrt{2} = 1 \text{ kN}$. De onbekende horizontale oplegreacties ter plaatse van opleggingen A en B worden positief aangenomen.

De vergelijking voor de belasting wordt zo als volgt:

$$q_x(x) = A_h \langle x \rangle^{-1} - 1 \langle x - 5 \rangle^{-1} + B_h \langle x - 10 \rangle^{-1}$$

Op basis van vergelijking (23) is vervolgens het volgende te bepalen:

$$N(x) = -A_h \langle x \rangle^0 + 1 \langle x - 5 \rangle^0 - B_h \langle x - 10 \rangle^0 + C_N$$

$$EA u(x) = -A_h \langle x \rangle^1 + 1 \langle x - 5 \rangle^1 - B_h \langle x - 10 \rangle^1 + C_N x + C_u$$

In bovenstaande vergelijkingen zijn er in totaal vier onbekenden die opgelost dienen te worden. Daarvoor zijn vier vergelijkingen nodig. De eerste twee vergelijkingen worden verkregen uit de randvoorwaarden. Deze zijn als volgt:

$$u(0) = 0 ; u(10) = 0$$

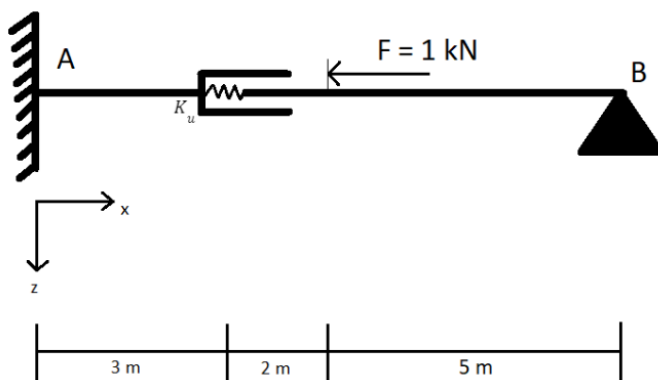
De overige twee vergelijkingen worden verkregen uit de voorwaarden om de ligger te verlengen bij de steunpunten. Deze twee voorwaarden zijn als volgt:

$$N(0^-) = 0 ; N(10^+) = 0$$

Op basis van de vier verkregen vergelijkingen is het mogelijk de vier onbekende te bepalen en de vergelijking voor de verplaatsing in langsrichting te verkrijgen. Uit deze vergelijking is het mogelijk alle andere karakteristieken wat betreft extensie te bepalen. Voor de volledige uitwerking van dit voorbeeld zie bijlage, voorbeeld 5.

Voorbeeld 6: Ligger met een verend telescoopscharnier

In dit voorbeeld wordt de toepassing van de methode voor een verend telescoopscharnier uitgewerkt. De constructie die van toepassing is, is weergegeven in figuur 27.



Figuur 27: Ligger met een verend telescoopscharnier.

De oplegreacties gelegen bij de opleggingen A en B worden positief aangenomen. De axiale kracht vergelijking is dan als volgt te schrijven:

$$q_x(x) = A_h \langle x \rangle^{-1} + u_v \langle x - 3 \rangle^{-2} - 1 \langle x - 5 \rangle^{-1} + B_h \langle x - 10 \rangle^{-1}$$

Vervolgens is met vergelijking (23) het volgende te bepalen:

$$N(x) = -A_h \langle x \rangle^0 - u_v \langle x - 3 \rangle^{-1} + 1 \langle x - 5 \rangle^0 - B_h \langle x - 10 \rangle^0 + C_N$$

$$EA u(x) = -A_h \langle x \rangle^1 - u_v \langle x - 3 \rangle^0 + 1 \langle x - 5 \rangle^1 - B_h \langle x - 10 \rangle^1 + C_N x + C_u$$

In bovenstaande vergelijkingen zijn er in totaal vijf onbekende die opgelost dienen te worden. Hiervoor zijn vijf vergelijkingen nodig. De eerste twee vergelijkingen worden verkregen uit de randvoorwaarden. Deze zijn als volgt:

$$u(0) = 0 ; u(10) = 0$$

De volgende twee vergelijkingen worden verkregen uit de voorwaarden om de ligger te verlengen bij de steunpunten. Deze twee voorwaarden zijn als volgt:

$$N(0^-) = 0 ; N(10^+) = 0$$

De overige vergelijking wordt verkregen uit vergelijking (25), de voorwaarde voor een verend telescoopscharnier. Deze is als volgt:

$$N(3) = K_u \cdot u_v$$

Op basis van de vijf verkregen vergelijkingen is het mogelijk de vijf onbekenden te bepalen en de vergelijking voor de verplaatsing in langsrichting te verkrijgen. Uit deze vergelijking is het mogelijk alle andere karakteristieken wat betreft extensie te bepalen. Voor de volledige uitwerking van dit voorbeeld zie bijlage, voorbeeld 6.

3 Macaulay's methode voor tweedimensionale constructies

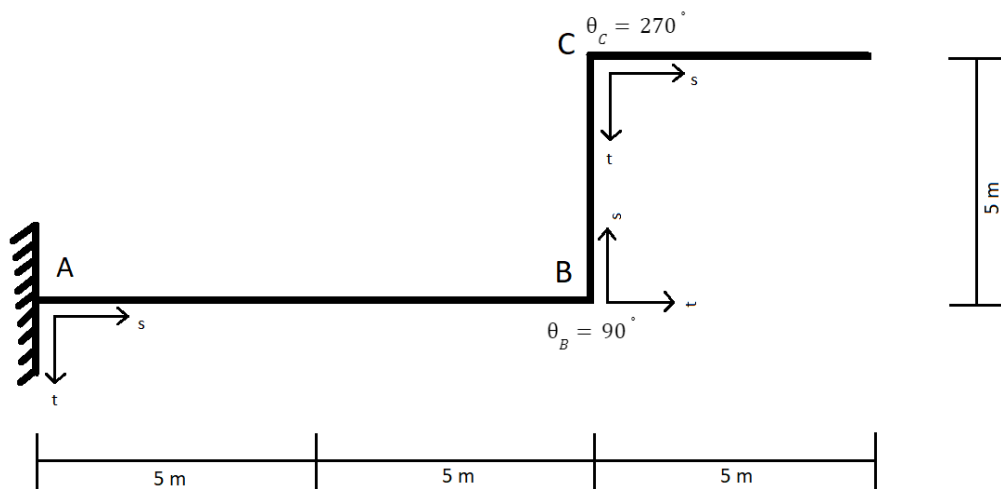
In dit hoofdstuk wordt de methode van Macaulay uitgebreid voor twee-dimensionale constructies. Hierbij gaat het om constructies waarbij niet meer dan twee staven samenkomen in een knooppunt. Eerst wordt er ingegaan op de theorie die de uitbreiding beschrijft. Vervolgens wordt de toepassing van de beschreven methode behandeld op basis van verschillende voorbeelden.

3.1 Assenstelsel

Om de karakteristieken van een tweedimensionale constructie gemakkelijk te beschrijven, wordt er een nieuw assenstelsel ingeluid. Dit assenstelsel bevat een s-as die zich langs de staaf-as van de constructie begeeft, en een t-as die zich over het gehele verloop altijd loodrecht op de s-as begeeft.

Een verandering in de richting van de constructie, en dus in het assenstelsel, wordt aangegeven met een hoekverdraaiing in graden. Deze hoekverdraaiing heeft het symbool θ (theta) en is altijd in het gekozen assenstelsel linksom positief.

Met deze maatregelen is het mogelijk de volledige vormgeving van een tweedimensionale constructie te beschrijven. In figuur 28 is een voorbeeld gegeven met hoe het assenstelsel en de theta voor elke hoek worden beschreven bij een desbetreffende constructie.



Figuur 28: Assenstelsel voor tweedimensionale constructies.

3.2 Differentiaalvergelijkingen

De uitbreiding van eendimensionale constructies naar tweedimensionale constructies heeft als gevolg dat de karakteristieken van de constructie niet meer beschreven kunnen worden met één differentiaalvergelijking. Op het moment dat de constructie zich in 2D begeeft, veranderen de krachten intern in de constructie van richting, om naar de steunpunten toe afgedragen te worden. De constructie wordt op deze manier belast op buiging en normaalkracht.

Hieruit volgt dat voor tweedimensionale constructies het vereist is de differentiaalvergelijking voor extensie, samen met de differentiaalvergelijking voor buiging te betrekken om alle

karacteristieken van de constructie te beschrijven. Met het gekozen assenstelsel uit de vorige sectie, zijn op basis van de vergelijkingen (9) en (23) uit dit rapport de differentiaalvergelijkingen voor buiging en extensie te bepalen in het st-assenstelsel.

Deze zijn als volgt:

-Extensie:

$$EA \frac{d^2 u}{ds^2} + q_s = 0 \quad (26)$$

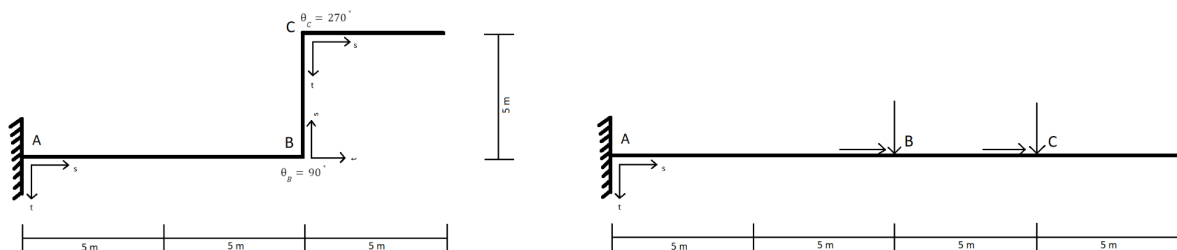
-Buiging:

$$EI \frac{d^4 w}{ds^4} = q_t \quad (27)$$

3.3 Hoek in de constructie

Door het gekozen assenstelsel is het mogelijk de gehele constructie met twee vergelijkingen te beschrijven. Dit zijn de differentiaalvergelijkingen voor extensie en buiging. Met de s-as die de richting van de constructie volgt, reduceert de tweedimensionale constructie als het ware naar een eendimensionaal probleem. Echter, ter plaatse van een hoekpunt in de constructie treedt er een wisselwerking op tussen de normaalkracht en de dwarskracht. Om het krachtenverloop voor het gereduceerde eendimensionale probleem kloppend te houden, worden er ter plaatse van een hoekpunt twee onbekende krachten ingeluid. Dit is een normaalkracht die in de differentiaalvergelijking voor extensie wordt geschreven als een puntlast, en een dwarskracht die in de differentiaalvergelijking voor buiging wordt geschreven als een puntlast.

In figuur 29 is dit principe voor een desbetreffende constructie weergegeven.



Figuur 29: Introduceren onbekende krachten ter plaatse van een hoekpunt.

De wisselwerking tussen de normaalkracht en de dwarskracht bij een hoekpunt is afhankelijk van theta. Met behulp van de rotatiematrix is het mogelijk twee vergelijkingen per hoekpunt te verkrijgen. Deze vergelijkingen zijn als volgt:

$$N(s^+) = \cos(\theta) \cdot N(s^-) - \sin(\theta) \cdot V(s^-) \quad (28)$$

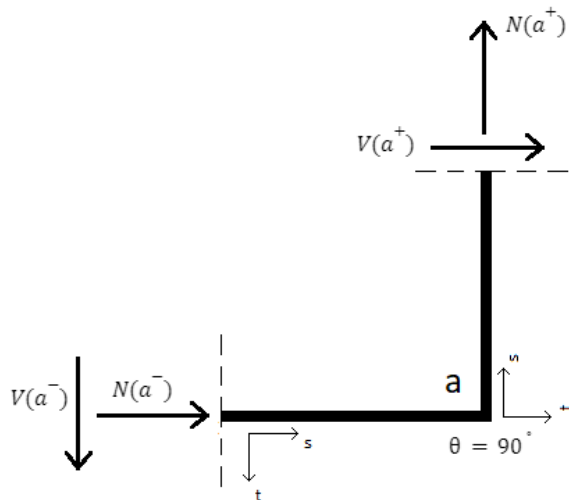
$$V(s^+) = \sin(\theta) \cdot N(s^-) + \cos(\theta) \cdot V(s^-) \quad (29)$$

Hierin is N de normaalkracht, V de dwarskracht, θ de hoek van de constructie in graden en s de coördinaat van het hoekpunt met de bijbehorende exponent die aangeeft of het een positie betreft net voor of na het hoekpunt.

In figuur 30 is deze relatie weergegeven voor een hoekpunt ter plaatse van punt a . Uit vergelijkingen (28) en (29) volgt hiervoor:

$$N(a^+) = \cos(90) \cdot N(a^-) - \sin(90) \cdot V(a^-) \Rightarrow N(a^+) = -V(a^-)$$

$$V(a^+) = \sin(90) \cdot N(a^-) + \cos(90) \cdot V(a^-) \Rightarrow V(a^+) = N(a^-)$$



Figuur 30: Relatie tussen dwarskracht en normaalkracht ter plaatse van een hoekpunt.

Aangezien de constructie zich bovendien in twee dimensies begeeft, treedt er ter plaatse van een hoekpunt ook een wisselwerking op tussen de verplaatsing in axiale richting en de doorbuiging. Om de verplaatsingen van de gehele constructie kloppend te houden, worden er ter plaatse van een hoekpunt twee onbekende constanten ingeluid. Dit betreft een verplaatsing in s-richting en een verplaatsing in t-richting.

De wisselwerking tussen de axiale verplaatsing en de doorbuiging is afhankelijk van theta. Eveneens met behulp van de rotatiematrix is het mogelijk deze wisselwerking te beschrijven op basis van twee vergelijkingen. Deze vergelijkingen zijn als volgt:

$$u(s^+) = \cos(\theta) \cdot u(s^-) - \sin(\theta) \cdot w(s^-) \quad (30)$$

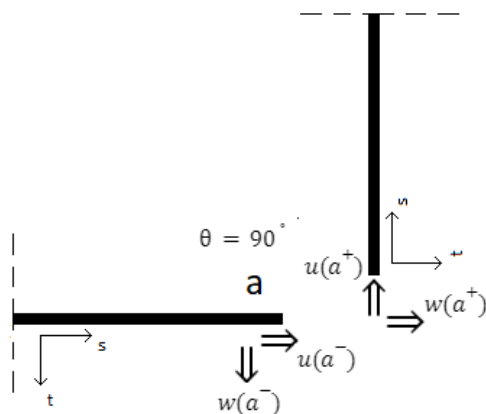
$$w(s^+) = \sin(\theta) \cdot u(s^-) + \cos(\theta) \cdot w(s^-) \quad (31)$$

Hierin is u de verplaatsing in axiale richting, w de doorbuiging, θ de hoek van de constructie in graden en s de coördinaat van het hoekpunt met de bijbehorende exponent die aangeeft of het een positie betreft net voor of na het hoekpunt.

In figuur 31 is de relatie tussen w en u weergegeven voor een hoekpunt ter plaatse van punt a . Uit vergelijkingen (30) en (31) volgt hiervoor:

$$u(a^+) = \cos(90) \cdot u(a^-) - \sin(90) \cdot u(a^-) \Rightarrow u(a^+) = -w(a^-)$$

$$w(a^+) = \sin(90) \cdot w(a^-) + \cos(90) \cdot w(a^-) \Rightarrow w(a^+) = u(a^-)$$



Figuur 31: Relatie tussen doorbuiging en axiale verplaatsing ter plaatse van een hoekpunt.

Aangezien een hoekpunt op deze manier zorgt voor vier onbekenden die opgelost dienen te worden, maar ook zorgt voor vier extra vergelijkingen, is het te veronderstellen dat het probleem oplosbaar is.

