Bacholor Eindproject

HET PLANK PROBLEEM

The Plank Problem

Het toegankelijk maken van een open probleem

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCHIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

Frank van der Made
(4565754)

Begeleid door
Prof.dr.ir. M.C. Veraar
Delft, 19 november 2019

TU Delft

TU Delft

Bacholor Eindproject

HET PLANK PROBLEEM

The Plank Problem

Het toegankelijk maken van een open probleem

Frank van der Made

Technische Universiteit Delft

Begeleider
Prof.dr.ir. M.C. Veraar

Overige commissieleden
Dr. D.C. Gijswijt
Dr.ir. M. Keijzer

Delft, 19 november 2019

Inhoudsopgave

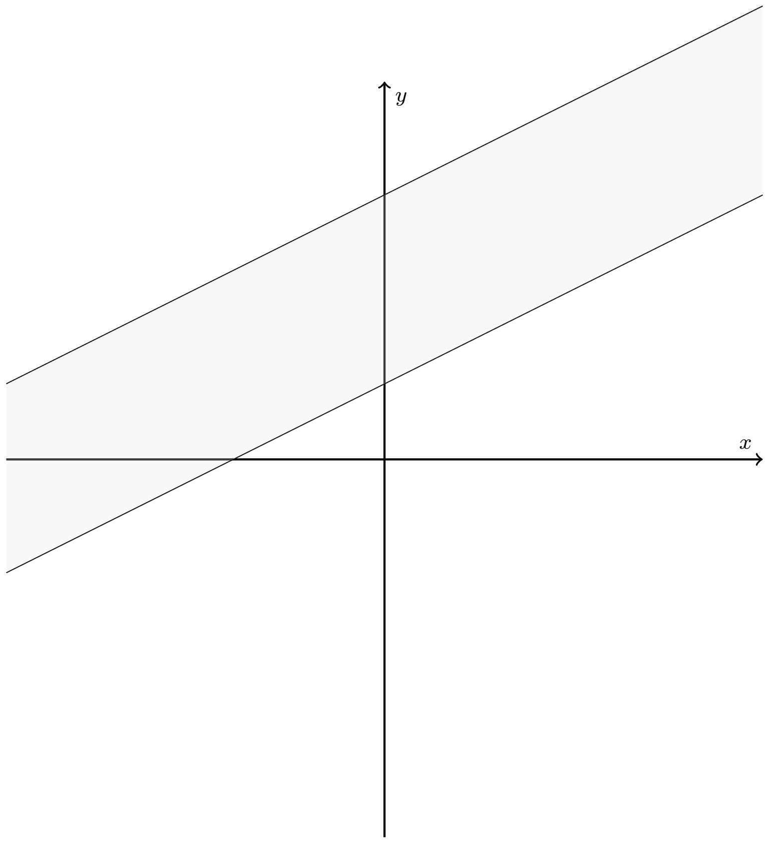
TU Delft

Samenvatting

Het plankprobleem gaat over het overdekken van convexe vormen met hypervlakken. De gegeven stellingen en bewijzen in het artikel "The plank problem for symmetric bodies" van Keith Ball zijn lastig te begrijpen voor bacholor wiskunde studenten. In dit verslag wordt verduidelijking gegeven van dit artikel zodat deze begrijpelijk en toegankelijk wordt voor anderen. Hierbij speelt de trace-class een belangrijke rol en komt er veel lineaire algebra over symmetrische matrices voorbij.

1 Inleiding

De Pools-Amerikaanse wiskundige Alfred Tarski heeft in de jaren 30 van de vorige eeuw onderzoek gedaan naar wat later het plankprobleem is geworden. Het idee is als volgt: Je kan planken maken in $\mathbb{R}^d$. Dit doe je door de ruimte te bekijken tussen parallelle hypervlakken. In $\mathbb{R}^2$ is dit relatief eenvoudig voor te stellen. De hypervlakken zijn dan enkel lijnen door het platte vlak. De ruimte er tussen wordt dan een oneindig lange strook in het platte vlak.



Figuur 1: Plank in $\mathbb{R}^2$

Met deze planken kun je vervolgens vormen bedekken. Tarski stelde de vraag of, als je een vorm bedekt met planken, de som van de breedtes van deze planken ten minste de minimale breedte van de vorm moet zijn.

Stelling (**Tarski's plankprobleem** [5]). *Als een rij planken een convexe vorm $C \in \mathbb{R}^d$ overdekt dan is de totale breedte van de planken minimaal $w(C)$. Waarbij $w(C)$ de minimale w is van een plank met breedte w welke C overdekt.*

Intuïtief lijkt dit logisch. Toch wist Tarski zijn stelling enkel voor de eenheidsschijf in $\mathbb{R}^2$ te bewijzen. In zijn paper getiteld: *Plank theorems*, gebruikt Tarski een bewijs welke gebaseerd is op feiten ontdekt door Archimedes twee millennia geleden.

Het heeft tot de jaren 50 van de vorige eeuw geduurd om het algemene geval op te lossen. Dit werd gedaan door Thøger Bang in 1951 [2]. Naast het bewijzen van de stelling van Tarski, heeft Bang een nieuwe vraag gesteld, een sterkere versie van Tarski's plankprobleem. In deze sterkere versie, die bekend staat als het "Relatieve plankprobleem" worden de breedtes van de planken gemeten ten opzichte van de breedte van de convexe vorm in de richting van de plank. Dus elke breedte van de plank wordt gemeten *relatief* ten opzichte van de breedte van de vorm. Dit vermoeden is nog steeds open. Een voorbeeld kan worden gevonden in Hoofdstuk 11. Bang heeft in zijn paper wel een bewijs gegeven voor het geval er slechts twee planken zijn.

In 1991 heeft Keith Ball een bewijs gegeven voor een variant van het relatieve plankprobleem. Namelijk het relatieve plankprobleem voor symmetrische vormen. Dit deed hij in het artikel "The plank problem for symmetric bodies" [1].

In dit verslag bekijken we dit artikel van Ball uit 1991 uitgebreid. Het doel is de details van de bewijzen gepresenteerd in het artikel uit te zoeken en toegankelijker te maken anderen. Dit zal worden gedaan door alles op te bouwen uit definities en stellingen die behandeld zijn in de bacholor technische wiskunde van de TU Delft. Tevens zullen er voorbeelden en afbeeldingen worden gebruikt hiervoor.

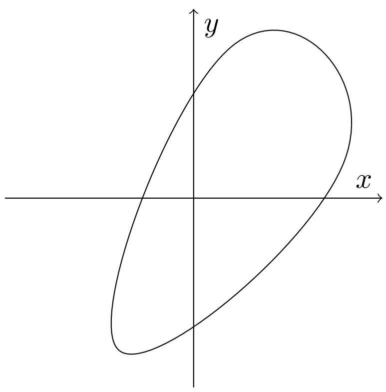
2 Ball's probleemstelling

We beginnen met het introduceren van enkele definities en een lemma.

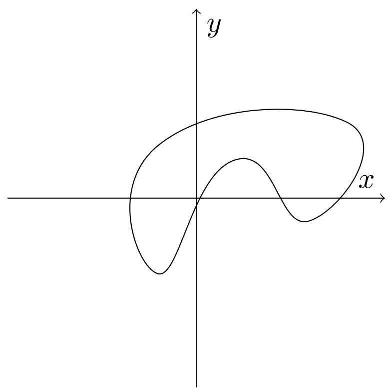
Definitie 1. Een deelverzameling D van een reële vectorruimte is **convex** indien ieder lijnstuk waarvan de eindpunten tot D behoren, in zijn geheel binnen D ligt:

$$\forall x, y \in D, \forall t \in [0,1] : x + t(y - x) \in D$$

Grafisch kan dit als volgt worden gezien:



Figuur 2: Convexe vorm



Figuur 3: Niet-convexe vorm

Deze zelfde definitie werkt uiteraard ook in hogere dimensies.

Definitie 2. De **minimale breedte** van een verzameling D van een reële of complexe genormeerde vectorruimte is de minimale afstand tussen twee parallelle lijnen waartussen de verzameling D ligt.

Het idee van de stelling is nu als volgt: als een convexe vorm met minimale breedte w, volledig bedekt is door planken, dan is de som van de breedtes van die planken tenminste w. In dit verslag gaan we het bewijs geven voor een specifieke variant van de stelling. Hier boven hebben we ons beperkt tot convexe vormen, nu gaan we ons nog verder beperken. Namelijk tot symmetrische vormen.
Verder maken we gebruik van genormeerde ruimtes, Banachruimtes en functionalen.

Definitie 3. Een **genormeerde ruimte** is een paar $(X, ||\cdot||)$ waarbij X een vectorruimte is en $||\cdot||$ een norm op X.

Definitie 4. Een **Banachruimte** is een volledige genormeerde vectorruimte.

Waarbij volledig betekent dat Cauchy-rijen van vectoren altijd convergeren naar limieten in deze ruimte.

Definitie 5. Een **functionaal** is een lineaire afbeelding van een ruimte X naar de reële getallen. Lineair betekent dat geldt: $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$.

Vaak is X hierbij een ruimte van functies.

Voorbeeld 6. De Riemann integraal is een lineare functionaal waarbij de vectorruimte de *Rieman integreerbare functies* zijn.

$$f \longmapsto \int_a^b f(t)dt$$

Lemma 7. *$X = \mathbb{R}^d$, en kies $y \in \mathbb{R}^d$ vast. Definieer nu $\varphi_y : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ door $\varphi_y(x) = \langle x, y \rangle$. Laat nu $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ een functionaal zijn. Definieer $y_i = \varphi(e_i)$ en $y = (y_1, ..., y_n)$. Dan geldt:*

$$\varphi = \varphi_y.$$

Bewijs van lemma 7. Bekijk $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Merk op:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle e_i, y \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i.$$

En we zien dat $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$. Dus concluderen we $\varphi = \varphi_y$. Er geldt dat elke lineaire functionaal $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de vorm heeft $\langle x, y \rangle$ met $y \in X$.

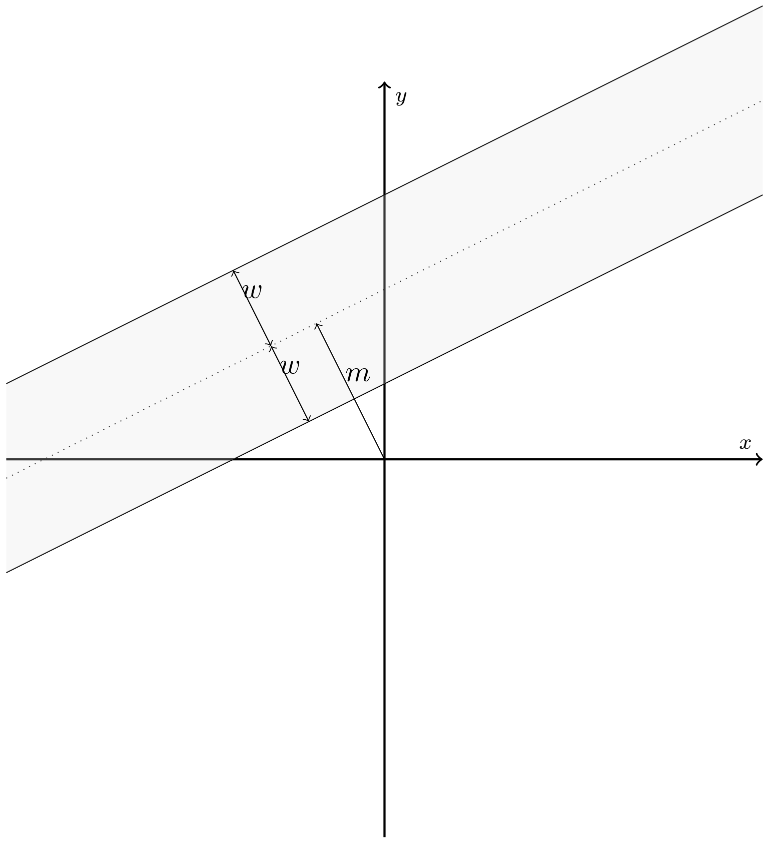
□

Definitie 8. Stel dat X een genormeerde ruimte is. Dan heeft een **plank** in deze ruimte de volgende vorm:

$$\{x \in X : |\phi(x) - m| \leq w\}$$

waarbij $\phi \neq 0$ een functionaal is, $m \in \mathbb{R}$ en $w \in \mathbb{R} \geq 0 \forall i$. Als ϕ een functionaal is met norm 1, dan is w de helft van de breedte van de plank.

In het $\mathbb{R}^2$ vlak ziet dit er als volgt uit:



Figuur 4: Plank in $\mathbb{R}^2$

Voorbeeld 9. Definieer $H_i = \{x \in X : \phi_i(x) = m_i\}$. Omdat we m_i zo kunnen kiezen als we willen kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $||\phi_i|| = 1$. Neem $x_0 \in X : \phi_i(x_0) \neq 0$. Definieer nu $t = \frac{m_i}{\phi_i(x_0)}$ en $y_0 = t \cdot x_0$. Dan $\phi_i(y_0) = t\phi_i(x_0) = m_i$. Bekijk nu

$$\begin{aligned} H_i - y_0 &= \{x - y_0 \in X : \phi_i(x) = m_i\} \\ &= \{z \in X : \phi_i(y_0 + z) = m_i\} \\ &= \{z \in X : \phi_i(y_0) + \phi_i(z) = m_i\} \\ &= \{z \in X : m_i + \phi_i(z) = m_i\} \\ &= \{z \in X : \phi_i(z) = 0\}, \end{aligned}$$

waarbij $z = x - y_0$. Merk op dat $H_i - y_0$ dus een lineaire deelruimte is van X. H_i is dus een verschoven lineaire deelruimte. We zagen in Voorbeeld 7 dat er een $v_i \in X$ bestaat zodat $\phi_i(z) = \langle v_i, z\rangle$. Nu is $H_i - y_0$ te herschrijven naar

$$H_i - y_0 = \{z \in X : \langle v_i, z\rangle = 0\}$$

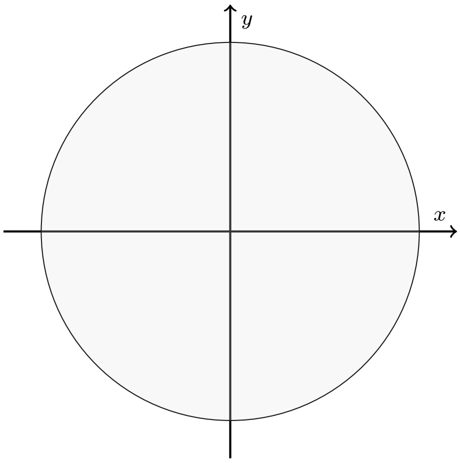
We krijgen dan de volgende stelling

Stelling 10 (**Ball** [1])**.** *Laat $D_1(0)$ de gesloten eenheidsbol van de Banachruimte X zijn, waarbij X eindig dimensionaal. Laat $p_1, ..., p_n$ zo dat:*

$$p_i = \{x \in X : |\phi_i(x) - m_i| \leq w_i\}$$

een verzameling planken zijn. En elke ϕ_i heeft norm 1. Dan geldt als $D_1(0) \subset \bigcup_{i=1}^{n} p_i$ dan $\sum_{i=1}^{n} w_i \geq 1$.

Dit is in $\mathbb{R}^2$ wederom intuïtief relatief duidelijk. Zie ook onderstaande afbeelding.



Figuur 5: Eenheidscirkel in $\mathbb{R}^2$

Om bovenstaande cirkel te bedekken met planken zal de totale som van de breedtes van de planken intuïtief minimaal gelijk moeten zijn aan de diameter van de cirkel. Ofwel de som van de half-breedtes moeten minimaal gelijk zijn aan de straal van de cirkel, welke 1 is.

