Dimensietheorie

door

Sander Dietz

ter verkrijging van de graad van Bachelor of Science
aan de Technische Universiteit Delft,
in het openbaar te verdedigen op maandag 1 juli om 15:45 uur.

Studentnummer:	5349273	
Projectduur:	17 april 2024 – 1 juli 2024	
Beoordelingscommissie:	Dr. K. P. Hart,	TU Delft, begeleider
	Dr. J. A. M. de Groot,	TU Delft

TU Delft

Populaire samenvatting

“Waarom is de ruimte waarin we leven driedimensionaal?” is een vraag die men zich al sinds de Griekse oudheid stelt. Lange tijd was het antwoord op deze vraag dat er drie coördinaten nodig zijn om een punt in de ruimte te beschrijven, maar in 1877 bewees Georg Cantor het opmerkelijke resultaat dat hier maar één coördinaat voor nodig is. Deze ontdekking was het startschot van de moderne dimensietheorie.

Er stonden twee vraagstukken centraal toen de dimensietheorie in het begin van de 20e eeuw werd ontwikkeld. Men was op zoek naar een goede definitie voor het begrip dimensie, want “het aantal coördinaten” voldeed klaarblijkelijk niet aan de verwachtingen. Een andere sterke motivator was het aantonen van de invariantie van dimensie. Hiermee bedoelen we dat als n en m verschillende natuurlijke getallen zijn, de ruimten $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ ook topologisch verschillend zijn. De ruimten die zo worden aangeduid heten de euclidische ruimten. Als we voor n de getallen 1, 2 en 3 invullen, krijgen we respectievelijk de lijn, het vlak en de ruimte om ons heen. Het bleek dat deze stelling niet heel makkelijk aan te tonen was, maar in 1911 was het de Nederlander L.E.J. Brouwer als eerst gelukt.

Uiteindelijk is er niet één beste definitie van dimensie gevonden. Over het algemeen worden er drie verschillende definities gebruikt die goed werken. Dit zijn de kleine inductieve dimensie, de grote inductieve dimensie en de overdekkingsdimensie. Volgens alle drie deze definities is de euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ n-dimensionaal, precies zoals we verwachten.

In deze scriptie bewijzen we dat deze drie dimensies overeenstemmen voor een bepaalde klasse ruimten, namelijk de separabele metrizeerbare ruimten, hieronder vallen ook de euclidische ruimten. Daarentegen geven we een voorbeeld van een andere ruimte waarbij de drie dimensies niet overeenstemmen.

Samenvatting

In deze scriptie onderzoeken we het topologische concept dimensie. In het eerste hoofdstuk kijken we naar de geschiedenis om te begrijpen wat deze theorie heeft gemotiveerd: het definiëren van dimensie en het aantonen van haar invariantie.

We definiëren de drie belangrijkste dimensies en tonen hun basiseigenschappen aan in hoofdstuk 2. Dit zijn de kleine inductieve dimensie (ind), de grote inductieve dimensie (Ind) en de overdekkingsdimensie ($\dim$). Definities en stellingen uit dit hoofdstuk en de rest van de scriptie komen voornamelijk uit de boeken *Dimension Theory* [5] en *General Topology* [6] van Ryszard Engelking. Ook vermelden we in dit hoofdstuk de stelling die zegt dat de euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ volgens alle drie de definities n-dimensionaal is.

Het blijkt dat de drie dimensies in ieder geval voor alle separabele metrizeerbare ruimten overeenstemmen. Om dit aan te tonen zijn er wel een aantal stellingen en lemma's nodig, die we allemaal bewijzen in hoofdstuk 3.

Men kan zich vervolgens afvragen of er ook "mooie" ruimten, zoals compacte Hausdorff-ruimten, zijn waarvoor de drie dimensies niet gelijk zijn. Het antwoord op deze vraag is ja en in hoofdstuk 4 beschrijven we zo'n ruimte.

Inhoudsopgave

1
Historische context

Dit hoofdstuk is voornamelijk gebaseerd op de boeken *History of Topology* van Ioan Mackenzie James [9] en *Dimension Theory* van Ryszard Engelking [5].

Een punt is nuldimensionaal, een lijn is eendimensionaal, een vlak is tweedimensionaal en de ruimte waarin we leven is driedimensionaal. Hier is men het al jaren over eens. Zelfs Euclides dacht ongeveer 300 jaar voor Christus al op deze manier over dimensie na [1]. Aristoteles noemt iets wat zich in één richting uitstrekt een lijn, in twee richtingen een vlak en in drie richtingen een lichaam [12]. Het idee van het aantal richtingen waarin je kan bewegen, of het aantal coördinaten dat nodig is om een punt te beschrijven, is intuïtief duidelijk, maar het is nog geen rigoureuze definitie. Het heeft tot het begin van de 20e eeuw geduurd voordat de eerste definities kwamen. Naast het definiëren van dimensie stond de vraag of dimensie invariant is onder bepaalde afbeeldingen ook centraal in de dimensietheorie.

1.1. Bijectie van Cantor

De moderne dimensietheorie ging van start toen Georg Cantor in 1877 een opmerkelijk feit bewees: er is een *bijectie* tussen het lijnstuk (bijvoorbeeld het eenheidsinterval $[0,1]$) en het vierkant (bijvoorbeeld $[0,1]^2$)[4]. Dit is een afbeelding, aangeduid met $f : [0,1] \to [0,1]^2$, die aan elke element in $[0,1]$ precies één element in $[0,1]^2$ toekent en andersom. Als er een bijectie tussen twee verzamelingen bestaat, zeggen we dat deze dezelfde *kardinaliteit* hebben. Maar het feit dat het lijnstuk, duidelijk eendimensionaal, en het vierkant, duidelijk tweedimensionaal, dezelfde kardinaliteit hebben, of met andere woorden: even groot zijn, gaat natuurlijk tegen het bestaande concept van dimensie in. Men was namelijk van de veronderstelling dat men twee coördinaten nodig had om een punt in het vierkant te beschrijven, maar deze bijectie van Cantor liet zien dat één coördinaat genoeg was.

Dit baanbrekende resultaat motiveerde Cantor om opnieuw na te denken over de definitie van dimensie. Het "aantal coördinaten" was dus duidelijk niet een definitie die het intuïtieve idee van dimensie vangt. Cantor correspondeerde in deze tijd veel met Richard Dedekind. Ook in zijn zoektocht naar deze bijectie schreef hij brieven waarin hij zichzelf vragen stelde en vermoedens uitte aan Dedekind. Deze brieven zijn gebundeld in een boek [4]. Dat hij überhaupt vragen stelde als "is er een bijectie tussen het lijnstuk en het vierkant?" was erg ongebruikelijk in die tijd. Veel wiskundigen waren zo overtuigd van het tegengestelde, dat ze het niet nodig vonden om die uitspraak te bewijzen.

Toen Dedekind de brief waarin Cantor zijn ontdekking beschreef ontving, was hij niet direct overtuigd. Maar na een paar herzieningen was het bewijs volledig. Toch was Dedekind niet zo geshockeerd door dit resultaat als Cantor. Hij was het met Cantor eens dat dit resultaat tegen zijn intuïtie inging, maar hij vond niet dat dit het concept van dimensie uiteen scheurde. Volgens hem moest namelijk het concept van *continuïteit* een rol spelen. In een continue afbeelding mogen geen sprongen zitten, dus een continue afbeelding van het lijnstuk naar het vierkant correspondeert met het inkleuren van het vierkant zonder het potlood van het papier af te halen. Dedekind stelde dat elke bijectie tussen twee objecten met verschillende dimensie een discontinuïteit (ofwel een sprong) moet hebben.

Het duurde nog jaren voordat deze "invariantie van dimensie" daadwerkelijk bewezen zou worden. In 1879 gaf een Cantor een bewijs dat later niet bleek te kloppen. De Italiaanse Giuseppe Peano gaf namelijk een voorbeeld van een continue afbeelding van het lijnstuk op het vierkant (deze afbeelding was geen bijectie) [18]. Toch was de consensus onder wiskundigen aan het eind van de 19e eeuw dat de invariantie van dimensie bewezen was.

1.2. Invariantie van dimensie

Uiteindelijk was het de Nederlander L.E.J. Brouwer die de invariantie van dimensie rigoureus bewees in 1911 [2]. In dit artikel gaf hij nog geen expliciete definitie van dimensie, maar toonde hij wel aan dat $[0,1]^n$ en $[0,1]^m$ (lees n-kubus en m-kubus) niet *homeomorf* zijn als $n \neq m$. Hierbij bedoelen we met het woord *homeomorfisme* de bijectie die in beide richtingen continu is en twee ruimten zijn homeomorf als er een homeomorfisme bestaat tussen de ruimten, in dit geval dus de n-kubus en de m-kubus.

Het bewijs van Brouwer hangt af van een lemma dat zegt dat elke continue afbeelding van de n-kubus naar zichzelf, waarbij de afstand van elk punt tot zijn beeld maximaal een half is, een inwendig punt heeft. Het artikel van Brouwer werd gepubliceerd in *Mathematische Annalen* in 1911. Op de volgende bladzijde van dit tijdschrift beschrijft Henri Lebesgue een andere eigenschap van de n-kubus, namelijk dat het kan worden overdekt met een eindige familie willekeurig kleine gesloten verzamelingen, zó dat er maximaal $n+1$ overlappen [11]. Hieruit volgt ook de invariantie van dimensie. De publicatie van Lebesgue in 1911 was nog geen volledig bewijs, dus Brouwer verzocht Lebesgue meermaals om een rigoureus bewijs te geven. Ondanks dat het gebrek aan een bewijs, erkende Brouwer wel de relevantie van het door Lebesgue geïntroduceerde idee van overlappende omgevingen. In 1913 gaf Brouwer zelf een aanvulling die het bewijs van Lebesgue compleet maakte [3].

1.3. Definities van dimensie

In de eerste decennia van de 20e eeuw zijn er verschillende definities van dimensie tot stand gekomen. De eerste poging voor het definiëren kwam van Henri Poincaré [19]. Hij was een van de grondleggers van de tak van de wiskunde die we vandaag de dag algebraïsche topologie noemen. Maar zijn motivatie om dimensie te definiëren was eerder filosofisch dan wiskundig. Zijn voornaamste doel was het uitleggen waarom de ruimte waarin we leven driedimensionaal is. Het idee van Poincaré lijkt op wat we tegenwoordig de kleine inductieve dimensie noemen. Hij keek naar wat voor deelruimte er nodig is om een punt te scheiden van de ruimte, hiermee wordt bedoelt wat voor deelruimte er kan worden weggehaald waardoor de ruimte in meerdere losse stukken wordt gesplitst. Bijvoorbeeld, we kunnen vlakken scheiden met lijnen en we kunnen lijnen scheiden met punten. Poincaré heeft nooit een formele definitie van dimensie gepubliceerd, omdat hij niet lang na de publicatie van 1912 overleed.

In 1913 kwam Brouwer als reactie op Poincaré met zijn dimensie: *Dimensionsgrad* (Dg) [3]. Hij was niet tevreden met Poincaré's definitie, want volgens hem zou de dubbele kegel eendimensionaal zijn, omdat die kan worden gescheiden door een punt. Brouwers dimensie, die later erg bleek te lijken op de grote inductieve dimensie, was ook inductief gedefinieerd, maar was verfijnder en gaf voor meer ruimten een goed resultaat. Met zijn nieuwe definitie van dimensie bewees hij de invariantie van dimensie op een andere manier, hij toonde namlijk aan dat $\mathrm{Dg}\,[0,1]^n = n$.

Felix Hausdorff gaf in 1919 een definitie voor dimensie in euclidische ruimten, die niet-gehele getallen als waarde kan aannemen [8]. Zo heeft de Cantorverzameling Hausdorffdimensie ${}^{\log 2}/{}_{\log 3}$, wat ongeveer 0.63 is. Deze dimensie is relevant gebleken voor fractalen, maar behoort niet bij de drie belangrijkste definities van dimensie die we onderzoeken in deze scriptie.

In deze scriptie zullen we alleen kijken naar de kleine inductieve dimensie (ind), de grote inductieve dimensie (Ind) en de overdekkingsdimensie $(\dim)$. De eerste van deze drie is door twee verschillende wiskundigen, Pavel Urysohn [21] en Karl Menger [15], onafhankelijk van elkaar rond dezelfde tijd, het begin van de jaren 20, tot stand gekomen. Zij onderzochten compacte metrische ruimten in plaats van euclidische ruimten. Het werk van Urysohn is vollediger, maar het werk van Menger is eleganter en sluit beter aan op de intuïtie. Omdat ze allebei als eerste veel theorie hebben ontwikkeld, noemt men de kleine inductieve dimensie ook wel de Menger-Urysohn dimensie.

Eduard Čech heeft in 1931 de grote inductieve dimensie voor normale ruimten voor het eerst gedefinieerd [22]. Omdat deze dimensie verwant is aan de Dimensionsgrad van Brouwer, wordt ook wel de naam Brouwer-Čech dimensie gebruikt. Čech heeft ook de overdekkingsdimensie als eerste formeel gedefinieerd in 1933 [23]. Lebesgue merkte als eerste de onderliggende eigenschap van overlappende overdekkingen op, daarom is de term Čech-Lebesgue dimensie ook gangbaar.

2

De drie dimensiedefinities met basiseigenschappen

2.1. Inductieve dimensies

Allereerst definiëren we de inductieve dimensies. Een ruimte waarvoor de kleine of de grote inductieve dimensie wordt gedefinieerd, moet respectievelijk regulier of normaal zijn, dus voor willekeurige topologische ruimten is er geen inductieve dimensie gedefinieerd. Waarom deze voorwaarden noodzakelijk zijn wordt duidelijk uit de definities.

Definitie 2.1. Laat X een reguliere ruimte zijn en $n \in \{0, 1, 2, ...\}$. De *kleine inductieve dimensie* wordt als volgt gedefinieerd.

i. $\operatorname{ind} X = -1$ als $X = \emptyset$.

ii. $\operatorname{ind} X \leq n$ als voor elk punt $x \in X$ en $U \subseteq X$ open met $x \in U$ er een open $V \subseteq X$ bestaat, zó dat

$$x \in V \subseteq U \text{ en } \operatorname{ind} \partial V \leq n - 1.$$

iii. $\operatorname{ind} X = n$ als $\operatorname{ind} X \leq n$ geldt en $\operatorname{ind} X \leq n - 1$ niet geldt.

iv. $\operatorname{ind} X = \infty$ als $\operatorname{ind} X \leq n$ voor geen enkele n geldt.

De uitspraak $\operatorname{ind} X \nleq n - 1$, ofwel $\operatorname{ind} X \geq n$ kunnen we ook formuleren als: er is een punt $x \in X$ en een open omgeving $U \subseteq X$ van x, zó dat voor elke open $V \subseteq X$ met $x \in V \subseteq U$ geldt dat $\operatorname{ind} \partial V \geq n - 1$.

Een ruimte die alleen bestaat uit een eindig aantal losse punten is nuldimensionaal.

Propositie 2.1. *Als X een niet-lege ruimte is met de discrete topologie, dan geldt $\operatorname{ind} X = 0$.*

Bewijs. Een ruimte met de discrete topologie is regulier, dus we kunnen praten over $\operatorname{ind} X$. X is niet leeg, dus $\operatorname{ind} X \neq -1$, dus $\operatorname{ind} X \geq 0$. Om aan te tonen dat $\operatorname{ind} X \leq 0$, laten we $x \in X$ en $U \subseteq X$ willekeurig, waarbij U een open omgeving van x is. Omdat X de discrete topologie heeft, is $\{x\}$ een open omgeving van x. Het complement van $\{x\}$ is ook open, dus de afsluiting van $\{x\}$ is zichzelf. We hebben dus $\partial\{x\} = \overline{\{x\}} \setminus \{x\} = \{x\} \setminus \{x\} = \emptyset$. Er geldt dus dat $\operatorname{ind} \partial\{x\} = -1$, dus $\operatorname{ind} X \leq 0$. □

Definitie 2.2. Laat X een normale ruimte zijn en $n \in \{0, 1, 2, ...\}$. De *grote inductieve dimensie* wordt als volgt gedefinieerd.

i. $\operatorname{Ind} X = -1$ als $X = \emptyset$.

ii. $\operatorname{Ind} X \leq n$ als voor elke gesloten $F \subseteq X$ en $U \subseteq X$ open met $F \subseteq U$ er een open $V \subseteq X$ bestaat, zó dat

$$F \subseteq V \subseteq U \text{ en } \operatorname{Ind} \partial V \leq n - 1.$$

iii. $\operatorname{Ind} X = n$ als $\operatorname{Ind} X \leq n$ geldt en $\operatorname{Ind} X \leq n-1$ niet geldt.

iv. $\operatorname{Ind} X = \infty$ als $\operatorname{Ind} X \leq n$ voor geen enkele n geldt.

De inductieve dimensies hebben hun naam te danken aan de volgende stelling, die zegt dat de kleine inductieve dimensie altijd kleiner is dan of gelijk is aan de grote inductieve dimensie van een normale ruimte.

Stelling 2.2. *Voor elke normale ruimte X geldt dat* $\operatorname{ind} X \leq \operatorname{Ind} X$.