In vergelijking met de klassieke integratie methode zorgt die methode bij het toevoegen van een hoekpunt in de constructie voor zes extra onbekenden. Aangezien een hoekpunt in de constructie zorgt dat er twee staven samenkomen, wordt er voor de extra staaf een nieuwe differentiaalvergelijking voor buiging en een nieuwe differentiaalvergelijking voor extensie geformuleerd. De vergelijking voor buiging zorgt voor vier integratieconstanten, waar de vergelijking voor extensie voor twee integratieconstanten zorgt.

Vanuit een praktisch oogpunt is de hierboven beschreven methode voor de uitbreiding van Macaulay voor 2D-constructies gemakkelijker op te lossen, omdat er per hoekpunt in de constructie twee onbekenden minder opgelost behoeven te worden.

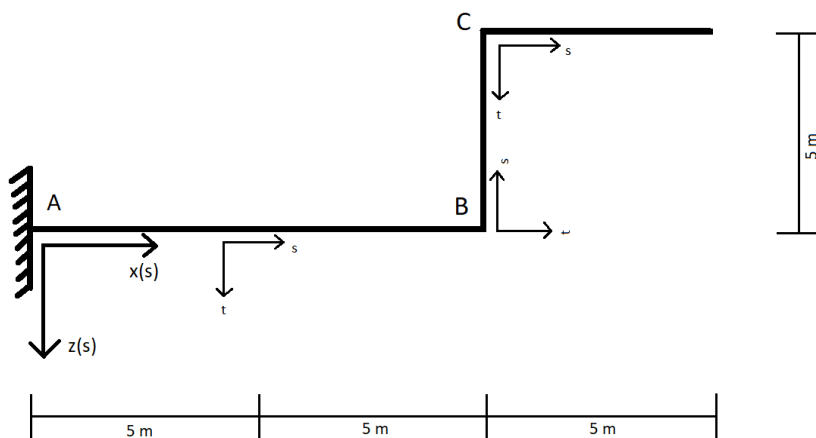
3.4 Transformatie naar originele constructie

De tot dusver beschreven methode transformeert een tweedimensionale constructie als het ware naar een eendimensionaal probleem. Dit zorgt ervoor dat al de karakteristieken van de constructie verkregen worden langs de staaf-as. Vooral voor de uiteindelijke vervorming van de constructie kan dit lastig te interpreteren zijn, en is een weergave van de vervormde constructie ten opzichte van de originele constructie aangenaam.

Om dit te realiseren is het eerst vereist de originele constructie te kunnen beschrijven in 2d. Hiervoor wordt een nieuw assenstelsel ingeluid. Dit assenstelsel betreft een xz-assenstelsel, waarbij de z en de x, beide afhankelijk zijn van s.

Doordat geschematiseerde constructies in vele gevallen discreet verlopen, is de vormgeving van de constructie erg geschikt om te beschrijven met singularity functies. Vervolgens door de verplaatsingen op te tellen bij de vormgeving van de constructie, is het mogelijk de vervormde constructie te verkrijgen.

Aan de hand van de weergegeven constructie in figuur 32 wordt deze methode beschreven.



Figuur 32: Beschrijving vormgeving van constructie.

Zoals te zien in figuur 32 is het xz-assenstelsel geplaatst bij de oplegging bij punt A. De constructie wordt beschreven in dit assenstelsel, met x en z coördinaten, afhankelijk van s. De x-coördinaten van de constructie weergegeven in figuur 32 worden als volgt:

$$x(s) = (\langle s \rangle^0 - \langle s - 10 \rangle^0) \cdot s + (\langle s - 10 \rangle^0 - \langle s - 15 \rangle^0) \cdot 10 + (\langle s - 15 \rangle^0 - \langle s - 20 \rangle^0) \cdot (s - 5)$$

De z coördinaten worden vervolgens:

$$z(s) = (\langle s \rangle^0 - \langle s - 10 \rangle^0) \cdot 0 + (\langle s - 10 \rangle^0 - \langle s - 15 \rangle^0) \cdot (-s + 10) \\ + (\langle s - 15 \rangle^0 - \langle s - 20 \rangle^0) \cdot (-5)$$

In de hierboven genoemde vergelijkingen worden de coördinaten per staaf beschreven.

Een staaf wordt aangehaald door gebruik te maken van heaviside singularity functies en

deze een bereik te geven waarover de staaf verloopt in s -coördinaten. In het geval van staaf

AB is dit $(\langle s \rangle^0 - \langle s - 10 \rangle^0)$. Vervolgens door deze heaviside functies te

vermenigvuldigen met de waarden die een staaf aanneemt in het xz -assenstelsel, op basis

van de s -coördinaten, is de constructie te omschrijven. Bijvoorbeeld in het geval van de x

-coördinaten van staaf AB wordt $(\langle s \rangle^0 - \langle s - 10 \rangle^0)$ vermenigvuldigd met s .

De verplaatsingen van de constructie in het xz -assenstelsel is op een soortgelijke wijze te

omschrijven. De staven van de constructie worden in dit geval weer met de heaviside

functies aangehaald. Door deze functies te vermenigvuldigen met de betreffende

verplaatsing die de staaf heeft in het xz -assenstelsel, op basis van de s -coördinaten, zijn de

verplaatsingen te omschrijven. De x -coördinaten van de verplaatsing van de constructie

weergegeven in figuur 32 worden op deze manier als volgt:

$$x_{ver}(s) = (\langle s \rangle^0 - \langle s - 10 \rangle^0) \cdot u(s) + (\langle s - 10 \rangle^0 - \langle s - 15 \rangle^0) \cdot w(s) \\ + (\langle s - 15 \rangle^0 - \langle s - 20 \rangle^0) \cdot u(s)$$

De z -coördinaten van de verplaatsing worden op deze manier:

$$z_{ver}(s) = (\langle s \rangle^0 - \langle s - 10 \rangle^0) \cdot w(s) + (\langle s - 10 \rangle^0 - \langle s - 15 \rangle^0) \cdot (-u(s)) \\ + (\langle s - 15 \rangle^0 - \langle s - 20 \rangle^0) \cdot (w(s))$$

Vervolgens door de verplaatsingen van de constructie op te tellen bij de vormgeving van de

constructie, is het mogelijk de totale vervormde constructie te beschrijven. In formules is dit

als volgt:

$$x_{tot}(s) = x(s) + x_{ver}(s)$$

$$z_{tot}(s) = z(s) + z_{ver}(s)$$

Hierin zijn $x_{tot}(s)$ de x -coördinaten van de vervormde constructie, $z_{tot}(s)$ de z -coördinaten

van de vervormde constructie, $x(s)$ de x -coördinaten van de vormgeving van de constructie,

$z(s)$ de z -coördinaten van de vormgeving van de constructie, $x_{ver}(s)$ de x -coördinaten van

de verplaatsingen van de constructie en $z_{ver}(s)$ de z -coördinaten van de verplaatsingen van

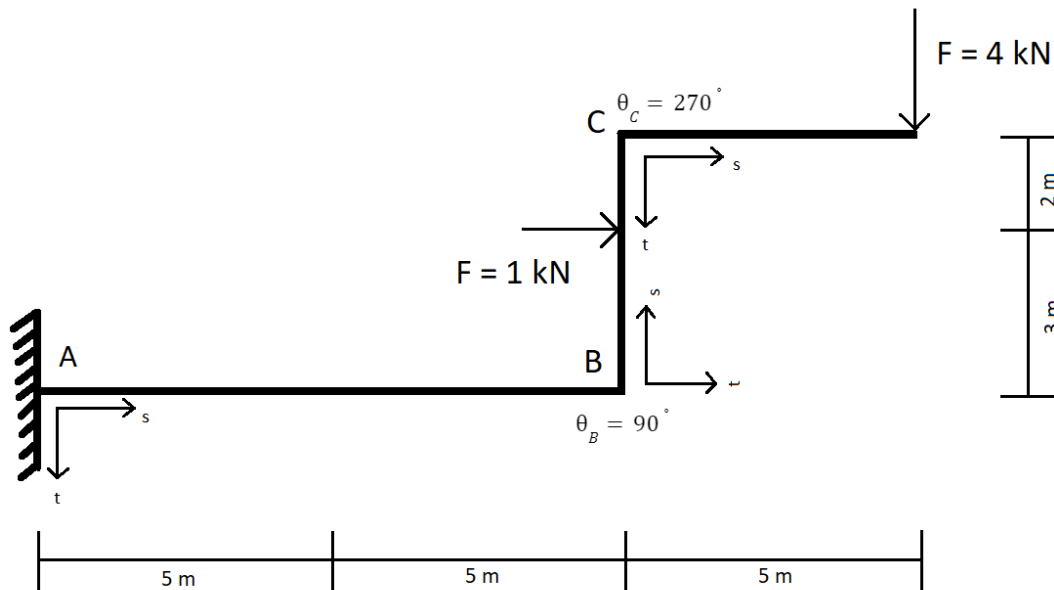
de constructie.

3.5 Toepassing

Ter verheldering van de beschreven theorie worden er in deze sectie een aantal voorbeelden behandeld.

Voorbeeld 7: Tweedimensionale uitkraging

In dit voorbeeld wordt een tweedimensionale uitkraging behandeld met de beschreven methode uit dit hoofdstuk. De constructie waarop deze methode wordt toegepast is weergegeven in figuur 33.



Figuur 33: Ingekleemde tweedimensionale uitkraging.

De onbekende oplegreacties worden samen met de onbekende krachten ter plaatse van de hoekpunten positief aangenomen. De vergelijking voor de krachten in t-richting wordt zo als volgt:

$$q_t(s) = M_A \langle s \rangle^{-2} + A_v \langle s \rangle^{-1} + B_v \langle s - 10 \rangle^{-1} + w_B \langle s - 10 \rangle^{-4} + 1 \langle s - 13 \rangle^{-1} + C_v \langle s - 15 \rangle^{-1} + w_C \langle s - 15 \rangle^{-4} + 4 \langle s - 20 \rangle^{-1}$$

Met vergelijking (27) is het volgende uit te werken:

$$V(s) = -M_A \langle s \rangle^{-1} - A_v \langle s \rangle^0 - B_v \langle s - 10 \rangle^0 - w_B \langle s - 10 \rangle^{-3} - 1 \langle s - 13 \rangle^0 - C_v \langle s - 15 \rangle^0 - w_C \langle s - 15 \rangle^{-3} - 4 \langle s - 20 \rangle^0 + C_v$$

$$M(s) = -M_A \langle s \rangle^0 - A_v \langle s \rangle^1 - B_v \langle s - 10 \rangle^1 - w_B \langle s - 10 \rangle^{-2} - 1 \langle s - 13 \rangle^1 - C_v \langle s - 15 \rangle^1 - w_C \langle s - 15 \rangle^{-2} - 4 \langle s - 20 \rangle^1 + C_v s + C_M$$

$$EI \varphi(s) = -M_A \langle s \rangle^1 - \frac{1}{2} A_v \langle s \rangle^2 - \frac{1}{2} B_v \langle s - 10 \rangle^2 - w_B \langle s - 10 \rangle^{-1} - \frac{1}{2} \langle s - 13 \rangle^2 - \frac{1}{2} C_v \langle s - 15 \rangle^2 - w_C \langle s - 15 \rangle^{-1} - 2 \langle s - 20 \rangle^2 + \frac{1}{2} C_v s^2 + C_M s + C_\varphi$$

$$EI w(s) = \frac{1}{2} M_A \langle s \rangle^2 + \frac{1}{6} A_v \langle s \rangle^3 + \frac{1}{6} B_v \langle s - 10 \rangle^3 + w_B \langle s - 10 \rangle^0 + \frac{1}{6} \langle s - 13 \rangle^3 + \frac{1}{6} C_v \langle s - 15 \rangle^3 + w_C \langle s - 15 \rangle^0 + \frac{2}{3} \langle s - 20 \rangle^3 - \frac{1}{6} C_V s^3 - \frac{1}{2} C_M s^2 - C_\varphi s + C_w$$

De vergelijking voor de krachten in s-richting is als volgt:

$$q_s(s) = A_h \langle s \rangle^{-1} + B_h \langle s - 10 \rangle^{-1} + u_B \langle s - 10 \rangle^{-2} + C_h \langle s - 15 \rangle^{-1} + u_C \langle s - 15 \rangle^{-2}$$

Met vergelijking (26) is het volgende uit te werken:

$$N(s) = -A_h \langle s \rangle^0 - B_h \langle s - 10 \rangle^0 - u_B \langle s - 10 \rangle^{-1} - C_h \langle s - 15 \rangle^0 - u_C \langle s - 15 \rangle^{-1} + C_N$$

$$EA u(s) = -A_h \langle s \rangle^1 - B_h \langle s - 10 \rangle^1 - u_B \langle s - 10 \rangle^0 - C_h \langle s - 15 \rangle^1 - u_C \langle s - 15 \rangle^0 + C_N s + C_u$$

In bovenstaande vergelijkingen zijn er in totaal 17 onbekende die opgelost dienen te worden. Dit betekent dat er ook 17 vergelijkingen vereist zijn. De eerste vergelijkingen zijn afkomstig uit de randvoorwaarden. Deze zijn als volgt:

$$w(0) = 0 ; \varphi(0) = 0 ; u(0) = 0 ; M(20) = 0$$

De volgende vergelijkingen zijn afkomstig uit het principe om de constructie te verlengen aan beide uiteinden. Deze zijn als volgt:

$$M(0^-) = 0 ; V(0^-) = 0 ; N(0^-) = 0 ; V(20^+) = 0 ; N(20^+) = 0$$

De volgende vier vergelijkingen zijn afkomstig uit de wisselwerking tussen de normaalkracht en dwarskracht ter plaatse van de hoekpunten. De vergelijkingen zijn af te leiden uit vergelijkingen (28) en (29), en zijn als volgt:

$$N(10^+) = \cos(90) \cdot N(10^-) - \sin(90) \cdot V(10^-)$$

$$V(10^+) = \sin(90) \cdot N(10^-) + \cos(90) \cdot V(10^-)$$

$$N(15^+) = \cos(270) \cdot N(15^-) - \sin(270) \cdot V(15^-)$$

$$V(15^+) = \sin(270) \cdot N(15^-) + \cos(270) \cdot V(15^-)$$

De overige vier vergelijkingen zijn afkomstig uit de wisselwerking tussen de axiale verplaatsing en de doorbuiging ter plaatse van de hoekpunten. De vergelijkingen zijn af te leiden uit vergelijkingen (30) en (31), en zijn als volgt:

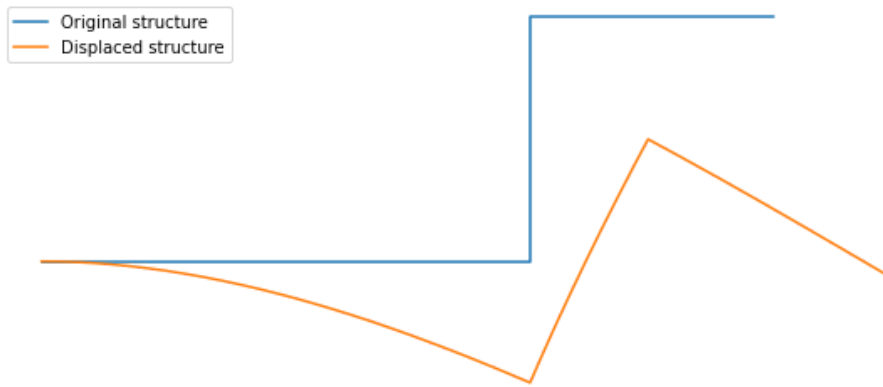
$$u(10^+) = \cos(90) \cdot u(10^-) - \sin(90) \cdot w(10^-)$$

$$w(10^+) = \sin(90) \cdot u(10^-) + \cos(90) \cdot w(10^-)$$

$$u(15^+) = \cos(270) \cdot u(15^-) - \sin(270) \cdot w(15^-)$$

$$w(15^+) = \sin(270) \cdot u(15^-) + \cos(270) \cdot w(15^-)$$

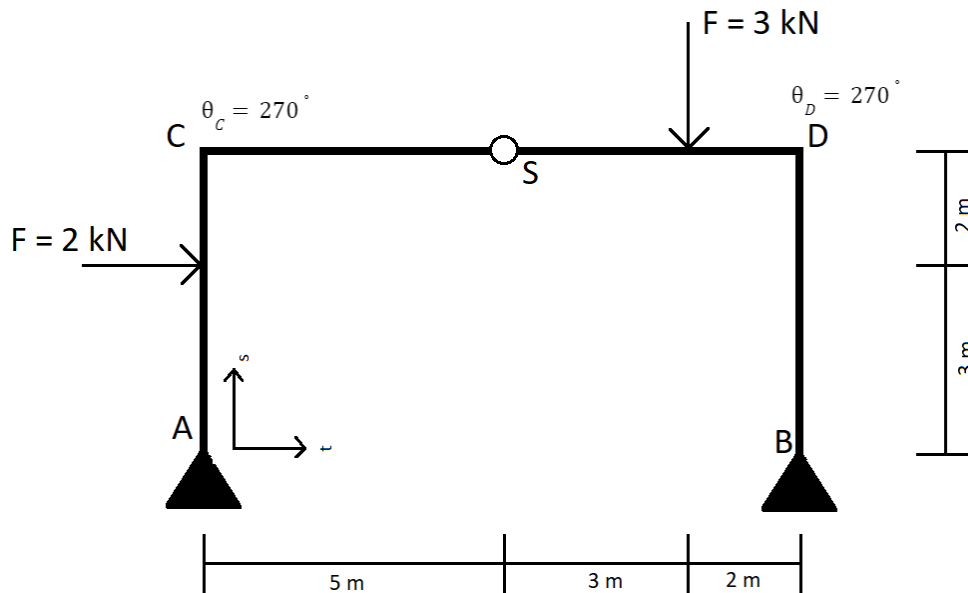
Op basis van de 17 verkregen vergelijkingen is het mogelijk de 17 onbekenden te bepalen en hieruit al de karakteristieken van de constructie. De vervormde constructie ten opzichte van de originele constructie is weergegeven in figuur 34. Voor de volledige uitwerking van dit voorbeeld zie bijlage, voorbeeld 7.