Lemma 11. *Stelling 10 heeft de volgende drie equivalenties die direct duidelijk zijn: Laat $D_1(0)$ de gesloten einheidsbol van de Banachruimte X zijn, waarbij X eindig dimensionaal. Laat $p_1, ..., p_n$ zodat:*

$$p_i = \{x \in X : |\phi_i(x) - m_i| \leq w_i\}$$

een verzameling planken zijn. En elke ϕ_i heeft norm 1. Dan

1. *Ofwel als $\sum_{i=1}^{n} w_i < 1$ dan geldt $D_1(0) \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} p_i$*
2. *Ofwel als $\sum_{i=1}^{n} w_i < 1$ dan geldt $D_1(0) \cap \bigcap_{i=1}^{n} (p_i^c) \neq \emptyset$*
3. *Ofwel als $\sum_{i=1}^{n} w_i < 1$ dan $\exists \, \|x\| \leq 1$ zodat $\forall i : |\phi_i(x) - m_i| > w_i$*

We laten nu zien dat Stelling 10 ook geldt als de w_i gelijk zijn.

3 Gelijke planken

We gaan laten zien dat we in Stelling 10 kunnen aannemen dat alle w_i gelijk zijn. Hiervoor beginnen we met het bewijzen van twee lemma's.

Lemma 12. *Voor $t, m \in \mathbb{R}$ en $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ geldt:*

$$|t - m| > \frac{p}{q}$$

$$\iff$$

$$|t - m_k| > \frac{1}{2q} \quad \forall k = -(p-1), ..., -1, 0, 1, ..., p$$

waarbij $m_k = m + \frac{k}{q} - \frac{1}{2}$.

Bewijs van lemma 12. Z.v.v.a kunnen we aannemen dat $q = 1$, we kunnen immers alles met q vermenigvuldigen. We zien

$$|t - m| > p$$

$$\iff$$

$$\left|t - m - k + \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} \quad \forall k \in I_p$$

waarbij $I_p = \{-(p-1), ..., -1, 0, 1, ..., p\}$. Z.v.v.a kunnen we nemen $m = 0$, we zien

$$|t| > p \iff \left|t - k + \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} \quad \forall k \in I_p \tag{3.1}$$

Dit is equivalent aan

$$|t| \leq p \iff \exists k \in I_p : \left|t - k + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}. \tag{3.2}$$

Als we nu kiezen $k = \lceil t \rceil \in I_p$. Dan zien we

$$-1 \leq t - \lceil t \rceil \leq 0$$

$$-\frac{1}{2} \leq t - \lceil t \rceil + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

en dus

$$\left|t - k + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

Om de andere kant op te bewijzen gebruiken we (3.1), als $|t| > p$ dan

$$t - k > 0 \quad \text{of} \quad t - k < -1$$

wat equivalent is met

$$t - k + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \quad \text{of} \quad t - k + \frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$$

en zien we

$$\left|t - k + \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} \quad \forall k.$$

Waarmee we beide richtingen hebben aangetoond. □

Lemma 13. *Als stelling 10 geldt met $w_i \in \mathbb{Q}$, dan geldt stelling 10 ook met $w_i \in \mathbb{R}$.*

Bewijs van lemma 13. We gebruiken dat stelling 10 equivalent is aan (3) uit lemma 11.
Stel $\sum_{i=1}^{n} w_i < 1$, met $w_i \in [0, \infty)$ dan **t.b.** $\exists \|x\| \leq 1$ zodat $\forall i$:

$$|\phi_i(x) - m_i| > w_i.$$

Aldus, kies $\widetilde{w_i} \in [0, \infty) \bigcap \mathbb{Q}$ zodat $\widetilde{w_i} > w_i$ maar zodat $\sum_{i=1}^{n} \widetilde{w_i} < 1$. Dan passen we stelling 10 toe op $\widetilde{w_i}$ en zien: $\exists \|x\| \leq 1$:

$$|\phi_i(x) - m_i| > \widetilde{w_i} > w_i \quad \forall i.$$

□

Lemma 14. *Als stelling 10 geldt met alle w_i gelijk, dan geldt stelling 10.*

Bewijs van lemma 14. We gebruiken wederom dat stelling 10 equivalent is aan (3) uit lemma 11.
Z.v.v.a kunnen we wegens lemma 13 aannemen dat $w_i = \frac{p_i}{q_i}$ waarbij $p_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en $q_i \in \mathbb{Z}_{>0}$. Definieer nu

$$q = q_1 \cdot q_2 \cdots q_n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

en

$$\widetilde{q_i} = \frac{q}{q_i} \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

We zien:

$$|\phi_i(x) - m_i| > \frac{p_i}{q_i} = \frac{p_i \cdot \widetilde{q_i}}{q}.$$

Toepassen van lemma 12 geeft:

$$|\phi_i(x) - m_i| > \frac{p_i \cdot \widetilde{q_i}}{q} \quad \forall i$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$|\phi_i(x) - m_{i,k}| > \frac{1}{2q} \quad \forall i, k$$

met $m_{i,k} = m_i + \frac{k}{q} - \frac{1}{2}, i \in \{1, ..., n\}, k \in \{-(p_i - 1), ..., -1, 0, 1, ..., p_i\}$. We zien dat we dus $w_i = \frac{1}{2q}$ kunnen nemen. □

We introduceren nu de volgende stelling en laten vervolgens zien dat stelling 10 uit deze stelling volgt.

Stelling 15. *Als $(\phi_i)_1^n$ eenheidsfunctionalen op een eindig dimensionale genormeerde ruimte X zijn, $(m_i)_1^n$ zijn reële getallen en $w \in \mathbb{R}$ zo dat $\sum_{i=1}^{n} w = 1$ dan is er een punt x in de gesloten eenheidsbol van X zodat:*

$$|\phi_i(x) - m_i| \geq w \qquad \textit{voor elke } i$$

Lemma 16. *Stelling 10 volgt uit stelling 15.*

Bewijs van Lemma 16. We gebruiken dat Stelling 10 equivalent is aan (3) uit Lemma 11. We zagen in Lemma 14 dat het voldoende is 10 aan te tonen waarbij alle w_i gelijk zijn. Aldus
t.b. Stelling 15 $\implies$ (3) met $w_i = w$.
Aldus, laat $\sum_{i=1}^{n} w < 1$, definieer $\widetilde{w} = \frac{w}{\sum_{i=1}^{n} w}$. Dan:

$$\sum_{i=1}^{n} \widetilde{w} = 1.$$

Dus $\exists \, \|x\| \leq 1$ zodat:

$$\forall i : |\phi_i(x) - m_i| \geq \widetilde{w} > w.$$

$\square$

Het bewijzen van Stelling 15 is niet triviaal. We hebben hiervoor verschillende tussenresultaten nodig en zullen de stelling uiteindelijk nogmaals omschrijven naar een andere vorm, voordat we deze bewijzen. Eerst staan we echter stil bij een gevolg van Stelling 15.

4 Opvallend gevolg

We bekijken een gevolg van Stelling 15. Hiervoor hebben we het volgende begrip nodig:

Definitie 17. Een vorm is **symmetrisch rond y** als $\forall x \in X$ geldt:

$$x + y \in C \iff -x + y \in C.$$

We noemen een vorm **symmetrisch** als $\exists y : C$ is symmetrisch rond y.

Dat brengt ons bij het gevolg van stelling 15:

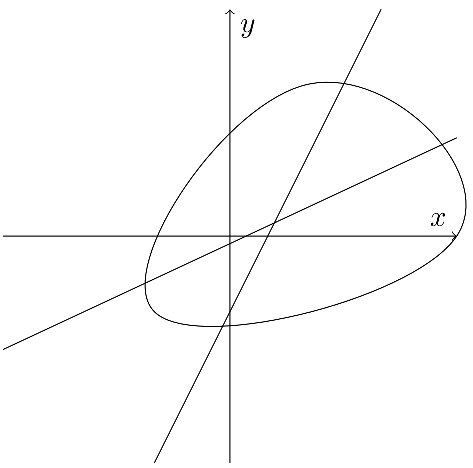
Gevolg 18. *Laat $n \in \mathbb{N}$ en $C \subset X$ waarbij X eindig dimensionaal en zodat C een gesloten convexe symmetrische vorm is in $\mathbb{R}^d$ en $(H_i)_1^n$ zijn hypervlakken, dan is er een verzameling van de vorm*

$$x + \frac{1}{n+1} C \subset C$$

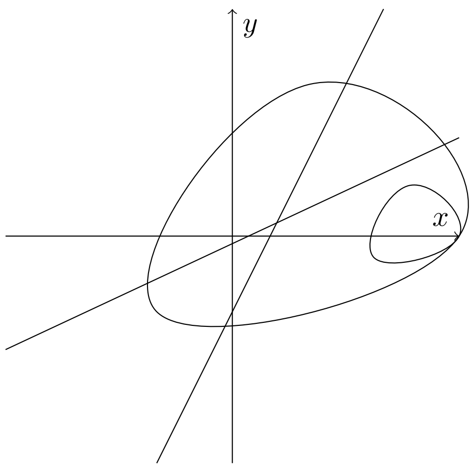
zodat

$$\text{inw } (x + \frac{1}{n+1} C) \cap H_i = \emptyset \qquad \forall i.$$

Bij de $\mathbb{R}^2$ variant van de stelling is het idee dat als je een specifieke vorm hebt die wordt doorsneden door een n aantal rechte lijnen in het vlak en je deze vorm $n + 1$ keer verkleint, dat je dan deze verkleining kan leggen in je oorspronkelijke vorm zonder dat deze snijdt met een rechte lijn. Grafisch ziet dat er als volgt uit:

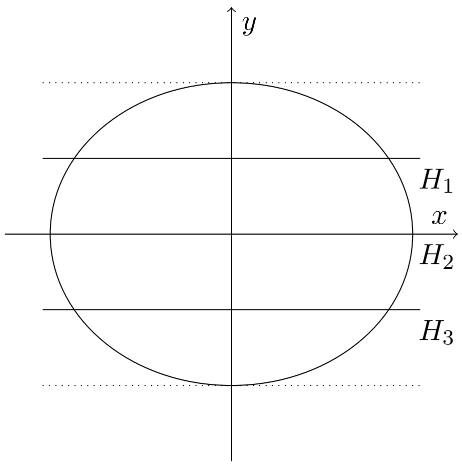


Figuur 6: Vorm met 2 rechte lijnen er door.

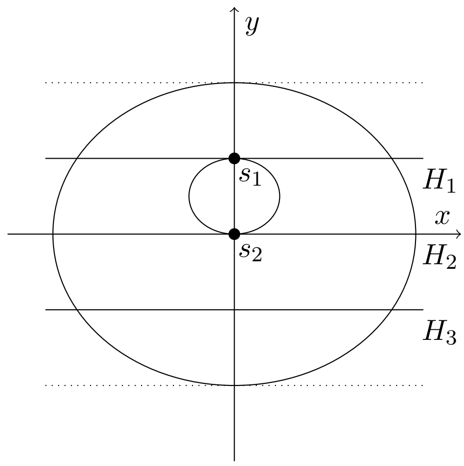


Figuur 7: Vorm met 3 maal eigen verkleining er in

Voorbeeld 19. We laten zien dat het noodzakelijk is om het inwendige te nemen. Als men immers voor een C, n hypervlakken kiest loodrecht staand op de minimale breedte van C. Dan wordt C opgesplitst in $n+1$ stroken. Als men vervolgens C $n+1$ maal verkleint dan is er geen plek om deze verkleining neer te leggen zonder dat deze minimaal 1 raakpunt met een H_i heeft.



Figuur 8: Symmetrische vorm met $n = 3$ hypervlakken loodrecht op minimale breedte.



Figuur 9: Symmetrische vorm met $n + 1 = 4$ maal eigen verkleining er in.

In bovenstaand voorbeeld voor $n = 3$ zijn er twee raakpunten, s_1 en s_2. Door $\text{inw}(x + \frac{1}{n+1}C)$ te nemen is er geen raakpunt meer in s_1 en s_2.

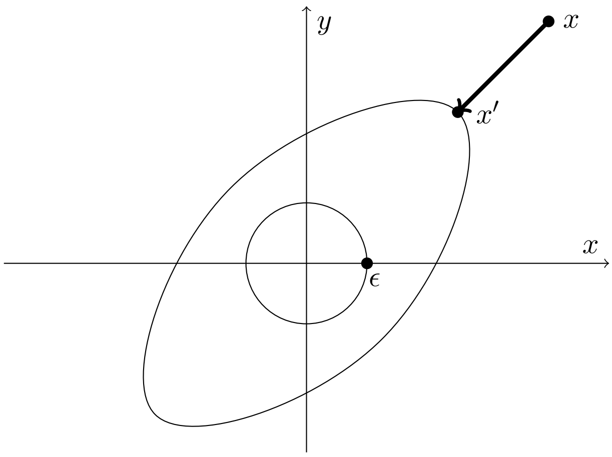
Voordat we Gevolg 18 bewijzen bekijken hebben we eerst nog een aantal lemma's en definities nodig die we zullen gebruiken in het bewijs van Gevolg 18.

Lemma 20. *Laat $C \subset X$ een begrensde convexe verzameling zijn symmetrisch rond 0 zodanig dat $\exists \epsilon > 0 \in \mathbb{R} : B_\epsilon(0) \subset C$. (Om de oorsprong is aan elke kant een beetje C). Dan geldt*

$$p(x) = \inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in C\}$$

is een norm.

Bovenstaande norm wordt de Minkowski-norm genoemd.
Intuïtief kan $p(x)$ als volgt worden gezien:



Figuur 10: x wordt verkleint en komt binnen C te liggen.

x wordt verkleint met factor t waardoor $x' = \frac{x}{t}$ binnen C komt te liggen.

Bewijs van lemma 20. Merk op dat $p(x) \geq 0, \forall x \in X$. Immers omdat C begrensd is geldt dat

$$\forall t \in \{t > 0 : \frac{x}{t} \in C\} : t \geq 0$$

en moet ook het infimum ook ≥ 0 zijn. Merk op dat voor $t' = \left\| \left(\frac{x}{\frac{1}{2}\epsilon} \right) \right\|$ geldt:

$$\left\| \frac{x}{\left\| \left(\frac{x}{\frac{1}{2}\epsilon} \right) \right\|} \right\| = \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon \text{ en } B_\epsilon(0) \subset C$$

dus

$$\frac{x}{\left(\frac{x}{\frac{1}{2}\epsilon} \right)} \in C.$$

Bovendien $t' = \left\| \left(\frac{x}{\frac{1}{2}\epsilon} \right) \right\| < \infty$ en $t \leq t'$ omdat het infimum wordt genomen, dus $t \leq \infty$ en dus $p(x) < \infty$.
Nu laten we zien dat $p(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$. Stel dat $p(x) = 0$ dan is er een rij getallen $a_1 \geq a_2 \geq ...$ afnemend naar 0 zodat $\frac{x}{a_j} \in C$. Dus, omdat C begrensd is, zeg $C \subset \{x \in X : ||x|| \leq k\}$, impliceert de ongelijkheid $||\frac{x}{a_j}|| \leq k$ dat $||x|| \leq \alpha_j k$ voor $j = 1, 2, ...$ en dus $x = 0$.
Vervolgens tonen we aan $p(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot p(x)$ voor $\alpha \geq 0$ en $x \in X$.
Stel dat $\alpha > 0$ en $p(x) = a$. Dan is er een rij getallen $t_1, t_2, ...$ zodat $t_j > 0$,

$$\frac{x}{t_j} \in C \text{ en } \lim_{j \longrightarrow \infty} t_j = a$$

Dan geldt omdat

$$\frac{\alpha \cdot x}{\alpha \cdot t_j} \in C \text{ en } \lim_{j \longrightarrow \infty} \alpha \cdot t_j = \alpha \cdot a$$

$$p(\alpha \cdot x) \leq \alpha \cdot p(x)$$

Op gelijke manier vinden we voor de omgekeerde ongelijkheid dat:

$$\alpha \cdot p(x) = \alpha \cdot p(\alpha^{-1} \alpha \cdot x) \leq \alpha \alpha^{-1} p(\alpha \cdot x) = p(\alpha \cdot x)$$

Hiermee is het bewezen voor $\alpha > 0$, echter geldt het ook voor $\alpha = 0$ want dan immers $p(0) = 0$.
Tenslotte laten we de driehoeksongelijkheid zien. Laat $\epsilon > 0$. Kies $x, y \in X$ en dan zijn er $\alpha > 0$ en $\beta > 0$ zodat $\frac{x}{\alpha} \in C$ en $\frac{y}{\beta} \in C$ en

$$\alpha < p(x) + \frac{\epsilon}{2} \text{ en } \beta < p(y) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Dan:

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{\alpha+\beta} &= \frac{x}{\alpha+\beta} + \frac{y}{\alpha+\beta} \\ &= \frac{x}{\alpha+\beta} \cdot \frac{\alpha}{\alpha} + \frac{y}{\alpha+\beta} \cdot \frac{\beta}{\beta} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{y}{\beta}. \end{aligned}$$

Merk op dat:

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta} = 1.$$

Dus volgt uit de definitie van convexiteit van C dat:

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{y}{\beta} \in C.$$

En geldt dat:

$$p(x+y) \leq \alpha + \beta < p(x) + p(y) + \epsilon.$$

Omdat ϵ willekeurig was vinden we:

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

Waarmee we hebben aangetoond dat $p(x)$ een norm is.