Bewijs. Dit bewijs gaat met inductie naar $\operatorname{Ind} X$. Voor elke normale ruimte X met $\operatorname{Ind} X = -1$, geldt $X = \emptyset$, dus ook $\operatorname{ind} X = -1$. Neem aan dat voor alle normale ruimten X met $\operatorname{Ind} X \leq n-1$ geldt dat $\operatorname{ind} X \leq \operatorname{Ind} X$. Laat X een normale ruimte zijn met $\operatorname{Ind} X = n$. Gegeven zijn een punt $x \in X$ en een open $U \subseteq X$ met $x \in U$. De singleton $\{x\}$ is gesloten, dus omdat $\operatorname{Ind} X = n$, is er een open $V \subseteq X$ met $\{x\} \subseteq V \subseteq U$ en $\operatorname{Ind} \partial V \leq n-1$. Nu kunnen we de inductiehypothese toepassen op ∂V: $\operatorname{ind} \partial V \leq \operatorname{Ind} \partial V \leq n-1$. Er geldt uiteraard ook dat $x \in V \subseteq U$, dus we mogen concluderen dat $\operatorname{ind} X \leq n = \operatorname{Ind} X$. □

Uit de definities van de inductieve dimensies komen vrij direct resultaten over de dimensies van deelruimten voort.

Stelling 2.3. *Voor elke reguliere ruimte X en een deelruimte $A \subseteq X$ geldt* $\operatorname{ind} A \leq \operatorname{ind} X$.

Bewijs. Als $\operatorname{ind} X = -1$, dan is $X = \emptyset$, dus elke deelruimte is ook leeg en heeft daarom ook kleine inductieve dimensie -1. Neem als inductiehypothese aan dat voor alle reguliere ruimten X met $\operatorname{ind} X \leq n-1$ geldt dat $\operatorname{ind} A \leq \operatorname{ind} X$ voor elke deelruimte $A \subseteq X$. Laat X een reguliere ruimte zijn met $\operatorname{ind} X = n$ en laat $A \subseteq X$. Laat $x \in A$ en $U \subset A$ open met $x \in U$. Dan is er een open $U' \subseteq X$ met $U = A \cap U'$ vanwege de definitie van de deelruimte. Omdat $\operatorname{ind} X \leq n$ geldt, is er een open $V' \subseteq X$ met $x \in V' \subseteq U'$ en $\operatorname{ind} \partial V' \leq n-1$. Definieer $V := A \cap V'$. Dan is V open in A en $x \in V \subseteq U$. De rand van V is een reguliere ruimte want het is een deelruimte van de reguliere ruimte V':

$$\begin{aligned}\partial V &= \overline{V}^A \cap \overline{A \backslash V}^A \\ &= A \cap \overline{V} \cap \overline{A \backslash V} \\ &\subseteq \overline{A \cap V'} \cap \overline{A \backslash V'} \\ &\subseteq \overline{V'} \cap \overline{X \backslash V'} \\ &= \partial V'.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Uit de inductiehypothese volgt nu dat $\operatorname{ind} \partial V \leq \operatorname{ind} \partial V' \leq n-1$. We kunnen dus concluderen dat $\operatorname{ind} A \leq n = \operatorname{ind} X$. □

Het analogon van deze stelling voor de grote inductieve dimensie heeft een extra voorwaarde op de deelruimte nodig. Voor een willekeurige deelruimte is de grote inductieve dimensie namelijk niet altijd gedefinieerd, omdat een deelruimte van een normale ruimte niet altijd normaal is. Het bewijs van deze stelling gaat in grote lijnen hetzelfde als dat van stelling 2.3.

Stelling 2.4. *Voor elke normale ruimte X en een gesloten deelruimte $A \subseteq X$ geldt* $\operatorname{Ind} A \leq \operatorname{Ind} X$.

Bewijs. Als $\operatorname{Ind} X = -1$, dan is X de lege ruimte en elke deelruimte A daarvan dus ook, dus geldt $\operatorname{Ind} A = -1$. Stel dat voor elke normale ruimte X met $\operatorname{Ind} X \leq n-1$ geldt dat elke gesloten deelruimte A voldoet aan $\operatorname{Ind} A \leq \operatorname{Ind} X$. Laat X een willekeurige normale ruimte met $\operatorname{Ind} X = n$ en $A \subseteq X$ gesloten zijn. Laat $F \subseteq U \subseteq A$ met F gesloten en U open. Dan is F ook gesloten in X, want A is gesloten in X. Er bestaat een open $U' \subseteq X$ met $U = A \cap U'$. Er geldt dat $F \subseteq U \subseteq U'$, dus de definitie van de grote inductieve dimensie kan worden toegepast: er is een open $V' \subseteq X$ met $F \subseteq V' \subseteq U'$ en $\operatorname{Ind} \partial V \leq n-1$. Neem $V := A \cap V'$, dan is V open en geldt $F \subseteq V \subseteq U$. De rand van V is gesloten in X en het is een deelruimte in de gesloten deelruimte ∂V, de berekening in (2.1) is namelijk hier ook van toepassing. Dus ∂V is ook gesloten in $\partial V'$ en daarom kan de inductiehypothese worden toegepast: $\operatorname{Ind} \partial V \leq \operatorname{Ind} \partial V' \leq n-1$, dus er geldt dat $\operatorname{Ind} A \leq n = \operatorname{Ind} X$. □

2.2. Overdekkingsdimensie

Voor het definiëren van de overdekkingsdimensie is het concept van een verfijning van een overdekking nodig.

Definitie 2.3. Laat X een ruimte zijn met een overdekking $\mathcal{A}$, dus $\bigcup \mathcal{A} = X$. Een familie deelverzamelingen $\mathcal{B}$ is een *verfijning* van $\mathcal{A}$ als ze ook X overdekt en er voor elke $B \in \mathcal{B}$ een $A \in \mathcal{A}$ bestaat met $B \subseteq A$.

Definitie 2.4. Laat $\mathcal{A}$ een familie deelverzamelingen van X zijn. De *orde* van deze familie, aangegeven met $\operatorname{ord} \mathcal{A}$, is de grootste $n \in \mathbb{N}$ waarvoor er $n + 1$ elementen uit $\mathcal{A}$ zijn met een niet-lege doorsnede.

Gevolg 2.5. *Elke familie deelverzamelingen met orde -1 bestaat uit alleen de lege verzameling.*

Bewijs. Stel $\operatorname{ord} \mathcal{A} = -1$. Dan zijn er maximaal 0 elementen uit $\mathcal{A}$ die elkaar snijden. Dus voor elke $A \in \mathcal{A}$ is de doorsnede met zichzelf leeg, want als die niet leeg zou zijn, zou de orde van $\mathcal{A}$ groter dan 0 zijn. Dus $A = \emptyset$. □

Definitie 2.5. Laat X een normale ruimte zijn en $n \in \{-1, 0, 1, 2, \ldots\}$. De *overdekkingsdimensie* wordt als volgt gedefinieerd.

i. $\dim X \leq n$ als elke eindige open overdekking een eindige open verfijning heeft van orde $\leq n$.

ii. $\dim X = n$ als $\dim X \leq n$ geldt en $\dim X \leq n - 1$ niet geldt.

iii. $\dim X = \infty$ als $\dim X \leq n$ voor geen enkele n geldt.

De overdekkingsdimensie kan ook voor volledig reguliere ruimten worden gedefinieerd aan de hand van "functioneel open" verzamelingen, dit zijn de complementen van "functioneel gesloten" verzamelingen (in literatuur vaak zero-set genoemd), verzamelingen van de vorm $f^{-1}[\{0\}]$ waarbij $f : [0, 1] \to X$ een continue afbeelding is. Voor deze scriptie is deze bredere klasse ruimten niet relevant, dus definiëren we alleen de overdekkingsdimensie voor normale ruimten. De uitspraak $\dim X \geq n$ is equivalent met $\dim X \nleq n - 1$ of met andere woorden: er is een eindige open overdekking zó dat elke eindige open verfijning orde $\geq n$ heeft.

We merken op dat -1-dimensionaliteit hetzelfde is voor de inductieve dimensies en de overdekkingsdimensie.

Gevolg 2.6. *Voor een normale ruimte X is $\dim X = -1$ equivalent met $X = \emptyset$.*

Bewijs. Als de overdekkingsdimensie van een normale ruimte X gelijk is aan -1, dan heeft elke eindige open overdekking een eindige open verfijning van orde -1, dus elke verfijning bestaat uit alleen de lege verzameling vanwege gevolg 2.5. Een verfijning overdekt de hele ruimte, dus de ruimte is leeg, want $\bigcup\{\emptyset\} = \emptyset$.

De ruimte $X = \emptyset$ heeft maar één mogelijke overdekking: $\{\emptyset\}$. De orde hiervan is -1. □

Voor de overdekkingsdimensie kunnen we een vergelijkbaar resultaat als propositie 2.1 aantonen.

Propositie 2.7. *Als X een niet-lege ruimte is met de discrete topologie, dan geldt $\dim X = 0$.*

Bewijs. Discrete ruimten zijn normaal, dus $\dim X$ is gedefinieerd. De ruimte is niet leeg, dus vanwege gevolg 2.6 hebben we $\dim X \neq -1$. Laat $(U_i)_{i=1}^k$ een eindige open overdekking van X zijn. We gaan nu recursief een open verfijning construeren met orde ≤ 0. Neem $V_1 := U_1$ en voor $i \in \{2, \ldots, k\}$ definieer V_i als $U_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j$. Nu is $(V_i)_{i=1}^k$ een open verfijning van $(U_i)_{i=1}^k$. Al deze verzamelingen zijn open, want elke verzameling in een discrete ruimte is open. Deze familie overdekt de hele ruimte, want neem voor een willekeurige $x \in X$ de kleinste index $i \in \{1, \ldots, k\}$ waarvoor $x \in U_i$. Dan zit x dus niet in U_j met $j < i$, dus $x \in V_i$. Het is duidelijk dat elke V_i bevat is in U_i, dus het is een verfijning. Om te controleren dat de orde van deze verfijning ≤ 0 is, nemen we twee verschillende willekeurige indices $i, j \in \{1, \ldots, k\}$. Neem z.v.v.a. aan dat $i < j$. We hebben nu dat V_i en V_j disjunct zijn, want stel dat $x \in V_i \cap V_j$, dan hebben we dat $x \in V_j$, dus x zit in geen enkele V_m met $m < j$ en dus ook niet in V_i. De familie $(V_i)_{i=1}^k$ is dus paarsgewijs disjunct, wat betekent dat de orde ≤ 0 is, dus $\dim X \leq 0$. □

Soms is het handiger om te werken met krimpingen in plaats van verfijningen, omdat bij een krimping een verzameling altijd correspondeert met precies één verzameling in de originele overdekking en andersom.

Definitie 2.6. Laat X een ruimte zijn met een overdekking $(A_i)_{i\in I}$. Dan is een familie deelverzamelingen $(B_i)_{i\in I}$ van X een *krimping* van $(A_i)_{i\in I}$ als $\bigcup_{i\in I} B_i = X$ en er voor elke $i \in I$ geldt dat $B_i \subseteq A_i$. Hierbij dient I als een indexverzameling voor zowel $(A_i)_{i\in I}$ als $(B_i)_{i\in I}$.

Gevolg 2.8. *Elke krimping is een verfijning.* □

Het blijkt dat krimpingen ook de overdekkingsdimensie karakteriseren.

Stelling 2.9. *Voor een normale ruimte X zijn de volgende twee uitspraken equivalent met $\dim X \leq n$.*

i. Elke eindige open overdekking heeft een open verfijning van orde $\leq n$.

ii. Elke eindige open overdekking heeft een open krimping van orde $\leq n$.

Bewijs. Dat $\dim X \leq n$ uitspraak (i) impliceert is triviaal. De implicatie (ii) $\Rightarrow \dim X \leq n$ volgt uit het feit dat elke krimping van een eindige overdekking een eindige verfijning is. We moeten dus alleen (i) $\Rightarrow$ (ii) aantonen.

Laat X een normale ruimte zijn waarvoor (i) geldt en laat $(U_i)_{i\in I}$ een eindige open overdekking zijn. Neem een open verfijning $\mathcal{V}$ van $(U_i)_{i\in I}$ met $\operatorname{ord}\mathcal{V} \leq n$. Kies voor elke $V \in \mathcal{V}$ een $i_V \in I$ met $V \subseteq U_{i_V}$. Definieer voor elke $i \in I$ de open verzameling $W_i := \bigcup\{V \in \mathcal{V} : i_V = i\}$. We hebben nu dat $W_i \subseteq U_i$ voor elke $i \in I$, want als $x \in W_i$, dan zit x in een $V \in \mathcal{V}$ met $i_V = i$, dus $x \in U_i$. Daarnaast is $(W_i)_{i\in I}$ een overdekking van X, want voor elke willekeurige $x \in X$ is er een $V \in \mathcal{V}$ met $x \in V$, want $\mathcal{V}$ is een overdekking van X. We hebben nu dat $x \in V \subseteq W_{i_V}$, dus $(W_i)_{i\in I}$ is een krimping van $(U_i)_{i\in I}$. Ten slotte geldt er dat $\operatorname{ord}(W_i)_{i\in I} \leq n$. Stel namelijk dat er $W_1, \dots, W_{n+2}$ zijn waarvoor er een $x \in \bigcap_{i=1}^{n+2} W_i$ bestaat. Dan is er voor elke $i \in \{1, \dots, n+2\}$ een $V \in \mathcal{V}$ met $i_V = i$ en $x \in V$. Dus we hebben $n+2$ elementen uit $\mathcal{V}$ gevonden met niet-lege doorsnede. Dit spreekt het feit dat $\operatorname{ord}\mathcal{V} \leq n$ tegen. □

De tegenhanger van een krimping noemen we een zwelling en definiëren we als volgt.

Definitie 2.7. Laat X een ruimte zijn met familie deelverzamelingen $(A_i)_{i\in I}$. Dan is $(B_i)_{i\in I}$ een *zwelling* van $(A_i)_{i\in I}$ als voor elke $i \in I$ geldt dat $A_i \subseteq B_i$ en voor elke eindige $I' \subseteq I$ geldt dat $\bigcap_{i\in I'} A_i \neq \emptyset$ equivalent is met $\bigcap_{i\in I'} B_i \neq \emptyset$.

Gevolg 2.10. *Als $(B_i)_{i\in I}$ een zwelling is van $(A_i)_{i\in I}$, dan is $\operatorname{ord}(A_i)_{i\in I} = \operatorname{ord}(B_i)_{i\in I}$.* □

In normale ruimten kunnen gesloten families deelverzamelingen worden “opgezwollen” tot open families deelverzamelingen.

Stelling 2.11. *Laat X een normale ruimte zijn met een eindige gesloten familie deelverzamelingen $(F_i)_{i\in I}$. Dan is er een open zwelling $(U_i)_{i\in I}$ van $(F_i)_{i\in I}$. Voor alle families open deelverzamelingen $(V_i)_{i\in I}$ waarbij $F_i \subseteq V_i$ geldt voor elke $i \in I$, kan de zwelling $(U_i)_{i\in I}$ zo gekozen worden dat $\overline{U}_i \subseteq V_i$ voor elke $i \in I$.*

Bewijs. Laat $(F_i)_{i=1}^k$ een familie gesloten deelverzamelingen van X zijn. De rij $(U_i)_{i=1}^k$ construeren we op een recursieve manier. Definieer G_1 als de vereniging van alle verzamelingen van de vorm $\bigcap_{i\in I} F_i$ met $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ waarvoor geldt dat deze doorsnede disjunct is van F_1. G_1 is een gesloten verzameling, want het is een eindige vereniging van doorsnedes van gesloten verzamelingen. G_1 is disjunct van F_1, want als $x \in F_1 \cap G_1$, dan is er een $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ met $x \in \bigcap_{i\in I} F_i$, maar deze doorsnede is per definitie disjunct van F_1. Omdat X normaal is, bestaat er een open $U_1 \subseteq X$ met $F_1 \subseteq U_1$ en $\overline{U}_1 \cap G_1 = \emptyset$. Deze U_1 is nu zo geconstrueerd dat $\{\overline{U}_1\} \cup (F_i)_{i=2}^k$ een gesloten zwelling is van $(F_i)_{i=1}^k$.

Neem aan dat er voor $i \in \{1, \dots, m\}$ al een open U_i is gedefinieerd waarvoor geldt dat $F_i \subseteq U_i$ en $\mathcal{Z}_m := \{\overline{U}_1, \dots, \overline{U}_m, F_{m+1}, \dots, F_k\}$ een gesloten zwelling is van $(F_i)_{i=1}^k$. Definieer G_{m+1} als de vereniging van alle doorsnedes van elementen uit $\mathcal{Z}_m$ die disjunct zijn van F_{m+1}. Dan is G_{m+1} gesloten en disjunct van F_{m+1}, dus bestaat er een open U_{m+1} met $F_{m+1} \subseteq U_{m+1}$ en $\overline{U}_{m+1} \cap G_{m+1}$, omdat X normaal is. Op deze manier defininiëren we de familie open verzamelingen $(U_i)_{i=1}^k$ met de eigenschappen dat $F_i \subseteq U_i$ voor elke $i \in \{1, \dots, k\}$ en dat $(\overline{U}_i)_{i=1}^k$ een zwelling is van $(F_i)_{i=1}^k$. Het is nu duidelijk dat $(U_i)_{i=1}^k$ een open zwelling van $(F_i)_{i=1}^k$ is.