Figuur 34: Vervormde constructie in vergelijking met de originele constructie.

Voorbeeld 8: Driescharnierspant

In dit voorbeeld wordt een driescharnierspant behandeld met de beschreven methode uit dit hoofdstuk. De constructie waarop deze methode wordt toegepast is weergegeven in figuur 35.



Figuur 35: Driescharnierspant.

De onbekende oplegreacties worden samen met de onbekende krachten ter plaatse van de hoekpunten positief aangenomen. De vergelijking voor de krachten in t-richting wordt zo als volgt:

$$q_t(s) = A_v \langle s \rangle^{-1} + 2 \langle s - 3 \rangle^{-1} + C_v \langle s - 5 \rangle^{-1} + w_c \langle s - 5 \rangle^{-4} + \varphi_s \langle s - 10 \rangle^{-3} + 3 \langle s - 13 \rangle^{-1} + D_v \langle s - 15 \rangle^{-1} + w_d \langle s - 15 \rangle^{-4} + B_v \langle s - 20 \rangle^{-1}$$

Met vergelijking (27) is het volgende uit te werken:

$$V(s) = -A_v \langle s \rangle^0 - 2 \langle s - 3 \rangle^0 - C_v \langle s - 5 \rangle^0 - w_c \langle s - 5 \rangle^{-3} - \varphi_s \langle s - 10 \rangle^{-2} - 3 \langle s - 13 \rangle^0 - D_v \langle s - 15 \rangle^0 - w_d \langle s - 15 \rangle^{-3} - B_v \langle s - 20 \rangle^0 + C_v$$

$$M(s) = -A_v \langle s \rangle^1 - 2 \langle s - 3 \rangle^1 - C_v \langle s - 5 \rangle^1 - w_c \langle s - 5 \rangle^{-2} - \varphi_s \langle s - 10 \rangle^{-1} \\ - 3 \langle s - 13 \rangle^1 - D_v \langle s - 15 \rangle^1 - w_D \langle s - 15 \rangle^{-2} - B_v \langle s - 20 \rangle^1 + C_V s + C_M$$

$$EI \varphi(s) = -\frac{1}{2} A_v \langle s \rangle^2 - 1 \langle s - 3 \rangle^2 - \frac{1}{2} C_v \langle s - 5 \rangle^2 - w_c \langle s - 5 \rangle^{-1} - \varphi_s \langle s - 10 \rangle^0 \\ - \frac{3}{2} \langle s - 13 \rangle^2 - \frac{1}{2} D_v \langle s - 15 \rangle^2 - w_D \langle s - 15 \rangle^{-1} - \frac{1}{2} B_v \langle s - 20 \rangle^2 + \frac{1}{2} C_V s^2 + C_M s + C_\varphi$$

$$EI w(s) = \frac{1}{6} A_v \langle s \rangle^3 + \frac{1}{3} \langle s - 3 \rangle^3 + \frac{1}{6} C_v \langle s - 5 \rangle^3 + w_c \langle s - 5 \rangle^0 + \varphi_s \langle s - 10 \rangle^1 \\ + \frac{3}{6} \langle s - 13 \rangle^3 + \frac{1}{6} D_v \langle s - 15 \rangle^3 + w_D \langle s - 15 \rangle^0 + \frac{1}{6} B_v \langle s - 20 \rangle^3 - \frac{1}{6} C_V s^3 - \frac{1}{2} C_M s^2 - \\ C_\varphi s + C_w$$

De vergelijking voor de krachten in s-richting is als volgt:

$$q_s(s) = A_h \langle s \rangle^{-1} + C_h \langle s - 5 \rangle^{-1} + u_c \langle s - 5 \rangle^{-2} + D_h \langle s - 15 \rangle^{-1} + u_D \langle s - 15 \rangle^{-2} \\ + B_h \langle s - 20 \rangle^{-1}$$

Met vergelijking (26) is het volgende uit te werken:

$$N(s) = -A_h \langle s \rangle^0 - C_h \langle s - 5 \rangle^0 - u_c \langle s - 5 \rangle^{-1} - D_h \langle s - 15 \rangle^0 - u_D \langle s - 15 \rangle^{-1} \\ - B_h \langle s - 20 \rangle^0 + C_N$$

$$EA u(s) = -A_h \langle s \rangle^1 - C_h \langle s - 5 \rangle^1 - u_c \langle s - 5 \rangle^0 - D_h \langle s - 15 \rangle^1 - u_D \langle s - 15 \rangle^0 \\ - B_h \langle s - 20 \rangle^1 + C_N s + C_u$$

In bovenstaande vergelijkingen zijn er in totaal 19 onbekenden die opgelost dienen te worden.

Dit betekent dat er 19 vergelijkingen vereist zijn. De eerste vergelijkingen zijn afkomstig uit de randvoorwaarden. Deze zijn als volgt:

$$M(0) = 0 ; w(0) = 0 ; u(0) = 0 ; M(20) = 0 ; w(20) = 0 ; u(20) = 0$$

De volgende vergelijkingen zijn afkomstig uit het principe om de constructie te verlengen aan beide uiteinden. Deze zijn als volgt:

$$V(0^-) = 0 ; N(0^-) = 0 ; V(20^+) = 0 ; N(20^+) = 0$$

De volgende vier vergelijkingen zijn afkomstig uit de wisselwerking tussen de normaalkracht en dwarskracht ter plaatse van de hoekpunten. De vergelijkingen zijn af te leiden uit vergelijkingen (28) en (29), en zijn als volgt:

$$N(5^+) = \cos(270) \cdot N(5^-) - \sin(270) \cdot V(5^-)$$

$$V(5^+) = \sin(270) \cdot N(5^-) + \cos(270) \cdot V(5^-)$$

$$N(15^+) = \cos(270) \cdot N(15^-) - \sin(270) \cdot V(15^-)$$

$$V(15^+) = \sin(270) \cdot N(15^-) + \cos(270) \cdot V(15^-)$$

De volgende vier vergelijkingen zijn afkomstig uit de wisselwerking tussen de axiale verplaatsing en de doorbuiging ter plaatse van de hoekpunten. De vergelijkingen zijn af te leiden uit vergelijkingen (30) en (31), en zijn als volgt:

$$u(5^+) = \cos(270) \cdot u(5^-) - \sin(270) \cdot w(5^-)$$

$$w(5^+) = \sin(270) \cdot u(5^-) + \cos(270) \cdot w(5^-)$$

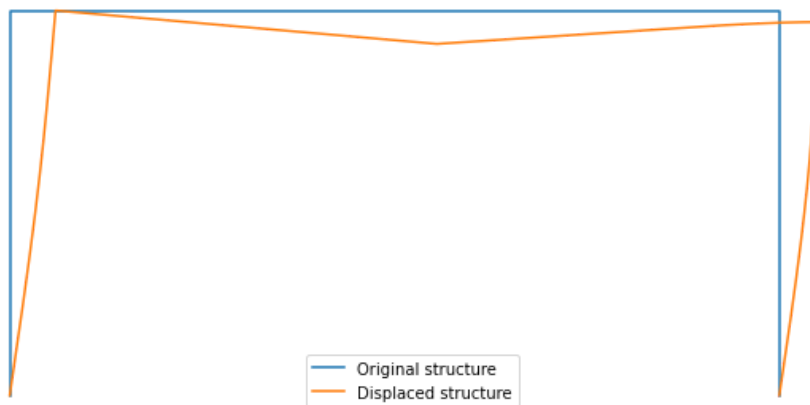
$$u(15^+) = \cos(270) \cdot u(15^-) - \sin(270) \cdot w(15^-)$$

$$w(15^+) = \sin(270) \cdot u(15^-) + \cos(270) \cdot w(15^-)$$

De laatste vergelijking is te verkrijgen uit de voorwaarde van een scharnier. Deze vergelijking is als volgt:

$$M(10) = 0$$

Op basis van de 19 verkregen vergelijkingen is het mogelijk de 19 onbekenden te bepalen en hieruit al de karakteristieken van de constructie. De vervormde constructie ten opzichte van de originele constructie is weergegeven in figuur 36. Voor de volledige uitwerking van dit voorbeeld zie bijlage, voorbeeld 8.



Figuur 36: Vervormde constructie in vergelijking met de originele constructie.

Discussies

In dit hoofdstuk wordt eerst ingegaan op een alternatieve methode voor de uitbreiding van Macaulay voor tweedimensionale constructies. Deze methode heeft een meer continue aanpak, alleen is (nog) niet volledig. Het betreft hier eveneens tweedimensionale constructies waarbij niet meer dan twee staven samenkomen in een knooppunt. Vervolgens wordt er in dit hoofdstuk ingegaan op de beperkingen van het uitgevoerde onderzoek en worden aanbevelingen gegeven voor eventueel vervolgonderzoek.

Continue methode voor tweedimensionale constructies

De methode voor de uitbreiding van Macaulay voor tweedimensionale constructies, beschreven in hoofdstuk 3 uit dit rapport, heeft als nadeel dat een tweedimensionale constructie discreet wordt geanalyseerd. Ter plaatse van elk hoekpunt worden vier onbekenden constanten geïntroduceerd, die opgelost dienen te worden. Een groot voordeel van de methode van Macaulay is echter dat de op te lossen onbekende constanten gering blijven.

Een alternatieve methode is om de veranderingen in de richting van een tweedimensionale constructie te beschrijven met een theta die afhankelijk is van s . Door gebruik te maken van singularity functies is het mogelijk deze theta te definiëren. Naast het al geïntroduceerde st-assenstelsel, is het mogelijk een globaal xz-assenstelsel te introduceren, waar de krachten werkend op de constructie in worden geschreven. Door vervolgens de externe krachten werkend op de constructie te transleren met gebruik van de vergelijking voor theta, is het mogelijk twee kracht vergelijkingen te verkrijgen, waarbij er één in de s-richting werkt (extensie) en één in de t-richting (buiging). Deze twee vergelijkingen zijn als volgt te schrijven:

Extensie:

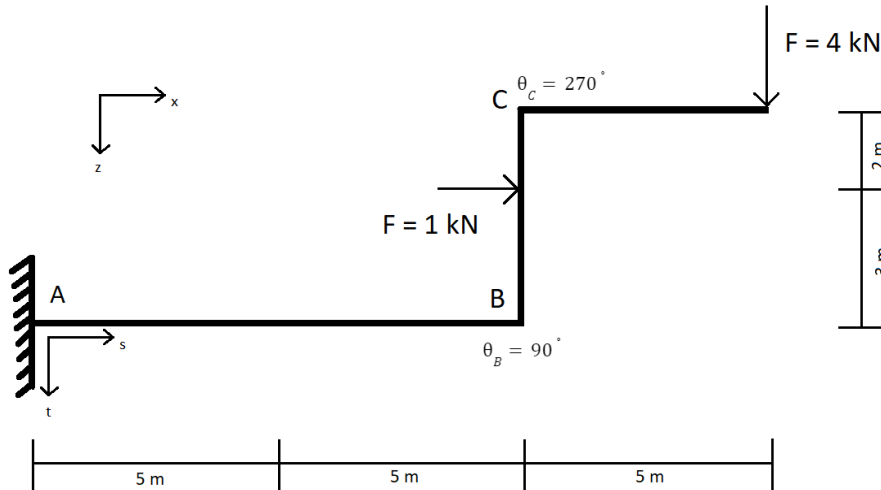
$$q_s(s) = \cos(\theta(s)) \cdot \Sigma q_x(s) - \sin(\theta(s)) \cdot \Sigma q_z(s) \quad (32)$$

Buiging:

$$q_t(s) = \sin(\theta(s)) \cdot \Sigma q_x(s) + \cos(\theta(s)) \cdot \Sigma q_z(s) \quad (33)$$

Hierin is $q_s(s)$ de kracht vergelijking voor extensie, $q_t(s)$ de kracht vergelijking voor buiging, $\Sigma q_x(s)$ de som van de externe krachten werkend op de constructie in globale x-richting ter plaatse van het s-coördinaat, $\Sigma q_z(s)$ de som van de externe krachten werkend op de constructie in globale z-richting ter plaatse van het s-coördinaat en $\theta(s)$ de richting van de constructie in graden met linksom positief.

De hierboven beschreven methode wordt in een volgend voorbeeld ter verheldering uitgewerkt. De constructie die van toepassing is, is weergegeven in figuur 37.



Figuur 37: Tweedimensionale constructie met puntlasten.

Voor de constructie weergegeven in figuur 37, is de vergelijking voor theta te bepalen. Deze is als volgt:

$$\theta(s) = 90 \langle s - 10 \rangle^0 + 270 \langle s - 15 \rangle^0$$

Met gebruik van de heaviside functie en deze te vermenigvuldigen met de graden van een hoek, is de richting van de constructie te beschrijven.

Met de aanname dat de oplegreacties ter plaatse van punt A positief werken, worden de kracht vergelijkingen voor de constructie uit figuur 37 als volgend:

Extensie

$$q_s(s) = \cos(\theta(s)) \cdot (A_h \langle s \rangle^{-1} + 1 \langle s - 5 \rangle^{-1}) - \sin(\theta(s)) \cdot (A_v \langle s \rangle^{-1} + 4 \langle s - 7 \rangle^{-1})$$

Buiging:

$$q_t(s) = \sin(\theta(s)) \cdot (A_h \langle s \rangle^{-1} + 1 \langle s - 5 \rangle^{-1}) + \cos(\theta(s)) \cdot (A_v \langle s \rangle^{-1} + 4 \langle s - 7 \rangle^{-1})$$

Door vervolgens vergelijking (26) toe te passen is het volgende te bepalen:

$$N(s) = \cos(\theta(s)) \cdot (A_h \langle s \rangle^0 + 1 \langle s - 5 \rangle^0) - \sin(\theta(s)) \cdot (A_v \langle s \rangle^0 + 4 \langle s - 7 \rangle^0) + C_N$$

En op basis van vergelijking (27) is het volgende te bepalen:

$$V(s) = \sin(\theta(s)) \cdot (A_h \langle s \rangle^0 + 1 \langle s - 5 \rangle^0) + \cos(\theta(s)) \cdot (A_v \langle s \rangle^0 + 4 \langle s - 7 \rangle^0) + C_V$$

In bovenstaande vergelijkingen dienen vier onbekenden opgelost te worden. Hiervoor zijn vier vergelijkingen vereist, die worden verkregen uit de volgende voorwaarden:

$$N(0^-) = 0 ; V(0^-) = 0 ; N(20^+) = 0 ; V(20^+) = 0$$

Deze beschreven alternatieve methode is echter (nog) niet volledig. Met verdere integratie naar de vergelijking voor momenten, voldoet de methode niet.