$\square$

Definitie 21. We definiëren de **open eenheidsbol** $B_1^p(0)$ en de **gesloten eenheidsbol** $D_1^p(0)$ als volgt:

$$\begin{aligned} B_1^p(0) &:= \{x \in X : p(x) < 1\} \\ D_1^p(0) &:= \{x \in X : p(x) \leq 1\}. \end{aligned}$$

Waarbij $p(x)$ zoals beschreven in lemma 20.

Lemma 22. *Laat C zijn zoals in lemma 20. Dan geldt:*

$$\overline{B_1^p(0)} = D_1^p(0) \tag{4.1}$$

$$B_1^p(0) = inw\, C. \tag{4.2}$$

$$D_1^p(0) = \overline{C} \tag{4.3}$$

Dit betekent dat indien C open is, (X,p) als eenheidsbol C heeft.

Bewijs van lemma 22. We laten eerst (4.1) zien. Kies $w \in \overline{B_1^p(0)}$ en laat (x_n) een rijtje zijn in $B_1^p(0)$ dat convergeert naar w. Dan geldt $p(x_n) < 1$ voor alle n, wegens de continuiteit van de norm geeft dat:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} p(x_n) = p(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n) = p(w) \leq 1.$$

Dus zien we $w \in D_1^p(0)$, en volgt $\overline{B_1^p(0)} \subset D_1^p(0)$.
Kies $w \in D_1^p(0)$. Als $p(w) = 1$ dan $y_n = (1 - \frac{1}{n})w \in B_1^p(0)$ voor alle n en ook $y_n \longrightarrow w$. Daarom is $w \in \overline{B_1^p(0)}$ en dus ook $D_1^p(0) \subset \overline{B_1^p(0)}$, waarmee we hebben laten zien dat $\overline{B_1^p(0)} = D_1^p(0)$.

We laten nu (4.2) zien. Kies $x \in B_1^p(0)$. Dan geldt $\inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in C\} < 1$. Er is dus een $t \in (0,1)$ zodat $\frac{x}{t} \in C$. Omdat C convex is geldt dan:

$$\begin{aligned} t \cdot \frac{x}{t} + (1-t) \cdot 0 &\in C \\ t \cdot \frac{x}{t} &\in C \\ x &\in C. \end{aligned}$$

Dus

$$B_1^p(0) \subset C, \tag{4.4}$$

en omdat $B_1^p(0)$ open is vinden we $B_1^p(0) \subset \text{inw}\, C$.
Kies nu $x \in \text{inw}\, C$ en kies $\epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subset C$. Dan

$$\begin{aligned} x + \frac{\epsilon}{2} \cdot x &\in B_\epsilon(x) \subset C \\ \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) x &\in C. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Kies nu $t = \frac{1}{1+\frac{\epsilon}{2}}$. Dan geldt dat $t \in (0,1)$ en uit (4.5) volgt

$$\frac{x}{t} = \frac{x}{\frac{1}{1+\frac{\epsilon}{2}}} = x \cdot \frac{1+\frac{\epsilon}{2}}{1} = x\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \in C.$$

Waarmee we zien dat $x \in B_1^p(0)$. We concluderen $B_1^p(0) = \text{inw}\, C$

We laten nu (4.3) zien. Vanwege (4.4) weten we dat ook $\overline{B_1^p(0)} \subset \overline{C}$. En zien we:

$$D_1^p(0) = \overline{B_1^p(0)} \subset \overline{C}.$$

Verder zagen we dat inw $C \subset B_1^p(0)$. Dus ook $\overline{\text{inw } C} \subset \overline{B_1^p(0)} = D_1^p(0)$. En volgt:

$$\overline{C} \subset D_1^p(0)$$

We concluderen $D_1^p(0) = \overline{C}$.
En dus zien we ook dat als C open is dan heeft (X, p) als eenheidsbol C.

□

We bekijken nu nog één definitie en één resultaat nodig om Gevolg 18 te kunnen aantonen. Daarnaast doen we ook nog enkele observaties.

Definitie 23.

$$X^* := \{\phi : X \longrightarrow \mathbb{R} : \phi \text{ is lineair}\}$$

Lemma 24. *Laat $\phi \in X^*$. Dan is*

$$||\phi|| \overset{def}{=} \sup_{||x|| \leq 1} |\phi(x)|$$

een goed gedefinieerde norm.

Bewijs van lemma 24. We laten eerst zien dat $||\phi|| \geq 0$ en dat $||\phi|| = 0 \Longrightarrow x = 0$. Het is triviaal dat $||\phi|| \geq 0$ vanwege de absolute waarde. Verder

$$||\phi|| = 0 \Longrightarrow \sup_{||x|| \leq 1} |\phi(x)| = 0 \Longrightarrow 0 \leq \phi(x) \leq 0 \Longrightarrow \phi(x) = 0 \forall x.$$

We laten nu zien dat $||\alpha\phi|| = |\alpha| \cdot ||x|| \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Aldus:

$$||\alpha\phi|| = \sup_{||x|| \leq 1} |\alpha\phi(x)| = \sup_{||x|| \leq 1} |\alpha||\phi(x)| = |\alpha| \sup_{||x|| \leq 1} |\phi(x)| = |\alpha| \cdot ||\phi||.$$

Tenslotte laten we zien dat $||\phi_1 + \phi_2|| \leq ||\phi_1|| + ||\phi_2|| \ \forall \phi_i \in X^*$. Aldus:

$$\begin{aligned} |\phi_1(x) + \phi_2(x)| &\leq |\phi_1(x)| + |\phi_2(x)| \\ &\leq ||\phi_1|| + ||\phi_2|| \end{aligned}$$

Dus

$$||\phi_1(x) + \phi_2(x)|| \leq ||\phi_1|| + ||\phi_2||.$$

□

Dan zijn we nu aangekomen bij het bewijs van Gevolg 18.

Bewijs van Gevolg 18. Laat X een eindig dimensionale vectorruimte zijn over $\mathbb{R}$. Laat $\{x_1, ..., x_n\}$ een basis zijn voor X. Dan geldt $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ met $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. We gebruiken voor ϕ_i de norm zoals gedefinieerd is in lemma 24.

We gebruiken nu Stelling 15. Waarbij we de w_i gelijk kiezen vanwege lemma 14. We kiezen $w_i = \frac{1}{n}$. En passen de stelling toe op een willekeurige $\widetilde{m_i}$, $\exists \widetilde{x} : ||\widetilde{x}|| \leq 1$.

$$|\phi_i(\widetilde{x}) - \widetilde{m_i}| \geq \frac{1}{n}.$$
$$|\frac{n}{n+1}\phi_i(\widetilde{x}) - \frac{n}{n+1}\widetilde{m_i}| \geq \frac{1}{n+1}$$
$$|\phi_i(\frac{n}{n+1}\widetilde{x}) - \frac{n}{n+1}\widetilde{m_i}| \geq \frac{1}{n+1}.$$

Benoem nu $x = \frac{n}{n+1}\widetilde{x}$ en ook $\widetilde{m_i} = \frac{n}{n+1}m_i$. Dan volgt

$$|\phi_i(x) - m_i| \geq \frac{1}{n+1}.$$

C is de eenheidsbol van (X, p) (Lemma 22), dus aangezien $||\widetilde{x}|| \leq 1$ en C gesloten geldt $\widetilde{x} \in C$ en zien we ook dat $x = \frac{n}{n+1}\widetilde{x} \in \frac{n}{n+1}C$.

We laten nu zien dat $x + \frac{1}{n+1}C \subset C$. Merk op dat $x + \frac{1}{n+1}C = \{x + \frac{1}{n+1}y : y \in C\}$. Kies nu $y \in C$ willekeurig. Dan moeten we aantonen dat: $x + \frac{y}{n+1} \in C$.

$$x + \frac{y}{n+1} = \frac{n}{n+1}\widetilde{x} + \frac{1}{n+1}y.$$

Omdat C convex is weten we dat $\forall x_1, ...x_n \in C, \forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in [0, 1] : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ geldt dat

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C.$$

Dit volgt uit het toepassen van inductie op de definitie van convex. Merk op dat $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 1$ en $\widetilde{x}, y \in C$ dus volgt $x + \frac{y}{n+1} \in C$.

Als $y \in \text{inw} \left(x + \frac{1}{n+1}C\right)$, dan $(y - x) \in \frac{1}{n+1}\text{inw } C$. Dus volgt dat $||y - x|| < \frac{1}{n+1}$. Er geldt:

$$\begin{aligned}|\phi_i(y) - \phi_i(x)| &= |\phi_i(x - y)| \\ &\leq ||\phi_i|| \cdot ||y - x|| < \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

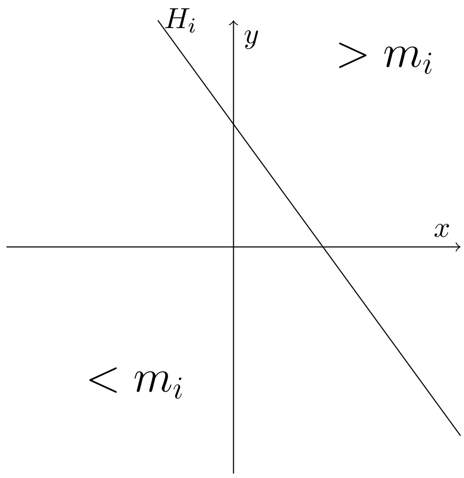
Dit geeft ons

$$|(\phi_i(y) - m_i) - (\phi_i(x) - m_i)| < \frac{1}{n+1}. \tag{4.6}$$

We laten nu zien dat $\phi(y) - m_i$ hetzelfde teken heeft als $\phi_i(x) - m_i$. We weten dat $|\phi(x) - m_i| \geq \frac{1}{n+1}$. We onderscheiden de volgende twee gevallen.
Geval 1: $\phi(x) - m_i > \frac{1}{n+1}$
Om (4.6) te laten kloppen moet wel $\phi(y) - m_i \geq 0$

Geval 2: $\phi(x) - m_i < -\frac{1}{n+1}$
Om (4.6) te laten kloppen moet nu wel $\phi(y) - m_i \leq 0$
En zien we dus dat $\phi(y) - m_i$ hetzelfde teken heeft als $\phi_i(x) - m_i$. We kunnen concluderen dat als x aan een bepaalde kant van H_i zit dan zit $x + \frac{1}{n+1}C$ aan diezelfde kant van H_i. Ofwel

$$\text{inw } (x + \frac{1}{n+1}C) \cap H_i = \emptyset \qquad \forall i.$$



Figuur 11: Ligging van x en $x + \frac{1}{n+1}C$ is aan dezelfde kant van H_i

$\square$

5 Ball's formulering voor symmetrische matrices

Om stelling 15 uiteindelijk te kunnen bewijzen is het handig om over te gaan naar een matrixvariant van deze stelling.
Deze variant is stelling 25. We zullen laten zien dat stelling 15 en stelling 25 equivalent zijn.

Stelling 25. *Laat $A = (a_{ij})$ een $n \times n$ matrix zijn met $a_{ii} = 1 \forall i$. Laat $(m_i)_1^n$ een rij zijn van reële getallen en $w \in \mathbb{R}$ met $w \geq 0$ zodat $\sum_{i=1}^n w \leq 1$. Dan is er een rij $(\lambda_j)_1^n$ met*

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \leq 1$$

zodat voor elke i,

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j - m_i \right| \geq w. \tag{5.1}$$

Lemma 26. *stelling 15 en stelling 25 zijn equivalent.*

Bewijs van Lemma 26. We laten eerst zien dat stelling 15 volgt uit stelling 25. Laat $(\phi_i)_1^n$ een rij functionalen zijn met norm 1 op X en $\sum_{i=1}^n w = 1$. Construeer de matrix $A = (a_{ij})$ door:

$$a_{ij} = \phi_i(x_j), \qquad 1 \leq i, \quad j \leq n$$

waar voor elke j, x_j een punt is in de eenheidsbol van X zodat ϕ_j zijn norm van 1 aanneemt:

$$\phi_j(x_j) = ||x_j|| = 1.$$

Merk op dat een dusdanig punt x_j bestaat wegens het feit dat $\overline{B}_X$ compact is dus ϕ_j neemt zijn maximum van 1 aan op $\overline{B}_X$ wegens de extremumstelling (Extreme value theorem). Als $(\lambda_j)_1^n$ een rij reële getallen is met

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1$$

dan heeft de vector $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$ ten hoogste norm 1, en geldt er voor elke i,

$$\phi_i(x) = \sum_j a_{ij}\lambda_j$$

Dus (5.1) geeft:

$$|\phi_i(x) - m_i| \geq w$$

Waarmee we hebben laten zien dat stelling 15 volgt uit stelling 25.
We laten nu zien dat stelling 25 volgt uit stelling 15.
Stel stelling 25 klopt met

$$\sum_{i=1}^{n} w = 1$$

We laten zien dat dan stelling 25 ook klopt met $\sum_{i=1}^n w \le 1$.
Aldus neem w zodat $\sum_{i=1}^n w \le 1$, definieer

$$\widetilde{w} = \frac{w}{\sum_{j=1}^n w} \qquad \left(\sum_{i=1}^n w \neq 0\right).$$

Dan $\sum_{j=1}^n \widetilde{w} = 1$. Dus volgt $\exists \widetilde{\lambda}_j : \sum_{i=1}^n \left|\widetilde{\lambda}_j\right| \le 1$ en $\forall i$

$$\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}\widetilde{\lambda}_j - \frac{m_i}{\sum_{j=1}^n w}\right| \ge \widetilde{w}.$$

Definieer $\lambda_j = \widetilde{\lambda}_j \cdot \sum_{j=1}^n w$, dan geldt $\lambda_j \le 1$. En zien we:

$$\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}\lambda_j - m_i\right| \ge w.$$

We hoeven nu dus nog enkel te laten zien dat stelling 25 volgt uit stelling 15 waarbij we mogen uitgaan van $\sum_{i=1}^n w = 1$. Aldus, laat $\varphi_i : l_n^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$. Dan $\|\varphi_i\| \ge 1$. Definieer $\phi_i = \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|}$. Dan $\|\phi_i\| = 1$. Uit stelling 15 volgt $\exists \lambda \in l_n^1$:

$$\left|\phi_i(\lambda) - \frac{m_i}{\|\varphi_i\|}\right| \ge w \text{ en } \|\lambda\| \le 1.$$

Waarna volgt:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}\lambda_j - m_i\right| &= |\varphi_i(\lambda) - m_i| \\ &= \left|\phi_i(\lambda) - \frac{m_i}{\|\varphi_i\|}\right| \|\varphi_i\| \ge w\,\|\varphi_i\| \ge w.\end{aligned}$$

We concluderen dat stelling 25 volgt uit stelling 15. □

Het bewijzen van stelling 25 (en daarmee ook 15) is nu nog steeds lastig. Daarom beginnen we met het bewijzen van nog een variant. Ditmaal een variant van stelling 25 maar dan met symmetrische matrices.