Als $(V_i)_{i=1}^k$ een familie open deelverzamelingen is met $F_i \subseteq V_i$ voor elke $i \in \{1, \dots, k\}$, dan kunnen we vanwege normaliteit van X elke U_i zó kiezen dat $\overline{U}_i \subseteq V_i$. □

Stelling 2.12. *Elke eindige open overdekking van een normale ruimte X heeft een gesloten krimping.*

Bewijs. Laat $(U_i)_{i\in I}$ een eindige open overdekking van X zijn. Dan is $(X\backslash U_i)_{i\in I}$ een eindige familie gesloten verzamelingen met lege doorsnede vanwege de wetten van De Morgan: $\bigcap_{i\in I} X\backslash U_i = X\backslash \bigcup_{i\in I} U_i = X\backslash X = \emptyset$. Vanwege stelling 2.11 is er een open zwelling $(V_i)_{i\in I}$ van $(X\backslash U_i)_{i\in I}$. Definieer $F_i := X\backslash V_i$ voor elke $i \in I$. Dan is $(F_i)_{i\in I}$ een gesloten krimping van $(U_i)_{i\in I}$, want $F_i = X\backslash V_i \subseteq X\backslash(X\backslash U_i) = U_i$ voor elke $i \in I$, want $X\backslash U_i \subseteq V_i$. Daarnaast overdekt $(F_i)_{i\in I}$ de hele ruimte X. Er geldt namelijk dat $\bigcap_{i\in I} V_i = \emptyset$, want $\bigcap_{i\in I} X\backslash U_i = X\backslash \bigcup_{i\in I} U_i = X\backslash X = \emptyset$ en $(V_i)_{i\in I}$ is een zwelling van $(X\backslash U_i)_{i\in I}$. Hieruit volgt dat $\bigcup_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I} X\backslash V_i = X\backslash \bigcap V_i = X\backslash\emptyset = X$. □

Stellingen 2.11 en 2.12 vormen het gereedschap dat we veel nodig gaan hebben om resultaten te bewijzen over de overdekkingsdimensie. Deze stellingen laten ons namelijk families verzamelingen opzwellen en krimpen zonder dat dit de orde van de familie beïnvloedt. Het eerste resultaat dat we hiermee bewijzen is een karakterisering van de overdekkingsdimensie met gesloten verfijningen en krimpingen.

Stelling 2.13. *Voor een normale ruimte X zijn de volgende uitspraken equivalent met $\dim X \leq n$.*

i. Elke eindige open overdekking heeft een gesloten krimping van orde $\leq n$.

ii. Elke eindige open overdekking heeft een eindige gesloten verfijning van orde $\leq n$.

Bewijs. Om aan te tonen dat $\dim X \leq n$ uitspraak (i) impliceert, nemen we een willekeurige eindige open overdekking $(U_i)_{i\in I}$ van X. Deze heeft een open krimping $(V_i)_{i\in I}$ van orde $\leq n$, vanwege uitspraak (ii) van stelling 2.9. Volgens stelling 2.12 kan deze gekrompen worden tot een gesloten familie $(F_i)_{i\in I}$. Dit is een krimping van $(U_i)_{i\in I}$, want $F_i \subseteq V_i \subseteq U_i$ voor elke $i \in I$. We hebben ook dat $\operatorname{ord}(F_i)_{i\in I} \leq \operatorname{ord}(V_i)_{i\in I} \leq n$, dus deze krimping voldoet.

Elke krimping van een eindige overdekking is een eindige verfijning, dus (ii) volgt direct uit (i). Voor de laatste implicatie, laat $\mathcal{U}$ een eindige open overdekking zijn van X en neem aan dat deze een eindige gesloten verfijning $\mathcal{F}$ van orde $\leq n$ heeft. Vanwege stelling 2.11 is er een open zwelling $\mathcal{V}$ van $\mathcal{F}$, zó dat $\mathcal{V}$ een verfijning van $\mathcal{U}$ is. Deze zwelling toont aan dat $\dim X \leq n$, want ze behoudt de orde van $\mathcal{F}$. □

Ook voor de overdekkingsdimensie is er een stelling over deelruimten die overeenkomt met stelling 2.4 voor de grote inductieve dimensie.

Stelling 2.14. *Voor elke normale ruimte X en een gesloten deelruimte $A \subseteq X$ geldt $\dim A \leq \dim X$.*

Bewijs. Laat $\mathcal{U}$ een open overdekking van A zijn. Dan is er voor elke $U \in \mathcal{U}$ een open $V \subseteq X$ met $U = A \cap V$. De familie die bestaat uit deze V's duiden we aan met $\mathcal{V}$. $X\backslash A$ is open en $\{X\backslash A\} \cup \mathcal{V}$ is een overdekking van X. Namelijk, als $x \in A$, dan is er een $V \in \mathcal{V}$ met $x \in V$ en als $x \notin A$, dan $x \in X\backslash A$. Deze open overdekking van X heeft een eindige open verfijning $\mathcal{W}$ van orde $\leq n$. Nu is de familie $\mathcal{W}' := \{W \cap A : W \in \mathcal{W}\}$ een eindige open verfijning van $\mathcal{U}$ met orde $\leq n$. Er geldt namelijk dat $\bigcup \mathcal{W}' = \bigcup\{W \cap A : W \in \mathcal{W}\} = A \cap \bigcup \mathcal{W} = A \cap X = A$ en voor elke $W \cap A \in \mathcal{W}'$ is er $V \in \mathcal{V}$ en een $U \in \mathcal{U}$ met $W \cap A \subseteq V \cap A \subseteq U$, dus $\mathcal{W}'$ is een verfijning van $\mathcal{U}$. De orde van deze verfijning is $\leq n$, want stel dat $\operatorname{ord}\mathcal{W}' > n$, dan zijn er $W_1, ..., W_{n+2} \in \mathcal{W}$ met $\bigcap_{i=1}^{n+2} A \cap W_i \neq \emptyset$. Maar dan is er een $x \in \bigcap_{i=1}^{n+2} A \cap W_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n+2} W_i$, wat het feit dat $\operatorname{ord}\mathcal{W} \leq n$ tegenspreekt.. □

2.3. Stellingen van algemeen belang

Een groot onderdeel van de motivatie voor het ontwikkelen van dimensietheorie was het bewijzen dat de ruimte waarin we leven driedimensionaal is, of in het algemeen dat de euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ n-dimensionaal is. Zoals in hoofdstuk 1 staat vermeld, was Brouwer de eerste die dit heeft aangetoond. Maar dit deed hij voordat de drie dimensies die de hedendaagse dimensietheorie domineren formeel gedefinieerd waren. Daarom wordt dit resultaat nog hier als stelling vermeld.

Stelling 2.15. *Voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt $\dim \mathbb{R}^n = \operatorname{ind} \mathbb{R}^n = \operatorname{Ind} \mathbb{R}^n = n$.*

Bewijs. We geven alleen een schets van het bewijs van deze stelling. $\mathbb{R}^n$ is een separabele metrische ruimte, dus het maakt niet uit naar welke dimensie we kijken volgens stelling 3.8, deze zullen we in het volgende hoofdstuk bewijzen. Men kan op de volgende manier laten zien dat $\operatorname{ind} \mathbb{R} \leq 1$: laat $x \in \mathbb{R}$ willekeurig en laat U een open omgeving van x zijn. Er is dan een basis-open verzameling in de vorm van een open interval (a, b) met $x \in (a, b) \subseteq U$. De rand van het interval (a, b) is de verzameling van twee losse punten: $\{a, b\}$. Deze ruimte is nuldimensionaal, zoals te zien is in propositie 2.1, dus we hebben $\operatorname{ind} \mathbb{R} \leq 1$.

Het is ook niet veel werk om te laten zien dat $\operatorname{ind}[0,1] \geq 1$. Kijk naar het punt $1/2$ en de open omgeving $(1/4, 3/4)$. Laat V een open verzameling zijn met $x \in V \subseteq (1/4, 3/4)$. De rand van V kan niet leeg zijn, dus $\operatorname{ind} \partial V \geq 0$. Dit betekent dat $\operatorname{ind}[0,1] \geq 1$. Nu volgt uit stelling 2.3 dat $1 \leq \operatorname{ind}[0,1] \leq \operatorname{ind} \mathbb{R} \leq 1$.

Voor $n > 1$ kunnen we met een inductief argument aantonen dat $\operatorname{ind} \mathbb{R} \leq n$. Voor elke $x \in \mathbb{R}^n$ met een open omgeving U is er namelijk een $r > 0$ met $B(x, r) \subseteq \overline{B(x, r)} \subseteq U$. Hierbij is $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}$ een bol met straal r en middelpunt x. De rand van deze bol is homeomorf met $S^{n-1} := \{y \in \mathbb{R}^n : ||y|| = 1\}$. Deze verzameling ziet er lokaal uit als $\mathbb{R}^{n-1}$ en is dus $n-1$-dimensionaal.

De ongelijkheid $\dim \mathbb{R}^n \geq n$ is minder makkelijk aan te tonen, namelijk met de dekpunstelling van Brouwer. Deze zegt dat er voor elke continue afbeelding $f : [0,1]^n \to [0,1]^n$ een $x \in [0,1]^n$ bestaat met $f(x) = x$. Deze uitspraak is equivalent met $\dim [0,1]^n \geq n$. Deze scriptie gaat niet over de topologie van de euclidische ruimten, dus daarom bewijzen we deze stelling hier niet volledig. Een bewijs van de dekpuntstelling van Brouwer is na te lezen in *General Topology* van Engelking [6]. □

Een andere veelgebruikte stelling is de aftelbare-gesloten-som stelling. We zullen deze stelling meermaals gebruiken in het volgende hoofdstuk.

Stelling 2.16. *Laat X een normale ruimte zijn met een aftelbare gesloten overdekking $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Als voor elke $i \in \mathbb{N}$ geldt dat $\dim F_i \leq n$, dan geldt $\dim X \leq n$.*

Bewijs. Laat $(U_i)_{i=1}^k$ een open overdekking van X zijn. We gaan een gesloten krimping van orde $\leq n$ construeren, waarna we volgens stelling 2.13 kunnen concluderen dat $\dim X \leq n$. We mogen aannemen dat $F_0 = \emptyset$.

We gaan een aftelbare rij open overdekkingen $(\mathcal{U}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ van X recursief definiëren waarbij elke $\mathcal{U}_j$ kan worden geschreven als $(U_{j,i})_{i=1}^k$. Definieer $U_{0,i}$ als U_i voor elke $i \in \{1, ..., k\}$. We construeren de rij zó dat voor elke $j \in \mathbb{N}$ de overdekking $\mathcal{U}_j$ de volgende eigenschappen heeft.

i. Voor elke $i \in \{1, ..., k\}$ is $\overline{U}_{j,i}$ bevat in $U_{j-1,i}$.

ii. $\operatorname{ord}(\overline{U}_{j,i} \cap F_j)_{i=1}^k \leq n$.

Laat $m \in \mathbb{N}$ en neem aan dat voor elke $j < m$ de overdekking $\mathcal{U}_j$ al gedefinieerd is zodat die deze twee eigenschappen heeft. We gaan nu $\mathcal{U}_m$ construeren. $F_m \cap U_{m-1,i}$ is open in F_m voor elke $i \in \{1, ..., k\}$. Daarnaast is $(U_{m-1,i})_{i=1}^k$ een open overdekking van X, dus $(F_m \cap U_{m-1,i})_{i=1}^k$ is een open overdekking van de gesloten deelruimte F_m. Er is gegeven dat $\dim F_m \leq n$, deze overdekking kan vanwege stelling 2.9 worden gekrompen tot een overdekking $(V_i)_{i=1}^k$ van orde $\leq n$. Hierbij zijn de V_i's deelverzamelingen van F_m.

Definieer nu voor elke $i \in \{1, ..., k\}$ de open verzameling $W_i := (U_{m-1,i} \backslash F_m) \cup V_i$. Dan ligt W_i helemaal binnen $U_{m-1,i}$, want $V_i \subseteq U_{m-1,i}$. $(W_i)_{i=1}^k$ is dus een open overdekking van X, omdat $(U_{m-1,i})_{i=1}^k$ een open overdekking van X is. Daarnaast geldt dat $\operatorname{ord}(F_m \cap W_i)_{i=1}^k \leq \operatorname{ord}(V_i)_{i=1}^k \leq n$, want $F_m \cap W_i = F_m \cap ((U_{m-1,i} \backslash F_m) \cup V_i) = F_m \cap V_i \subseteq V_i$.

Vanwege stelling 2.12 is er een een gesloten krimping $(F_i)_{i=1}^k$ van $(W_i)_{i=1}^k$. Neem nu, omdat X een normale ruimte is, voor elke $i \in \{1, ..., k\}$ een open $U_{m,i}$ met $F_i \subseteq U_{m,i} \subseteq \overline{U}_{m,i} \subseteq W_i$. De open overdekking $\mathcal{U}_m := (U_{m,i})_{i=1}^k$ voldoet nu aan beide eigenschappen, want $\overline{U}_{m,i} \subseteq W_i \subseteq U_{m-1,i}$ en $\operatorname{ord}(\overline{U}_{m,i} \cap F_m)_{i=1}^k \leq \operatorname{ord}(W_i \cap F_m)_{i=1}^k \leq n$.

Nu moeten we alleen nog met deze rij overdekkingen een gesloten krimping van $(U_i)_{i=1}^k$ met orde $\leq n$ vinden. Laat $x \in X$ willekeurig. Dan is er altijd een $i_x \in \{1, ..., k\}$ zodat x in oneindig veel U_{j,i_x}'s zit, voor elke $j \in \mathbb{N}$ is $(U_{j,i})_{i=1}^k$ namelijk een overdekking van X. Met andere woorden: x zit in de "staart" van de rij $(U_{j,i_x})_{j \in \mathbb{N}}$. Maar omdat eigenschap (i) geldt, moet x nu in elke U_{j,i_x} zitten, dus $x \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} U_{j,i_x} \subseteq \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \overline{U}_{j,i_x}$. De familie gesloten verzamelingen $\left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \overline{U}_{j,i}\right)_{i=1}^k$ is dus een overdekking van X. Het blijkt dat deze overdekking ook een krimping is van $(U_i)_{i=1}^k$ met orde $\leq n$. Uit eigenschap (i) volgt namelijk dat elke $\overline{U}_{j,i}$ bevat is in $U_{0,i} = U_i$ voor alle $i \in \{1, ..., k\}$, dus het is een krimping van $(U_i)_{i=1}^k$. Eigenschap (ii) laat zien dat de orde van deze krimping van boven begrensd is door n. Stel namelijk dat $x \in \bigcap_{i\in I} \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \overline{U}_{j,i}$ voor een $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ met $|I| = n + 2$. Dan moet er een $j \in \mathbb{N}$ zijn met $x \in F_j$, want de F_j's overdekken X. Maar nu hebben we $x \in F_j \cap \bigcap_{i\in I} \overline{U}_{j,i} = \bigcap_{i\in I} (\overline{U}_{j,i} \cap F_j)$, wat eigenschap (ii) tegenspreekt. $\square$

3

Overeenstemming tussen dimensies

Het meest belangrijke resultaat over $\dim$, ind en Ind is dat ze overeenkomen voor separabele metrizeerbare ruimtes. In dit hoofdstuk bewijzen we deze stelling. Hiervoor zijn verschillende lemma's nodig die verbanden tussen de dimensies voor bepaalde klassen van topologische ruimten blootleggen.

3.1. Inductieve dimensies als bovengrens voor de overdekkingsdimensie

Het blijkt dat voor willekeurige normale ruimten de overdekkingsdimensie van boven begrensd is door Ind en voor reguliere Lindelöf-ruimten ook door ind. Hiervoor is eerst een lemma nodig dat laat zien dat $\dim$ zich gedraagt als Ind.

Lemma 3.1. *Als voor een normale ruimte X er voor elke gesloten $F \subseteq X$ en open $U \subseteq X$ met $F \subseteq U$ er een open $V \subseteq X$ bestaat met $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ en $\dim \partial V \leq n-1$, dan geldt $\dim X \leq n$.*

Bewijs. Laat $(U_i)_{i=1}^k$ een open overdekking van X zijn. We gaan op zoek naar een eindige gesloten verfijning van orde $\leq n$, want dit betekent volgens stelling 2.13 dat $\dim X \leq n$. Neem van $(U_i)_{i=1}^k$ een gesloten krimping $(F_i)_{i=1}^k$ (stelling 2.12). Vanwege de aanname is er voor elke $i \in \{1, ..., k\}$ een open $V_i \subseteq X$ met $F_i \subseteq V_i \subseteq \overline{V}_i \subseteq U_i$ en $\dim \partial V_i \leq n-1$.

Definieer $G := \bigcup_{i=1}^k \partial V_i$. Dit is een normale ruimte, want elke ∂V_i is gesloten, elke eindige vereniging van gesloten verzamelingen is gesloten en elke gesloten deelruimte van een normale deelruimte is normaal. Volgens de aftelbare-gesloten-som-stelling (2.16) geldt $\dim G \leq n-1$. De ruimte G ligt binnen X, dus $(G \cap U_i)_{i=1}^k$ is een open overdekking van G. Deze overdekking krimpen we tot een gesloten overdekking van G van orde $\leq n-1$ volgens stelling 2.13. Alle elementen uit deze overdekking zijn ook gesloten in X, omdat G gesloten is in X. Daarom kunnen we stelling 2.11 toepassen om de gesloten overdekking van G op te zwellen tot een familie verzamelingen $(W_i')_{i=1}^k$ die open is in X en waarvoor geldt dat $\overline{W'}_i \subseteq U_i$ voor elke $i \in \{1, ..., k\}$. Neem nu opnieuw een open zwelling $(W_i)_{i=1}^k$ van de gesloten overdekking van G, zo dat $\overline{W}_i \subseteq W_i'$ voor elke $i \in \{1, ..., k\}$. Voor deze familie geldt nu dat $\operatorname{ord}(\overline{W}_i)_{i=1}^k \leq \operatorname{ord}(W_i')_{i=1}^k \leq n-1$[1]. Duid de vereniging van deze familie aan met W, dan hebben we $G \subseteq W$.