Daarentegen biedt de methode wel vooruitzicht, omdat ter plaatse van een hoekpunt geen extra onbekenden geïntroduceerd worden. Daarnaast wordt met deze alternatieve methode de constructie meer continu beschreven, waardoor uiteindelijk gebogen hoeken of zelfs helemaal gekromde constructies beschreven kunnen worden.

Aanbevelingen vervolgonderzoek

Aan het begin van het onderzoek is verondersteld dat de buigstijfheid, EI , en de axiale stijfheid, EA , constant zijn. De mogelijkheid dat deze constructie eigenschappen afhankelijk zijn van de plaats, is daarmee buiten beschouwing gelaten. Vervolgonderzoek is mogelijk voor de toepasbaarheid van de methode, op het moment dat deze afhankelijkheid zich voordoet.

Daarnaast is bij de uitbreiding van Macaulay naar tweedimensionale constructies alleen gekeken naar constructies waarbij niet meer dan twee staven samenkomen in een knooppunt. Onderzoek naar knooppunten die drie of meer staven bevatten is mogelijk voor een verdere uitbreiding van de methode van Macaulay omtrent tweedimensionale constructies .

Ook is het in een verder stadium mogelijk de toepasbaarheid van de methode van Macaulay te onderzoeken voor een uitbreiding omtrent driedimensionale constructies.

Een ander onderwerp waarvoor de methode van Macaulay van toepassing zal kunnen zijn, zijn invloedslijnen. Eveneens is hier op deze manier vervolgonderzoek naar mogelijk.

Conclusies

Door middel van een exploratief en toegepast onderzoek, is in dit onderzoek gezocht naar een antwoord op de vraag:

Hoe kan de methode van macaulay voor tweedimensionale constructies worden uitgebreid, en vervolgens worden toegepast?

Er is gebleken dat naar aanleiding van de differentiaalvergelijking voor extensie het mogelijk is de methode van Macaulay toe te passen op constructies die normaalkracht bevatten. Het principe van de methode is hetzelfde als voor de situatie bij buiging. Er is voor deze methode alleen een andere differentiaalvergelijking vereist. Op basis hiervan is te concluderen dat de gevonden methode correct is.

Bovendien biedt de methode van Macaulay de mogelijkheid discontinuïteiten in één vergelijking te schrijven. Vergeleken met de klassieke integratie methode dienen er voor de methode van Macaulay, op het moment dat zich discontinuïteiten voordoen, minder onbekende constanten opgelost te worden. Op basis hiervan is te veronderstellen dat de gevonden methode voor het toepassen van Macaulay op normaalkracht effectief is.

Vervolgens bleken de differentiaalvergelijkingen voor buiging en extensie vereist om de karakteristieken van een tweedimensionale constructie te omschrijven. Met deze differentiaalvergelijkingen en een gekozen assenstelsel, is het mogelijk de methode van Macaulay toe te passen op tweedimensionale constructies. Per hoekpunt dienen er vier onbekenden geïntroduceerd te worden. Deze onbekenden hebben betrekking op de verplaatsing in axiale richting, de verplaatsing in dwarsrichting (doorbuiging), de normaalkracht en de dwarskracht. Op basis van vier verkregen relaties per hoekpunt is het mogelijk de onbekenden te achterhalen en zo de karakteristieken van de tweedimensionale constructie te bepalen. Het betreft hier de vergelijkingen (28), (29), (30) en (31) uit dit rapport.

Het is hieruit te concluderen dat de gevonden methode voor de uitbreiding van Macaulay voor tweedimensionale constructies correct en toepasbaar is. Met betrekking tot effectiviteit is de vergelijking gemaakt met de methode van het klassiek integreren. Op basis van de veronderstelling dat de gevonden methode vier extra onbekenden introduceert per hoekpunt en de klassieke integratiemethode zes, is te concluderen dat deze methode een duidelijk te overwegen alternatief is op de klassieke integratie methode.

Referenties

-Caprani, C. (2010). *Deflection of Flexural Members - Macaulay's Method 3rd Year Structural Engineering*.

-Falsone, G. (2002). The Use of Generalised Functions in the Discontinuous Beam Bending Differential Equations. *International Journal of Engineering Education*, 18.

-Macaulay, W. H. (1919). Note on the deflection of beams. In *Messenger of Mathematics* (Vol. 48).

-jvanderWulp. (2023). *De-methode-van-Macaulay-voor-tweedimensionale-constructies/BEP Voorbeelden.ipynb at main* ·

jvanderWulp/De-methode-van-Macaulay-voor-tweedimensionale-constructies. GitHub.

<https://github.com/jvanderWulp/De-methode-van-Macaulay-voor-tweedimensionale-constructies/blob/main/BEP%20Voorbeelden.ipynb>

Bijlage

In deze bijlage zijn de uitwerkingen te vinden van de behandelde voorbeelden.

In al onderstaande uitwerkingen is voor de buigstijfheid, EI , en de axiale stijfheid, EA , de waarde 1 aangenomen. Daarnaast begeeft de positieve z-as zich voor alle figuren naar beneden. Dit in overeenkomst met de gekozen assenstelsels uit de voorbeelden.

Voor de python code voor het plotten van de figuren, zie GitHub jvanderwulp (2023).

Voorbeeld 1: Eenvoudige ligger met puntlast

$$q_z(x) = -A_v \langle x \rangle^{-1} + 1 \langle x - 5 \rangle^{-1} - B_v \langle x - 10 \rangle^{-1}$$

$$V(x) = A_v \langle x \rangle^0 - 1 \langle x - 5 \rangle^0 + B_v \langle x - 10 \rangle^0 + C_V$$

$$V(0^-) = 0 \Rightarrow C_V = 0$$

$$M(x) = A_v \langle x \rangle^1 - 1 \langle x - 5 \rangle^1 + B_v \langle x - 10 \rangle^1 + C_M$$

$$M(0) = 0 \Rightarrow C_M = 0$$

$$EI \varphi(x) = \frac{1}{2} A_v \langle x \rangle^2 - \frac{1}{2} \langle x - 5 \rangle^2 + \frac{1}{2} B_v \langle x - 10 \rangle^2 + C_\varphi$$

$$EI w(x) = -\frac{1}{6} A_v \langle x \rangle^3 + \frac{1}{6} \langle x - 5 \rangle^3 - \frac{1}{6} B_v \langle x - 10 \rangle^3 - C_\varphi x + C_w$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_w = 0$$

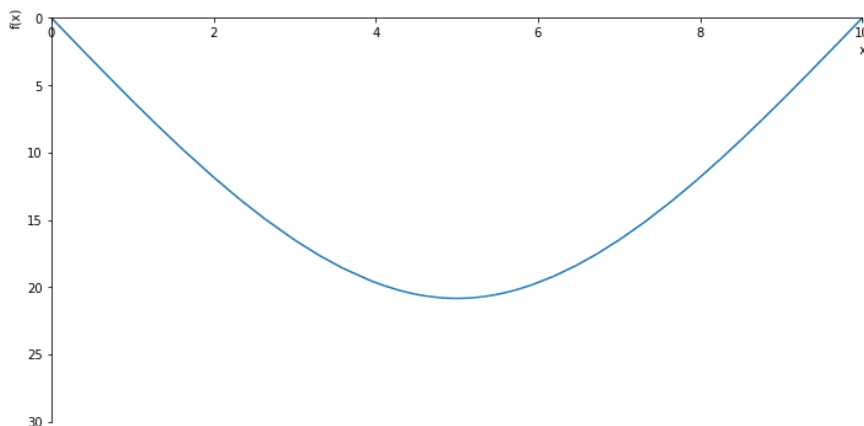
$$M(10) = 0 \Rightarrow 10A_v - 5 = 0 \Rightarrow A_v = \frac{1}{2}$$

$$V(10^+) = 0 \Rightarrow A_v - 1 + B_v = 0 \Rightarrow B_v = \frac{1}{2}$$

$$w(10) = 0 \Rightarrow -\frac{1000}{12} + \frac{125}{6} - 10C_\varphi = 0 \Rightarrow C_\varphi = \frac{25}{4}$$

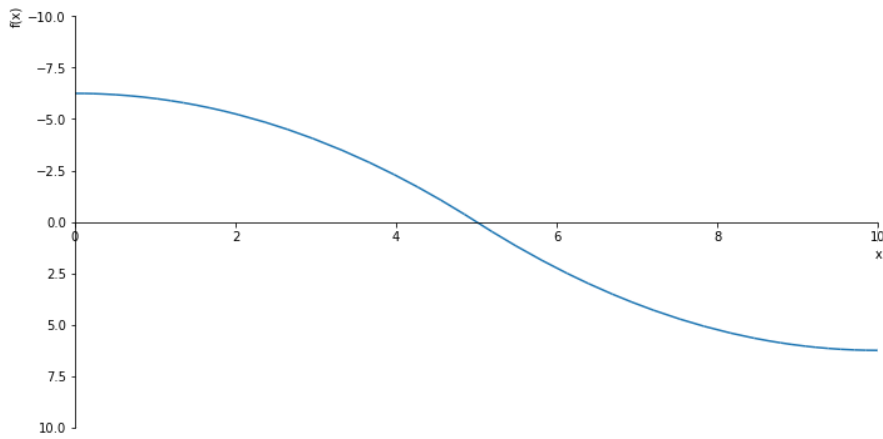
Resultaten verwerken in python:

De doorbuigingslijn van voorbeeld 1 is weergegeven in figuur 38.



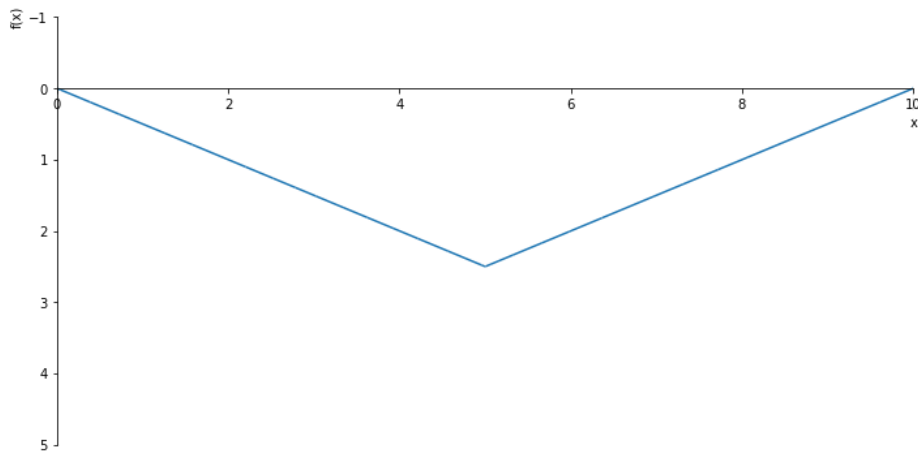
Figuur 38: Doorbuiging (w -lijn).

De rotatielij van voorbeeld 1 is weergegeven in figuur 39.



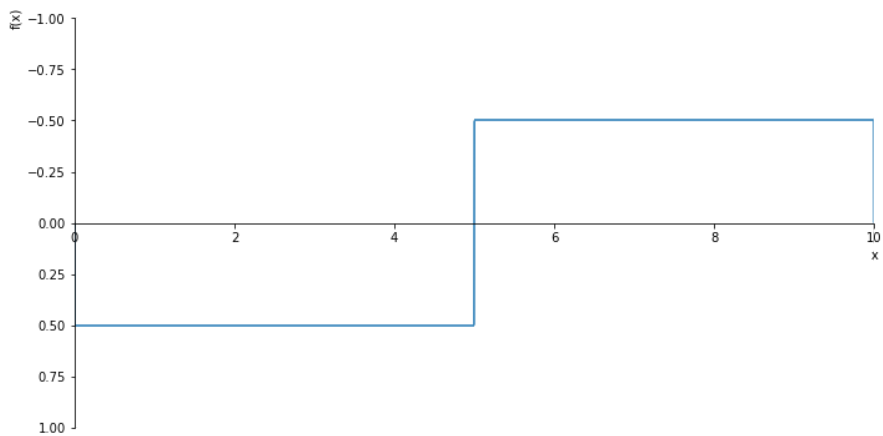
Figuur 39: Rotatie (ϕ -lijn).

De momentenlijn van voorbeeld 1 is weergegeven in figuur 40.



Figuur 40: Momenten (M -lijn).

De dwarskrachtenlijn van voorbeeld 1 is weergegeven in figuur 41.



Figuur 41: Dwarskracht (V -lijn).

Voorbeeld 2: Statisch onbepaalde constructie met uniform verdeelde belasting

$$q_z(x) = M_A \langle x \rangle^{-2} - A_v \langle x \rangle^{-1} + 1 \langle x - 2 \rangle^0 - 1 \langle x - 8 \rangle^0 - B_v \langle x - 10 \rangle^{-1}$$

$$V(x) = -M_A \langle x \rangle^{-1} + A_v \langle x \rangle^0 - 1 \langle x - 2 \rangle^1 + 1 \langle x - 8 \rangle^1 + B_v \langle x - 10 \rangle^0 + C_v$$

$$V(0^-) = 0 \Rightarrow C_v = 0$$

$$M(x) = -M_A \langle x \rangle^0 + A_v \langle x \rangle^1 - \frac{1}{2} \langle x - 2 \rangle^2 + \frac{1}{2} \langle x - 8 \rangle^2 + B_v \langle x - 10 \rangle^1 + C_M$$

$$M(0^-) = 0 \Rightarrow C_M = 0$$

$$EI \varphi(x) = -M_A \langle x \rangle^1 + \frac{1}{2} A_v \langle x \rangle^2 - \frac{1}{6} \langle x - 2 \rangle^3 + \frac{1}{6} \langle x - 8 \rangle^3 + \frac{1}{2} B_v \langle x - 10 \rangle^2 + C_\varphi$$

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow C_\varphi = 0$$

$$EI w(x) = \frac{1}{2} M_A \langle x \rangle^2 - \frac{1}{6} A_v \langle x \rangle^3 + \frac{1}{24} \langle x - 2 \rangle^4 - \frac{1}{24} \langle x - 8 \rangle^4 - \frac{1}{6} B_v \langle x - 10 \rangle^3 + C_w$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_w = 0$$

$$V(10^+) = 0 \Rightarrow A_v - 8 + 2 + B_v = 0$$

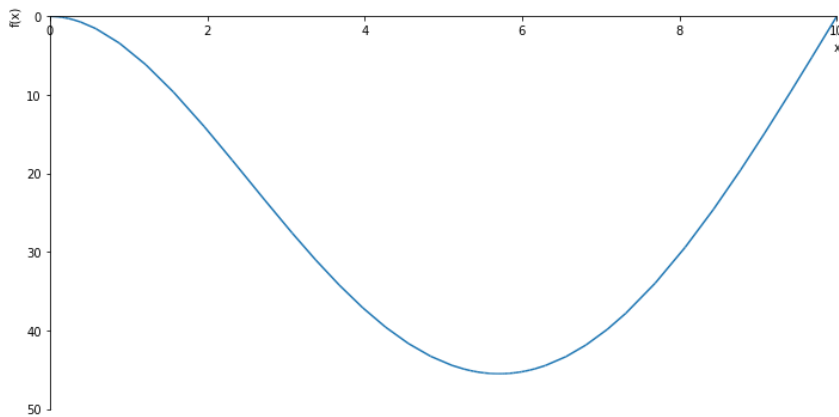
$$M(10) = 0 \Rightarrow -M_A + 10A_v - \frac{64}{2} + \frac{4}{2} = 0$$

$$w(10) = 0 \Rightarrow \frac{100}{2} M_A - \frac{1000}{6} A_v + \frac{4096}{24} - \frac{16}{24} = 0$$

$$\Rightarrow A_v = \frac{399}{100} ; B_v = \frac{201}{100} ; M_A = \frac{99}{10}$$

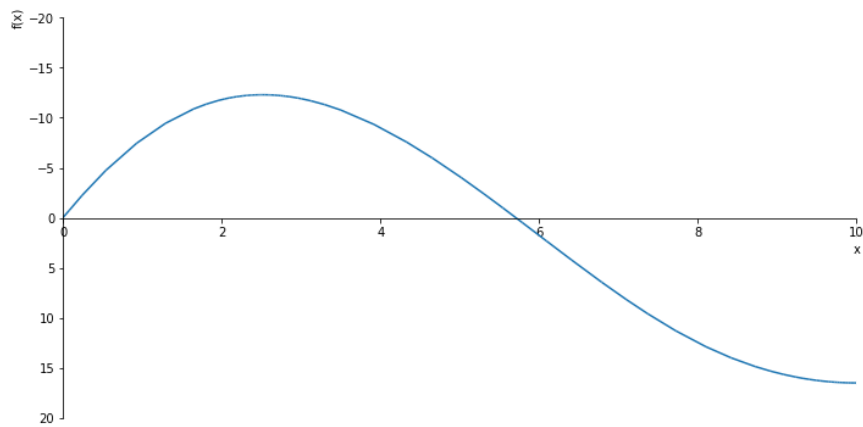
Resultaten verwerken in python:

De doorbuigingslijn van voorbeeld 2 is weergegeven in figuur 42.