Stelling 27. *Laat $H = (h_{ij})$ een symmetrische $n \times n$ matrix zijn met de waarden op de diagonaal gelijk aan 1. Zij $(\mu_i)_1^n$ een rij van reële getallen en $(\theta_i)_1^n$ een rij van positieve getallen. Dan is er een rij van tekens $(\epsilon_j)_1^n$ met $\epsilon_j = \pm 1 \forall j$ zodat voor elke i:*

$$|\sum_j h_{ij}\epsilon_j\theta_j - \mu_i| \ge \theta_i.$$

Bewijs. Kies de tekens $(\epsilon_j)_1^n$ zodanig dat

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}\epsilon_i\epsilon_j\theta_i\theta_j - 2\sum_{i=1}^n \epsilon_i\theta_i\mu_i$$

maximaal is. Kies een $k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n$ vast en definieer $(\delta)_1^n$ door

$$\delta_j = \begin{cases} \epsilon_j & \text{als } j \neq k \\ -\epsilon_j & \text{als } j = k \end{cases}$$

Dan geldt omdat $(\epsilon_j)_1^n$ zo waren gekozen dat $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}\epsilon_i\epsilon_j\theta_i\theta_j - 2\sum_{i=1}^n \epsilon_i\theta_i\mu_i$ maximaal is dat:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}\delta_i\delta_j\theta_i\theta_j - 2\sum_{i=1}^n \delta_i\theta_i\mu_i \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}\epsilon_i\epsilon_j\theta_i\theta_j - 2\sum_{i=1}^n \epsilon_i\theta_i\mu_i.$$

Waarna volgt:

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}\epsilon_i\epsilon_j\theta_i\theta_j - 2\sum_{i=1}^n \epsilon_i\theta_i\mu_i - (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}\delta_i\delta_j\theta_i\theta_j - 2\sum_{i=1}^n \delta_i\theta_i\mu_i).$$

Uitwerken geeft:

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}\epsilon_i\epsilon_j\theta_i\theta_j - 2\sum_{i=1}^n \epsilon_i\theta_i\mu_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}\delta_i\delta_j\theta_i\theta_j + 2\sum_{i=1}^n \delta_i\theta_i\mu_i.$$

Herpositioneren geeft:

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}\epsilon_i\epsilon_j\theta_i\theta_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}\delta_i\delta_j\theta_i\theta_j + 2\sum_{i=1}^n \delta_i\theta_i\mu_i - 2\sum_{i=1}^n \epsilon_i\theta_i\mu_i. \quad (5.2)$$

We bekijken eerst de twee enkele sommen. Deze kunnen als volgt worden opgeschreven:

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^n \delta_i\theta_i\mu_i - 2\sum_{i=1}^n \epsilon_i\theta_i\mu_i &= 2\sum_{i\neq k}^n \epsilon_i\theta_i\mu_i + 2(-\epsilon_k)\theta_k\mu_k - 2\sum_{i\neq k}^n \epsilon_i\theta_i\mu_i - 2\epsilon_k\theta_k\mu_k \\ &= \cancel{2\sum_{i\neq k}^n \epsilon_i\theta_i\mu_i - 2\sum_{i\neq k}^n \epsilon_i\theta_i\mu_i} + 2(-\epsilon_k)\theta_k\mu_k - 2\epsilon_k\theta_k\mu_k \\ &= -2\epsilon_k\theta_k\mu_k - 2\epsilon_k\theta_k\mu_k \\ &= -4\epsilon_k\theta_k\mu_k. \end{aligned}$$

We bekijken nu de dubbele sommen. Omdag H symmetrisch kunnen we gebruiken dat $h_{ij} = h_{ji}$.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}\epsilon_i\epsilon_j\theta_i\theta_j}_{a} - \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij}\delta_i\delta_j\theta_i\theta_j}_{b}.$$

We bekijken eerst a

$$\begin{aligned}
a &= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j\neq k}^{n} h_{ij}\epsilon_i\epsilon_j\theta_i\theta_j + h_{ik}\epsilon_i\epsilon_k\theta_i\theta_k) \\
&= \sum_{i\neq k}^{n}(\sum_{j\neq k}^{n} h_{ij}\epsilon_i\epsilon_j\theta_i\theta_j + h_{ik}\epsilon_i\epsilon_k\theta_i\theta_k) + \sum_{j\neq k}^{n} h_{kj}\epsilon_k\epsilon_j\theta_k\theta_j + h_{kk}\epsilon_k\epsilon_k\theta_k\theta_k \\
&= \sum_{i\neq k}^{n}\sum_{j\neq k}^{n} h_{ij}\epsilon_i\epsilon_j\theta_i\theta_j + \sum_{i\neq k}^{n} h_{ik}\epsilon_i\epsilon_k\theta_i\theta_k + \sum_{j\neq k}^{n} h_{kj}\epsilon_k\epsilon_j\theta_k\theta_j + h_{kk}\epsilon_k\epsilon_k\theta_k\theta_k \\
&= \sum_{i\neq k}^{n}\sum_{j\neq k}^{n} h_{ij}\epsilon_i\epsilon_j\theta_i\theta_j + 2\sum_{j\neq k}^{n} h_{kj}\epsilon_k\epsilon_j\theta_k\theta_j + h_{kk}\epsilon_k\epsilon_k\theta_k\theta_k.
\end{aligned}$$

We bekijken nu b

$$\begin{aligned}
b &= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j\neq k}^{n} h_{ij}\delta_i\epsilon_j\theta_i\theta_j + h_{ik}(-\epsilon_i)\epsilon_k\theta_i\theta_k) \\
&= \sum_{i\neq k}^{n}(\sum_{j\neq k}^{n} h_{ij}\epsilon_i\epsilon_j\theta_i\theta_j - h_{ik}\epsilon_i\epsilon_k\theta_i\theta_k) + \sum_{j\neq k}^{n} h_{kj}(-\epsilon_k)\epsilon_j\theta_k\theta_j - (h_{kk}(-\epsilon_k)\epsilon_k\theta_k\theta_k \\
&= \sum_{i\neq k}^{n}\sum_{j\neq k}^{n} h_{ij}\epsilon_i\epsilon_j\theta_i\theta_j - \sum_{i\neq k}^{n} h_{ik}\epsilon_i\epsilon_k\theta_i\theta_k - \sum_{j\neq k}^{n} h_{kj}\epsilon_k\epsilon_j\theta_k\theta_j + h_{kk}\epsilon_k\epsilon_k\theta_k\theta_k \\
&= \sum_{i\neq k}^{n}\sum_{j\neq k}^{n} h_{ij}\epsilon_i\epsilon_j\theta_i\theta_j - 2\sum_{j\neq k}^{n} h_{kj}\epsilon_k\epsilon_j\theta_k\theta_j + h_{kk}\epsilon_k\epsilon_k\theta_k\theta_k.
\end{aligned}$$

Er volgt

$$\begin{aligned}
a - b &= 4\sum_{j\neq k}^{n} h_{kj}\epsilon_k\epsilon_j\theta_k\theta_j \\
&= 4\epsilon_k\theta_k\sum_{j\neq k}^{n} h_{kj}\epsilon_j\theta_j.
\end{aligned}$$

We hebben nu alles om uitdrukking (5.2) korter te schrijven en vinden:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\epsilon_i\epsilon_j\theta_i\theta_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\delta_i\delta_j\theta_i\theta_j + 2\sum_{i=1}^{n}\delta_i\theta_i\mu_i - 2\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i\theta_i\mu_i \\
&= 4\epsilon_k\theta_k\sum_{j\neq k}^{n} h_{kj}\epsilon_j\theta_j - 4\epsilon_k\theta_k\mu_k.
\end{aligned}$$

Omdat er geldt dat $h_{kk} = 1$ vinden we:

$$\begin{aligned}
0 &\leq 4\epsilon_k\theta_k \sum_{j\neq k}^{n} h_{kj}\epsilon_j\theta_j - 4\epsilon_k\theta_k\mu_k \\
&= 4\epsilon_k\theta_k(\sum_{j=1}^{n} h_{kj}\epsilon_j\theta_j - h_{kk}\epsilon_k\theta_k) - 4\epsilon_k\theta_k\mu_k \\
&= 4\epsilon_k\theta_k \sum_{j=1}^{n} h_{kj}\epsilon_j\theta_j - 4\underbrace{\epsilon_k^2}_{=1}\theta_k^2 - 4\epsilon_k\theta_k\mu_k \\
&= 4\epsilon_k\theta_k \sum_{j=1}^{n} h_{kj}\epsilon_j\theta_j - 4\theta_k^2 - 4\epsilon_k\theta_k\mu_k
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
4\theta_k^2 &\leq 4\epsilon_k\theta_k(\sum_{j=1}^{n} h_{kj}\epsilon_j\theta_j - \mu_k) \\
&= 4\theta_k|\sum_{j=1}^{n} h_{kj}\epsilon_j\theta_j - \mu_k|,
\end{aligned}$$

wat als conclusie geeft dat:

$$\theta_k \leq |\sum_{j=1}^{n} h_{kj}\epsilon_j\theta_j - \mu_k|.$$

Omdat k willekeurig was hebben we nu de stelling bewezen. □

Voorbeeld 28. Merk op dat de eis van symmetrie noodzakelijk is. Bij de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ met $\theta_1 = \theta_2 = 1$ en $\mu_1 = \mu_2 = 0$ geldt stelling 27 bijvoorbeeld niet. Immers voor $i = 1$

$$\begin{aligned}
|\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\epsilon_j - \mu_i| &= |(1\epsilon_1 - 0) + (1\epsilon_2 - 0)| \\
&= |\epsilon_1 + \epsilon_2| \geq 1.
\end{aligned}$$

Merk op dat dit betekent dat ofwel

$$\epsilon_1 = 1 \text{ en } \epsilon_2 = 1 \tag{5.3}$$

ofwel

$$\epsilon_1 = -1 \text{ en } \epsilon_2 = -1. \tag{5.4}$$

We bekijken nu het geval voor $i = 2$

$$\begin{aligned}
|\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\epsilon_j - \mu_i| &= |(-1\epsilon_1 - 0) + (1\epsilon_2 - 0)| \\
&= |-\epsilon_1 + \epsilon_2| \geq 1.
\end{aligned}$$

Dit klopt enkel als ϵ_1 en ϵ_2 tegengestelde tekens hebben, maar we zagen zojuist bij (5.3) en (5.4) dat ze gelijk teken moeten hebben. Dus zien we dat stelling 27 niet geldt voor deze matrix.

We kunnen nu nog niet direct overgaan tot het bewijs van stelling 25. Daarvoor zullen we eerst nog enkele nieuwe notaties en nieuwe resultaten nodig hebben. In het volgende hoofdstuk wordt daarmee begonnen.

6 De trace van een matrix

In dit hoofdstuk zullen enkele nieuwe begrippen worden geïntroduceerd en zullen enkele nieuwe, later benodigde resultaten worden gevonden.

Definitie 29. Een $n \times n$ matrix A is **positief definiet** als $x^T Ax$ een getal groter dan 0 oplevert voor elke vector $x = x_1, ..., x_n$ met $x_i \in \mathbb{R} \forall i$.

Definitie 30. Een **positieve matrix** is een matrix die symmetrisch is en positief definiet.

Definitie 31. Een **singuliere waardes** van een $m \times n$ matrix A zijn de positieve wortels van de eigenwaarden van de $n \times n$ matrix $A^T A$.

We merken daarbij op dat de eigenwaardes van $A^T A$ niet-negatief zijn, immers:

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle A^T Av, v\rangle = \langle Av, Av\rangle \geq 0.$$

Definitie 32. Laat $\mathbb{R}^n$ een eindig dimensionale ruimte zijn met $\{e_i\}_{i\in I}$ als orthonormale basis voor H. De **trace** van een matrix A wordt gegeven door

$$trace(A) := \sum_{i=1}^{n} e_i^T Ae_i$$

waarbij $(e_i)_1^n$ een orthonormale basis is voor $\mathbb{R}^n$

We bekijken een aantal lemma's over de trace van een matrix. Welke we hieronder zullen bewijzen.

Lemma 33. *$trace(A)$ hangt niet af van de keuze voor de orthonormale basis.*

Lemma 34.

$$trace(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Waarbij $(A)_{ii}$ het element van a is in kolom i en rij i.

Lemma 35.

$$trace(AB) = trace(BA)$$

Lemma 36.

$$trace(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Waarbij λ_i de eigenwaardes van A zijn, inclusief algebraische multipliciteiten.

Bewijs van lemma 33. Laat u_k en e_i twee orthonormale basissen zijn voor $\mathbb{R}^n$.
Te bewijzen:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^T Ae_i = \sum_{k=1}^{n} u_k^T Au_k.$$

Aldus, we kunnen willekeuige x en $y \in \mathbb{R}^n$ schrijven als

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i^T x\, e_i \qquad \text{en} \qquad y = \sum_{k=1}^{n} u_k^T y\, u_k. \tag{6.1}$$

Neem nu $y = e_i$ dan vinden we:

$$e_i = \sum_{k=1}^{n} u_k^T e_i u_k$$

vermenigvuldiging met A geeft

$$\begin{aligned} Ae_i &= A \sum_{k=1}^{n} u_k^T e_i u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} u_k^T e_i A u_k. \end{aligned} \tag{6.2}$$

We gebruiken nu (6.2) om $\sum_{i=1}^{n} e_i^T A e_i$ te herschrijven

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} e_i^T A e_i &= \sum_{i=1}^{n} e_i^T \left(\sum_{k=1}^{n} u_k^T e_i A u_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} e_i^T u_k^T e_i A u_k \end{aligned} \tag{6.3}$$

We nemen nu $x = u_k^T$ en vinden via (6.1):

$$u_k^T = \sum_{i=1}^{n} e_i^T u_k^T e_i$$

vermenigvuldigen met A geeft

$$u_k^T A = \sum_{i=1}^{n} e_i^T u_k^T e_i A. \tag{6.4}$$

We gebruiken (6.4) om $\sum_{i=1}^{n} u_k^T A u_k$ te herschrijven

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} u_k^T A u_k &= \sum_{u=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} e_i^T u_k^T e_i A \right) u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} e_i^T u_k^T e_i A u_k. \end{aligned} \tag{6.5}$$

We zien dat (6.3) = (6.5) en dus dat

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^T A e_i = \sum_{k=1}^{n} u_k^T A u_k.$$

Waarmee we hebben laten zien dat de *trace* niet afhangt van de keuze van orthonormale basis. □

Bewijs van lemma 34. Merk op dat we net zagen dat de keuze voor basis niet uitmaakt voor de *trace*. Daarom is het voldoende in dit bewijs van de eenheidsvectoren (e_i) uit te gaan. Aldus, Ae_i geeft een vector die gelijk is aan kolom i van de matrix A. Door vervolgens aan de linkerkant te vermenigvuldigen met e_i^T krijgen we de precies de waarde op positie i van deze vector. In totaal zien we dus dat $e_i^T Ae_i$ precies de waarde van A oplevert in kolom i en rij i ofwel het levert a_{ii} op. □

Bewijs van lemma 35. We maken gebruik van lemma 34 en van het volgende feit dat volgt uit de definitie van matrixvermenigvuldiging:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Aldus

$$\begin{aligned} trace(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Verder weten we ook: $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$ en dus $(BA)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki}$, hernoemen van k naar i en hernoemen van i naar k geeft dat:

$$(BA)_{kk} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik}.$$

We bekijken

$$\begin{aligned} trace(BA) &= \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Waarbij we in de laatste stap de sommen mogen omdraaien. We zien (6.6) = (6.7), en concluderen

$$trace(AB) = trace(BA).$$

□

Bewijs van lemma 36. We merken op dat elke matrix A te schrijven is in Jordan-normaalvorm. Dat houdt in dat

$$A = TJT^{-1}$$

Waarbij J een $n \times n$ bovendriehoeksmatrix is met op de diagonaal de eigenwaardes en T een inverteerbare $n \times n$ matrix is. Verder maken we gebruik van lemma 35 en vinden:

$$trace(A) = trace(TJT^{-1}) = trace(TT^{-1}J) = trace(J) = \sum_{i=1}^{n} j_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Waarmee we hebben laten zien dat $trace(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. $\square$

De laatste voor ons belangrijke toepassing van de trace staat beschreven in het volgende hoofdstuk, waar een nieuwe matrixnorm zal worden geïntroduceerd welke gebaseerd is op de trace.