Definieer $H_i := \overline{V}_i \setminus \left(W \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j\right)$ voor elke $i \in \{1, ..., k\}$. Nu hebben we dat $\bigcup_{i=1}^k \{\overline{W}_i, H_i\}$ een gesloten verfijning van $(U_i)_{i=1}^k$ is met orde $\leq n$. Om te laten zien dat deze familie de hele ruimte overdekt nemen we een willekeurig punt $x \in X$. Als $x \in W$, dan is er een index $i \in \{1, ..., k\}$ met $x \in W_i \subseteq \overline{W}_i$. Voor het geval dat x niet in W zit, nemen we de kleinste $i \in \{1, ..., k\}$ met $x \in \overline{V}_i$. Dan zit x in H_i. Het is duidelijk dat alle elementen uit deze overdekking gesloten zijn en voor elke $i \in \{1, ..., k\}$ hebben we $\overline{W}_i \subseteq U_i$ en $H_i \subseteq \overline{V}_i \subseteq U_i$, dus het is een gesloten verfijning van $(U_i)_{i=1}^k$.

[1] De tussenstap met de W_i''s is nodig om te verzekeren dat de orde van de familie van afsluitingen van boven begrensd is door $n+1$.

We moeten nu alleen nog aantonen dat deze verfijning orde $\leq n$ heeft. Voor $i, j \in \{1, \dots, k\}$ zijn H_i en H_j disjunct. Neem z.v.v.a. aan dat $i < j$, dan hebben we:

$$\begin{aligned} H_i \cap H_j &= \left[\overline{V}_i \backslash \left(W \cup \bigcup_{l=1}^{i-1} V_l\right)\right] \cap \left[\overline{V}_j \backslash \left(W \cup \bigcup_{m=1}^{j-1} V_m\right)\right] \\ &\subseteq \overline{V}_i \cap \left[\overline{V}_j \backslash \left(W \cup \bigcup_{m=1}^{j-1} V_m\right)\right] \\ &\subseteq \overline{V}_i \cap \left[\overline{V}_j \backslash (W \cup V_i)\right] \\ &= \overline{V}_i \cap \left(\overline{V}_j \backslash W\right) \cap \left(\overline{V}_j \backslash V_i\right) \\ &= \overline{V}_j \cap (X \backslash W) \cap (\overline{V}_i \backslash V_i) \\ &\subseteq (X \backslash W) \cap \partial V_i \\ &= \emptyset. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Hierbij volgt de laatste gelijkheid uit het feit dat $\partial V_i \subseteq G \subseteq W$ voor elke $i \in \{1, \dots, k\}$. We weten dat $\operatorname{ord}(\overline{W}_i)_{i=1}^k \leq n-1$, dus er zijn maximaal n verzamelingen van de vorm $\overline{W}_i$ met niet-lege doorsnede. Hier kan maximaal één verzameling van de vorm H_i aan toegevoegd worden met de voorwaarde dat de doorsnede niet-leeg blijft, want de H_i's zijn paarsgewijs disjunct (3.1). We hebben dus een gesloten verfijning van $(U_i)_{i=1}^k$ gevonden met orde $\leq n - 1 + 1 = n$, dus $\dim X \leq n$ volgens uitspraak (ii) van stelling 2.13. □

Met dit lemma kunnen we de eerste stelling bewijzen die een verband tussen verschillende dimensies aangeeft.

Stelling 3.2. *Voor elke normale ruimte X geldt $\dim X \leq \operatorname{Ind} X$.*

Bewijs. We bewijzen deze stelling met inductie naar $\operatorname{Ind} X$. Als $\operatorname{Ind} X = -1$, dan $X = \emptyset$, dus $\dim X = -1$ wegens gevolg 2.6. Neem als inductiehypothese aan dat voor alle normale ruimten X met $\operatorname{Ind} X \leq n-1$ de ongelijkheid $\dim X \leq \operatorname{Ind} X$ geldt. Laat X een willekeurige normale ruimte zijn met $\operatorname{Ind} X = n$. Laat $F, U \subseteq X$ willekeurig met F gesloten, U open en $F \subseteq U$. Omdat X normaal is, bestaat er een open V met $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Uit de definitie van de grote inductieve dimensie volgt dat er een open W is met $F \subseteq W \subseteq V$ en $\operatorname{Ind} \partial W \leq n-1$. De ruimte ∂W is normaal, want ze is gesloten in de normale ruimte X. De inductiehypothese toepassen op ∂W geeft $\dim \partial W \leq \operatorname{Ind} \partial W \leq n-1$. Uit lemma 3.1 volgt dat $\dim X \leq n = \operatorname{Ind} X$. □

De ongelijkheid $\dim X \leq \operatorname{ind} X$ geldt in het algemeen voor reguliere Lindelöf-ruimten. Het bewijs hiervan maakt gebruik van de aftelbare-gesloten-som-stelling en het volgende lemma.

Lemma 3.3. *Als X een reguliere Lindelöf-ruimte met een willekeurige basis $\mathcal{B}$ is. Dan is er voor elke gesloten F en open U met $F \subseteq U$ een open V en een aftelbare familie $(B_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$, zó dat*

$$F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U \text{ en } \partial V \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \partial B_i.$$

Bewijs. Kies voor elke $x \in X$ vanwege regulariteit een $B_x \in \mathcal{B}$ met $\overline{B_x} \subseteq X \backslash F$ (ofwel $\overline{B_x} \cap F = \emptyset$) of $\overline{B_x} \subseteq U$. Op de overdekking $(B_x)_{x \in X}$ kunnen we de Lindelöf-eigenschap toepassen om een aftelbare deeloverdekking $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ te krijgen. We splitsen deze overdekking in twee delen op: de verzamelingen waarvan de afsluiting F raakt, $(U_i)_{i \in \mathbb{N}} := \{B_i : \overline{B}_i \cap F \neq \emptyset\}$, en de verzamelingen waarvan de afsluiting F niet raakt, $(V_i)_{i \in \mathbb{N}} := \{B_i : \overline{B}_i \cap F = \emptyset\}$.

We hebben nu de volgende eigenschappen: $F \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$, want voor elke $x \in F$ is er een $i \in \mathbb{N}$ met $x \in B_i$. Hiervoor geldt $x \in B_i \cap F \subseteq \overline{B}_i \cap F$, dus $B_i \in (U_i)_{i \in \mathbb{N}}$. We hebben ook dat $X \backslash U \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i$, want als $x \notin U$, dan is er een $i \in \mathbb{N}$ met $x \in B_i$. Deze B_i is niet bevat in U, dus $\overline{B_i} \cap F = \emptyset$. Daarnaast geldt voor elke $i \in \mathbb{N}$ dat $\overline{U}_i \subseteq U$. Voor elke U_i moet namelijk gelden dat $\overline{U}_i \cap F = \emptyset$ of $\overline{U}_i \subseteq U$, want $U_i \in (B_x)_{x \in X}$. Maar U_i is gedefinieerd zodat de eerste optie niet geldt, dus moet de tweede optie gelden.

Definieer nu voor elke $i \in \mathbb{N}$ de open verzamelingen $W_i := U_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \overline{V}_j$ en $Z_i := V_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i} \overline{U}_i$. Duid de verenigingen van deze families respectievelijk aan met W en Z. Dit zijn verenigingen van open verzamelingen en dus ook open. Daarnaast scheiden ze de gesloten verzamelingen F en $X \setminus U$: voor elke $x \in F$ is er een $i \in \mathbb{N}$ met $x \in U_i$ en F is disjunct van alle $\overline{V}_j$'s, dus $x \in W_i$. Voor elke $x \notin U$ is er een $i \in \mathbb{N}$ met $x \in V_i$ en elke $\overline{U}_j$ is bevat in U en dus disjunct van $X \setminus U$, dus $x \in Z_i$. We hebben dus $F \subseteq W$ en $X \setminus U \subseteq Z$, maar ook $W \cap Z = \emptyset$, want als $x \in W \cap Z$, dan zijn er $i, j \in \mathbb{N}$ met $x \in W_i$ en $x \in Z_j$. Voor het geval dat $i > j$, dan $x \notin \overline{V}_j \subseteq \bigcup_{l=1}^{i-1} \overline{V}_l$, wat $x \in Z_j \subseteq V_j \subseteq \overline{V_j}$ tegenspreekt. Als $i \leq j$ is er ook een tegenspraak: $x \notin \overline{U}_i \subseteq \bigcup_{l=1}^{j} \overline{U}_l$ en $x \in W_i \subseteq U_i \subseteq \overline{U}_i$.

W en Z zijn open en disjunct, dus $\overline{W} \cap Z = \emptyset$. Als we dit combineren met eerder verkregen inclusies krijgen we $F \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq X \setminus Z \subseteq U$. Het voldoet dus om te laten zien dat $\partial W \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \partial B_i$.

Als tussenstap merken we op dat $\partial W = \overline{W} \setminus W \subseteq (X \setminus Z) \setminus W = X \setminus (W \cup Z)$. Nu moet alleen nog aangetoond worden dat dit bevat is in $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \partial U_i \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \partial V_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \partial B_i$. Laat $x \notin W \cup Z$ willekeurig. De ruimte wordt overdekt door $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{U_i, V_i\}$, dus er is een $i \in \mathbb{N}$ met $x \in U_i$ of $x \in V_i$. Definieer G als de eerste verzameling in de rij $\overline{U}_1, \overline{V}_1, \overline{U}_2, \overline{V}_2, \ldots$ met $x \in G$. Stel $G = \overline{U}_i$ voor een $i \in \mathbb{N}$. Er is al bekend dat $x \notin W$ en dus ook $x \notin W_i$. Ook zit x niet in $\bigcup_{j=1}^{i-1} \overline{V}_j$, want dat zou betekenen dat G van de vorm $\overline{V}_j$ zou zijn. Er moet dus wel gelden dat $x \notin U_i$, wat impliceert dat $x \in \overline{U}_i \setminus U_i = \partial U_i$. Het geval dat $G = \overline{V}_i$ voor een $i \in \mathbb{N}$ gaat op dezelfde manier, want we weten al dat $x \notin Z_i \subseteq Z$ en $x \notin \bigcup_{j=1}^{i} \overline{U}_i$. Nu kan er geconcludeerd worden dat $x \notin V_i$, dus $x \in \partial V_i$. Dus er is altijd een $i \in \mathbb{N}$ met $x \in \partial U_i \cup \partial V_i$ en dit heeft als gevolg dat $\partial W \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \partial B_i$. □

Stelling 3.4. *Voor elke reguliere Lindelöf-ruimte X geldt* $\dim X \leq \operatorname{ind} X$.

Bewijs. De overdekkingsdimensie is voor reguliere Lindelöf-ruimten gedefinieerd omdat die normaal zijn. Het bewijs zal net zoals dat van stelling 3.2 met inductie gaan. Als $\operatorname{ind} X = -1$, dan is $X = \emptyset$, dus $\dim X = -1$ vanwege gevolg 2.6. Neem aan dat $\dim X \leq \operatorname{ind} X$ voor alle reguliere Lindelöf-ruimten X met $\operatorname{ind} X \leq n - 1$. Stel $\operatorname{ind} X = n$ voor een reguliere Lindelöf-ruimte X. Laat F gesloten en U open met $F \subseteq U$ en toon aan dat er een open V is met $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ en $\dim \partial V \leq n - 1$. Uit lemma 3.1 zal volgen dat $\dim X \leq n = \operatorname{ind} X$.

Het toepassen van lemma 3.3 op X met basis $\mathcal{B} := \{B \subseteq X \text{ open} : \operatorname{ind} \partial B \leq n - 1\}$ geeft een open V en een aftelbare deelfamilie $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ van $\mathcal{B}$ met $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ en $\partial V \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \partial B_i$. Het feit dat $\mathcal{B}$ een basis voor X vormt, volgt direct uit de definitie van een basis en de kleine inductieve dimensie. Elke gesloten deelruimte van een reguliere Lindelöf-ruimte is een reguliere Lindelöf-ruimte, dus we kunnen de inductiehypothese toepassen op elke ∂B_i, dit geeft $\dim \partial B_i \leq \operatorname{ind} \partial B_i \leq n - 1$. Alle ∂B_i's zijn gesloten in X, dus ook gesloten in ∂V en ze overdekken ∂V. Een gesloten deelruimte van een normale ruimte is normaal, dus ∂V is normaal. Het toepassen van stelling 2.16 geeft $\dim \partial V \leq n - 1$. □

3.2. Metrizeerbare ruimten

In metrizeerbare ruimten is de grote inductieve dimensie van boven begrensd door de overdekkingsdimensie. Om dit te bewijzen hebben we een karakterisering van $\dim$ voor metrizeerbare ruimten nodig. Deze tonen we aan met behulp van het volgende lemma.

Lemma 3.5. *Als er voor een normale ruimte X een rij $(\mathcal{U}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ van open overdekkingen bestaat met de volgende eigenschappen:*

i. $\operatorname{ord} \mathcal{U}_i \leq n$ *voor elke $i \in \mathbb{N}$,*

ii. $\mathcal{U}_{i+1}$ *is een verfijning van $\mathcal{U}_i$ voor elke $i \in \mathbb{N}$,*

iii. voor elke $x \in X$ vormt $\{\operatorname{St}(x, \mathcal{U}_i^\Delta), i \in \mathbb{N}\}$ *een lokale basis voor x,*

dan geldt $\dim X \leq n$.

Hierbij geeft $\operatorname{St}(A, \mathcal{A})$ de *ster* van A in $\mathcal{A}$ aan, dat is de vereniging van de verzamelingen uit $\mathcal{A}$ die A snijden: $\bigcup\{B \in \mathcal{A} : A \cap B \neq \emptyset\}$. Voor de ster van een punt schrijven we $\operatorname{St}(x, \mathcal{A})$, maar we bedoelen $\operatorname{St}(\{x\}, \mathcal{A})$. De familie verzamelingen $\mathcal{U}_i^\Delta$ is de collectie van alle sterren in de overdekking $\mathcal{U}_i$: $\{\operatorname{St}(x, \mathcal{U}_i) : x \in X\}$.

Bewijs. Laat $i \in \mathbb{N}$ willekeurig. Begin met het definiëren van een afbeelding $f_i^{i+1} : \mathcal{U}_{i+1} \to \mathcal{U}_i$ met de eigenschap dat $U \subseteq f_i^{i+1}(U)$ voor elke $U \in \mathcal{U}_{i+1}$. Deze afbeelding bestaat, omdat $\mathcal{U}_{i+1}$ een verfijning is van $\mathcal{U}_i$, dus er is voor elke $U \in \mathcal{U}_{i+1}$ een $V \in \mathcal{U}_i$ met $U \subseteq V$. Definieer $f_i^i : \mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_i$ als de identiteitsafbeelding op $\mathcal{U}_i$. Voor $j > i$ wordt de afbeelding $f_i^j : \mathcal{U}_j \to \mathcal{U}_i$ gedefinieerd als $f_i^{i+1} \circ f_{i+1}^{i+2} \circ \ldots \circ f_{j-1}^j$. Deze afbeeldingen zijn zo geconstrueerd dat voor elke $U \in \mathcal{U}_j$ met $j \geq i$ geldt dat $U \subseteq f_i^j(U)$.

Laat $(O_j)_{j=1}^k$ een open overdekking van X zijn. We gaan een open krimping met orde $\leq n$ vinden van deze overdekking. Eerst definiëren we de rij $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ van open verzamelingen als

$$X_i := \bigcup \{U \in \mathcal{U}_i : \text{er is een } j \in \{1, \ldots, k\} \text{ met } \mathrm{St}(U, \mathcal{U}_i) \subseteq O_j\}.$$

Met andere woorden: voor elke overdekking in de rij $(\mathcal{U}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zijn er misschien elementen waarvan de ster van die verzameling in de overdekking helemaal bevat is in een verzameling van de eindige open overdekking $(O_j)_{j=1}^k$. De vereniging van deze open verzamelingen wordt aangeduid met X_i.

Deze rij overdekt de hele ruimte X. Voor elke $x \in X$ is er namelijk een $j \in \{1, \ldots, k\}$ met $x \in O_j$. Volgens de derde eigenschap in de aanname en omdat O_j open is, moet er nu een $i \in \mathbb{N}$ zijn waarvoor geldt dat $x \in \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_i^\Delta) \subseteq O_j$. Er is dus een $y \in X$ met $x \in \mathrm{St}(y, \mathcal{U}_i)$ en hieruit volgt dat er een $U \in \mathcal{U}_i$ is met $x, y \in U$. We moeten nu alleen nog aantonen dat U voldoet aan $\mathrm{St}(U, \mathcal{U}_i) \subseteq O_j$, om te bewijzen dat $x \in X_i$. Laat $z \in \mathrm{St}(U, \mathcal{U}_i)$ willekeurig zijn. Dan is $\mathrm{St}(z, \mathcal{U}_i)$ bevat in $\mathrm{St}(x, \mathcal{U}_i^\Delta)$, dus $z \in \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_i^\Delta) \subseteq O_j$.