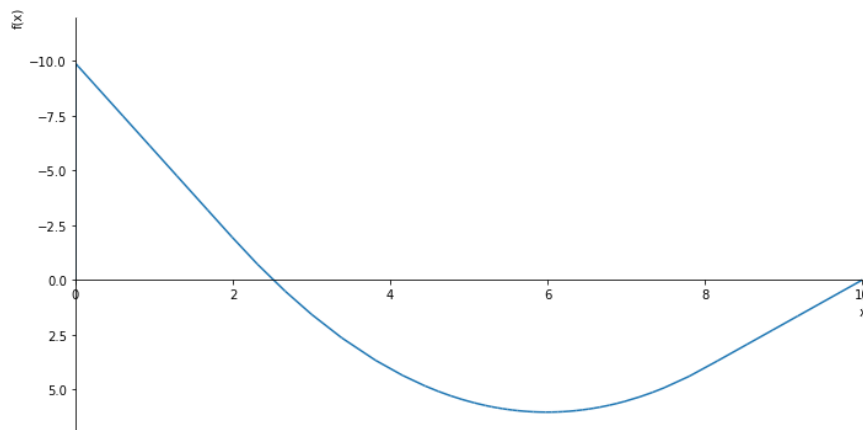
Figuur 42: Doorbuiging (w-lijn).

De rotatielijn van voorbeeld 2 is weergegeven in figuur 43.



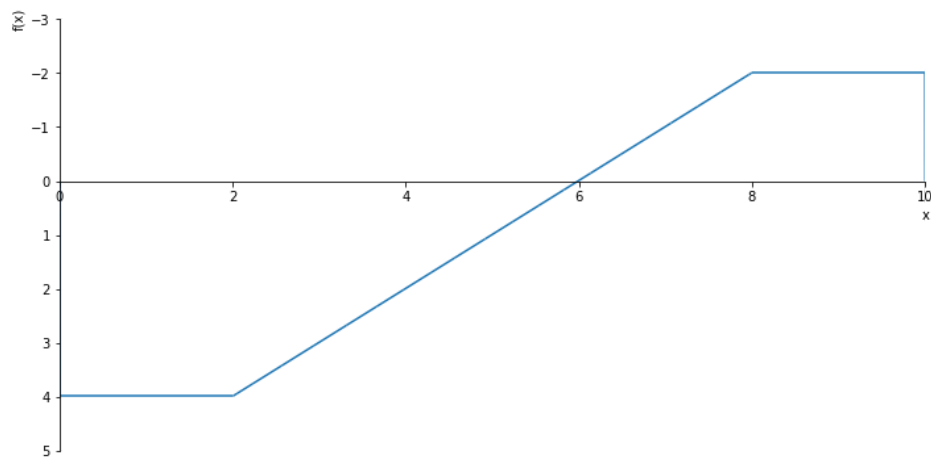
Figuur 43: Rotatie (*phi*-lijn).

De momentenlijn van voorbeeld 2 is weergegeven in figuur 44.



Figuur 44: Momenten (*M*-lijn).

De dwarskrachtenlijn van voorbeeld 2 is weergegeven in figuur 45.



Figuur 45: Dwarskracht (*V*-lijn).

Voorbeeld 3: Ligger met scharnier

$$q_z(x) = M_A \langle x \rangle^{-2} - A_v \langle x \rangle^{-1} + \varphi_s \langle x - 4 \rangle^{-3} + 1 \langle x - 5 \rangle^{-1} - B_v \langle x - 10 \rangle^{-1}$$

$$V(x) = -M_A \langle x \rangle^{-1} + A_v \langle x \rangle^0 - \varphi_s \langle x - 4 \rangle^{-2} - 1 \langle x - 5 \rangle^0 + B_v \langle x - 10 \rangle^0 + C_v$$

$$V(0^-) = 0 \Rightarrow C_v = 0$$

$$M(x) = -M_A \langle x \rangle^0 + A_v \langle x \rangle^1 - \varphi_s \langle x - 4 \rangle^{-1} - 1 \langle x - 5 \rangle^1 + B_v \langle x - 10 \rangle^1 + C_M$$

$$M(0^-) = 0 \Rightarrow C_M = 0$$

$$EI \varphi(x) = -M_A \langle x \rangle^1 + \frac{1}{2} A_v \langle x \rangle^2 - \varphi_s \langle x - 4 \rangle^0 - \frac{1}{2} \langle x - 5 \rangle^2 + \frac{1}{2} B_v \langle x - 10 \rangle^2 + C_\varphi$$

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow C_\varphi = 0$$

$$EI w(x) = \frac{1}{2} M_A \langle x \rangle^2 - \frac{1}{6} A_v \langle x \rangle^3 + \varphi_s \langle x - 4 \rangle^1 + \frac{1}{6} \langle x - 5 \rangle^3 - \frac{1}{6} B_v \langle x - 10 \rangle^3 + C_w$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_w = 0$$

$$V(10^+) = 0 \Rightarrow A_v - 1 + B_v = 0$$

$$M(4) = 0 \Rightarrow -M_A + 4A_v = 0$$

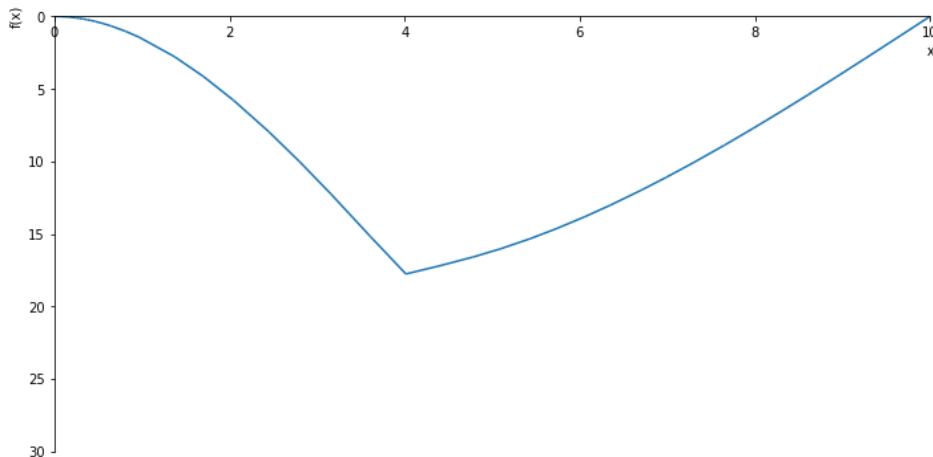
$$M(10) = 0 \Rightarrow -M_A + 10A_v - 5 = 0$$

$$\Rightarrow A_v = \frac{5}{6} ; B_v = \frac{1}{6} ; M_A = \frac{20}{6}$$

$$w(10) = 0 \Rightarrow \frac{2000}{12} - \frac{5000}{36} + 6\varphi_s + \frac{125}{6} = 0 \Rightarrow \varphi_s = -\frac{875}{108}$$

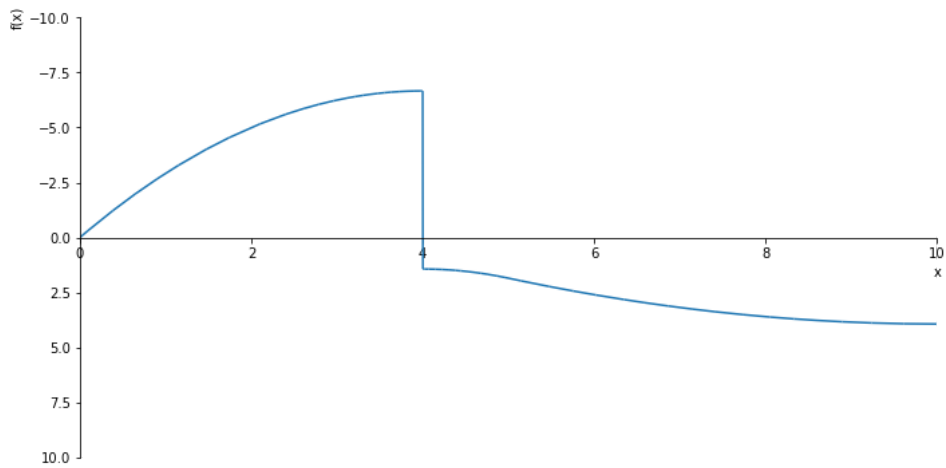
Resultaten verwerken in python:

De doorbuigingslijn van voorbeeld 3 is weergegeven in figuur 46.



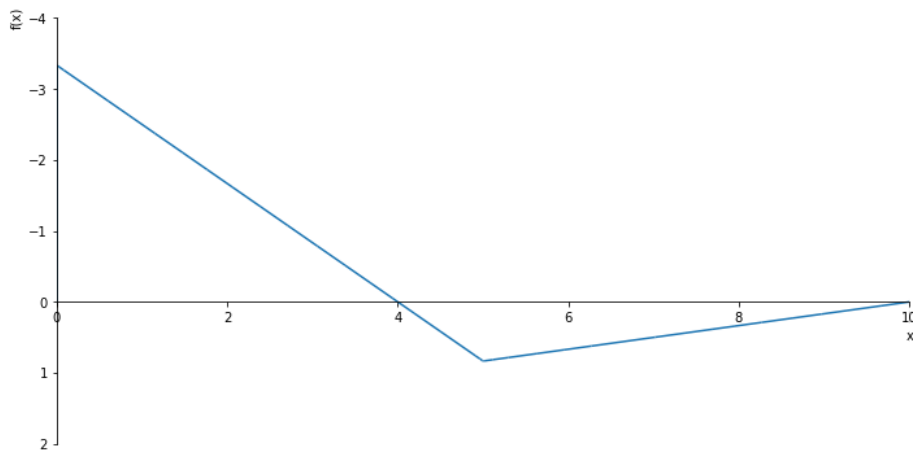
Figuur 46: Doorbuiging (w-lijn).

De rotatielij van voorbeeld 3 is weergegeven in figuur 47.



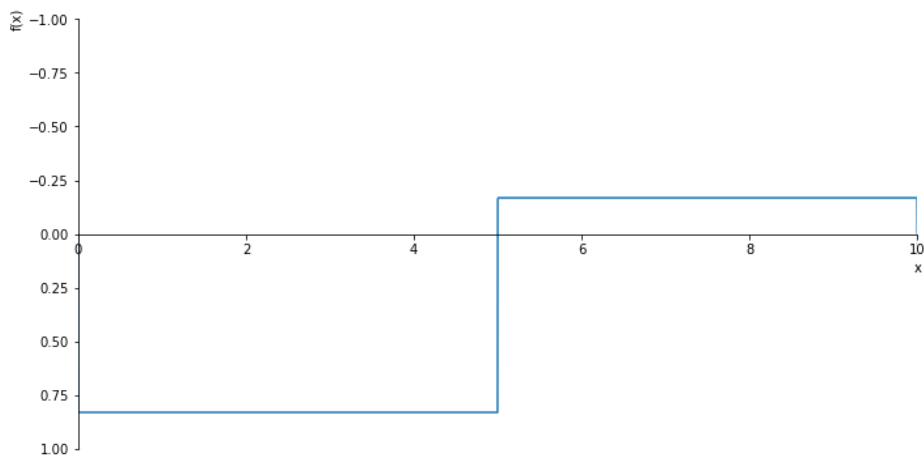
Figuur 47: Rotatie (ϕ -lijn).

De momentenlijn van voorbeeld 3 is weergegeven in figuur 48.



Figuur 48: Momenten (M -lijn).

De dwarskrachtenlijn van voorbeeld 3 is weergegeven in figuur 49.



Figuur 49: Dwarskracht (V -lijn).