7 De trace-norm

Definitie 37. De **trace-class** $||A||_{C^1}$ van een reële matrix A is gegeven door

$$||A||_{C^1} = trace(|A|)$$

waarbij $|A| := (A^T A)^{\frac{1}{2}}$.

Er wordt in bovenstaande definitie $|A|$ gebruikt in plaats van A omdat er negatieve waarden uit $trace(A)$ kunnen komen, terwijl $|A|$ slechts positieve waarden op de diagonaal heeft en dus is $trace(|A|)$ positief. Dit laten we in het bewijs van het volgende lemma in detail zien.

Lemma 38. *De trace-class $||A||_{C^1}$ is een goed gedefineerde norm.*

Bewijs van lemma 38. We laten eerst zien $||A||_{C^1} \geq 0$. [3] Aldus, merk op dat omdat

$$||A||_{C^1} = trace(|A|) = trace((A^T A)^{\frac{1}{2}}) = \sum_{i=1}^{n} ((A^T A)^{\frac{1}{2}})_{ii}$$

het voldoende is te laten zien dat $(A^T A)_{ii} \geq 0$. Er geldt dat

$$(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

en dus levert

$$(A^T A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$$

na het nemen van $j = i$ het volgende resultaat

$$(A^T A)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{ki}^2}_{\geq 0} \geq 0$$

en vinden we

$$||A||_{C^1} \geq 0.$$

We tonen nu aan dat $||A||_{C^1} = 0 \Longrightarrow A = 0$. Aldus, als $||A||_{C^1} = 0$ dan moet gelden

$$\sum_{i=1}^{n} ((A^T A)^{\frac{1}{2}})_{ii} = 0.$$

Zonet zagen we dat $(A^T A)_{ii} \geq 0$. Dus weten we dat in ons geval nu moet gelden: $(A^T A)_{ii} = 0$. En zien we dat

$$0 = (A^T A)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2$$

impliceert dat $a_{ki} = 0, \forall i \forall k$ en dus $A = 0$.
We laten nu zien dat $\alpha ||A||_{C^1} = ||\alpha A||_{C^1}$. Aldus,

$$\begin{aligned}
\alpha ||A||_{C^1} &= \alpha \big(\sum_{i=1}^{n} ((A^T A)^{\frac{1}{2}})_{ii} \big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha ((A^T A)^{\frac{1}{2}})_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\alpha (A^T A)^{\frac{1}{2}})_{ii} \\
&= trace(\alpha |A|) \\
&= ||\alpha A||_{C^1}.
\end{aligned}$$

Tenslotte zouden we de driehoeksongelijkheid moeten aantonen. Echter gebruiken we deze eigenschap niet in de rest van dit verslag. Het bewijs laten we daarom achterwege. $\square$

Lemma 39. *Voor algemene matrix A geldt*

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_{C^1}.$$

Bewijs van lemma 39. We laten eerst zien dat $\|A\|_{C^1} = \sum_{i=1}^{n} s_i$.

$$\|A\|_{C^1} = trace \left(\left(A^T A \right)^{\frac{1}{2}} \right). \tag{7.1}$$

Wegens lemma 36 is dit gelijk aan de som van de eigenwaarde van $\left(A^T A\right)^{\frac{1}{2}}$. We weten dat geldt $A^T A = UDU^T$ met $D = diag\{s_1^2, ...s_n^2\}$ waarbij $s_1^2, ...s_n^2$ de eigenwaarden van $A^T A$ zijn en U een unitaire matrix. Merk op

$$\begin{aligned}
\left(\left(A^T A \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 &= \left(A^T A \right) \\
&= UDU^T \\
&= UD^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} U^T \\
&= UD^{\frac{1}{2}} I D^{\frac{1}{2}} U^T \\
&= UD^{\frac{1}{2}} U^T U D^{\frac{1}{2}} U^T \\
&= \left(UD^{\frac{1}{2}} U^T \right) \left(UD^{\frac{1}{2}} U^T \right).
\end{aligned}$$

En zien we dus dat $\left(A^T A\right)^{\frac{1}{2}} = UD^{\frac{1}{2}} U^T$. De som van de eigenwaarden hiervan is gelijk aan $\sum_{i=1}^{n} s_i$. Dus (7.1) geeft ons dan:

$$\|A\|_{C^1} = \sum_{i=1}^{n} s_i.$$

We laten nu zien dat ook dat $\|A\|_2^2 = \sum_{i=1}^n s_i^2$. Merk op

$$\begin{aligned}\|A\|_2^2 &= \left(\sqrt{trace\left(A^T A\right)}\right)^2 \\ &= trace\left(A^T A\right) \\ &= \sum_{i=1}^n s_i^2.\end{aligned}$$

Wederom vanwege lemma 36. We gebruiken de gevonden twee resultaten nu en zien:

$$\|A\|_{C^1}^2 = \left(\sum_{i=1}^n s_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n s_i^2 + \sum_{i\neq j}^n s_i s_j \geq \sum_{i=1}^n s_i^2 = \|A\|_2^2.$$

Er geldt dat $\sum_{i\neq j}^n s_i s_j \geq 0$ aangezien er is afgesproken in definitie 31 dat singuliere waardes niet-negatief zijn. Dus kunnen we concluderen

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_{C^1}.$$

$\square$

8 Eigenschappen trace-class

In dit hoofdstuk staan twee belangrijke resultaten centraal. Deze resultaten zijn lemma 40 en lemma 49. Vooral bij het bewijs van lemma 40 zijn veel resultaten nodig. Ook deze resultaten zullen in dit hoofdstuk behandeld worden.

Lemma 40. *Laat B een $n \times n$ matrix zijn dan geldt:*

$$||B||_{C^1} = \max\{trace(BU) : U\, orthogonaal\} \tag{8.1}$$

Om lemma 40 te kunnen aantonen hebben we eerst enkele andere resultaten nodig. Deze benodigde resultaten zijn lemma 42 t/m 48. We zullen ze eerst formuleren en daarna stuk voor stuk bewijzen.

Definitie 41. We noteren S_j voor de verzameling van alle j-dimensionale deelruimtes van $\mathbb{R}^n$ voor $j = 0, ..., n$. Waarbij $S_0 = 0$ en $S_n = \mathbb{R}^n$.

Lemma 42. *Laat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een matrix zijn van rank n, met singuliere waardes $s_1, ..., s_q$ en laat*

$$D = diag\{s_1, ..., s_n\} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad (met\ s_1 \geq \cdots \geq s_n \geq 0)$$

Dan bestaan er unitaire matrices $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zodat:

$$A = VDU^T.$$

We merken op als $A = VDU^T$ dan $A^TA = UD^2U^T$ en $AA^T = VD^2V^T$. Dus $\sqrt{A^TA}$ en $\sqrt{AA^T}$ hebben dezelfde trace.

Lemma 43. *Laat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een Hermetische matrix zijn met eigenwaarden $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Zodat $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Dan geldt*

$$\lambda_j = \max_{\mathcal{X}\in S_j} \min \left\{ \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} : x \in \mathcal{X}\ en\ x \neq 0 \right\}$$

voor $j = 1, ..., n$.

Lemma 44. *Laat $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en laat $s_j(A)$ en $s_j(BA)$, de singuliere waardes van A en BA zijn. Dan geldt:*

$$s_j(BA) \leq ||B||s_j(A).$$

Lemma 45. *Laat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en laat $s_1 \geq \cdots \geq s_n$ de singuliere waardes van A zijn. Laat $1 \leq k \leq n$. Dan geldt*

$$\det(W^HA^HAW) \leq s_1^2 \cdots s_k^2 \det(W^HW)$$

voor elke keuze van $W \in \mathbb{R}^{n\times k}$

We merken op dat in lemma 45 het geval $k = n$ eenvoudig is vanwege $\det(A \cdot B) = \det(A)det(B)$.

Lemma 46. *Laat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en laat $s_1 \geq \cdots \geq s_n$ de singuliere waardes van A zijn. Neem aan dat de eigenwaarden van A herhaald worden naar algebraïsche multipliciteit, en geïndext zodat $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Dan geldt*

$$|\lambda_1|\cdots|\lambda_k| \leq s_1\cdots s_k \text{ voor } k = 1, ..., n$$

Lemma 47. *Laat $\{a_1, ..., a_n\}$ en $\{b_1, ..., b_n\}$ twee rijen getallen zijn zodat $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ en $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ en*

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \leq \sum_{j=1}^{k} b_j, \text{ voor } k = 1, ..., n \tag{8.2}$$

dan geldt dat

$$\sum_{j=1}^{k} e^{a_j} \leq \sum_{j=1}^{k} e^{b_j}, \text{ voor } k = 1, ..., n.$$

Lemma 48. *Laat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en laat $s_1, ..., s_n$ de singuliere waardes van A zijn en laat $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de eigenwaardes van A zijn herhaald naar algebraische multipliciteit en bovendien zodat $|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Dan*

$$\sum_{j=1}^{k} |\lambda_j|^p \leq \sum_{j=1}^{k} s_j^p \qquad \text{voor } p > 0 \text{ en } k = 1, ..., n$$

Bewijs van lemma 42. We kiezen voor de kolommen van U een orthonormale basis van eigenvectoren $\mathbf{u}_j$ van A^TA. Aangezien s_j^2 de eigenwaarden zijn van A^TA zien we:

$$A^TA\mathbf{u}_j = s_j^2\mathbf{u}_j.$$

We kiezen nu de kolommen v_j van V zodanig dat geldt:

$$A\mathbf{u}_j = s_j\mathbf{v}_j. \tag{8.3}$$

Dan zien we

$$\begin{aligned}
\langle s_j\mathbf{v}_j, s_k\mathbf{v}_k\rangle &= \langle A\mathbf{u}_j, A\mathbf{u}_k\rangle \\
&= (A\mathbf{u}_j)^T A\mathbf{u}_k \\
&= \mathbf{u}_j^T A^T A\mathbf{u}_k \\
&= \mathbf{u}_j^T A^T A^{T^T}\mathbf{u}_k \\
&= \left(A^TA\mathbf{u}_j\right)^T\mathbf{u}_k \\
&= \langle A^TA\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k\rangle \\
&= \langle s_j^2\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k\rangle \\
&= s_j^2\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k\rangle.
\end{aligned}$$

Voor $j, k = 1, ..., r$. We weten dat $\mathbf{u}_j$ allemaal orthonormaal zijn. Dat betekent: $\|\mathbf{u}_j\| = 1$. En ook $\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle = \|\mathbf{u}_j\|^2 = 1^2$ Dus als $k = j$ dan zien we:

$$\langle s_j \mathbf{v}_j, s_j \mathbf{v}_j \rangle = s_j^2 \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle = s_j^2$$

en dus ook

$$\langle s_j \mathbf{v}_j, s_j \mathbf{v}_j \rangle = s_j^2 \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle = s_j^2.$$

We kunnen vaststellen dat als $k = j$ dan $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle = 1$ Echter als $k \neq j$ dan $\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k \rangle = 0$ vanwege de orthogonaliteit. We zien

$$\langle s_j \mathbf{v}_j, s_k \mathbf{v}_k \rangle = s_j^2 \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k \rangle = s_j^2 \cdot 0 = 0$$

en dus ook

$$\langle s_j \mathbf{v}_j, s_j \mathbf{v}_j \rangle = s_j^2 \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle = 0.$$

We kunnen concluderen dat als $k \neq j$ dan $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle = 0$. Kortweg

$$\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{als } j \neq k \\ 1, & \text{als } j = k \end{cases} \tag{8.4}$$

We schrijven nu (8.3) in matrixvorm:

$$A \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_r \end{bmatrix} D.$$

De matrix $V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_r \end{bmatrix}$ is unitair wegens (8.4). Dus zien we

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_r \end{bmatrix} &= VD \\ AU &= VD \\ A &= VDU^T. \end{aligned}$$

Waarmee we het gevraagde hebben aangetoond. □

Bewijs van lemma 43. We laten eerst zien dat

$$\max_{\mathcal{X} \in S_j} \min \{ \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle : x \in \mathcal{X}, ||\mathbf{x}|| = 1 \text{ en } x \neq 0 \} \leq \lambda_j.$$

Aldus, laat

$$\lambda_1, ..., \lambda_n$$

de eigenvectoren van matrix A representeren met bijbehorende orthonormale eigenvectoren:

$$\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}.$$

We maken $Y_j = span\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_j\}$, $\dim(Y_j) = n - j + 1$. We laten zien dat

$$\mathcal{X} \cap Y_i \neq \{0\} \text{ voor alle keuzes van } \mathcal{X} \in S_j.$$

Er geldt $\dim(\mathcal{X}_j) = j$. Dus

$$\dim \mathcal{X}_j + \dim Y_i = n + 1 - j + j = n + 1.$$

We zoeken een niet triviale vector die in beide verzamelingen zit. Laat $(\mathbf{v_i})_{i=1}^{n+1-j}$ en $(\mathbf{w_i})_{i=1}^{j}$ basissen zijn voor Y_i en $\mathcal{X}$. We moeten aantonen dat

$$\sum_{i=1}^{n+1-j} \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{j} \beta \mathbf{w}_j.$$

een niet triviale oplossing heeft. Dit kunnen we schijven in matrixvorm:

$$\begin{bmatrix} | & & | & | & & | \\ \mathbf{v_1} & \cdots & \mathbf{v_{n+1-j}} & -\mathbf{w_1} & \cdots & -\mathbf{w_n} \\ | & & | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1-j} \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_j \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Bovenstaande representeert niets anders dan het vinden van een nulruimte van een matrix. Het betreft een $n \times (k + n)$ matrix. Deze matrix heeft meer kolommen dan rijen en dus weten we dat er altijd een niet triviale oplossing is. Er geldt dus inderdaad:

$$\mathcal{X} \cap Y_i \neq \emptyset \text{ voor alle keuzes van } \mathcal{X} \in S_j.$$

Er is dus een $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \cap Y_j$ met $y \neq 0$, deze schrijven we als

$$\mathbf{x} = \sum_{k=j}^{n} \alpha_k \mathbf{v}_k.$$

Er geldt dat de $\mathbf{v}_i$ orthogonaal zijn, daarom geldt vanwege Pythagoras dat

$$\|\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j\|^2 = \|\mathbf{v}_i\|^2 + \cdots \|\mathbf{v}_j\|^2 \qquad \forall i, j.$$

Waarna volgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \alpha_j \mathbf{v}_j + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n \\ \|\mathbf{x}\|^2 &= \|\alpha_j \mathbf{v}_j + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n\|^2 \\ &= \|\alpha_j \mathbf{v}_j\|^2 + \cdots + \|\alpha_n \mathbf{v}_n\|^2 \\ &= \alpha_j^2 \|\mathbf{v}_j\|^2 + \cdots + \alpha_n^2 \|\mathbf{v}_n\|^2 \\ &= \alpha_j^2 \| \cdot 1 + \cdots + \alpha_n^2 \cdot 1 \\ &= \sum_{k=j}^{n} \alpha_k^2. \end{aligned} \tag{8.5}$$