Definieer nu twee deelfamilies van $(\mathcal{U}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ als volgt:

$$\mathcal{V}_i := \{U \in \mathcal{U}_i : U \cap X_i \neq \emptyset\},$$
$$\mathcal{W}_i := \left\{V \in \mathcal{V}_i : V \cap \bigcup_{l=1}^{i-1} X_l = \emptyset\right\}$$

voor elke $i \in \mathbb{N}$. Dus $\mathcal{V}_i$ is de collectie verzamelingen uit $\mathcal{U}_i$ die de corresponderende X_i snijden. De verzamelingen hiervan die disjunct zijn van alle "eerdere" X_l's zitten in $\mathcal{W}_i$.

Voor elke $V \in \mathcal{V}_i$ hebben we dat $f_i^i(V) \cap X_i = V \cap X_i \neq \emptyset$. Voor $l \in \{1, \ldots, i-1\}$ hebben we dat $V \subseteq f_l^i(V)$, dus op deze manier kunnen we V "groter maken". Maar dit betekent niet dat $f_l^i(V)$ altijd X_l snijdt. Definieer l_V als de kleinste l waarbij $f_l^i(V) \cap X_l \neq \emptyset$. Er geldt dat $f_{l_V}^i(V) \in \mathcal{W}_{l_V}$, want voor $l \in \{1, \ldots, l_V\}$ zijn $f_{l_V}^i(V)$ en X_l disjunct, want $f_{l_V}^i(V) \cap X_l \subseteq f_l^i(V) \cap X_l = \emptyset$.

Nu kunnen we voor elke $W \in \mathcal{W}_l$ de volgende open verzameling definiëren:

$$W' := \bigcup_{i=l}^{\infty} \bigcup \{V \cap X_i : V \in \mathcal{V}_i, f_l^i(V) = W \text{ en } l_V = l\}.$$

Het blijkt dat deze verzameling bevat is in een element van $(O_j)_{j=1}^k$. W' is namelijk een deelverzameling van W, want voor elke $x \in W'$ is er een $V \in \mathcal{V}_i$ met $x \in V \subseteq f_l^i(V) = W$. Omdat $W \in \mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{V}_i$, snijdt W X_i, dus is er een $U \in \mathcal{U}_i$ met $W \cap U \neq \emptyset$ en is er een $j_W \in \{1, \ldots, i\}$ met $\mathrm{St}(U, \mathcal{U}_i) \subseteq O_{j_W}$. Volgens de definitie van de ster is W bevat in $\mathrm{St}(U, \mathcal{U}_i)$, want $W \in \mathcal{U}_i$. Uiteindelijk hebben we dus $W' \subseteq W \subseteq \mathrm{St}(U, \mathcal{U}_i) \subseteq O_{j_W}$.

De families $\mathcal{W}_i$ hebben we zo geconstrueerd dat ze paarsgewijs disjunct zijn. Daarom zijn W' en j_W goed gedefinieerd voor elke $W \in \mathcal{W} := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{W}_i$, want er is dus voor elke $W \in \mathcal{W}$ maar één $i \in \mathbb{N}$ met $W \in \mathcal{W}_i$.

De eindige familie $(Q_j)_{j=1}^k$ waarbij we Q_j definiëren als $\bigcup\{W' : W \in \mathcal{W} \text{ en } j_W = j\}$ is de open krimping van $(O_j)_{j=1}^k$ met orde $\leq n$ waar we naar op zoek waren. Om te laten zien dat deze familie de hele ruimte overdekt is het makkelijker om te aan te tonen dat $\mathcal{W}' := \{W' : W \in \mathcal{W}\}$ de ruimte overdekt, er geldt immers dat $\bigcup_{j=1}^k \bigcup\{W' : W \in \mathcal{W} \text{ en } j_W = j\} = \bigcup\{W' : W \in \mathcal{W}\}$, omdat verenigen een commutatieve operatie is.

Laat $x \in X$ willekeurig zijn. Omdat $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de hele ruimte overdekt, is er een $i \in \mathbb{N}$ met $x \in X_i \setminus \bigcup_{l=1}^{i-1} X_l$, met andere woorden: de kleinste i met $x \in X_i$. De familie $\mathcal{U}_i$ is ook een overdekking van X, dus is er een $U \in \mathcal{U}_i$ met $x \in U$. Deze U zit ook in $\mathcal{V}_i$, want $U \cap X_i \neq \emptyset$. Er is dus een l_U met $f_{l_U}^i(U) \in \mathcal{W}_{l_V}$. Daarom kan $\left(f_{l_U}^i(U)\right)'$ gedefinieerd worden. Het is duidelijk dat $U \cap X_i$ hier binnen ligt, want dat volgt direct uit de definitie van W'. We hebben dus een verzameling uit $\mathcal{W}'$ gevonden waar x in zit, dus het is een overdekking.

De overdekking $(Q_j)_{j=1}^k$ is een krimping van $(O_j)_{j=1}^k$, want voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$ hebben we $Q_j = \bigcup\{W' : W \in \mathcal{W} \text{ en } j_W = j\} \subseteq \bigcup\{O_{j_W} : W \in \mathcal{W} \text{ en } j_W = j\} = O_j$.

Het voldoet om aan te tonen dat $\operatorname{ord} \mathcal{W}' \leq n$, aangezien de elementen van $(Q_j)_{j=1}^k$ verenigingen zijn van elementen uit $\mathcal{W}'$. Laat ter wille van tegenspraak $(W_p')_{p=1}^{n+2} \subseteq \mathcal{W}'$ een familie verzamelingen zijn met niet-lege doorsnede. Omdat de $\mathcal{W}_i$'s disjunct zijn, is er voor elke $p \in \{1, \ldots, n+2\}$ precies één $m_p \in \mathbb{N}$ met $W_p \in \mathcal{W}_{m_p}$. Laat $x \in \bigcap_{p=1}^{n+2} W_p'$ willekeurig. Voor deze x bestaat er, zoals we eerder al gezien hebben, een $i \in \mathbb{N}$ met $x \in X_i \backslash \bigcup_{l=1}^{i-1} X_l$. Er geldt dat $m_p \leq i$ voor elke $p \in \{1, \ldots, n+2\}$, want stel dat $m_p > i$, dan zou gelden dat $x \notin \bigcup_{l=1}^{m_p - 1} X_l$ volgens de definitie van $\mathcal{W}_{m_p}$. Dus zit x ook niet in X_i, want $i < m_p$, maar er is aangenomen dat dit wel het geval is. Het toepassen van de definitie van W' op W_p geeft voor elke $p \in \{1, \ldots, n+2\}$ een $h_p \in \mathbb{N}$ en een $V_p \in \mathcal{V}_{h_p}$ met $f_{m_p}^{h_p}(V_p) = W_p$, $l_{V_p} = m_p$ en $x \in V_p \cap X_{h_p}$. Uit een soortgelijk argument als hierboven volgt nu dat $i \leq h_p$ voor elke $p \in \{1, \ldots, n+2\}$. Als i namelijk groter zou zijn dan h_p, dan zou x niet in X_{h_p} zitten, want zo is i gedefinieerd. Dit spreekt het feit dat $x \in V_p \cap X_{h_p}$ tegen. We hebben nu dus $m_p \leq i \leq h_p$. Definieer nu voor elke $p \in \{1, \ldots, n+2\}$ de verzameling $U_p := f_i^{h_p}(V_p)$. Dit zijn elementen van $\mathcal{U}_i$. Er geldt ook dat $x \in V_p \subseteq U_p$ voor elke $p \in \{1, \ldots, n+2\}$. We moeten nu alleen nog aantonen dat dit daadwerkelijk $n+2$ verschillende verzamelingen zijn om de aanname dat $\operatorname{ord} \mathcal{U}_i \leq n$ tegen te spreken.

Laat $p, q \in \{1, \ldots, n+2\}$ met $p \neq q$ willekeurig en toon aan dat $U_p \neq U_q$. Er geldt dat $x \in X_i \cap U_p \cap U_q$, dus beide verzamelingen zitten in $\mathcal{V}_i$. Daarom zijn l_{U_p} en l_{U_q} gedefinieerd. We hebben nu dat l_{U_p} de kleinste l is met $f_l^i(U_p) \cap X_l \neq \emptyset$. Dit is natuurlijk hetzelfde getal als l_{V_p}, want $f_l^i(U_p) = f_l^i\left(f_i^{h_p}(V_p)\right) = f_l^{h_p}(V_p)$. Dus $l_{U_p} = m_p$ en op dezelfde manier krijgen we $l_{U_q} = m_q$. Nu zijn er twee gevallen te onderscheiden: als $m_p \neq m_q$ volgt dat $U_p \neq U_q$ uit het feit dat $\mathcal{W}_{m_p}$ en $\mathcal{W}_{m_p}$ disjunct zijn. In het algemeen geldt

$$f_{m_p}^i(U_p) = f_{m_p}^i\left(f_i^{h_p}(V_p)\right) = f_{m_p}^{h_p}(V_p) = W_p \neq W_q = f_{m_q}^{h_q}(V_q) = f_{m_q}^i\left(f_i^{h_q}(V_q)\right) = f_{m_q}^i(U_q),$$

Dus als $m_p = m_q$, dan is $f_{m_p}^i(U_p)$ niet gelijk aan $f_{m_p}^i(U_q)$. Dit kan alleen als U_p en U_q twee verschillende verzamelingen zijn. □

Daarnaast hebben we ook de stelling van Dowker (B.2) nodig, een karakterisering van de overdekkingsdimensie met lokaal eindige open overdekkingen. Het bewijs hiervan staat in appendix B, omdat het ordinaalgetallen en transfiniete inductie gebruikt. We gebruiken deze stelling omdat in metrizeerbare ruimten open overdekkingen kunnen worden verfijnd tot lokaal eindige open overdekkingen.

Stelling 3.6. *Voor elke metrizeerbare ruimte X is de volgende uitspraak equivalent met $\dim X \leq n$. Voor elke metriek $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ bestaat er een rij lokaal eindige open overdekkingen $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ van X zó dat voor elke $i \in \mathbb{N}$ geldt dat $\operatorname{ord} \mathcal{U}_i \leq n$, $\operatorname{diam} U < 1/i$ voor elke $U \in \mathcal{U}_i$ en voor elke $U \in \mathcal{U}_{i+1}$ is er een $V \in \mathcal{U}_i$ met $\overline{U} \subseteq V$.*

Bewijs. Laat X een metrizeerbare ruimte zijn met $\dim X \leq n$. Laat $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ een metriek op X zijn. De rij open overdekkingen gaat recursief gedefinieerd worden. Voor de eerste overdekking $\mathcal{U}_1$, neem voor elke $x \in X$ een open omgeving U_x van x met $\operatorname{diam}_{\mathrm{d}} U_x < 1$. In metrizeerbare ruimtes hebben alle open overdekkingen een lokaal eindige open verfijning (deze eigenschap heet *paracompact*), en $\{U_x : x \in X\}$ dus ook. Volgens stelling B.2 heeft elke lokaal eindige open overdekking een open krimping van orde $\leq n$ als $\dim X \leq n$ geldt. De resulterende lokaal eindige open overdekking van orde $\leq n$ wordt aangeduid met $\mathcal{U}_1$.

Laat $i \in \mathbb{N}$ en neem aan dat $\mathcal{U}_j$ al is gedefinieerd voor alle $j < i$. Neem voor elk punt $x \in X$ een omgeving U_x met $\operatorname{diam}_{\mathrm{d}} U_x < 1/i$ en $\overline{U}_x \subseteq V$ voor een $V \in \mathcal{U}_{i-1}$. Op dezelfde manier als hierboven beschreven kan er een open verfijning $\mathcal{U}_i$ gevonden worden die lokaal eindig is en orde $\leq n$ heeft.

We merken op dat deze rij $(\mathcal{U}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ voldoet aan de eerste twee eisen van lemma 3.5. Dus als we aantonen dat deze rij ook voldoet aan eis (iii), kunnen we concluderen dat $\dim X \leq n$.

Laat $x \in X$ met een open omgeving U willekeurig zijn. Dan is er een $\varepsilon > 0$, zodanig dat $x \in B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Neem nu een $i \in \mathbb{N}$ groot genoeg zodat $1/i < \varepsilon/2$. Nu ligt $\operatorname{St}(x, \mathcal{U}_i^{\Delta})$ binnen $B(x, \varepsilon)$ en dus ook binnen U. Dit tonen we aan door een willekeurig punt $y \in \mathrm{St}(x, \mathcal{U}_i^\Delta)$ te nemen. Er is nu een $z \in X$ met $x, y \in \mathrm{St}(z, \mathcal{U}_i)$ vanwege de definitie van $\mathcal{U}_i^\Delta$. Dit betekent dat er $U_x, U_y \in \mathcal{U}_i$ zijn met $x, z \in U_x$ en $y, z \in U_y$. We hebben dat $\operatorname{diam}_\mathrm{d} U_x, \operatorname{diam}_\mathrm{d} U_y < 1/i$, dus $\mathrm{d}(x,z), \mathrm{d}(z,y) < 1/i$. Uit de driehoeksongelijkheid volgt nu dat $\mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(y,z) < 2/i < \varepsilon$, dus $y \in B(x, \varepsilon)$. We hebben dus aangetoond dat er tussen elk punt en een open omgeving een verzameling van de vorm $\mathrm{St}(x, \mathcal{U}_i^\Delta)$ ligt, waarbij $i \in \mathbb{N}$. Dus de familie verzamelingen van deze vorm vormen een basis. □

Stelling 3.7. *Voor elke metrizeerbare ruimte X geldt $\operatorname{Ind} X \leq \dim X$.*

Bewijs. We gaan deze stelling bewijzen door middel van inductie op $\dim X$. Als $\dim X = -1$, dan is $X = \emptyset$, dus $\operatorname{Ind} X = -1$. Neem aan dat voor elke metrizeerbare ruimte X met $\dim X \leq n-1$ geldt $\operatorname{Ind} X \leq \dim X$ en laat X een willekeurige metrizeerbare ruimte zijn met $\dim X = n$. Laat F gesloten en U' open zijn met $F \subseteq U'$ en ga op zoek naar een open V met $F \subseteq V \subseteq U'$ en $\operatorname{Ind} \partial V \leq n-1$. Omdat X metrizeerbaar en dus ook normaal is, bestaat er een continue $f : X \to [0,1]$ met $f[F] = 0$ en $f[X \backslash U'] = 1$ vanwege het lemma van Urysohn (stelling A.1). Laat $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ een willekeurige metriek zijn die de topologie op X bepaald. Dan is $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ met $\mathrm{d}(x,y) = \rho(x,y) + |f(x) - f(y)|$ ook een metriek op X. De karakterisering van de overdekkingsdimensie voor metrizeerbare ruimtes uit stelling 3.6 geeft een rij lokaal eindige open overdekkingen $(\mathcal{U}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ van X zó dat voor elke $i \in \mathbb{N}$ geldt dat $\operatorname{ord} \mathcal{U}_i \leq n$, $\operatorname{diam}_\mathrm{d} U < 1/i$ voor elke $U \in \mathcal{U}_i$ en er voor elke $U \in \mathcal{U}_{i+1}$ een $W \in \mathcal{U}_i$ is met $\overline{U} \subseteq W$.

Definieer nu twee rijen gesloten verzamelingen $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ als volgt: $F_0 := F$ en $G_0 := X \backslash U'$ en voor $i \in \mathbb{N}$, definieer

$$\begin{aligned} V_i &:= \bigcup \{U \in \mathcal{U}_i : \overline{U} \cap G_{i-1} \neq \emptyset\}, \\ W_i &:= \bigcup \{U \in \mathcal{U}_i : \overline{U} \cap G_{i-1} = \emptyset\}, \\ F_i &:= X \backslash V_i, \\ G_i &:= X \backslash W_i. \end{aligned}$$

Voor $i \in \mathbb{N}$ geldt dat $G_i \subseteq G_{i+1}$. Laat $x \in G_i$ en stel dat $x \notin G_{i+1}$, dan zit x in W_{i+1}. Dus er is een open omgeving U van x waarvan de afsluiting disjunct is van G_i, maar dit kan niet want $x \in G_i$.

Er geldt nu dat als $U \in \mathcal{U}_i$ en $\overline{U} \cap G_{i-1} \neq \emptyset$, dan $\overline{U} \cap F_{i-1} = \emptyset$. Het wordt eerst aangetoond voor $i = 1$. Voor $U \in \mathcal{U}_1$ geldt dat $\operatorname{diam}_\mathrm{d} U < 1$. Stel dat $\overline{U} \cap G_0 \neq \emptyset$ en neem ter wille van tegenspraak aan dat $\overline{U} \cap F_0 \neq \emptyset$. Dan zijn er $x, y \in \overline{U}$ met $x \in F_0 = F$ en $y \in G_0 = X \backslash U$, dus $\mathrm{d}(x,y) = \rho(x,y) + |f(x) - f(y)| > |f(x) - f(y)| = 1$. Dit spreekt $\operatorname{diam}_\mathrm{d} \overline{U} = \operatorname{diam}_\mathrm{d} U < 1$ tegen. Voor $i > 1$, laat $U \in \mathcal{U}_i$ en neem aan dat $\overline{U} \cap G_{i-1} \neq \emptyset$. Er is een $O \in \mathcal{U}_{i-1}$ met $\overline{U} \subseteq O$, dus $\emptyset \neq \overline{U} \cap G_{i-1} \subseteq W \cap G_{i-1}$. Dit betekent dat $O \not\subseteq W_{i-1}$, want als O wel bevat is in W_{i-1}, dan $\overline{O} \cap G_{i-2} = \emptyset$, dus $O \cap G_{i-2} = \emptyset$, maar $O \cap G_{i-2} \subseteq O \cap G_{i-1} \neq \emptyset$. $O \in \mathcal{U}_{i-1}$ dus dan moet $O \subseteq V_{i-1}$. Hieruit volgt dat $\overline{U} \cap F_{i-1} \subseteq O \cap F_{i-1} = O \backslash V_{i-1} = \emptyset$.