Voorbeeld 4: Liggen met veren

In dit voorbeeld wordt aangenomen dat $K_{\varphi, S} = K_{\varphi, B} = K_{w, C} = 1$.

$$q_z(x) = -A_v \langle x \rangle^{-1} + 1 \langle x - 2 \rangle^{-1} + \varphi_v \langle x - 4 \rangle^{-3} + M_{B, veer} \langle x - 6 \rangle^{-2} + F_{C, veer} \langle x - 10 \rangle^{-1}$$

$$V(x) = A_v \langle x \rangle^0 - 1 \langle x - 2 \rangle^0 - \varphi_v \langle x - 4 \rangle^{-2} - M_{B, veer} \langle x - 6 \rangle^{-1} - F_{C, veer} \langle x - 10 \rangle^0 + C_v$$

$$V(0^-) = 0 \Rightarrow C_v = 0$$

$$M(x) = A_v \langle x \rangle^1 - 1 \langle x - 2 \rangle^1 - \varphi_v \langle x - 4 \rangle^{-1} - M_{B, veer} \langle x - 6 \rangle^0 - F_{C, veer} \langle x - 10 \rangle^1 + C_M$$

$$M(0) = 0 \Rightarrow C_M = 0$$

$$EI \varphi(x) = \frac{1}{2} A_v \langle x \rangle^2 - \frac{1}{2} \langle x - 2 \rangle^2 - \varphi_v \langle x - 4 \rangle^0 - M_{B, veer} \langle x - 6 \rangle^1 - \frac{1}{2} F_{C, veer} \langle x - 10 \rangle^2 + C_\varphi$$

$$EI w(x) = -\frac{1}{6} A_v \langle x \rangle^3 + \frac{1}{6} \langle x - 2 \rangle^3 + \varphi_v \langle x - 4 \rangle^1 + \frac{1}{2} M_{B, veer} \langle x - 6 \rangle^2$$

$$+ \frac{1}{6} F_{C, veer} \langle x - 10 \rangle^3 - C_\varphi x + C_w$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_w = 0$$

$$V(10^+) = 0 \Rightarrow A_v - 1 - F_{C, veer} = 0$$

$$M(4) = K_{\varphi, S} \cdot \varphi_v \Rightarrow 4A_v - 2 = K_{\varphi, S} \cdot \varphi_v$$

$$M(10) = 0 \Rightarrow 10A_v - 8 - M_{B, veer} = 0$$

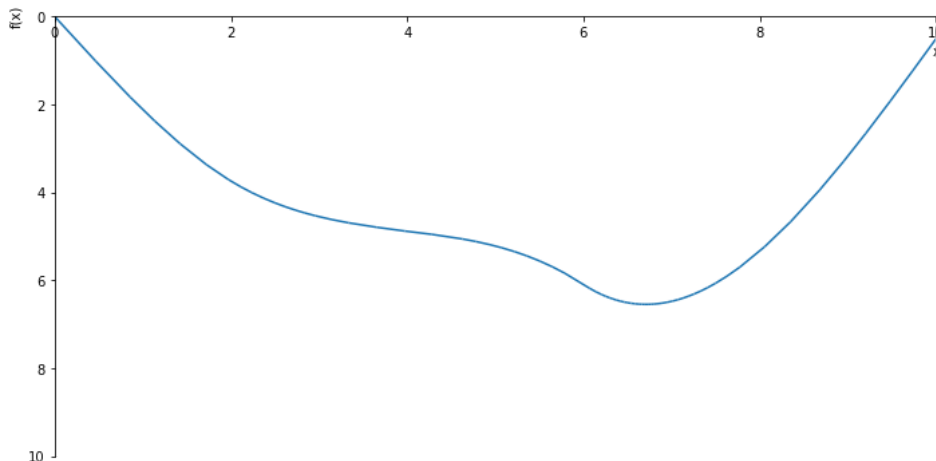
$$\varphi(6) = -\frac{M_{B, veer}}{K_{\varphi, B}} \Rightarrow \frac{36}{2} A_v - \frac{16}{2} - \varphi_v + C_\varphi = -\frac{M_{B, veer}}{K_{\varphi, B}}$$

$$w(10) = -\frac{F_{C, veer}}{K_{w, C}} \Rightarrow -\frac{1000}{6} A_v + \frac{512}{6} + 6\varphi_v + \frac{16}{2} M_{B, veer} + 10C_\varphi = -\frac{F_{C, veer}}{K_{w, C}}$$

$$\Rightarrow A_v = \frac{89}{181} ; C_\varphi = \frac{398}{181} ; F_{C, veer} = -\frac{92}{181} ; M_{B, veer} = -\frac{558}{181} ; \varphi_v = -\frac{6}{181}$$

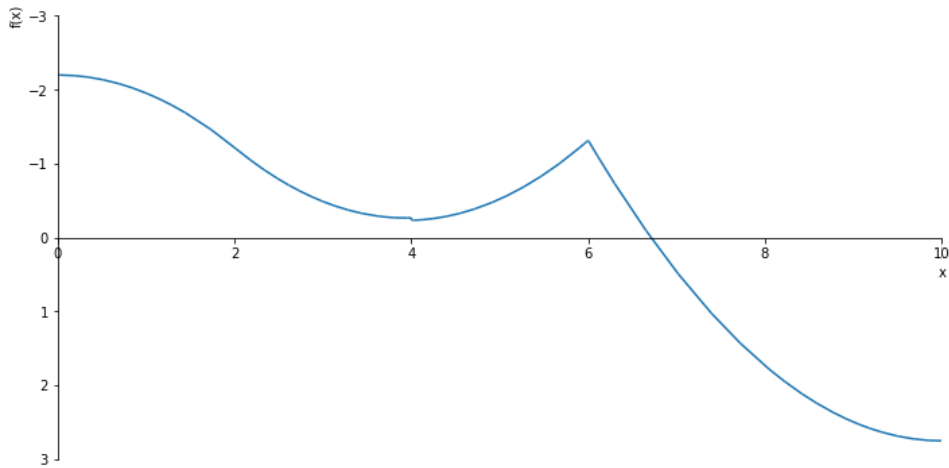
Resultaten verwerken in python:

De doorbuigingslijn van voorbeeld 4 is weergegeven in figuur 50.



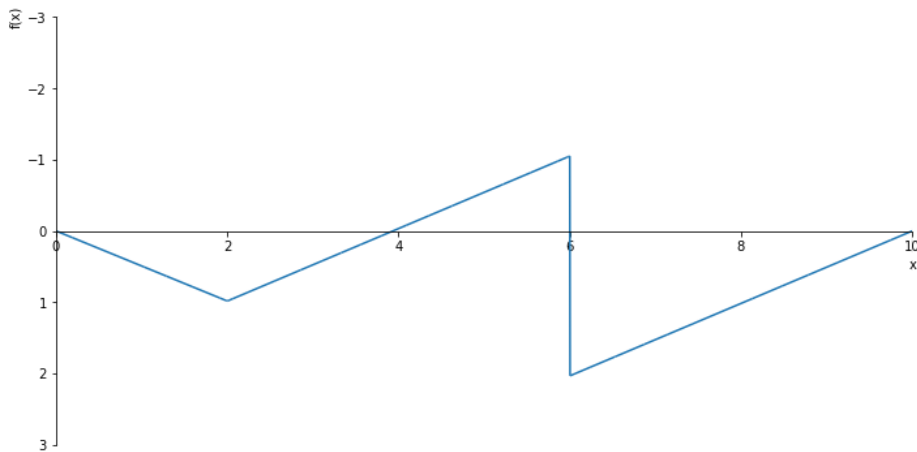
Figuur 50: Doorbuiging (w-lijn).

De rotatielij van voorbeeld 4 is weergegeven in figuur 51.



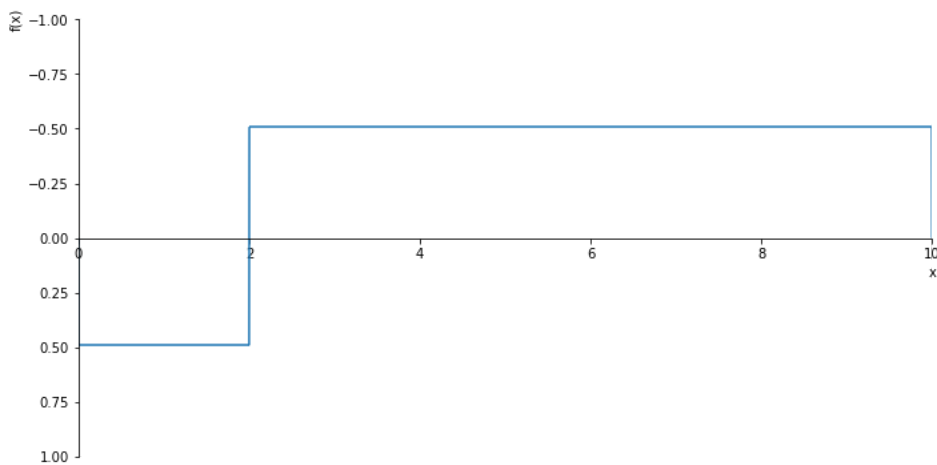
Figuur 51: Rotatie (*phi*-lijn).

De momentenlijn van voorbeeld 4 is weergegeven in figuur 52.



Figuur 52: Momenten (*M*-lijn).

De dwarskrachtenlijn van voorbeeld 4 is weergegeven in figuur 53.



Figuur 53: Dwarskracht (*V*-lijn).

Voorbeeld 5: Ligger met normaalkracht

$$q_x(x) = A_h \langle x \rangle^{-1} - 1 \langle x - 5 \rangle^{-1} + B_h \langle x - 10 \rangle^{-1}$$

$$N(x) = -A_h \langle x \rangle^0 + 1 \langle x - 5 \rangle^0 - B_h \langle x - 10 \rangle^0 + C_N$$

$$N(0^-) = 0 \Rightarrow C_N = 0$$

$$EA u(x) = -A_h \langle x \rangle^1 + 1 \langle x - 5 \rangle^1 - B_h \langle x - 10 \rangle^1 + C_u$$

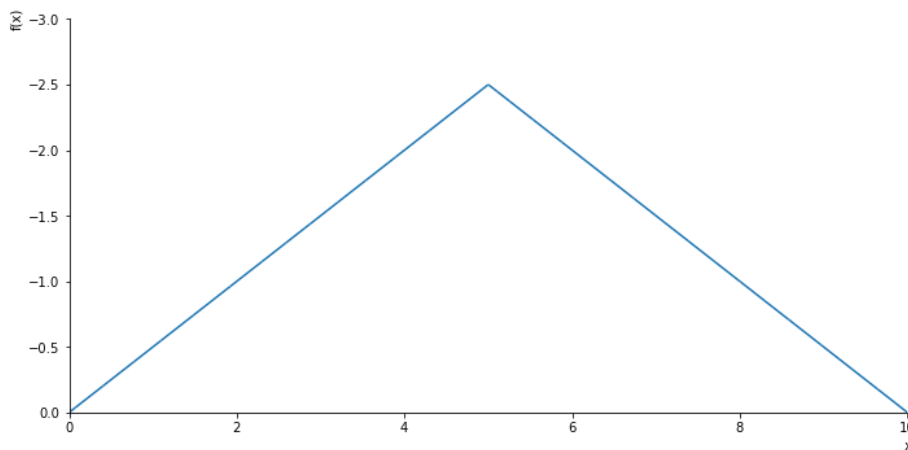
$$u(0) = 0 \Rightarrow C_u = 0$$

$$u(10) = 0 \Rightarrow A_h = \frac{1}{2}$$

$$N(10^+) = 0 \Rightarrow B_h = \frac{1}{2}$$

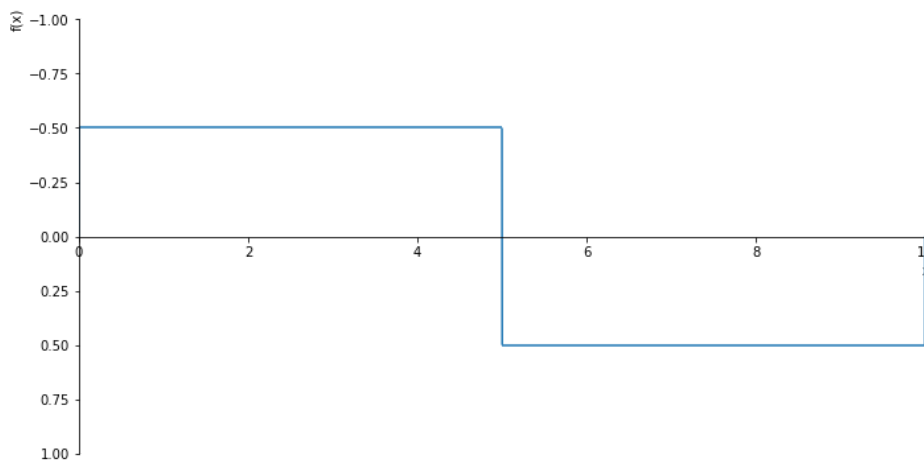
Resultaten verwerken in python:

De axiale verplaatsingslijn van voorbeeld 5 is weergegeven in figuur 54.



Figuur 54: Verplaatsing (u-lijn).

De normaalkrachtenlijn van voorbeeld 5 is weergegeven in figuur 55.



Figuur 55: Normaalkracht (N-lijn).

Voorbeeld 6: Ligger met een verend telescoopscharnier

In dit voorbeeld wordt aangenomen dat $K_u = 1$.

$$q_x(x) = A_h \langle x \rangle^{-1} + u_v \langle x - 3 \rangle^{-2} - 1 \langle x - 5 \rangle^{-1} + B_h \langle x - 10 \rangle^{-1}$$

$$N(x) = -A_h \langle x \rangle^0 - u_v \langle x - 3 \rangle^{-1} + 1 \langle x - 5 \rangle^0 - B_h \langle x - 10 \rangle^0 + C_N$$

$$N(0^-) = 0 \Rightarrow C_N = 0$$

$$EA u(x) = -A_h \langle x \rangle^1 - u_v \langle x - 3 \rangle^0 + 1 \langle x - 5 \rangle^1 - B_h \langle x - 10 \rangle^1 + C_u$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_u = 0$$

$$N(3) = K_u \cdot u_v \Rightarrow -A_h = K_u \cdot u_v$$

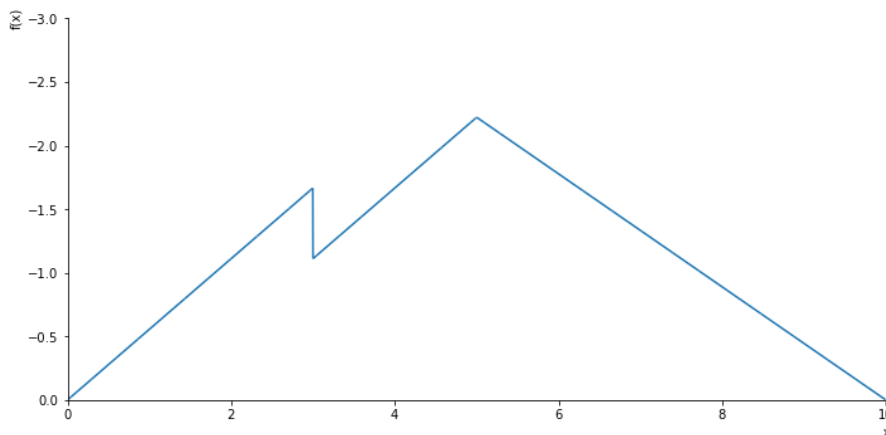
$$u(10) = 0 \Rightarrow -10A_h - u_v + 5 = 0$$

$$N(10^+) = 0 \Rightarrow -A_h + 1 - B_h = 0$$

$$\Rightarrow A_h = \frac{5}{9} ; B_h = \frac{4}{9} ; u_v = -\frac{5}{9}$$

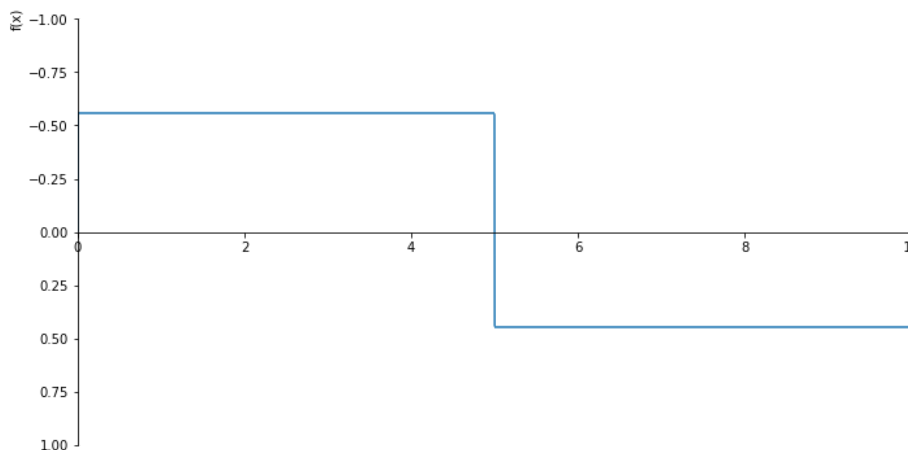
Resultaten verwerken in python:

De axiale verplaatsingslijn van voorbeeld 6 is weergegeven in figuur 56.



Figuur 56: Verplaatsing (u-lijn).

De normaalkrachtenlijn van voorbeeld 7 is weergegeven in figuur 57.



Figuur 57: Normaalkracht (N-lijn).