We zien nu

$$\begin{aligned}
\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle &= \sum_{i=j}^{n}\sum_{k=j}^{n} \alpha_i\alpha_k \langle A\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\rangle \\
&= \sum_{k=j}^{n} \alpha_k^2 \lambda_k
\end{aligned}$$

Omdat $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ weten we $\lambda_j \geq \lambda_k$ en zien we

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=j}^{n} \alpha_k^2 \lambda_j \\
&= \lambda_j \sum_{k=j}^{n} \alpha_k^2 \\
&= \lambda_j.
\end{aligned}$$

Waarbij we gebruik maken van (8.5). We kunnen vaststellen:

$$\min\left\{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{x} \in \mathcal{X}, ||\mathbf{x}|| = 1 \text{ en } x \neq \mathbf{0}\right\} \leq \lambda_j$$

voor alle $\mathcal{X} \in S_j$. Omdat het geldt voor alle $\mathcal{X} \in S_j$, geldt het ook voor de de maximale $\mathcal{X}$. Dus geldt:

$$\max_{\mathcal{X}\in S_j} \min\left\{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{x} \in \mathcal{X}, ||\mathbf{x}|| = 1 \text{ en } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\right\} \leq \lambda_j.$$

Nu laten we de andere ongelijkheid

$$\lambda_j \leq \max_{\mathcal{X}\in S_j} \min\left\{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle : x \in \mathcal{X}, ||\mathbf{x}|| = 1 \text{ en } x \neq 0\right\}$$

zien. Aldus neem $Y_j = span\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_j\}$. We schrijven nu $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{j} \alpha_k \mathbf{v}_k$. Er volgt:

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \sum_{k=1}^{j} \alpha_k^2 \lambda_k$$

Omdat $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ weten we $\lambda_k \geq \lambda_j$ en zien we

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{k=1}^{j} \alpha_k^2 \lambda_j \\
&= \lambda_j \sum_{k=1}^{j} \alpha_k^2 \\
&= \lambda_j.
\end{aligned}$$

Waarbij we gebruik maken van (8.5), enkel nu met $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_j\mathbf{v}_j$. En zien we dus

$$\min\{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle : x \in \mathcal{X}, ||\mathbf{x}|| = 1 \text{ en } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\} \geq \lambda_j$$

voor alle $\mathcal{X} \in S_j$. Omdat het geldt voor alle $\mathcal{X} \in S_j$, geldt het ook voor de de maximale $\mathcal{X}$. Dus geldt:

$$\max_{\mathcal{X}\in S_j} \min\{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{x} \in \mathcal{X}, ||\mathbf{x}|| = 1 \text{ en } \mathbf{x} \neq 0\} \geq \lambda_j.$$

Waarmee we hebben laten zien dat

$$\lambda_j = \max_{\mathcal{X}\in S_j} \min\{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{x} \in \mathcal{X}, ||\mathbf{x}|| = 1 \text{ en } \mathbf{x} \neq 0\}.$$

□

Bewijs van lemma 44. We merken op dat s_j^2 de eigenwaardes zijn van A^TA. En dat $s_1(A) \geq \cdots \geq s_n(A)$ Dit betekent dat we de uitdrukkingen gevonden in lemma 43 kunnen gebruiken, aldus:

$$s_j(A)^2 = \max_{\mathcal{X}\in S_j} \min\left\{\langle A^TA\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{x} \in \mathcal{X} \text{ en } ||\mathbf{x}|| = 1\right\}. \tag{8.6}$$

Merk op dat

$$\langle A^TA\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle = ||A\mathbf{x}||^2.$$

Waarmee (8.6) te herschrijven is naar

$$s_j(A)^2 = \max_{\mathcal{X}\in S_j} \min\left\{||A\mathbf{x}||^2 : x \in \mathcal{X} \text{ en } ||\mathbf{x}|| = 1\right\}.$$

op gelijke manier hebben we ook

$$s_j(BA)^2 = \max_{\mathcal{X}\in S_j} \min\left\{||BA\mathbf{x}||^2 : \mathbf{x} \in \mathcal{X} \text{ en } ||\mathbf{x}|| = 1\right\}.$$

Er geldt:

$$||BA\mathbf{x}|| \leq ||B||||A\mathbf{x}||$$

en ook

$$||BA\mathbf{x}||^2 \leq ||B||^2||A\mathbf{x}||^2.$$

Waarmee we zien dat

$$\min\left\{||BA\mathbf{x}||^2 : x \in \mathcal{X} \text{ en } ||\mathbf{x}|| = 1\right\} \leq \min\left\{||B||^2||A\mathbf{x}||^2 : \mathbf{x} \in \mathcal{X} \text{ en } ||\mathbf{x}|| = 1\right\} \tag{8.7}$$

$$= ||B||^2 \min\left\{||A\mathbf{x}||^2 : x \in \mathcal{X} \text{ en } ||\mathbf{x}|| = 1\right\} \tag{8.8}$$

aangezien $||B||^2$ niet van x afhangt. En zien we

$$s_j(BA)^2 \leq ||B||^2 s_j(A)^2$$

waarna we concluderen

$$s_j(BA) \leq ||B||s_j(A) \text{ voor } j = 1, ..., n.$$

□

Bewijs van lemma 45. We gebruiken lemma 42. Wegens dit lemma weten we dat er unitaire matrices V en $U \in \mathbb{R}^{p\times p}$ bestaan zodat $A = VDU^T$ Waarbij $D = diag\{s_1, ..., s_n\}$ Dit geeft

$$\begin{aligned} A &= VDU^T \\ V^T &= DU^T \\ V^T AU &= D \end{aligned} \tag{8.9}$$

Transponeren geeft

$$U^T A^T V = D^T = D. \tag{8.10}$$

Nu geeft (8.10) en (8.9) samen

$$D^2 = U^T A^T V V^T AU = U^T A^T AU$$

en zien we ook

$$UD^2U^T = A^T A.$$

Dit gebruiken we vervolgens

$$\begin{aligned} W^T A^T AW &= W^H UD^2U^H W \\ &= W^H UDDU^H W \\ &= BB^T. \end{aligned}$$

Waarbij $B = DF$ en $F = W^H U$. We maken nu gebruik van de *Binet-Cauchy* formule, deze geeft

$$\det(AB) = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} \det(A_{j_1 j_2\cdots j_m}) \det(B_{j_1 j_2\cdots j_m}).$$

Waarbij

- A is een $m \times n$ matrix
- B is een $n \times m$ matrix
- $1 \le j_1, j_2, ...j_m \le n$
- $A_{j_1 j_2\cdots j_m}$ is de $m \times m$ matrix bestaande uit de kolommen $j_1, j_2, ..., j_m$ van A.
- $B_{j_1 j_2\cdots j_m}$ is de $m \times m$ matrix bestaande uit de rijen $j_1, j_2, ..., j_m$ van B.

Dus

$$\det(BB^T) = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} \det(B_{j_1 j_2\cdots j_m}) \det(B^T_{j_1 j_2\cdots j_m})$$

omdat het transponeren van rijen kolommen geeft vinden we

$$= \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} (\det(B_{j_1 j_2\cdots j_m}))^2. \tag{8.11}$$

En verder

$$\det(B_{j_1j_2\cdots j_m}) = \det \begin{bmatrix} b_{1_{j_1}} & \cdots & b_{1_{j_k}} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k_{j_1}} & \cdots & b_{k_{j_k}} \end{bmatrix}$$
$$= \det \left(\begin{bmatrix} f_{1_{j_1}} & \cdots & f_{1_{j_k}} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{k_{j_1}} & \cdots & f_{k_{j_k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{j_k} & & \\ & \ddots & \\ & & s_{j_k} \end{bmatrix} \right).$$

Omdat $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ vinden we ook

$$= s_{j_1} \cdots s_{j_k} \det(F_{j_1j_2\cdots j_m}).$$

Omdat $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ weten we dat $0 \leq s_{j_1} \cdots s_{j_k} \leq s_1 \cdots s_k$. Dus volgt:

$$(\det(B_{j_1j_2\cdots j_m}))^2 \leq s_1^2 \cdots s_k^2 \det(F_{j_1j_2\cdots j_m}))^2.$$

En zien we als we gebruik maken van (8.11).

$$\begin{aligned} \det(BB^T) &= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} (\det(B_{j_1j_2\cdots j_m}))^2 \\ &\leq \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} s_1^2 \cdots s_k^2 \det(F_{j_1j_2\cdots j_m}))^2 \\ &= s_1^2 \cdots s_k^2 \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \det(F_{j_1j_2\cdots j_m}))^2 \\ &= s_1^2 \cdots s_k^2 \det(FF^T). \end{aligned}$$

En kunnen we dus concluderen

$$\begin{aligned} \det(W^TA^TAW) &\leq s_1^2 \cdots s_k^2 \det(W^TU^TUW) \\ &= s_1^2 \cdots s_k^2 \det(W^TW). \end{aligned}$$

□

Bewijs van lemma 46. We maken gebruik van *Schur's theorem* deze geeft ons dat als A een $n \times n$ matrix is, dat A dan kan worden uitgedrukt als [4].

$$A = UTU^T. \tag{8.12}$$

Waarbij U een unitaire matrix is en T een bovendriehoeksmatrix. Bovendien staan de eigenwaardes van A op de diagonaal van T. We kunnen (8.12) omschrijven, dan krijgen we:

$$T = U^TAU. \tag{8.13}$$

We introduceren nu $V^T = [I_k O_{k\times(n-k)}]$. Hier is $O_{k\times(n-k)}$ een $k \times (n-k)$ nulmatrix. Als we bijvoorbeeld $k = 3$ en $n = 5$ nemen zien we:

$$V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

en ook

$$\begin{aligned}
\det\left(V^T T V\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \det \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}}_{k \times k \text{ bovendriehoek van } T} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3.
\end{aligned}$$

In het algemeen geldt

$$\det\left(V^T T V\right) = \det T_{11} = \lambda_1 \cdots \lambda_k$$

Waarbij T_{11} de $k \times k$ linker bovenhoek van matrix T is. We bekijken nu $V^T T^T T V$

$$\begin{aligned}
V^T T^T T V &= \begin{bmatrix} I_k & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11}^H & O \\ T_{12}^H & T_{22}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ O & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k \\ O \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} T_{11}^H & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ O & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k \\ O \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} T_{11}^H T_{11} & T_{11}^H T_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k \\ O \end{bmatrix} \\
&= T_{11}^H T_{11}.
\end{aligned}$$

En zien we nu

$$\begin{aligned}
|\lambda_1 \cdots \lambda_k|^2 = |\det T_{11}|^2 &= \det\left(T_{11}^T T_{11}\right) \\
&= \det\left(V^T T^T T V\right) \\
&= \det\left(V^T U^T A^T U U^T A U V\right) \\
&= \det\left(V^T U^T A^T A U V\right) \\
&\leq s_1^2 \cdots s_n^2 \det\left(V^T U^T U V\right) \\
&= s_1^2 \cdots s_n^2 \det\left(V^T V\right) \\
&= s_1^2 \cdots s_n^2 \det(I) \\
&= s_1^2 \cdots s_n^2.
\end{aligned}$$

Waarmee we de gevraagde ongelijkheid hebben laten zien. $\square$

Bewijs van lemma 47. Merk op dat

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} (x-s)e^s ds &= \int_{-\infty}^{x} xe^s - se^s ds \\
&= [xe^s]_{-\infty}^{x} - [se^s - e^s]_{-\infty}^{x} \\
&= (xe^x - 0) - (xe^x - e^x - 0) \\
&= xe^x - xe^x + e^x \\
&= e^x.
\end{aligned}$$

We schrijven nu:

$$e^x = \int_{-\infty}^{x} (x-s)e^s ds = \int_{-\infty}^{x} (x-s)e^s ds + \int_{x}^{\infty} 0 \cdot e^s ds. \tag{8.14}$$

We introduceren:

$$(x-s)_+ = \begin{cases} x-s & \text{voor} \quad s < x \\ 0 & \text{voor} \quad s \geq x, \end{cases}.$$

Waarmee we (8.14) kunnen omschrijven naar

$$e^x = \int_{-\infty}^{\infty} (x-s)_+ e^s ds.$$

We nemen nu $x = a_j$ en sommeren van 1 tot k:

$$\sum_{j=1}^{k} e^{a_j} = \sum_{j=1}^{k} \int_{-\infty}^{\infty} (a_j - s)_+ e^s ds$$

en op gelijke manier zien we ook:

$$\sum_{j=1}^{k} e^{b_j} = \sum_{j=1}^{k} \int_{-\infty}^{\infty} (b_j - s)_+ e^s ds.$$

Waarmee het dus voldoende is om te laten zien dat

$$\sum_{j=1}^{k} (a_j - s)_+ \leq \sum_{j=1}^{k} (b_j - s)_+$$

voor elke $s \in \mathbb{R}$.

1. Als $s < a_k$ dan zien we:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} (a_j - s)_+ &= (a_1 - s) + \cdots + (a_k - s) \\
&\overset{(8.2)}{\leq} (b_1 - s) + \cdots + (b_k - s) \\
&\leq (b_1 - s)_+ + \cdots + (b_k - s)_+ = \sum_{j=1}^{k} (b_j - s)_+.
\end{aligned}$$

2. Als $a_{l-1} > s \geq a_l$ voor $l = 2, ..., n$ dan zien we:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}(a_j - s)_+ = (a_1 - s) + \cdots + (a_l - s)_+ \\ &= (a_1 - s) + \cdots + (a_{l-1} - s) + 0 \\ &\overset{(8.2)}{\leq} (b_1 - s) + \cdots + (b_{l-1} - s) \\ &\leq (b_1 - s)_+ + \cdots + (b_k - s)_+ = \sum_{j=1}^{k}(b_j - s)_+.\end{aligned}$$

3. Als $s \geq a_1$ dan:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}(a_j - s)_+ = 0 \\ &\overset{(8.2)}{\leq} \sum_{j=1}^{k}(b_j - s)_+.\end{aligned}$$

Waarmee we hebben laten zien dat

$$\sum_{j=1}^{k} e^{a_j} \leq \sum_{j=1}^{k} e^{b_j}, \text{ voor } k = 1, ..., n.$$

□

Bewijs van lemma 48. We maken gebruik van lemma 46. Deze geeft ons:

$$|\lambda_1| \cdots |\lambda_k| \leq s_1 \cdots s_k.$$

Stel dat $|\lambda_k| > 0, \forall k$ dan geldt wegens het feit dat $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ ook dat:

$$\ln|\lambda_1| + \cdots + \ln|\lambda_k| \leq \ln s_1 + \cdots + \ln s_k.$$

We vermenigvuldigen vervolgens links en rechts met $p > 0$.

$$\begin{gathered}p(\ln|\lambda_1| + \cdots + \ln|\lambda_k|) \leq p(\ln s_1 + \cdots + \ln s_k) \\ \iff \\ \ln|\lambda_1|^p + \cdots + \ln|\lambda_k|^p \leq \ln s_1^p + \cdots + \ln s_k^p.\end{gathered}$$

We maken nu gebruik van lemma 47 waarbij $a_j = \ln|\lambda_j|^p$, $b_j = \ln s_j^p, j = 1, ..., k$. We zien:

$$\begin{gathered}e^{\ln|\lambda_1|^p} + \cdots + e^{\ln|\lambda_k|^p} \leq e^{\ln s_1^p} + \cdots + e^{\ln s_k^p} \\ \iff \\ |\lambda_1|^p + \cdots + |\lambda_k|^p \leq s_1^p + \cdots + s_k^p.\end{gathered}$$

We hebben ons resultaat gevonden voor $k = 1, ..., n$ met $|\lambda_k| > 0$. Stel nu dat $\lambda_j = 0$ voor zekere $j \in 1, ..., n$. Dan $0 = |\lambda_k| \leq s_k$ voor alle $k \in j, ..., n$. Immers $|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ dus als $\lambda_3 = 0$ dan $\lambda_4 = 0$ en $\lambda_5 = 0$ etc. □

Dan hebben we nu alle voorbereiding gedaan om lemma 40 te kunnen bewijzen.