Voor elke $i \in \mathbb{N}$ kan nu worden aangetoond dat $\overline{W}_i$ disjunct is van G_{i-1}. Omdat $\mathcal{U}_i$ lokaal eindig is, kan $\overline{W}_i$ worden geschreven als $\bigcup\{\overline{U} : U \in \mathcal{U}_i : \overline{U} \cap G_{i-1} = \emptyset\}$. Nu hebben we $\overline{W}_i \cap G_{i-1} = \bigcup\{\overline{U} \cap G_{i-1} : U \in \mathcal{U}_i$ en $\overline{U}_i \cap G_{i-1} = \emptyset\} = \emptyset$.

Op een vergelijkbare manier zien we dat $\overline{V}_i$ disjunct is van F_{i-1}. In $\overline{V}_i$ kan namelijk de volgorde van de afsluiting en de vereniging worden omgedraaid omdat $\mathcal{U}_i$ lokaal eindig is. We krijgen dus $\overline{V}_i \cap F_{i-1} = \bigcup\{\overline{U} \cap F_{i-1} : U \in \mathcal{U}_i$ en $\overline{U} \cap G_{i-1} \neq \emptyset\}$ waarbij de vereniging over alle $\overline{U}$'s van volgorde is gewisseld met de doorsnede met F_{i-1}. We hadden eerder gezien dat de afsluiting van U disjunct is van F_{i-1} als het G_{i-1} snijdt en dat is precies wat we hier hebben, dus $\overline{V}_i$ is disjunct van F_{i-1}.

Als we dit resultaat omschrijven komen we uit op $F_{i-1} \subseteq X \backslash \overline{V}_i = X \backslash \overline{X \backslash F_i} = \operatorname{Int} F_i$ en op dezelfde manier $G_{i-1} \subseteq \operatorname{Int} G_i$. Dit betekent dat $V := \bigcup_{i=0}^\infty F_i$ en $W := \bigcup_{i=0}^\infty G_i$ open zijn, want voor elke $x \in V$ is er een F_i met $x \in F_i$, dus $x \in \operatorname{Int} F_{i-1}$. Het zelfde argument werkt voor W. V en W zijn disjunct, want voor elke $i \in \mathbb{N}$ geldt $F_i \cap G_i = (X \backslash V_i) \cap (X \backslash W_i) = X \backslash (V_i \cup W_i) = X \backslash \bigcup \mathcal{U}_i = X \backslash X = \emptyset$. Hieruit volgt dat $V \cap W = \bigcup_{i=0}^\infty F_i \cap G_i = \emptyset$, dus $V \subseteq X \backslash W \subseteq X \backslash G_0 = U'$. Er geldt natuurlijk ook dat $F = F_0 \subseteq V$. We hoeven nu dus alleen nog te laten zien dat $\operatorname{Ind} \partial V \leq n-1$.

Definieer $L := X \backslash (V \cup W)$, dan is $\partial V \subseteq L$, namelijk $\partial V = \overline{V} \backslash V = \overline{V} \cap (X \backslash V) \subseteq (X \backslash W) \cap (X \backslash V) = X \backslash (W \cup V)$, waarbij de derde inclusie volgt uit een eigenschap van open verzamelingen: $V \cap W = \emptyset$, dus $\overline{V} \cap W = \emptyset$. Laat zien dat $\dim L \leq n-1$, want dan volgt dat $\operatorname{Ind} \partial V \leq \operatorname{Ind} L \leq \dim L \leq n-1$ uit stelling 2.4 en de inductiehypothese, want ∂V is gesloten in X en dus ook in de gesloten deelruimte

L. Definieer $L_i := X \setminus (F_i \cup G_i)$, dan is $L = X \setminus (V \cup W) = X \setminus (\bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i) = X \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} (F_i \cup G_i) = \bigcap_{i=0}^{\infty} X \setminus (F_i \cup G_i) = \bigcap_{i=0}^{\infty} L_i$. Definieer $\mathcal{V}_i := \{U \cap L : U \in \mathcal{U}_i, \overline{U} \cap G_{i-1} \neq \emptyset\}$ voor $i \in \mathbb{N}$ en laat zien dat deze rij families open verzamelingen in L voldoet aan de voorwaarden in stelling 3.6. Laat $x \in L$, dan $x \in L_i = X \setminus (F_i \cup G_i) = (X \setminus F_i) \cap (X \setminus G_i) = V_i \cap W_i \subseteq V_i$, dus er is een U met $x \in U$ en $\overline{U} \cap G_{i-1} \neq \emptyset$, wat betekent dat elke $\mathcal{V}_i$ een overdekking van L is. Er geldt ook dat $\operatorname{ord} \mathcal{V}_i \leq n-1$, neem een $x \in L$, dan $x \in L_i = V_i \cap W_i \subseteq W_i$, dus er is een $U \in \mathcal{U}_i$ met $x \in U$ en $\overline{U} \cap G_{i-1} = \emptyset$, dus $U \cap L \notin \mathcal{V}_i$. Dus er moet gelden dat $\operatorname{ord} \mathcal{V}_i \leq \operatorname{ord}\{U \cap L : U \in \mathcal{U}_i\} - 1 \leq \operatorname{ord} \mathcal{U}_i - 1 \leq n-1$. Voor $U \cap L \in \mathcal{V}_i$ geldt $\operatorname{diam}_{\mathrm{d}} U \cap L \leq \operatorname{diam}_{\mathrm{d}} U < 1/i$. Laat $U \cap L \in \mathcal{V}_{i+1}$ met $U \in \mathcal{U}_{i+1}$. Neem een $O \in \mathcal{U}_i$ met $\overline{U} \subseteq O$. Er geldt $\emptyset \neq \overline{U} \cap G_i \subseteq O \cap G_i$, dus $O \notin W_i$, dus $\overline{O} \cap G_{i-1} \neq \emptyset$, dus $O \cap L \in \mathcal{V}_i$ en $\overline{U \cap L} \subseteq \overline{U} \cap L \subseteq O \cap L$. □

Nu hebben we alle benodigdheden om het hoofdresultaat van dit hoofdstuk te bewijzen.

Stelling 3.8. *Voor elke separabele metrizeerbare ruimte X geldt* $\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$.

Bewijs. Laat X een separabele metrische ruimte zijn. In metrizeerbare ruimten is separabiliteit equivalent met de Lindelöf-eigenschap, dus we mogen stelling 3.4 toepassen. We hebben dus $\dim X \leq \operatorname{ind} X$. Uiteraard geldt ook dat $\operatorname{ind} X \leq \operatorname{Ind} X$ (stelling 2.2). Ten slotte geldt vanwege stelling 3.7 dat $\operatorname{Ind} X \leq \dim X$. Deze drie vergelijkingen samenvoegen geeft $\dim X \leq \operatorname{ind} X \leq \operatorname{Ind} X \leq \dim X$. □

Voor metrizeerbare ruimten is de overdekkingsdimensie dus gelijk aan de grote inductieve dimensie, volgens stellingen 3.4 en 3.7. Dit is onafhankelijk bewezen door Katětov in 1952 [10] en Morita in 1954 [16]. Daarnaast hebben we gezien dat als de ruimte ook separabel is, de kleine inductieve dimensie ook gelijk is (stelling 3.8). Het heeft ongeveer 10 jaar geduurd voordat duidelijk werd dat deze extra voorwaarde ook echt nodig is, want in 1962 heeft Roy een metrizeerbare ruimte gevonden die nuldimensionaal is volgens de kleine inductieve dimensie, maar eendimensionaal volgens de grote inductieve dimensie en de overdekkingsdimensie [20].

4

Compacte Hausdorff-ruimte met $\dim X = 1$ en $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = 2$

We hebben gezien dat voor separabele metrizeerbare ruimten, de drie dimensies overeenkomen (stelling 3.8). Nu kan de vraag worden gesteld of deze overeenstemming dan ook geldt voor andere klassen van "mooie" ruimten, zoals de compacte Hausdorff-ruimten. Compactheid is namelijk een eigenschap die ervoor zorgt dat veel problemen kunnen worden gereduceerd naar een eindig probleem, wat vaak een stuk makkelijker is om op te lossen.

Het blijkt dat deze equivalentie niet geldt voor compact Hausdorff-ruimten. Lunc gaf in 1949 het eerste voorbeeld van een ruimte met $\dim X \neq \operatorname{ind} X$ [14]. Er zijn zelfs compacte Hausdorff-ruimten waarbij alle drie de dimensies verschillen [17]. Dit hoofdstuk beschrijft een ruimte waarbij de inductieve dimensies 2 zijn, maar de overdekkingsdimensie 1. Lokucievskiĭ publiceerde dit voorbeeld in 1949 [13]. De bouwstenen van deze ruimte zijn de Cantorverzameling en de lange lijn. We beschrijven deze in respectievelijk paragraaf 4.1 en 4.2. Vervolgens plakken we in paragraaf 4.3 bepaalde punten van het product van deze twee ruimtes aan elkaar door middel van quotiëntruimten. Door twee kopieën hiervan aan elkaar te plakken arriveren we bij de Lokucievskiĭ-ruimte.

4.1. Cantorverzameling

Voor de constructie van de Cantorverzameling definiëren we eerst een rij deelverzamelingen van het eenheidsinterval.

Definitie 4.1. $C_0 := [0, 1]$ en definieer voor $n \in \mathbb{N}$:

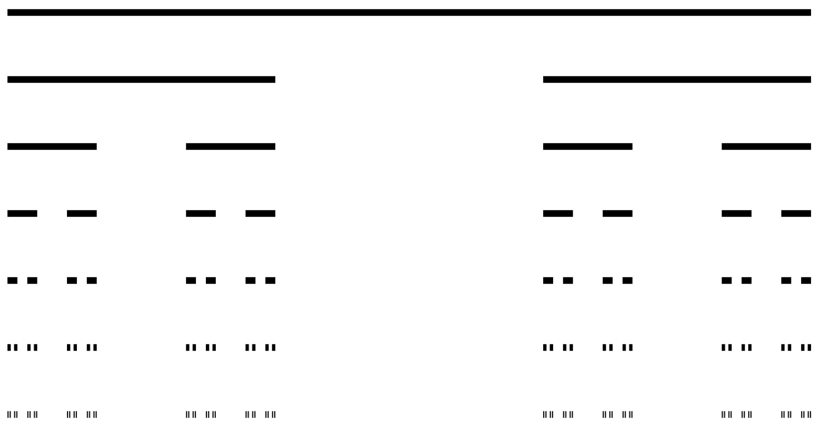
$$C_n := \frac{C_{n-1}}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3}\right).$$

Hierbij gebruiken we de notatie $xA = \{xa : a \in A\}$ en $x + A = \{x + a : a \in A\}$ voor $x \in \mathbb{R}$ en $A \subseteq \mathbb{R}$. Het is duidelijk dat $C_n \subseteq C_{n-1}$, dus de rij is dalend. De eerste verzamelingen van deze rij zijn $[0, 1]$, $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ en $[0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1]$, zie figuur 4.1. Met andere woorden, je krijgt C_n als je van elk interval uit C_{n-1} het "middelste derde" van dat interval weghaalt.

Definitie 4.2. De Cantorverzameling is de doorsnede van deze rij verzamelingen:

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

We gaan kijken naar eigenschappen van C als topologische ruimte. Ze erft de gewone topologie van de reële getallen, dus elke C_n is gesloten omdat het een eindige vereniging is van gesloten intervallen. C is de doorsnede van gesloten verzamelingen en daarom ook gesloten. Het is duidelijk dat C begrensd is, dus volgens de stelling van Heine-Borel is C een compacte ruimte. Het is triviaal dat C ook Hausdorff is, want het is een metrische ruimte aangezien het een deelruimte van een metrische ruimte is.



Figuur 4.1: De eerste 7 verzamelingen in de recursief gedefinieerde rij C_n

Propositie 4.1. *De Cantorverzameling is nuldimensionaal:* $\dim C = \operatorname{ind} C = \operatorname{Ind} C = 0$.

Bewijs. Laat $x \in C$ en een open omgeving $U \subseteq C$ van x willekeurig zijn. Neem een interval $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ met $x \in (a, b) \cap C \subseteq U$. Nu is er een $n \in \mathbb{N}$ groot genoeg, zodanig dat er een $m \neq 1 \mod 3$ is met $x \in \left[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}\right] \subseteq (a, b)$. Neem een open interval (c, d) met $\left[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}\right] \subseteq (c, d) \subseteq (a, b)$ en $c, d \notin C$. Deze c en d bestaan omdat de Cantorverzameling geen intervallen bevat, dus in elk open interval, in dit geval $\left(a, \frac{m}{3^n}\right)$ en $\left(\frac{m+1}{3^n}, b\right)$, is er een punt dat niet in C zit. De open verzameling $V := (c, d) \cap C$ is open in C en voldoet aan $x \in V \subseteq U$.

De rand van V is leeg: $\partial V = \overline{V} \backslash V = ([c, d] \cap C) \backslash V = V \backslash V = \emptyset$, want $c, d \notin C$. We kunnen concluderen dat $\operatorname{ind} C \leq 0$. De Cantorverzameling is niet leeg, dus $\operatorname{ind} C = 0$. Nu volgt dat $\dim C = 0$ en $\operatorname{Ind} C = 0$ uit stelling 3.8, want C is metrisch en compact (en daarom ook separabel). □

Normaal zijn we gewend om getallen te representeren in het decimale talstelsel, maar elk reëel getal kunnen we ook schrijven als som van machten van 3 in plaats van 10. Deze manier van schrijven noemen we het *ternaire talstelsel*. Het blijkt dat dat we de Cantorverzameling kunnen zien als alle getallen in het eenheidsinterval die in het ternaire talstelsel kunnen worden geschreven met alleen maar nullen en tweeën. Bijvoorbeeld, we kunnen 1/3 in het ternaire talstelsel schrijven als 0.1_3, want het is gelijk aan $0 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^{-1}$. Maar we weten dat 1/3 wel in C zit. Toch spreekt dit voorbeeld niet onze claim tegen, want we mogen het ook schrijven als $0.02222..._3$. 1/3 is namelijk ook gelijk aan $0 \cdot 3^0 + 0 \cdot 3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + 2 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4} + ...$ Getallen uit het eenheidsinterval hebben in het algemeen dus niet een unieke representatie in het ternaire talstelsel, maar getallen uit de Cantorverzameling hebben wel een unieke representatie, waarbij alle coëfficiënten 0 of 2 zijn. We schrijven deze representatie als $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, met $x_n \in \{0, 1\}$.

Propositie 4.2. *De afbeelding* $h : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to C$ *gedefinieerd door*

$$(x_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}$$

is een homeomorfisme.

Hierbij is $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, de verzameling van rijen bestaande uit alleen maar nullen en enen, een afkorting van $\prod_{n \in \mathbb{N}} \{0, 1\}$. Deze ruimte heeft dus de producttopologie.

Bewijs. Het codomein van deze afbeelding is inderdaad de Cantorverzameling. Laat (x_n) een rij van alleen maar nullen en enen zijn. Nu hebben we dat voor elke $n \in \mathbb{N}$, de partiële som $s_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{3^i}$

in C_n zit, want er is een $m \neq 1 \mod 3$ zó dat $s_n \in \left[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}\right] \cup \left[\frac{m+2}{3^n}, \frac{m+3}{3^n}\right] \subseteq C_n$. De reeks (s_n) convergeert, want hij is van boven begrensd door de meetkundige reeks met factor $2/3$ en alle termen zijn niet-negatief, dus de reeks convergeert volgens de vergelijkingstest. De limiet van de reeks, ofwel $h((x_n))$ zit in de Cantorverzameling, want hij zit in elke C_n.

Om aan te tonen dat deze afbeelding injectief is, laten we $(x_n), (y_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ willekeurige verschillende rijen zijn. Dan moet er dus een $i \in \mathbb{N}$ zijn met $x_i \neq y_i$. Neem z.v.v.a. aan dat $x_i = 0$ en $y_i = 1$. Dit betekent dat er een $m \neq 1 \mod 3$ moet zijn met $h((x_n)) \in \left[\frac{m}{3^i}, \frac{m+1}{3^i}\right]$ en $h((y_n)) \in \left[\frac{m+2}{3^i}, \frac{m+3}{3^i}\right]$, dus $h((x_n))$ en $h((y_n))$ kunnen niet gelijk zijn.

Laat $x \in C$ willekeurig. Neem $x_1 = 0$ als $x \in [0, 1/3]$ en neem $x_1 = 1$ als $x \in [2/3, 1]$. Zo kunnen we recursief verder gaan: neem $x_n = 0$ als $x \in C_{n-1}/3$ en neem $x_n = 1$ als $x \in 2/3 + C_{n-1}/3$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Op deze manier hebben we een rij $(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ geconstrueerd met $h((x_n)) = x$, dus h is surjectief.