Voorbeeld 7: Tweedimensionale uitkraging

$$q_t(s) = M_A \langle s \rangle^{-2} + A_v \langle s \rangle^{-1} + B_v \langle s - 10 \rangle^{-1} + w_B \langle s - 10 \rangle^{-4} + 1 \langle s - 13 \rangle^{-1} \\ + C_v \langle s - 15 \rangle^{-1} + w_C \langle s - 15 \rangle^{-4} + 4 \langle s - 20 \rangle^{-1}$$

$$V(s) = -M_A \langle s \rangle^{-1} - A_v \langle s \rangle^0 - B_v \langle s - 10 \rangle^0 - w_B \langle s - 10 \rangle^{-3} - 1 \langle s - 13 \rangle^0 \\ - C_v \langle s - 15 \rangle^0 - w_C \langle s - 15 \rangle^{-3} - 4 \langle s - 20 \rangle^0 + C_V$$

$$V(0^-) = 0 \Rightarrow C_V = 0$$

$$M(s) = -M_A \langle s \rangle^0 - A_v \langle s \rangle^1 - B_v \langle s - 10 \rangle^1 - w_B \langle s - 10 \rangle^{-2} - 1 \langle s - 13 \rangle^1 \\ - C_v \langle s - 15 \rangle^1 - w_C \langle s - 15 \rangle^{-2} - 4 \langle s - 20 \rangle^1 + C_M$$

$$M(0^-) = 0 \Rightarrow C_M = 0$$

$$EI \varphi(s) = -M_A \langle s \rangle^1 - \frac{1}{2} A_v \langle s \rangle^2 - \frac{1}{2} B_v \langle s - 10 \rangle^2 - w_B \langle s - 10 \rangle^{-1} - \frac{1}{2} \langle s - 13 \rangle^2 \\ - \frac{1}{2} C_v \langle s - 15 \rangle^2 - w_C \langle s - 15 \rangle^{-1} - 2 \langle s - 20 \rangle^2 + C_\varphi$$

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow C_\varphi = 0$$

$$EI w(s) = \frac{1}{2} M_A \langle s \rangle^2 + \frac{1}{6} A_v \langle s \rangle^3 + \frac{1}{6} B_v \langle s - 10 \rangle^3 + w_B \langle s - 10 \rangle^0 + \frac{1}{6} \langle s - 13 \rangle^3 \\ + \frac{1}{6} C_v \langle s - 15 \rangle^3 + w_C \langle s - 15 \rangle^0 + \frac{2}{3} \langle s - 20 \rangle^3 + C_w$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_w = 0$$

$$q_s(s) = A_h \langle s \rangle^{-1} + B_h \langle s - 10 \rangle^{-1} + u_B \langle s - 10 \rangle^{-2} + C_h \langle s - 15 \rangle^{-1} + u_C \langle s - 15 \rangle^{-2}$$

$$N(s) = -A_h \langle s \rangle^0 - B_h \langle s - 10 \rangle^0 - u_B \langle s - 10 \rangle^{-1} - C_h \langle s - 15 \rangle^0 - u_C \langle s - 15 \rangle^{-1} + C_N$$

$$N(0^-) = 0 \Rightarrow C_N = 0$$

$$EA u(s) = -A_h \langle s \rangle^1 - B_h \langle s - 10 \rangle^1 - u_B \langle s - 10 \rangle^0 - C_h \langle s - 15 \rangle^1 - u_C \langle s - 15 \rangle^0 + C_u$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_u = 0$$

$$V(20^+) = 0 \Rightarrow -A_v - B_v - 1 - C_v - 4 = 0$$

$$N(20^+) = 0 \Rightarrow -A_h - B_h - C_h = 0$$

$$N(10^+) = \cos(90) \cdot N(10^-) - \sin(90) \cdot V(10^-)$$

$$\Rightarrow -A_h - B_h = A_v$$

$$V(10^+) = \sin(90) \cdot N(10^-) + \cos(90) \cdot V(10^-)$$

$$\Rightarrow -A_v - B_v = -A_h$$

$$N(15^+) = \cos(270) \cdot N(15^-) - \sin(270) \cdot V(15^-)$$

$$\Rightarrow -A_h - B_h - C_h = A_v + B_v + 1$$

$$V(15^+) = \sin(270) \cdot N(15^-) + \cos(270) \cdot V(15^-)$$

$$\Rightarrow -A_v - B_v - 1 - C_v = -A_h - B_h$$

$$\Rightarrow A_v = -4 ; A_h = -1 ; B_v = 3 ; B_h = 5 ; C_v = -4 ; C_h = -4$$

$$M(20) = 0 \Rightarrow M_A = 63$$

$$u(10^+) = \cos(90) \cdot u(10^-) - \sin(90) \cdot w(10^-)$$

$$\Rightarrow u_B = \frac{7480}{3}$$

$$w(10^+) = \sin(90) \cdot u(10^-) + \cos(90) \cdot w(10^-)$$

$$\Rightarrow w_B = -\frac{7420}{3}$$

$$u(15^+) = \cos(270) \cdot u(15^-) - \sin(270) \cdot w(15^-)$$

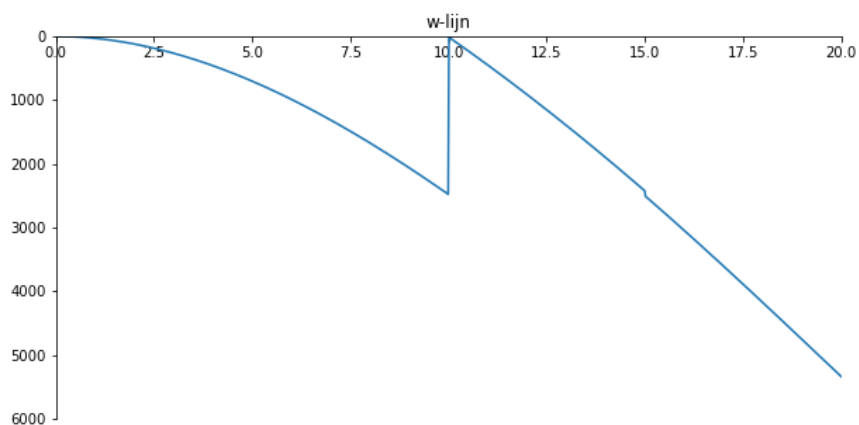
$$\Rightarrow u_C = -\frac{14794}{3}$$

$$w(15^+) = \sin(270) \cdot u(15^-) + \cos(270) \cdot w(15^-)$$

$$\Rightarrow w_C = \frac{226}{3}$$

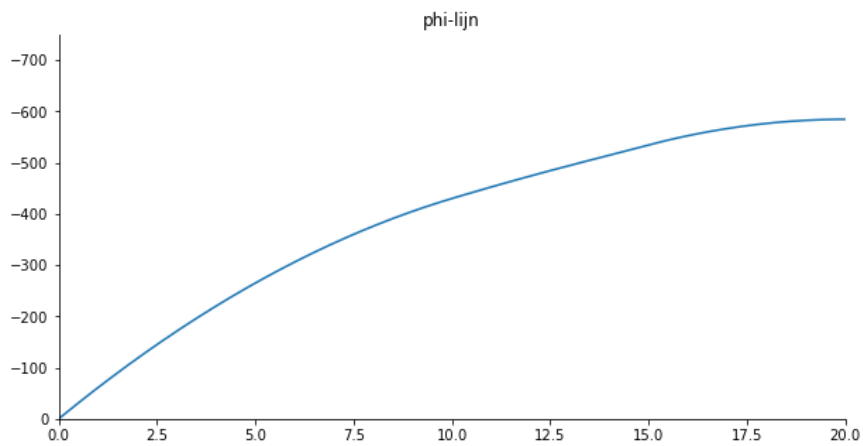
Resultaten verwerken in python:

De doorbuigingslijn langs de staaf-as van voorbeeld 7 is weergegeven in figuur 58.



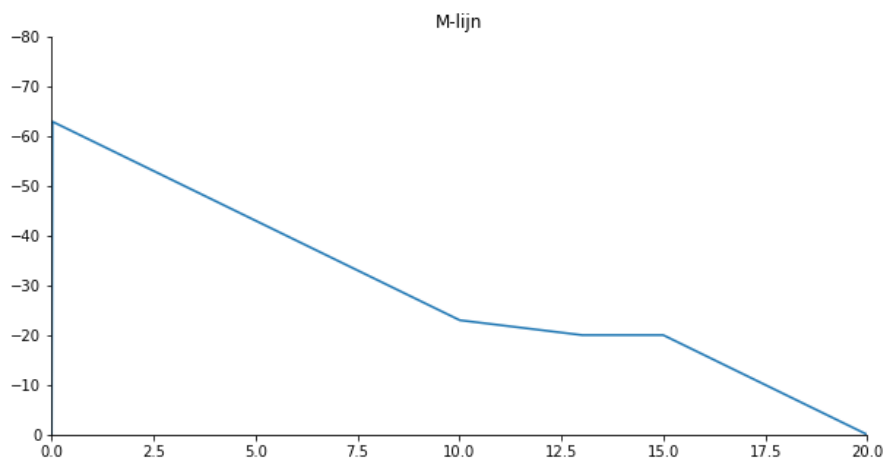
Figuur 58: Doorbuiging (w-lijn) langs de staaf-as.

De rotatielijns langs de staaf-as van voorbeeld 7 is weergegeven in figuur 59.



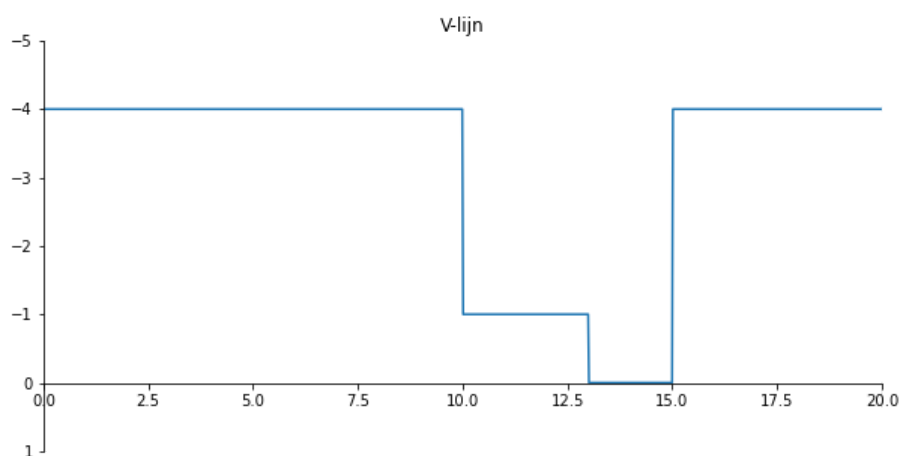
Figuur 59: Rotatie (phi-lijn) langs de staaf-as.

De momentenlijn langs de staaf-as van voorbeeld 7 is weergegeven in figuur 60.



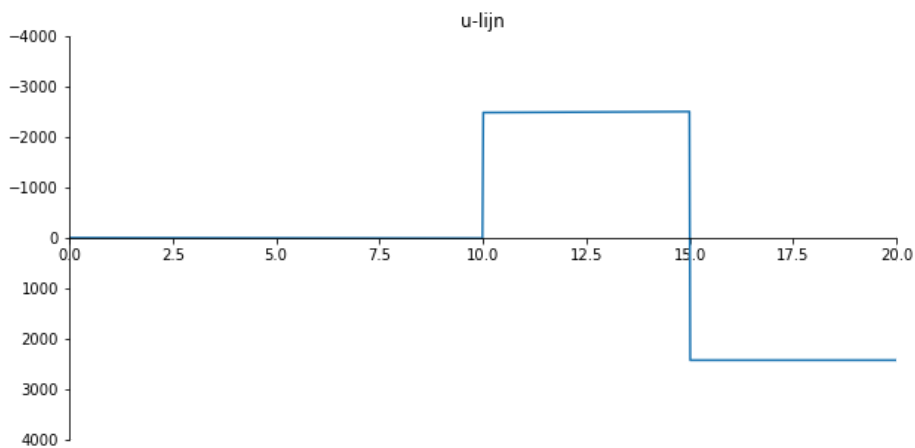
Figuur 60: Momenten (M-lijn) langs de staaf-as.

De dwarskrachtenlijn langs de staaf-as van voorbeeld 7 is weergegeven in figuur 61.



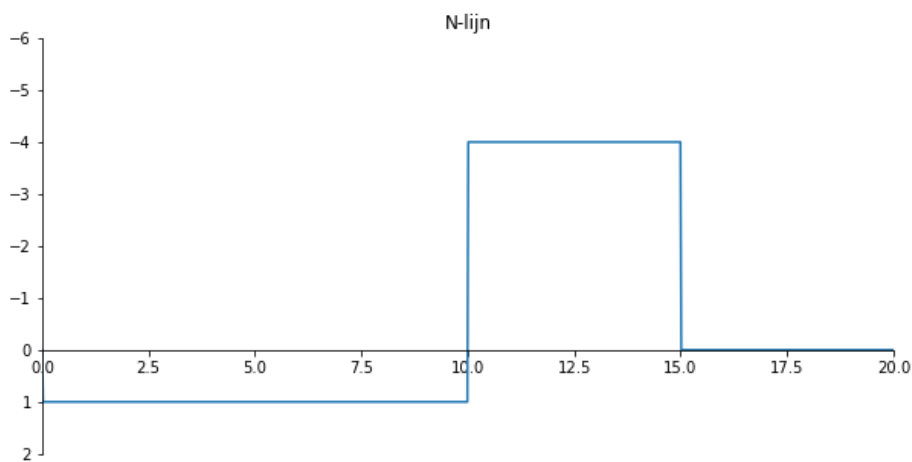
Figuur 61: Dwarskrachten (V-lijn) langs de staaf-as.

De axiale verplaatsingslijn langs de staaf-as van voorbeeld 7 is weergegeven in figuur 62.



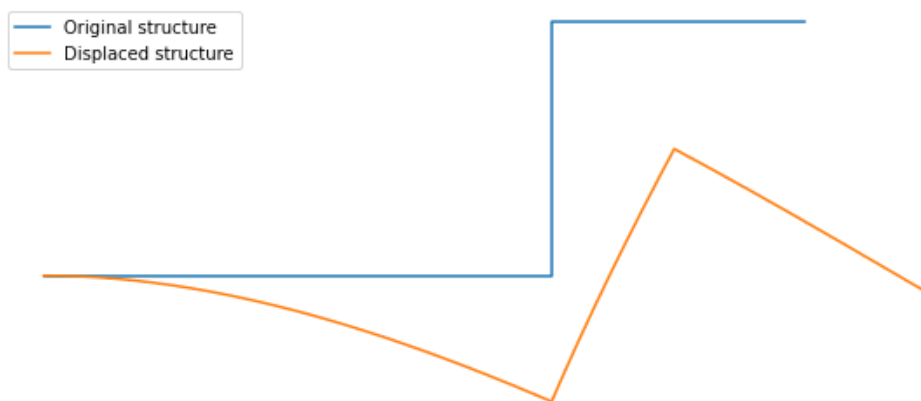
Figuur 62: Verplaatsing (u-lijn) langs de staaf-as.

De normaalkrachtenlijn langs de staaf-as van voorbeeld 7 is weergegeven in figuur 63.



Figuur 63: Normaalkrachten (N-lijn) langs de staaf-as.

De vervorming van de gehele constructie uit voorbeeld 7 is weergegeven in figuur 64.



Figuur 64: Vervorming van gehele constructie voor extensie en buiging.