Bewijs van lemma 40. We gebruiken lemma 35 en gaan verder met het bekijken van $trace(UB)$. Laat $\lambda_1(UB), ..., \lambda_n(UB)$ de eigenwaardes van UB zijn, waarbij elke herhaald wordt tot zijn algebraische multipliciteit. Dan geldt

$$trace(UB) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(UB)$$

en volgt $(*)$ uit lemma 48

$$|trace(UB)| \leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(UB)| \overset{(*)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} s_j(UB). \tag{8.15}$$

Verder is U orthogonaal dus:

$$\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle U^T Ux, x \rangle = \langle x, x \rangle = |x|^2.$$

Dus $||U|| = 1$. Wegens lemma 44:

$$\begin{aligned} s_j(UB) &\leq ||U|| s_j(B) \\ &= s_j(B). \end{aligned}$$

Als we nu aan beide kanten de som nemen krijgen we

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(UB) \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(B)$$

ofwel, gebruikmakend van (8.15)

$$|trace(UB)| \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(B) = \|B\|_{C^1}.$$

Dit bewijst "$\geq$" in lemma 40. Nu zoeken we nog een U zodat

$$trace(UB) = \|B\|_{C^1}.$$

We bekijken nu de singulierewaardeontbinding.

$$B = V_1 S U_1^H.$$

Waarbij $S = diag\{s_1, ..., s_n\}$, $s_j = s_j(A)$ en V_1 en U_1 unitaire matrices. Dan schrijven we:

$$trace(UB) = trace(UV_1SU_1^T)$$

We kiezen $U \overset{(*)}{=} U_1V_1^T$, dan volgt

$$\begin{aligned}
&= trace(U_1V_1^TV_1SU_1^T)\\
&= trace(U_1SU_1^T)\\
&= trace(SU_1^TU_1)\\
&= trace(SI)\\
&= trace(S)\\
&= s_1 + \cdots + s_n.
\end{aligned}$$

En vinden we ons resultaat. We merken op dat $(*)$ zo mag worden gekozen aangezien het product van twee unitaire matrices ook een unitaire matrix geeft. Immers

$$\begin{aligned}
(UV^T)^T(UV^T) &= VU^TUV^T\\
&= VIV^T\\
&= I.
\end{aligned}$$

Waarmee is aangetoond dat wordt voldaan aan de definitie van unitariteit. □

Lemma 49. *Als B en C $n \times n$ matrices zijn dan:*

$$||BC||_{C^1} \leq trace(BB^T)^{\frac{1}{2}} trace(CC^T)^{\frac{1}{2}}. \tag{8.16}$$

Bewijs van lemma 49. We gaan gebruik maken van Lemma 40. Merk op dat (8.1) geeft dat $\forall U$ zodat U orthogonaal geldt dat

$$||B||_{C^1} \geq trace(BU)$$

en dus

$$trace(BCU) \leq ||BC||_{C^1}.$$

Waarbij er gelijkheid optreedt voor een van deze U's. Als we nu aantonen dat

$$trace(BCU) \leq trace(BB^T)^{\frac{1}{2}} trace(CC^T)^{\frac{1}{2}}. \qquad \forall U. \tag{8.17}$$

dan geldt dat ook voor de U die het maximum geeft in (8.1) en kunnen we concluderen

$$||BC||_{C^1} = trace(BCU) \leq trace(BB^T)^{\frac{1}{2}} trace(CC^T)^{\frac{1}{2}}.$$

Aldus, we gaan (8.17) aantonen. We merken op:

$$\begin{aligned} trace(AB) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}b_{ij} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= trace(A^TA)^{\frac{1}{2}} trace(B^TB)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dus vinden we vanwege bovenstaande:

$$\begin{aligned} trace(BCU) &\leq trace(B^TB)^{\frac{1}{2}} trace((CU)^T(CU))^{\frac{1}{2}} \\ &= trace(B^TB)^{\frac{1}{2}} trace(U^TC^TCU)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

waarna we nu met behulp van lemma 35 vinden:

$$\begin{aligned} &= trace(B^TB)^{\frac{1}{2}} trace(\underbrace{UU^T}_{=I}C^TC)^{\frac{1}{2}} \\ &= trace(B^TB)^{\frac{1}{2}} trace(C^TC)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

9 Resultaten over de matrix H

Stelling 50. *Als* $H = (h_{ij})$ *een positieve matrix is met* $h_{ii} \neq 0 \forall i$ *en* U *is orthogonaal dan:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(HU)_{ii}^2}{h_{ii}} \leq \sum_{i=1}^{n} h_{ii}.$$

Bewijs van stellling 50. Neem $\frac{(HU)_{ii}}{h_{ii}} = \gamma_i$ voor alle i. We zien:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(HU)_{ii}^2}{h_{ii}} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (HU)_{ii}.$$

Laat nu D de diagonaalmatrix zijn zodat $D = diag(\gamma_i)_1^n$, dan volgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (HU)_{ii} &= \sum_{i=1}^{n} D_{ii} (HU)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (DHU)_{ii} \\ &= trace(DHU). \end{aligned}$$

We gebruiken stelling 40, en zien

$$\leq ||DH||_{C^1}.$$

Merk op dat H positief is en dus wegens de spectraalstelling te schrijven is in de volgende vorm:

$$H = QDQ^T.$$

Waarbij Q een orthogonale matrix is en D een diagonaalmatirx met op de diagonaal de eigenwaardes van D. In dit geval zijn deze eigenwaardes positief. Tenslotte nemen we P zodat $P = H^{\frac{1}{2}} = QD^{\frac{1}{2}}Q^T$. Merk op dat P symmetrisch is. We zien nu:

$$\begin{aligned} ||DH||_{C^1} &= ||D(PP)||_{C^1} \\ &= ||(DP)P||_{C^1}. \end{aligned}$$

Wegens lemma 49 volgt:

$$\begin{aligned} &\leq trace((DP)(DP)^T)^{\frac{1}{2}} trace(PP^T)^{\frac{1}{2}} \\ &= trace(DPP^T D^T)^{\frac{1}{2}} trace(PP^T)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Vervolgens gebruiken we dat $P = P^T$, en dat $P^2 = H$

$$\begin{aligned}
&= trace(DP^2D^T)^{\frac{1}{2}} trace(P^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= trace(DHD)^{\frac{1}{2}} trace(H)^{\frac{1}{2}} \\
&= trace(D^2H)^{\frac{1}{2}} trace(H)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 h_{ii})^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{n} h_{ii})^{\frac{1}{2}} \\
&= (\sum_{i=1}^{n} \frac{(HU)_{ii}^2}{h_{ii}})^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{n} h_{ii})^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Zo vinden we

$$(\sum_{i=1}^{n} \frac{(HU)_{ii}^2}{h_{ii}}) \leq (\sum_{i=1}^{n} \frac{(HU)_{ii}^2}{h_{ii}})^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{n} h_{ii})^{\frac{1}{2}}.$$

Delen door $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(HU)_{ii}^2}{h_{ii}}\right)^{\frac{1}{2}}$ geeft

$$(\sum_{i=1}^{n} \frac{(HU)_{ii}^2}{h_{ii}})^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{i=1}^{n} h_{ii})^{\frac{1}{2}}.$$

Kwadrateren van beide kanten geeft vervolgens het gevraagde. $\square$

Lemma 51. *Als $H = (h_{ij})$ een positieve $n \times n$ matrix is met $h_{ii} \neq 0 \forall i$. Dan geldt:*

$$\left\| \left(\frac{1}{\sqrt{h_{ii}}} h_{ij} \right) \right\|_{C^1} \leq \sqrt{n} ||H||_{C^1}^{\frac{1}{2}}.$$

Bewijs van lemma 51. We weten wegens lemma 40 dat er een orthogonale matrix U bestaat zodat

$$\left\| \left(\frac{1}{\sqrt{h_{ii}}} h_{ij} \right) \right\|_{C^1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{h_{ii}}} (HU)_{ii}.$$

We bekijken $\frac{(HU)_{ii}}{\sqrt{h_{ii}}}$, met het standaard inproduct.

$$\left\| \left(\frac{(HU)_{11}}{\sqrt{h_{11}}}, \frac{(HU)_{22}}{\sqrt{h_{22}}}, ..., \frac{(HU)_{nn}}{\sqrt{h_{nn}}} \right) \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(HU)_{ii}}{\sqrt{h_{ii}}} \right)^2}.$$

Verder weten we

$$\|(1, 1, ..., 1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + ... + 1^2} = \sqrt{n}.$$

En vinden we met behulp van Cauchy-Schwarz in de tweede stap:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{(HU)_{ii}}{\sqrt{h_{ii}}} &= \left\langle \left(\frac{(HU)_{11}}{\sqrt{h_{11}}}, \frac{(HU)_{22}}{\sqrt{h_{22}}}, ..., \frac{(HU)_{nn}}{\sqrt{h_{nn}}} \right), (1,1,...,1) \right\rangle \\
&\leq \left\| \left(\frac{(HU)_{11}}{\sqrt{h_{11}}}, \frac{(HU)_{22}}{\sqrt{h_{22}}}, ..., \frac{(HU)_{nn}}{\sqrt{h_{nn}}} \right) \right\| \left\| (1,1,...,1) \right\| \\
&= \sqrt{\left(\frac{(HU)_{11}}{\sqrt{h_{11}}} \right)^2 + \left(\frac{(HU)_{22}}{\sqrt{h_{22}}} \right)^2 + ... + \left(\frac{(HU)_{nn}}{\sqrt{h_{nn}}} \right)^2} \sqrt{n} \\
&= \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(HU)_{ii}^2}{h_{ii}}}.
\end{aligned}$$

We gebruiken nu lemma 50 en vinden hier de volgende bovengrens voor:

$$\sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_{ii}}.$$

We merken op dat

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_{ii}} = \sqrt{trace(H)} = \sqrt{trace\left((H^T H)^{\frac{1}{2}}\right)} = \|H\|_{C^1}^{\frac{1}{2}}.$$

En dus kunnen we concluderen dat

$$\left\| \left(\frac{1}{\sqrt{h_{ii}}} h_{ij} \right) \right\|_{C^1} \leq \sqrt{n} ||H||_{C^1}^{\frac{1}{2}},$$

hetgeen te bewijzen was. □

Lemma 52. *Gegeven een matrix A. Dan geldt dat er een unitaire matrix U bestaat zodat AU een positieve matrix is en er geldt:*

$$(AU)^2 = AA^T.$$

Bewijs van lemma 52. Wegens lemma 42 bestaan er unitaire matrices V, W en een diagonaalmatrix D zodat:

$$A = VDW^T.$$

We kiezen nu

$$U = WV^T VDV^T |VDV^T|^{-1}.$$

Waarbij $|B| := \sqrt{B^T B}$ en als B symmetrisch dan geldt uiteraard ook $|B| = \sqrt{BB^T}$. Merk op dat $|VDV^T| = V|D|^{-1}V^T$. Mocht het zo zijn dat $d_{ii} = 0, \forall i$ dan nemen we $|D|^{-1} = 0$. We zien nu

$$\begin{aligned}
U &= WV^T VDV^T |VDV^T|^{-1} \\
&= WDV^T |VDV^T|^{-1} \\
&= WDV^T V|D|^{-1}V^T \\
&= WD|D|^{-1}V^T
\end{aligned}$$

en ook

$$\begin{aligned} AU &= AWD|D|^{-1}V^T \\ &= VDW^TWD|D|^{-1}V^T \\ &= VD^2|D|^{-1}V^T \\ &= VD^2|D|^{-1}V^T \\ &= VDV^T. \end{aligned}$$

Hiermee is aangetoond dat AU symmetrisch is en positief. Bovendien

$$(AU)^2 = VD^2V^T = AA^T.$$

Waarmee we het gevraagde hebben laten zien. $\square$

Lemma 53 (Ongelijkheid van het meetkundig en rekenkundig gemiddelde). *Voor een rij* $(a_i)_{i=1}^n \in [0,\infty)$ *geldt:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i \geq \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Het bewijs van lemma 53 laten we achterwege.

Lemma 54. *Voor een rij* $(a_i)_{i=1}^n \in [0,\infty)$ *geldt:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i = \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}} \tag{9.1}$$

$$\Longrightarrow$$

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

Bewijs van lemma 54. We gebruiken tegenspraak. Stel dat niet alle a_i's gelijk zijn. Z.v.v.a nemen we aan dat $a_1 \neq a_2$. We nemen nu

$$\widetilde{a}_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} \qquad \text{en} \qquad \widetilde{a}_2 = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

We bekijken $\widetilde{a}_i = \widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, a_3, ..., a_n$ en zien dat

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \tilde{a}_i &= \frac{1}{n}\left(\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \cdots + a_n\right) \\ &= \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i. \end{aligned}$$

Echter

$$\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2 = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(a_1+a_2)\right)^2 > a_1a_2.$$

We zien

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{a}_i = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i = \left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}}}_{\text{aanname}} = (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} < (\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{i=1}^{n}\widetilde{a}_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Dit is echter in tegenspraak met lemma 53. Dus kunnen we concluderen dat er wel moet gelden dat $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. □

We hebben nu alles om het laatste lemma te bewijzen voordat we naar het bewijs van stelling 25.

Lemma 55. *Laat A een $n \times n$ matrix zijn van reële getallen, waarbij elke rij een niet-nulrij is. Dan is er een rij $(\theta_i)_1^n$ van positieve getallen en een orthogonale matrix U zodat de matrix $H = (h_{ij})$ gegeven door:*

$$h_{ij} = \theta_i(AU)_{ij}.$$

positief is en er geldt $h_{ii} = 1\forall i$.