We moeten alleen nog laten zien dat deze afbeelding in beide richtingen continu is. We tonen het aan voor h en vervolgens volgt de continuïteit van h^{-1} uit stelling A.4. Het is duidelijk dat de afbeelding $h_n : \{0,1\} \to C$ gedefinieerd door $x_n \mapsto \frac{2x_n}{3^n}$ continu is. Daarnaast convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}$ uniform, dit kan eenvoudig geverifieerd worden met de Weierstrass M-test. Hieruit volgt dat de limietfunctie h continu is. □

Lemma 4.3. *De afbeelding $f : C \to [0,1]$ gedefinieerd door*

$$x = (x_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$$

is continu en surjectief.

Bewijs. Propositie 4.2 liet zien dat de Cantorverzameling homeomorf is met de verzameling rijen die bestaan uit nullen en enen. We identificeren dus elk element uit C met een rij $(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Het is duidelijk dat de afbeelding $x_n \mapsto \frac{x_n}{2^n}$ continu is voor elke $n \in \mathbb{N}$. Men kan met de Weierstrass M-test controleren dat deze reeks functies uniform convergeert. Hieruit volgt dat f continu is.

We moeten nu nog laten zien dat f surjectief is. Laat $x \in [0,1]$ willekeurig zijn en kijk naar een representatie van x in het binaire talstelsel. Dit kunnen we schrijven als $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$ waarbij elke $x_n \in \{0,1\}$. Hiervoor geldt natuurlijk dat $f((x_n)) = x$, dus f is surjectief. □

Definitie 4.3. Definieer de deelverzameling $Q \subseteq C$ als volgt:

$$Q := \{(x_n) \in C : \exists m \in \mathbb{N} : \forall k > m : x_k = 0 \text{ of } \forall k > m : x_k = 2\}.$$

Dus een rij in Q eindigt in alleen maar nullen of alleen maar tweeën. Het blijkt dat dit precies de randpunten zijn van de intervallen die zijn weggehaald uit $[0,1]$ in de constructie van C. Het beeld van Q onder f uit lemma 4.3 bestaat dus uit alle elementen uit het eenheidsinterval die in het binaire talstel geschreven kunnen worden als een rij die eindigt in alleen maar nullen of alleen maar enen.

4.2. Lange lijn

Duid het kleinste aftelbare ordinaalgetal aan met met ω_0 en duid het kleinste overaftelbare ordinaalgetal aan met ω_1. We definiëren ordinaalgetallen in paragraaf A.6 van de appendix. Duid de verzameling van alle aftelbare ordinaalgetallen aan met W_0. Deze verzameling heeft de eigenschap dat voor elk aftelbaar ordinaalgetal er aftelbaar veel kleinere elementen en overaftelbaar veel grotere elementen in de verzameling zitten.

Definitie 4.4. De verzameling $L_0 := W_0 \times [0,1)$ krijgt de topologie die wordt geïnduceerd door de lineaire orde $<$:

$$(\alpha, s) < (\beta, t) \text{ als } \alpha <_{W_0} \beta \text{ of } (\alpha = \beta \text{ en } s <_{\mathbb{R}} t).$$

Met "geïnduceerd door lineaire orde $<$" bedoelen we dat $\{\{x \in L_0 : a < x\} : a \in L_0\} \cup \{\{x \in L_0 : x < b\} : b \in L_0\}$ een subbasis vormt voor de topologie. Elk beginstuk, $[0, (\alpha, s)) = \{(\beta, t) \in L_0 : (\beta, t) < (\alpha, s)\}$ met $\alpha < \omega_1$ en $s \in [0,1)$, van deze ruimte is homeomorf met $[0, \infty)$ met de gewone topologie.

Definitie 4.5. De *lange lijn* definieren we als $L := L_0 \cup \{\omega_1\}$, waarbij $a < \omega_1$ voor elke $a \in L_0$. Basis-open intervallen in L zijn $[0, b) := \{x \in L : x < b\}$, $(a, \omega_1] := \{x \in L : a < x\}$ en $(a, b) := \{x \in L : a < x < b\}$, waarbij $a, b \in L$.

Men kan laten zien dat L compact is op dezelfde manier als hoe men laat zien dat een gesloten interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ compact is. L is ook duidelijk Hausdorff.

4.3. Constructie

We construeren de ruimte van Lokucievskiĭ met behulp van de Cantorverzameling, de lange lijn en quotiëntruimten van hun product. $L \times C$ is een compacte Hausdorffruimte, aangezien het een product is van compacte Hausdorffruimten.

Lemma 4.4. *Laat $U \subseteq L \times C$ open zijn met $U \cap (\{\omega_1\} \times C) \neq \emptyset$ en definieer $y_U := \sup\{y \in [0, 1] : (\omega_1, y) \in U\}$. Als $y_U \in C \backslash (Q \cup \{1\})$, dan geldt één van de volgende uitspraken.*

i. Er is een $x \in L_0$ zó dat $(x, \omega_1] \times \{y_U\} \subseteq \partial U$.

ii. Er is een $y > y_U$ en een cofinale $L' \subseteq L_0$ zó dat $L' \times ((y_U, y) \cap C) \subseteq U$.

Dit betekent dat als de bovenrand van een open verzameling U in $L \times C$ precies niet een eindpunt van een interval dat is weggehaald in de constructie van C raakt, dan zijn er twee mogelijkheden: (i) er zit een horizontaal intervalletje in de rand van U, of (ii) er zit een rechthoekje binnen U tegen de rechter zijkant van de ruimte aan dat boven het snijpunt ligt.

Bewijs. Het punt (ω_1, y_U) is niet een element van U, als dat namelijk wel het geval was, dan zou er een $\varepsilon > 0$ bestaan zodanig dat $\{\omega_1\} \times (y_U, y_U + \varepsilon) \cap C \subseteq U$. Maar omdat y_U niet in Q zit, dus niet een eindpunt van een weggehaald interval is, bestaat er een $y \in (y_U, y_U + \varepsilon) \cap C$. Dit spreekt het feit dat y_U het supremum is tegen, want $(\omega_1, y) \in U$ en $y > y_U$.

Omdat y_U het supremum is, bestaat er een rij (y_n) die naar y_U convergeert zó dat elke (ω_1, y_n) in U zit. Omdat U open is, bestaat er voor elke y_n een $x_n \in L_0$ met $(x_n, \omega_1] \times \{y_n\} \subseteq U$. Tussen x_n en ω_1 bestaat er een ordinaalgetal α_n met $(\alpha_n, \omega_1] \subseteq U$, vanwege de constructie van L. Definieer α_0 als het kleinste aftelbare ordinaalgetal dat groter is dan alle α_n. Dit bestaat omdat er altijd overaftelbaar veel aftelbare ordinaalgetallen zijn die groter zijn dan elke a_n, terwijl er maar aftelbaar veel α_n zijn.

Er geldt nu dat $(\alpha_0, \omega_1] \times \{y_U\} \subseteq \overline{U}$. Als (x, y_U) namelijk een willekeurig punt uit $(\alpha_0, \omega_1] \times \{y_U\}$ is en V een open omgeving, dan is er een $n \in \mathbb{N}$ met $(x, y_n) \in V$, want y_U is het supremum. Er geldt natuurlijk ook dat $(x, y_n) \in U$, want $x > \alpha_0 > \alpha_n$.

Neem aan dat (i) niet geldt, dus voor elke $x \in L_0$ is $(x, \omega_1] \times \{y_U\}$ niet bevat in de rand van U. Dit geldt in het bijzonder voor $x \in (\alpha_0, \omega_1)$. Voor deze x is bekend dat $(x, \omega_1) \times \{y_U\} \subseteq \overline{U}$, wat betekent dat er een $x' > x$ bestaat met $(x', y_U) \in U$, omdat $\partial U = \overline{U} \backslash U$. Met andere woorden, er bestaat een $L_1 \subseteq (\alpha_0, \omega_1)$ die cofinaal is in L_0 en $L_1 \times \{y_U\} \subseteq U$.

Omdat U open is, kunnen we voor elke $x \in L_1$ een $k_x \in \mathbb{N}$ vinden met $\{x\} \times ((y_U, y_U + 1/k_x) \cap C) \subseteq U$. Definieer voor elke $k \in \mathbb{N}$ de verzameling $L_k := \{x \in L_1 : k_x = k\}$. Er moet nu een k zijn waarvoor L_k cofinaal in L_1 is en dus ook in L_0. Als deze er namelijk niet is, dan is elke L_k van boven begrensd door een aftelbaar ordinaalgetal α_k. Maar er zijn overaftelbaar veel aftelbare ordinaalgetallen in (α_k, ω_1) voor elke $k \in \mathbb{N}$, dus moet er ook een aftelbaar ordinaalgetal α zijn dat groter is dan alle α_k's, want daar zijn er maar aftelbaar veel van. We hebben nu dat α in geen enkele L_k zit, maar wel in L_1. Dit spreekt het feit dat de L_k's heel L_1 overdekken tegen. Nu geldt (ii) voor $y := y_U + 1/k$ en $L' := L_k$. □

We merken op dat de aanname dat y_U niet in Q zit essentieel is in dit lemma. Als dat namelijk niet het geval is, kan de "bovenrand" van U bestaan uit maar één punt. Om dit te laten zien nemen we de open verzameling $U := (x, \omega_1] \times ((-1/2, 1/2) \cap C)$ als voorbeeld. De verzameling $(-1/2, 1/2) \cap C$ is ook gesloten in C, want ze is gelijk aan $[0, 1/3] \cap C$. In dit geval hebben we $y_U = 1/3$, dus dit supremum zit in Q en het punt (ω_1, y_U) zit in U. Omdat $[0, 1/3] \cap C$ gesloten is, is de afsluiting van U gelijk aan $[x, \omega_1] \times ([0, 1/3] \cap C)$. Dit betekent dat (x, y_U) het enige punt in de bovenrand van U is.

Waarom dit van belang is zal duidelijk worden in lemma 4.7. Dan gaan we namelijk zien dat de randen van bepaalde open verzamelingen in de ruimte die we hieronder definiëren, kleine inductieve dimensie ≥ 1 hebben.

Nu plakken we bepaalde punten van $L \times C$ aan elkaar aan de hand van een quotïentafbeelding.

Definitie 4.6. De equivalentierelatie E op $L \times C$ definiëren we als:

$$(x_1, y_1)E(x_2, y_2) \text{ als } (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ of } (x_1 = x_2 = \omega_1 \text{ en } f(y_1) = f(y_2))$$

waarbij f de afbeelding uit lemma 4.3 is. Y is de quotiëntruimte $(L \times C)/E$. De quotiëntafbeelding $(x, y) \mapsto [(x, y)]$ duiden we aan met $q : L \times C \to Y$.

Propositie 4.5. *De ruimte Y heeft de volgende eigenschappen.*

i. *Y is compact.*

ii. *Y is Hausdorff.*

iii. *$I := q[\{\omega_1\} \times C]$ is homeomorf met $[0, 1]$.*

iv. *$K := q[\{\omega_1\} \times Q]$ is homeomorf met $\left\{\frac{m}{2^n} : m, n \in \mathbb{N}, m \text{ oneven}\right\}$.*

Bewijs. De quotiëntafbeelding q is continu, dus Y is compact omdat het het beeld is van een compacte ruimte onder een continue afbeelding.

Om uitspraak (ii) te bewijzen is het volgens stelling A.2 genoeg om aan te tonen dat de quotiëntafbeelding q gesloten is, want dan erft Y normaliteit van $L \times C$. Maar volgens stelling A.5 hoeven we alleen te bewijzen dat de afbeelding f uit lemma 4.3 gesloten is, want Y is de *adjunctieruimte* van f. Laat F een gesloten verzameling van C zijn. Dan is F compact, want het is een gesloten deelruimte van een compacte ruimte. Het beeld van een compacte ruimte onder een continue afbeelding, $f[F]$, is ook compact vanwege stelling A.3. Compacte deelruimten van het eenheidsinterval zijn gesloten, dus we hebben aangetoond dat $f[F]$ gesloten is in $[0, 1]$ voor elke gesloten $F \subseteq C$.

Deel (iii) volgt uit het uitschrijven van de equivalentieklassen en het toepassen van de surjectiviteit van f:

$$\begin{aligned} q[\{\omega_1\} \times C] &= \{[(\omega_1, y)] : y \in C\} \\ &= \{\{(\omega_1, y') : f(y') = f(y)\} : y \in C\} \\ &= \{\omega_1\} \times [0, 1]. \end{aligned}$$

Deel (iv) kunnen we op een soortgelijke manier aantonen als (iii). We hadden al gezien dat alle punten uit het beeld van Q onder f geschreven kunnen worden in het binaire talstelsel als een rij die eindigt met alleen maar nullen of alleen maar enen. Als de rij eindigt op alleen maar enen, kunnen we deze omschrijven naar een rij die eindigt op alleen maar nullen. Van de de laatste nul voor de rij enen maken we een 1 en alle coëfficiënten daarna worden 0. Ten slotte is een rij eindigend op alleen nullen equivalent aan een getal van de vorm ${}^{m}/_{2^n}$ waarbij m oneven is. □

Propositie 4.6. *Y heeft overdekkingsdimensie ≤ 1.*

Bewijs. Laat $\mathcal{U}$ een eindige open overdekking van Y zijn. We gaan eerst kijken naar $\mathcal{U}_1 := \{U \in \mathcal{U} : U \cap I \neq \emptyset\}$. Deze familie overdekt I, dus er is een familie $\mathcal{V}_1$ van open verzamelingen in I, die een krimping is van $\{U \cap I : U \in \mathcal{U}_1\}$ met orde ≤ 1, want $\dim I = 1$. Van deze overdekking kunnen we een krimping $\mathcal{V}_2$ nemen, zó dat voor elk punt $y \in C$ er maximaal één element $V \in \mathcal{V}_2$ is met $x \in V$. Stel namelijk dat een interval (a, b) de doorsnede is van $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_1$. Er is dan altijd een interval $(c, d) \subseteq (a, b)$ dat disjunct is van de Cantorverzameling. We kunnen dus $V_1' \subseteq V_1$ en $V_2' \subseteq V_2$ kiezen zó dat $V_1' \cap V_2' = (c, d)$. Kies nu voor elke $V \in \mathcal{V}_2$ een ordinaalgetal α_V zodanig dat er een $U \in \mathcal{U}_1$ is met $q[(\alpha_V, \omega_1] \times (V \cap C)] \subseteq U$. Er zijn eindig veel V's, dus neem de grootste: $\alpha := \max\{\alpha_V : V \in \mathcal{V}_2\}$. Nu is $\mathcal{V}_3 := \{q[(\alpha, \omega_1] \times (V \cap C)] : V \in \mathcal{V}_2\}$ een open krimping van $\mathcal{U}_1$ van orde ≤ 1.

Nu gaan we kijken naar $\mathcal{U}_2 := \{U \cap [0, \alpha + 1) \times C : U \in \mathcal{U}\}$. Hiervan kunnen we een verfijning $\mathcal{W}_1$ maken bestaande uit open "rechthoeken" van de vorm: $(x_1, x_2) \times ((y_1, y_2) \cap C)$ en $[0, x_2) \times ((y_1, y_2) \cap C)$, waarbij $x_1, x_2 \in [0, \alpha + 1)$ en $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, vanwege de definities van de producttopologie en basis. Neem nu $x \in [0, \alpha + 1)$ vast. Omdat $\dim C = 0$, kunnen we een krimping $\mathcal{W}_x$ van $\mathcal{W}_1$ vinden zó dat $\{W \cap (\{x\} \times C) : W \in \mathcal{W}_x\}$ orde ≤ 0 heeft. De resulterende familie die we krijgen als we dit voor elke x doen, noemen we $\mathcal{W}_2$. Neem nu $y \in C$ vast. Nu kunnen we hetzelfde trucje opnieuw doen. Neem een krimping $\mathcal{W}_y$ van $\mathcal{W}_2$, zó dat $\{W \cap ([0, \alpha + 1) \times \{y\}) : W \in \mathcal{W}_y\}$ orde ≤ 1 heeft. Dit kan omdat $\dim [0, \alpha + 1) = \dim [0, 1) = 1$. Als er meerdere verzamelingen nodig zijn om $(\alpha, \alpha + 1) \times \{y\}$ te overdekken, laat dan van deze alle verzamelingen weg die niet het punt (α, y) bevatten. We noemen de familie die we krijgen nadat we dit voor alle $y \in C$ doen $\mathcal{W}_3$. Deze overdekking van $[0,\alpha] \times C$ heeft orde ≤ 1.

Er geldt nu dat $\mathcal{V}_3 \cup \mathcal{W}_3$ een open verfijning van $\mathcal{U}$ is met orde ≤ 1. Het is namelijk een overdekking: laat $p \in Y$ willekeurig zijn. Als $p \in I$, dan hebben we dat $p \in \bigcup \mathcal{V}_3$. Voor het andere geval kan p worden geschreven als (x,y), waarbij $x \in [0,\omega_1)$ en $y \in C$. Als $x > \alpha$, dan zit (x,y) weer in $\bigcup \mathcal{V}_3$. Als $x \leq \alpha$, dan hebben we $(x,y) \in \bigcup \mathcal{W}_3$. $\mathcal{V}_3$ is een krimping van $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ en $\mathcal{W}_3$ is een verfijning van $\mathcal{U}_2$, dus $\mathcal{V}_3 \cup \mathcal{W}_3$ is een verfijning van $\mathcal{U}$.