Voorbeeld 8: Driescharnierspant

$$q_t(s) = A_v \langle s \rangle^{-1} + 2 \langle s - 3 \rangle^{-1} + C_v \langle s - 5 \rangle^{-1} + w_c \langle s - 5 \rangle^{-4} + \varphi_s \langle s - 10 \rangle^{-3} \\ + 3 \langle s - 13 \rangle^{-1} + D_v \langle s - 15 \rangle^{-1} + w_D \langle s - 15 \rangle^{-4} + B_v \langle s - 20 \rangle^{-1}$$

$$V(s) = -A_v \langle s \rangle^0 - 2 \langle s - 3 \rangle^0 - C_v \langle s - 5 \rangle^0 - w_c \langle s - 5 \rangle^{-3} - \varphi_s \langle s - 10 \rangle^{-2} \\ - 3 \langle s - 13 \rangle^0 - D_v \langle s - 15 \rangle^0 - w_D \langle s - 15 \rangle^{-3} - B_v \langle s - 20 \rangle^0 + C_v$$

$$V(0^-) = 0 \Rightarrow C_v = 0$$

$$M(s) = -A_v \langle s \rangle^1 - 2 \langle s - 3 \rangle^1 - C_v \langle s - 5 \rangle^1 - w_c \langle s - 5 \rangle^{-2} - \varphi_s \langle s - 10 \rangle^{-1} \\ - 3 \langle s - 13 \rangle^1 - D_v \langle s - 15 \rangle^1 - w_D \langle s - 15 \rangle^{-2} - B_v \langle s - 20 \rangle^1 + C_M$$

$$M(0) = 0 \Rightarrow C_M = 0$$

$$EI \varphi(s) = -\frac{1}{2} A_v \langle s \rangle^2 - 1 \langle s - 3 \rangle^2 - \frac{1}{2} C_v \langle s - 5 \rangle^2 - w_c \langle s - 5 \rangle^{-1} - \varphi_s \langle s - 10 \rangle^0 \\ - \frac{3}{2} \langle s - 13 \rangle^2 - \frac{1}{2} D_v \langle s - 15 \rangle^2 - w_D \langle s - 15 \rangle^{-1} - \frac{1}{2} B_v \langle s - 20 \rangle^2 + C_\varphi$$

$$EI w(s) = \frac{1}{6} A_v \langle s \rangle^3 + \frac{1}{3} \langle s - 3 \rangle^3 + \frac{1}{6} C_v \langle s - 5 \rangle^3 + w_c \langle s - 5 \rangle^0 + \varphi_s \langle s - 10 \rangle^1 \\ + \frac{3}{6} \langle s - 13 \rangle^3 + \frac{1}{6} D_v \langle s - 15 \rangle^3 + w_D \langle s - 15 \rangle^0 + \frac{1}{6} B_v \langle s - 20 \rangle^3 - C_\varphi s + C_w$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_w = 0$$

$$q_s(s) = A_h \langle s \rangle^{-1} + C_h \langle s - 5 \rangle^{-1} + u_c \langle s - 5 \rangle^{-2} + D_h \langle s - 15 \rangle^{-1} + u_D \langle s - 15 \rangle^{-2} \\ + B_h \langle s - 20 \rangle^{-1}$$

$$N(s) = -A_h \langle s \rangle^0 - C_h \langle s - 5 \rangle^0 - u_c \langle s - 5 \rangle^{-1} - D_h \langle s - 15 \rangle^0 - u_D \langle s - 15 \rangle^{-1} \\ - B_h \langle s - 20 \rangle^0 + C_N$$

$$N(0^-) = 0 \Rightarrow C_N = 0$$

$$EA u(s) = -A_h \langle s \rangle^1 - C_h \langle s - 5 \rangle^1 - u_c \langle s - 5 \rangle^0 - D_h \langle s - 15 \rangle^1 - u_D \langle s - 15 \rangle^0 \\ - B_h \langle s - 20 \rangle^1 + C_u$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_u = 0$$

$$M(10) = 0 \Rightarrow -10A_v - 14 - 5C_v = 0$$

$$M(20) = 0 \Rightarrow -20A_v - 34 - 15C_v - 21 - 5D_v = 0$$

$$N(5^+) = \cos(270) \cdot N(5^-) - \sin(270) \cdot V(5^-)$$

$$\Rightarrow -A_h - C_h = -A_v - 2$$

$$V(5^+) = \sin(270) \cdot N(5^-) + \cos(270) \cdot V(5^-)$$

$$\Rightarrow -A_v - 2 - C_v = A_h$$

$$N(15^+) = \cos(270) \cdot N(15^-) - \sin(270) \cdot V(15^-)$$

$$\Rightarrow -A_h - C_h - D_h = -A_v - 2 - C_v - 3$$

$$V(15^+) = \sin(270) \cdot N(15^-) + \cos(270) \cdot V(15^-)$$

$$\Rightarrow -A_v - 2 - C_v - 3 - D_v = A_h + C_h$$

$$\Rightarrow A_v = -\frac{4}{5} ; C_v = -\frac{6}{5} ; D_v = -\frac{21}{5} ; A_h = 0 ; C_h = \frac{6}{5} ; D_h = \frac{9}{5}$$

$$V(20^+) = 0 \Rightarrow B_v = \frac{6}{5}$$

$$N(20^+) = 0 \Rightarrow B_h = -3$$

$$u(5^+) = \cos(270) \cdot u(5^-) - \sin(270) \cdot w(5^-)$$

$$\Rightarrow -u_c + 14 - 5C_\varphi = 0$$

$$w(5^+) = \sin(270) \cdot u(5^-) + \cos(270) \cdot w(5^-)$$

$$\Rightarrow -14 + w_c + 5C_\varphi = 0$$

$$u(15^+) = \cos(270) \cdot u(15^-) - \sin(270) \cdot w(15^-)$$

$$\Rightarrow 58 - u_c - u_D - w_c - 5\varphi_s - 15C_\varphi = 0$$

$$w(15^+) = \sin(270) \cdot u(15^-) + \cos(270) \cdot w(15^-)$$

$$\Rightarrow -82 + w_c + 5\varphi_s + w_D + 15C_\varphi - u_c = 0$$

$$w(20) = 0$$

$$\Rightarrow -20 + w_c + 10\varphi_s + w_B + 20C_\varphi = 0$$

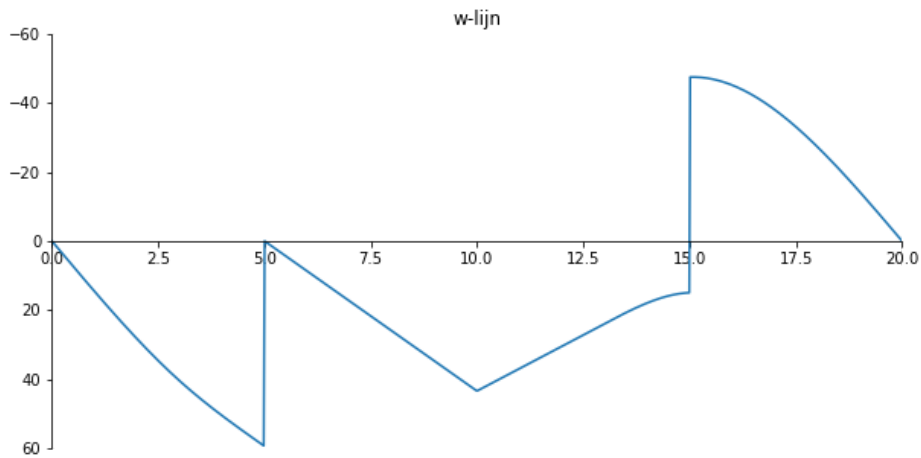
$$u(20) = 0$$

$$\Rightarrow -27 - u_c - u_D = 0$$

$$\Rightarrow u_c = -\frac{119}{2} ; w_c = -\frac{119}{2} ; u_D = \frac{65}{2} ; w_D = -\frac{125}{2} ; C_\varphi = \frac{147}{10} ; \varphi_s = -\frac{76}{5}$$

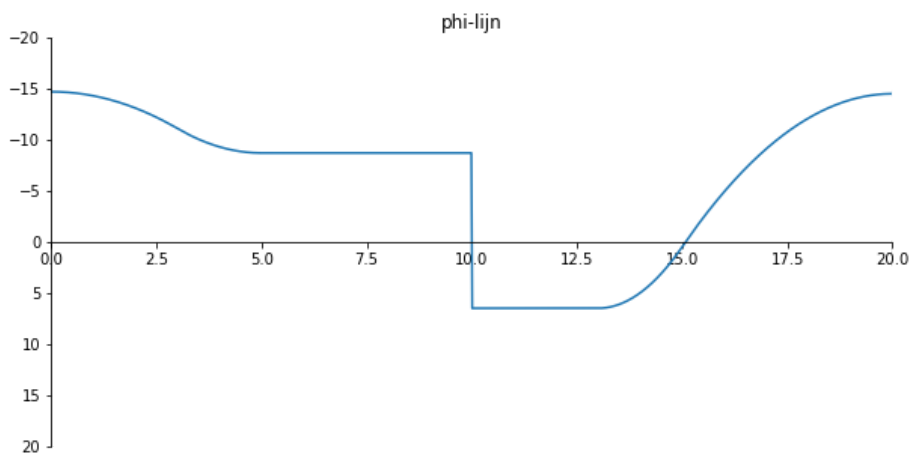
Resultaten verwerken in python:

De doorbuigingslijn langs de staaf-as van voorbeeld 8 is weergegeven in figuur 65.



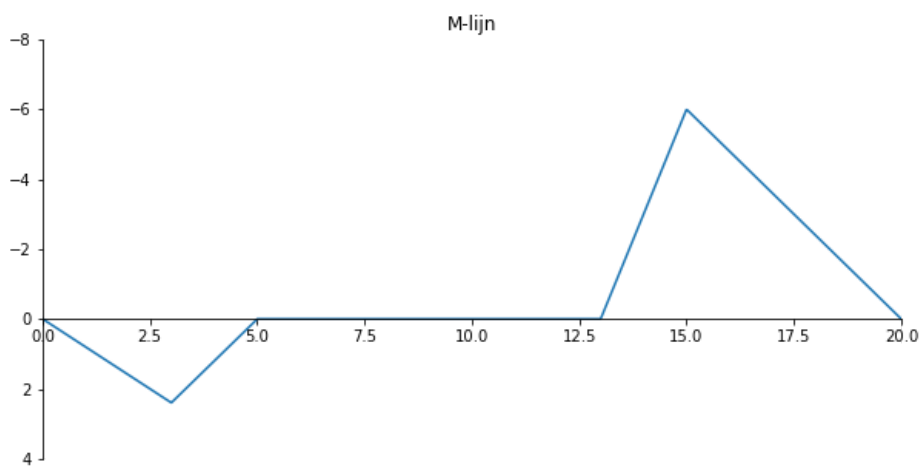
Figuur 65: Doorbuiging (w-lijn) langs de staaf-as.

De rotatielijn langs de staaf-as van voorbeeld 8 is weergegeven in figuur 66.



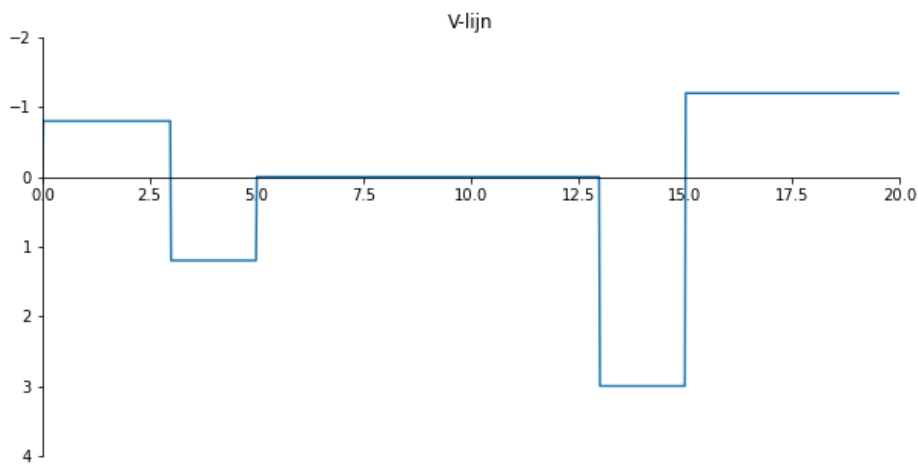
Figuur 66: Rotatie (phi-lijn) langs de staaf-as.

De momentenlijn langs de staaf-as van voorbeeld 8 is weergegeven in figuur 67.



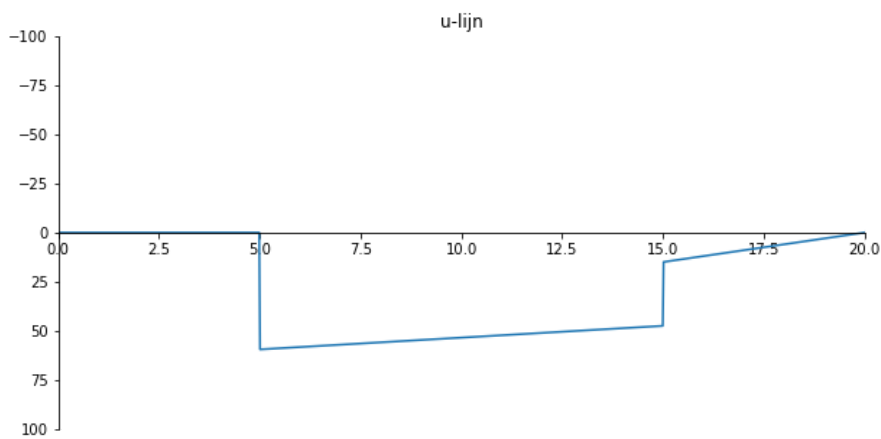
Figuur 67: Momenten (M-lijn) langs de staaf-as.

De dwarskrachtenlijn langs de staaf-as van voorbeeld 8 is weergegeven in figuur 68.



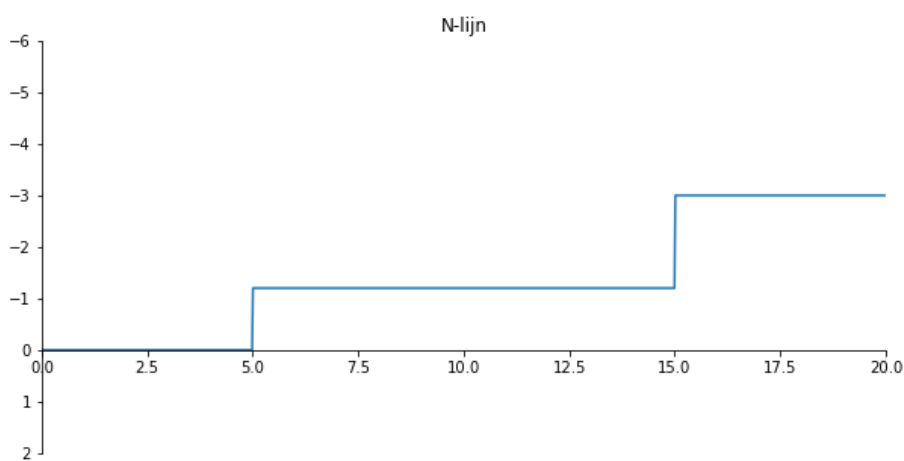
Figuur 68: Dwarskrachten (V-lijn) langs de staaf-as.

De axiale verplaatsingslijn langs de staaf-as van voorbeeld 8 is weergegeven in figuur 69.



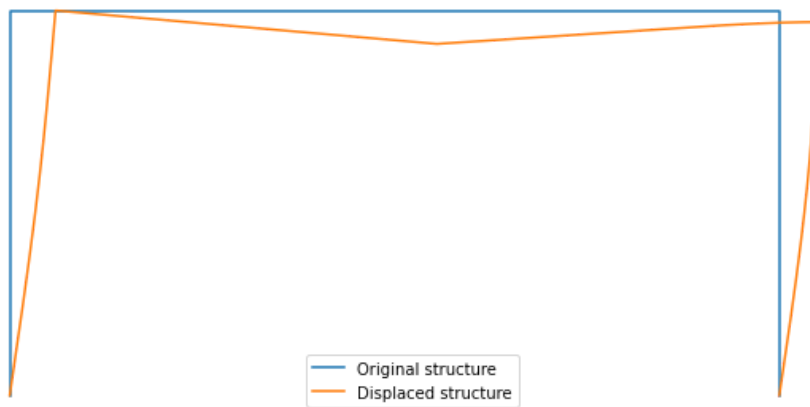
Figuur 69: Verplaatsing (u-lijn) langs de staaf-as.

De normaalkrachtenlijn langs de staaf-as van voorbeeld 8 is weergegeven in figuur 70.



Figuur 70: Normalkrachten (N-lijn) langs de staaf-as.

De vervorming van de gehele constructie van voorbeeld 8 is weergegeven in figuur 71.



Figuur 71: Vervorming van gehele constructie voor extensie en buiging.