Voorbeeld 56 (bij lemma 55)**.** Voor

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

neem

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Er geldt $U^TU = I$, dus U is unitair. Dan zien we

$$AU = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{\sqrt{2}} & -\frac{12}{\sqrt{2}} \\ \frac{6}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Kies nu $\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{8}$ en $\theta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ dan volgt

$$\begin{aligned} H = \theta_i\,(AU)_{ij} = \begin{bmatrix} \theta_1(\frac{8}{\sqrt{2}} & -\frac{12}{\sqrt{2}}) \\ \theta_2(\frac{6}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{8}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{8}\cdot -\frac{12}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{6}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot -\frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{12}{8} \\ -\frac{6}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

We zien dat de verkregen matrix H symmetrisch is en positief definiet en dus *positief.*

Bewijs van lemma 55. We zijn op zoek naar een rij $(\theta_i)_1^n$ van positieve getallen en een orthogonale matrix U zodat $\theta_i(AU)_{ij}$ een positieve matirx is en $h_{ii} = w, w > 0$ constant $\forall i$. Omdat je de θ_i daarna kunt schalen is er alsnog te

bereiken dat $h_{ii} = 1 \forall i$.
Laat $(\theta_i)_1^n$ een rij positieve getallen zijn. We gebruiken lemma 39 en vinden:

$$\begin{aligned}
\| (\theta_i a_{ij}) \|_{C^1} &\geq \| (\theta_i a_{ij})_j \|_2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_i^2 a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \theta_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \theta_i \cdot c.
\end{aligned}$$

Waarbij $c = \min_i \| (a_{ij})_j \|_2$. Er volgt:

$$\|(\theta_i a_{ij})\|_{C^1} \geq c \cdot \max_i \theta_i. \tag{9.2}$$

We definiëren nu α als volgt

$$\alpha := \inf \left\{ \left\| \left(\theta_i a_{ij}^k \right)_{ij} \right\|_{C^1} : \prod_{i=1}^k \theta_i = 1, \theta_i \geq 0 \right\}.$$

We willen graag aantonen dat dit infimum een minimum is, echter de $\theta_i : \prod \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$ is niet compact. Kies nu een rij $\left(\left(\theta_i^{(k)} \right)_i \right)_{k \geq 1}$ zodat $\prod_{i=1}^k \theta_i^{(k)} = 1$, $\theta_i^{(k)} \geq 0$ en

$$\left\| \left(\theta_i^{(k)} a_{ij} \right)_{ij} \right\|_{C^1} \downarrow \alpha.$$

Als we bovenstaande samen bekijken met (9.2) zien we:

$$c \cdot \max_i \theta_i^{(k)} \leq \underbrace{\left\| \left(\theta_i^{(k)} a_{ij} \right)_{ij} \right\|_{C^1}}_{\longrightarrow \alpha} \leq M.$$

Hierbij is M een constante die onafhankelijk is van k, dit volgt uit het feit dat convergente rijen begrensd zijn. We zien:

$$c \cdot \max_i \theta_i \leq M,$$

de rij $\left(\theta_i^k\right)_{k \geq 1}$ is begrensd. Wegens de stelling van Bolzano-Weierstrass weten we dat $\left(\theta_i^k\right)_{k \geq 1}$ een convergente deelrij moet hebben. We noteren deze convergente deelrij met $\left(\theta_i^{k_m}\right)_{m \geq 1}$. Deze deelrij convergeert naar $\hat{\theta}$.

$$\theta_i^{k_m} \longrightarrow \hat{\theta}.$$

We introduceren nu de verzameling

$$C = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^n : \theta_i \geq 0, \prod_{i=1}^{k} \theta_i = 1 \right\}$$

en laten zien dat deze verzameling C gesloten is. We kunnen C als volgt schrijven:

$$C = [0, \infty)^n \cap f^{-1}(\{1\})$$

waarbij $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, f(t) = \prod_{i=1}^{n} t_i = 1$. En f dus continu. Omdat f continu is en $\{1\}$ gesloten is $f^{-1}(\{1\})$ ook gesloten. Verder is ook $[0, \infty)^n$ gesloten. Dus concluderen we dat de verzameling C gesloten is. Waarmee we ook kunnen concluderen dat $\hat{\theta} \in C$. We definiëren

$$\phi(\theta) := \left\| (\theta_i a_{ij})_{ij} \right\|_{C^1}$$

en zien

$$\phi\left(\theta^k\right) \longrightarrow \alpha.$$

Omdat $\theta^{k_m} \longrightarrow \hat{\theta}$ ook

$$\phi\left(\theta^{k_m}\right) \longrightarrow \phi\left(\hat{\theta}\right).$$

Bovendien $\phi(\hat{\theta}) = \alpha$ ofwel

$$\left\| \left(\hat{\theta}_i a_{ij}^k\right)_{ij} \right\|_{C^1} = \alpha.$$

Vanaf nu schrijven θ_i in plaats van $\hat{\theta}_i$. Neem voor deze rij $((\theta_i)_1^n)$ de matrix $H = (h_{ij})$ zodat $H^2 = \left(\theta_i \left(AA^T\right)_{ij} \theta_j\right)$ en H positief. We gaan laten zien dat er nu een orthogonale matrix U bestaat zodat

$$h_{ij} = \theta_i (AU)_{ij}.$$

Om te beginnen merken we op dat in het algemeen

$$\theta_i (A)_{ij} = (\Theta A)_{ij}.$$

waarbij $\Theta = diag\{\theta_1, ..., \theta_n\}$. En ook

$$(A)_{ij} \theta_j = (A\Theta)_{ij}.$$

waarbij $\Theta = diag\{\theta_1, ..., \theta_n\}$. Dit is relatief eenvoudig te zien:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 a_{11} & \theta_1 a_{12} & \dots & \theta_1 a_{1n} \\ \theta_2 a_{21} & \theta_2 a_{22} & \dots & \theta_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_n a_{n1} & \theta_n a_{n2} & \dots & \theta_n a_{nn} \end{bmatrix}.$$

en

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 a_{11} & \theta_2 a_{12} & \dots & \theta_n a_{1n} \\ \theta_1 a_{21} & \theta_2 a_{22} & \dots & \theta_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_1 a_{n1} & \theta_2 a_{n2} & \dots & \theta_n a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matrix H wordt dan zodat

$$H^2 = \Theta A A^T \Theta. \tag{9.3}$$

Het toepassen van lemma 52 op ΘA geeft ons een unitaire matrix U zodat aan (9.3) wordt voldaan. We weten omdat $(\theta_i)_1^n$ positief is, en A geen rijen heeft met enkel nullen dat geldt: $h_{ii} \neq 0 \forall i$. Maak nu $\forall i$

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{h_{ii}}} (\prod_{j=1}^n \sqrt{h_{jj}})^{\frac{1}{n}}.$$

Merk op dat

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \gamma_i &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{h_{ii}}} (\prod_{j=1}^n \sqrt{h_{jj}})^{\frac{1}{n}} \right) \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n \sqrt{h_{jj}} \right)^{\frac{1}{n}}}{\prod_{i=1}^n \sqrt{h_{ii}}} \\ &= \frac{\left(\left(\prod_{j=1}^n \sqrt{h_{jj}} \right)^{\frac{1}{n}} \right)^n}{\prod_{i=1}^n \sqrt{h_{ii}}} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^n \sqrt{h_{jj}}}{\prod_{i=1}^n \sqrt{h_{ii}}} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Dus zowel

$$\prod_{i=1}^n \theta_i = 1 \qquad \text{als} \qquad \prod_{i=1}^n \gamma_i = 1.$$

Kies nu $\theta_i' = \gamma_i \theta_i$. Hiervoor geldt:

$$\prod_{i=1}^n \theta_i' = \prod_{i=1}^n \gamma_i \theta_i = \prod_{i=1}^n \gamma_i \prod_{i=1}^n \theta_i = 1 \cdot 1 = 1.$$

Verder hebben we $(\theta_i)_1^n$ zo gekozen dat $\|(\theta_i a_{ij})\|_{C^1}$ minimaal is onder de voorwaarde $\prod_{i=1}^n \theta_i = 1$. Dus voor θ_i' geldt dat

$$\|(\theta_i a_{ij})\|_{C^1} \leq \left\| (\theta_i' a_{ij}) \right\|_{C^1}. \tag{9.5}$$

Verder merken we op dat voor algemene A en unitaire U geldt

$$\|AU\|_{C^1} = trace \left(\left(A \underbrace{U U^T}_{I} A^T \right)^{\frac{1}{2}} \right) = trace \left(\left(A A^T \right)^{\frac{1}{2}} \right) = \|A\|_{C^1}. \tag{9.6}$$

Er geldt dus gebruikmakend van (9.5) en van (9.6)

$$\begin{aligned}
\|H\|_{C^1} &= \|\Theta AU\|_{C^1} \\
&= \|\Theta A\|_{C^1} && \text{wegens (9.6)} \\
&= \|(\theta_i a_{ij})\|_{C^1} \\
&\leq \left\|(\theta_i' a_{ij})\right\|_{C^1} && \text{wegens (9.5)} \\
&= \|(\gamma_i \theta_i a_{ij})\|_{C^1} \\
&= \left\|\left(\gamma_i \theta_i \,(AU)_{ij}\right)\right\|_{C^1} && \text{wegens (9.6)} \\
&= \|(\gamma_i h_{ij})\|_{C^1} \\
&= \left\| \frac{1}{\sqrt{h_{ii}}} \left(\prod_{j=1}^{n} \sqrt{h_{jj}} \right)^{\frac{1}{n}} h_{ij} \right\|_{C^1} \\
&= \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{h_{ii}}} h_{ij} \right) \right\|_{C^1} \left(\prod_{j=1}^{n} \sqrt{h_{jj}} \right)^{\frac{1}{n}} \\
&\leq \sqrt{n} ||H||_{C^1}^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^{n} \sqrt{h_{jj}} \right)^{\frac{1}{n}} .
\end{aligned}$$

Waarbij we in de laatste stap gebruik maken van lemma 51. Delen door $\sqrt{n}\,\|H\|_{C^1}^{\frac{1}{2}}$ geeft:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} ||H||_{C^1}^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\prod_{j=1}^{n} \sqrt{h_{jj}} \right)^{\frac{1}{n}} \\
\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii} \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\prod_{j=1}^{n} h_{jj} \right)^{\frac{1}{n}\frac{1}{2}} \\
\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_{ii} \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\prod_{j=1}^{n} h_{jj} \right)^{\frac{1}{2n}} \\
\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_{ii} &\leq \left(\prod_{j=1}^{n} h_{jj} \right)^{\frac{1}{n}} .
\end{aligned}$$

Verder weten we dat in het algemeen geldt:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_{ii} \geq \left(\prod_{j=1}^{n} h_{jj} \right)^{\frac{1}{n}} .$$

Dit is namelijk lemma 53. We vinden dus als we de twee bovenstaande uitdrukkingen combineren:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_{ii} = \left(\prod_{j=1}^{n} h_{jj}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Wegens lemma 54 weten we dat er dus moet gelden dat alle h_{ii} gelijk aan elkaar zijn. Waarmee we het gevraagde hebben laten zien. $\square$

10 Bewijs van het plankenprobleem voor convexe symmetrische vormen

Tenslotte bewijzen stelling 25

Bewijs van stelling 25. Het is voldoende te laten zien dat als $A = (a_{ij})$ een $n \times n$ matrix is met $a_{ii} = 1 \forall i$. En $(m_i)_1^n$ een rij zijn van reële getallen, dan is er een rij $(\lambda_j)_1^n$ met

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \leq \frac{1}{n}$$

zodat voor elke i,

$$|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j - m_i| \geq \frac{1}{n}$$

We beginnen met het gebruiken van lemma 55. We kiezen een rij $(\theta_j)_1^n$ van positieve getallen en een orthogonale matrix U zodat

$$H = h_{ij} = (\theta_i (AU)_{ij}) \tag{10.1}$$

met H positief en $h_{ii} = 1 \forall i$.
Wegens stelling 27 is er een keuze voor $(\epsilon_j)_j^n$ zodat voor alle i:

$$|\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\epsilon_j\theta_j - n\theta_i\mu_i| \geq \theta_i.$$

Dit samen geeft dat

$$|\theta_i \sum_{j=1}^{n} (AU)_{ij}\epsilon_j\theta_j - n\theta_i\mu_i| \geq \theta_i$$
$$|\sum_{j=1}^{n} (AU)_{ij}\epsilon_j\theta_j - n\mu_i| \geq 1$$
$$|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (AU)_{ij}\epsilon_j\theta_j - \mu_i| \geq \frac{1}{n},$$

we gebruiken $(AU)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}u_{rj}$

$$|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} a_{ir}u_{rj}\epsilon_j\theta_j - \mu_i| \geq \frac{1}{n}$$
$$|\sum_{r=1}^{n} a_{ir}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_{rj}\epsilon_j\theta_j\right) - \mu_i| \geq \frac{1}{n}.$$

Voor λ_r nemen we nu

$$\lambda_r = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} u_{rj} \epsilon_j \theta_j.$$

We hoeven nu enkel nog te laten zien dat $\sum_{r=1}^{n} \lambda_r^2 \leq \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{n} \lambda_r^2 &= \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} u_{rj} \epsilon_j \theta_j \right)^2 \\
&= \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{j=1}^{n} u_{rj} \epsilon_j \theta_j \right)^2 \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} u_{rj} \epsilon_j \theta_j \right)^2 \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{r=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_{ri} u_{rj} \epsilon_i \epsilon_j \theta_i \theta_j \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{r=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_{ri} u_{rj} \epsilon_i \epsilon_j \theta_i \theta_j \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{n} u_{ri} u_{rj} \right) \epsilon_i \epsilon_j \theta_i \theta_j \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \epsilon_i \epsilon_j \theta_i \theta_j \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \theta_i^2.
\end{aligned}$$

Waarbij

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad i = j \\ 0 & \text{als} \quad i \neq j, \end{cases}$$

en waarbij we gebruikmaken van $\epsilon_i^2 = 1, \forall i$. Dus moeten we aantonen dat

$$\frac{1}{n^2} \sum_{r=1}^{n} \theta_j^2 \leq \frac{1}{n}.$$

Ofwel

$$\sum_{r=1}^{n} \theta_j^2 \leq n.$$

Verder zien we dat uit (10.1) volgt dat:

$$\begin{aligned}
H &= (\theta_i (AU)_{ij}) \\
H \left(U_{ij}^T\right) &= (\theta_i (AU)_{ij}) \left(U_{ij}^T\right) \\
(HU^T)_{ij} &= \theta_i (AUU^T)_{ij} \\
(HU^T)_{ij} &= \theta_i (A)_{ij} \\
(HU^T)_{ij} &= \theta_i a_{ij}
\end{aligned}$$

voor alle i, j. En omdat $a_{ii} = 1$ voor elke i vinden we ook

$$\theta_i = (HU^T)_{ii}$$

voor $1 \leq i \leq n$. Verder weten we $h_{ii} = 1, \forall i$. We gebruiken nu lemma 50 en zien dat

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left(HU^T\right)_{ii}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(HU^T\right)_{ii}^2}{h_{ii}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} h_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= n.
\end{aligned}$$

Waarmee we hebben laten zien hetgeen we wilden bewijzen. $\square$

11 Open probleem

Zoals beschreven in de inleiding is het niet-symmetrische geval van het relatieve plankprobleem open. Deze luidt als volgt:

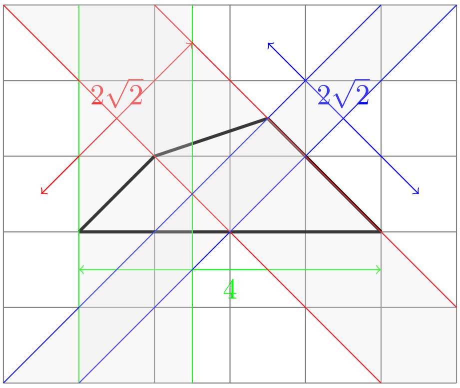
Vermoeden 57. *Laat C een convex gebied in $\mathbb{R}^d$ zijn. Laat $p_1, p_2, \dots$ planken zijn in $\mathbb{R}^d$ met normaalvectoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ zodat $C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} p_i$ dan*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{w(p_i)}{w(C, \mathbf{v}_i)} \geq 1$$

Waarbij $w(p_i)$ de breedte van plank p_i is en $w(C, v_i)$ de breedte van C in de richting van $\mathbf{v}$.

Het idee is dat de breedtes van de plank geschaald worden naar de breedte van de vorm in de richting van de plank.

Voorbeeld 58. We bekijken de volgende niet-symmetrische vorm in $\mathbb{R}^2$:



Figuur 12: Niet-symmetrische vorm overdekt door drie planken

De getallen zichtbaar in de figuur geven de $w(C, v_i)$ aan. We zien:

$$\text{Blauwe plank } p_1\text{: } w(p_1) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \tag{11.1}$$

$$\text{Groene plank } p_2\text{: } w(p_2) = 1\frac{1}{2} \tag{11.2}$$

$$\text{Rode plank } p_3\text{: } w(p_3) = \sqrt{2} \tag{11.3}$$

en zo

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{w(p_i)}{w(C, \mathbf{v}_i)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \frac{1\frac{1}{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{9}{8} \geq 1.$$

We zien dus dat het vermoeden in dit specifieke geval klopt.

Referenties

[1] K. Ball. *The plank problem for symmetric bodies.* Invent. math. 104, 1991, 535–543.

[2] T. Bang. *A solution of the "Plank problem",* Proc. Am. Math. Soc. 2, 1951, 990–993.

[3] Sever S. Dragomir. *Trace inequalities of Cassels and Grüss type for operators in Hilbert spaces.* Victoria University, Australia, 2017.

[4] C.R. Horn R.A. & Johnson. *Matrix Analysis.* Section 2.3 and furter at p. 79. Cambridge University Press, 1985.

[5] A. Tarski. *Uwagi o stopniu równoważności wielokatów (in Polish).* Parametr 2, 1932, p. 310–314.