We moeten alleen nog verifiëren dat $\operatorname{ord} \mathcal{V}_3 \cup \mathcal{W}_3 \leq 1$. Stel dat $p = (x,y) \in V \cap W$ voor een $V \in \mathcal{V}_3$ en $W \in \mathcal{W}_3$, dan zijn dit de enige V en W waar p allebei in zit. Er moet namelijk gelden dat $p \in (\alpha, \alpha+1) \times C$. Maar $\mathcal{V}_3$ en $\mathcal{W}_3$ zijn zó geconstrueerd dat er maximaal één verzameling in $\mathcal{V}_3$ en maximaal één verzameling in $\mathcal{W}_3$ is die $(\alpha, \alpha+1) \times \{y\}$ bevat. Hieruit volgt dat $\operatorname{ord} \mathcal{V}_3 \cup \mathcal{W}_3 \leq \max\{1, \operatorname{ord} \mathcal{V}_3, \operatorname{ord} \mathcal{W}_3\} = 1$. Vanwege stelling 2.9 kunnen we nu concluderen dat $\dim Y \leq 1$. □

Nu kunnen we het laatste lemma formuleren dat nodig is om het eindresultaat te bewijzen.

Lemma 4.7. *Voor elke open $U \subseteq Y$ die I snijdt, definieer $y_U := \sup\{y \in [0,1] : (\omega_1, y) \in U\}$. Als $(\omega_1, y_U) \in I \backslash (K \cup \{(\omega_1, 1)\})$, dan geldt dat $\operatorname{ind} \partial U \geq 1$.*

Bewijs. Het meeste werk voor dit resultaat is al gedaan in lemma 4.4. Er moet alleen nog de verbinding met de quotiëntruimte Y worden gelegd.

Uit de definitie van de quotiëntruimte volgt dat $q^{-1}[U]$ open is in $L \times C$. Deze verzameling snijdt $\{\omega_1\} \times C$, er is namelijk een $y \in C$ met $[(\omega_1, y)] \in U$ die voldoet. Definieer $y'_U := \sup\{y \in [0,1] : (\omega_1, y) \in q^{-1}[U]\}$ en neem aan dat $y'_U \in Q \cup \{1\}$. Maar dit betekent dat $q((\omega_1, y'_U)) \in q[\{\omega_1\} \times (Q \cup \{1\})] = K \cup \{(\omega_1, 1)\}$. Er geldt ook dat $q((\omega_1, y'_U)) = (\omega_1, y_U)$, dus dit spreekt de aanname dat $(\omega_1, y_U) \notin K \cup \{(\omega_1, 1)\}$ tegen. Er moet dus (i) of (ii) uit lemma 4.4 gelden.

Als (i) van toepassing is, dan is er een $x \in L_0$ met $(x, \omega_1] \times \{y'_U\} \subseteq \partial q^{-1}[U]$. Neem een $x' \in (x, \omega_1)$, dan geldt voor elke open $V \subseteq q[(x, \omega_1) \times \{y'_U\}]$ dat $\operatorname{ind} V \geq 0$. V is namelijk niet leeg want $q[(x, \omega_1) \times \{y'_U\}]$ is een intervalletje homeomorf met $(0,1)$.

Voor het geval dat (ii) geldt, neem een $y > y'_U$ en een cofinale $L' \subseteq L_0$ met $L' \times ((y'_U, y) \cap C) \subseteq q^{-1}[U]$. Er geldt nu dat $q[\{\omega_1\} \times ((y'_U, y) \cap C)]$ helemaal bevat is in ∂U. Het ligt namelijk buiten U omdat alle y-coördinaten groter zijn dan y_U, maar omdat L' cofinaal is in L_0 is, ligt het wel in de afsluiting van U. Daarnaast is dit "verticale intervalletje" homeomorf met $(0,1)$, dus bestaat er een $y' \in (y'_U, y)$ zodanig dat elke open $V \subseteq q[\{\omega_1\} \times ((y'_U, y) \cap C)]$ een niet-lege rand heeft. □

Merk op dat de rand van U alleen intervallen en gesloten deelruimten van de Cantorverzameling bevat. Daarom hebben we ook $\operatorname{Ind} \partial U \leq \operatorname{Ind} \mathbb{R} = 1$, maar de ondergrens van $\operatorname{ind} \partial U$ is het belangrijkste resultaat. Dit lemma is namelijk cruciaal om aan te tonen dat de Lokucievskiĭ-ruimte kleine inductieve dimensie ≥ 2 heeft. Voordat we deze ruimte definiëren, hebben we eerst de volgende propositie nodig.

Propositie 4.8. *Voor elk tweetal aftelbare dichte verzamelingen $A, B \subseteq [0,1]$ bestaat er een homeomorfisme $h : [0,1] \to [0,1]$ met $h[A] = B$.*

De constructie van dit homeomorfisme gaat recursief, maar we tonen dit resultaat niet aan in deze scriptie. Het bewijs van deze propositie is in 1910 gegeven door Fréchet [7].

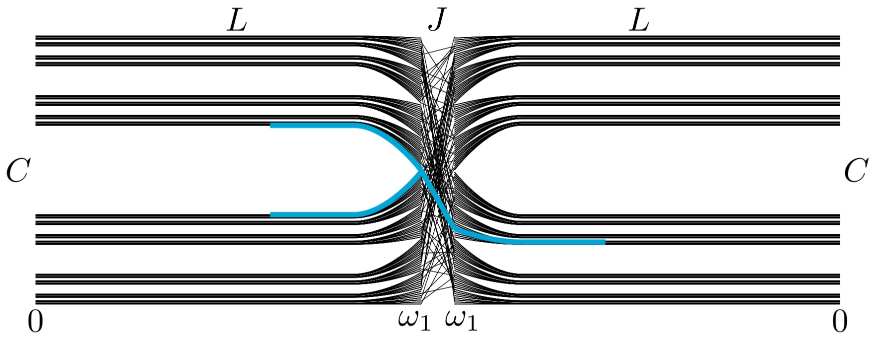
We duiden de verzameling $\{{}^m/_{2^n} + \pi \mod 1 : m, n \in \mathbb{N}, m$ oneven$\}$ aan met M.

Definitie 4.7. Neem twee disjuncte kopieën van de ruimte Y en noem ze Y_1 en Y_2.Neem een homeomorfisme $h : [0,1] \to [0,1]$ met $h[K] = M$ zoals uit propositie 4.8. Alle deelruimten van Y_1 en Y_2 krijgen respectievelijk het subscript 1 en 2 om onderscheid te kunnen maken. Op de ruimte $Y_1 \oplus Y_2$ definiëren we de equivalentierelatie R als

$$uRv \text{ als } (u = v \text{ en } u \notin I_1 \text{ en } v \notin I_2) \text{ of } (h(u) = v \text{ en } u \in I_1 \text{ en } v \in I_2).$$

De resulterende ruimte $\mathbb{L} := Y_1 \oplus Y_2 / R$ noemen we de *Lokucievskiĭ-ruimte*. De quotiëntafbeelding $u \mapsto \langle u \rangle$ duiden we aan met $p : Y_1 \oplus Y_2 \to \mathbb{L}$.

In deze definitie zijn impliciet de homeomorfismen $I_1 \cong I_2 \cong [0,1]$ gebruikt om notatie overzichtelijk te houden. Het is duidelijk dat $J := \{\langle u, h(u) \rangle : u \in I_1\}$ homeomorf is met $[0,1]$. Het bewijs dat deze ruimte compact Hausdorff is gaat op dezelfde manier als dat van propositie 4.5. De Lokucievskiĭ-ruimte heeft de eigenschap dat $\dim \mathbb{L} = 1$ en $\operatorname{ind} \mathbb{L} = \operatorname{Ind} \mathbb{L} = 2$.



Figuur 4.2: Een schets van de Lokucievskiĭ-ruimte met in het blauw een "horizontaal interval" dat J snijdt.

Propositie 4.9. *De Lokucievskiĭ-ruimte heeft inductieve dimensie 2.*

Bewijs. We kijken naar het punt $1/2 \in J \subseteq \mathbb{L}$ en een open omgeving $U \subseteq \mathbb{L}$ van $1/2$, zó dat $0, 1 \in J$ niet in U zitten. Laat V nu een willekeurige omgeving zijn van $1/2$ met $V \subseteq U$. Definieer $t_V := \sup\{t \in J : t \in V\}$, dan is $t_V = \langle(u_V, v_V)\rangle$ met $u_V := \sup\{u \in I_1 : u \in p^{-1}[V]\}$, $v_V := \sup\{v \in I_2 : v \in p^{-1}[V]\}$ en $h(u_V) = v_V$. Als $u_V \notin K_1$, dan is $\operatorname{ind} \partial p^{-1}[V] \geq 1$ vanwege lemma 4.7. Als $u_V \in K_1$, dan is $v_V = h(u_V) \in M_2$ en dus $v_V \notin K_2$. Nu kunnen we lemma 4.7 toepassen in Y_2, dus geldt dat $\operatorname{ind} \partial p^{-1}[V] \geq 1$. Dus beide gevallen resulteren in $\operatorname{ind} \partial V \geq 1$, dus $\operatorname{ind} \mathbb{L} \geq 2$.

Nu moeten we nog aantonen dat $\operatorname{Ind} \mathbb{L} \leq 2$. Laat $F \subseteq U \subseteq \mathbb{L}$ met F gesloten en U open willekeurig zijn. Nu zijn er twee gevallen te onderscheiden: $F \cap J = \emptyset$ en $F \cap J \neq \emptyset$.

Als F niet J snijdt, dan kan F volledig overdekt worden door rechthoeken die homeomorf zijn met $(x_1, x_2) \times (y_1, y_2) \subseteq L \times C$ die binnen U liggen, met de eigenschap dat $y_1, y_1 \notin C$. Vanwege compactheid van F, is er een eindige deeloverdekking van deze rechthoeken. De vereniging van deze overdekking noemen we V. De rand van V is nuldimensionaal: $\partial V \subseteq \{1, 2, ..., n\} \times C$.

In het geval dat F en J wel overlappen, nemen we vanwege normaliteit een open V met $F \cap J \subseteq V \subseteq U$. We kunnen hetzelfde argument dat werd gebruikt om aan te tonen dat $\operatorname{ind} \mathbb{L} \geq 2$ hier weer toepassen om te laten zien dat de rand van V eendimensionaal is, want V snijdt J. Het gedeelte van F dat niet overdekt wordt door V kan op dezelfde manier overdekt worden als hierboven beschreven is bij het geval dat F niet overlapt met J. De rand van de vereniging van deze overdekking en V heeft grote inductieve dimensie ≤ 1. We concluderen dat $2 \leq \operatorname{ind} \mathbb{L} \leq \operatorname{Ind} \mathbb{L} \leq 2$. □

Propositie 4.10. *De Lokucievskiĭ-ruimte heeft overdekkingsdimensie 1.*

Bewijs. Het is duidelijk dat $p[Y_1]$ en $p[Y_2]$ homeomorf zijn met Y en dus overdekkingsdimensie ≤ 1 hebben (propositie 4.6). Daarnaast zijn dit allebei gesloten deelruimten van $\mathbb{L}$ en overdekken ze de hele ruimte. Vanwege de aftelbare-gesloten-som-stelling, geldt nu dat $\dim \mathbb{L} \leq 1$. Om aan te tonen dat $\dim \mathbb{L} \geq 1$, merken we op dat J een gesloten deelruimte is van $\mathbb{L}$. Het toepassen van stelling 2.14 geeft ons $\dim \mathbb{L} \geq \dim J = 1$. □

A
Topologische voorkennis

In deze appendix staat een overzicht van de topologische voorkennis die kan helpen bij het lezen van deze scriptie. Voor een uitgebreide uitleg en bewijzen van de genoemde stellingen verwijzen we naar *General Topology* van Engelking [6].

A.1. Basisbegrippen

Een *topologische ruimte* bestaat uit een verzameling, X, en een familie deelverzamelingen van X die we aanduiden met τ. De elementen van τ zijn de open verzamelingen van de topologische ruimte. De topologie τ moet voldoen aan de volgende drie eigenschappen.

i. De lege verzameling en de hele ruimte X zijn elementen van τ.

ii. De vereniging van elke deelfamilie van τ is een element van τ.

iii. De doorsnede van elke eindige deelfamilie van τ is een element van τ.

Een voorbeeld van een topologie is de discrete topologie. Een topologische ruimte (X, τ) is een *discrete ruimte* als elke deelverzameling van X open is.

We schrijven een topologische ruimte (X, τ) vaak als alleen X, ook schrijven we vaak alleen ruimte in plaats van topologische ruimte. De gesloten verzamelingen van X zijn de deelverzamelingen, waarvan het complement open is. Uit De Morgan's wetten is af te leiden dat elke doorsnede van gesloten verzamelingen en elke eindige vereniging van gesloten verzamelingen gesloten is. Ook zijn de lege verzameling en X gesloten.

Een *open omgeving* van een punt $x \in X$ is een open verzameling $U \subseteq X$ met $x \in X$.

De verzameling τ wordt in de praktijk niet veel gebruikt. In plaats daarvan definiëren we vaak de open verzamelingen aan de hand van een *basis* $\mathcal{B}$. Dit is een deelfamilie van τ met de eigenschap dat er voor elk punt $x \in X$ met een willekeurige open omgeving U een basis-open verzameling $B \in \mathcal{B}$ bestaat met $x \in B \subseteq U$.

Daarnaast kunnen we de open verzamelingen van een ruimte ook definiëren aan de hand van een *subbasis* $\mathcal{S}$. Deze deelfamilie van τ heeft de eigenschap dat de familie van eindige doorsneden van elementen van $\mathcal{S}$ een basis vormt voor de topologie.

Voor een familie topologische ruimten $(X_i)_{i \in I}$ definiëren we *producttopologie* op de verzameling $X := \prod_{i \in I} X_i$ met de subbasis $\{\pi_i^{-1}[U] : i \in I$ en U open in $X_i\}$. Hierbij geeft $\pi_i : X \to X_i$ de projectieafbeelding in de i-de coördinaat aan: $\pi_i(x_j)_{j \in I} = x_i$.

Als X en Y disjuncte topologische ruimten zijn, dan duiden we de *som* van deze twee ruimten aan met $X \oplus Y$. Dit is een topologische ruimte gedefinieerd op de verzameling $X \cup Y$. Een verzameling $U \subseteq X \cup Y$ is open als $U \cap X$ open is in X en $U \cap Y$ open is in Y.

Als A een deelverzameling van een topologische ruimte X is, dan is (A, τ_A) met $\tau_A := \{U \cap A : U \in \tau\}$ een *deelruimte* van X. Als de verzameling A gesloten is in X, dan is elke gesloten deelverzameling van A ook gesloten in de ruimte X.

De *afsluiting* van een verzameling $A \subseteq X$, aangeduid met $\overline{A}$, is de doorsnede van alle gesloten verzamelingen F met $A \subseteq F$. Een punt $x \in X$ zit in de afsluiting van A als elke open omgeving van x de verzameling A snijdt. Als M een deelverzameling is van de deelruimte A, dan is $\overline{M}^A = \overline{M} \cap A$, waarbij $\overline{M}^A$ de afsluiting van M ten opzichte van de ruimte A aangeeft. Er geldt dat $A \subseteq \overline{A}$ en als A bevat is in B, dan is de afsluiting van A bevat in de afsluiting van B. Als U en V twee disjuncte open verzamelingen zijn, dan geldt $\overline{U} \cap V = \emptyset = U \cap \overline{V}$. Een ruimte X is *separabel* als er een aftelbare deelverzameling $D \subseteq X$ is met $\overline{D} = X$. Het *inwendige* van A, aangeduid met $\operatorname{Int} A$ is de vereniging van alle open verzamelingen U met $U \subseteq A$. De *rand* van A definiëren we als $\partial A := \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$. Het kan ook worden geschreven als $\overline{A} \backslash \operatorname{Int} A$.

Een afbeelding $f : X \to Y$, waarbij X en Y topologische ruimten zijn is *continu* als $f^{-1}[U]$ open is in X voor elke open verzameling $U \subseteq Y$. De afbeelding is *open* als $f[U]$ open in Y is voor elke open $U \subseteq X$ en *gesloten* als $f[F]$ gesloten in Y is voor elke gesloten $F \subseteq X$.

A.2. Scheidingseigenschappen

Een ruimte X is T_0 als er voor elk tweetal verschillende punten $x, y \in X$ een open verzameling U bestaat zodat er of geldt dat $x \in U$ en $y \notin U$, of geldt dat $x \notin U$ en $y \in U$. X is T_1 als er voor elke tweetal verschillende punten $x, y \in X$ een open $U \subseteq X$ bestaat met $x \in U$ en $y \notin U$. Een ruimte X is T_2 (of *Hausdorff*) als er voor elk tweetal verschillende punten $x, y \in X$ open omgevingen U en V van respectievelijk x en y bestaan die disjunct zijn. Een ruimte X heeft de T_3-eigenschap als er voor elk punt $x \in X$ met een willekeurige open omgeving U een open verzameling V bestaat met $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Een ruimte X is T_4 als er voor elke gesloten verzameling F en open verzameling U die F bevat een open verzameling V bestaat met $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Een ruimte is *regulier* als die zowel T_0 als T_3 is en *normaal* als die zowel T_1 als T_4 is. Elke normale ruimte is regulier, elke reguliere ruimte is Hausdorff, elke Hausdorff-ruimte is T_1 en elke T_1-ruimte is T_0. Elke gesloten deelruimte van een normale ruimte is ook normaal. Deelruimten erven T_0, T_1, Hausdorff en regulariteit van de grotere ruimte.

Stelling A.1. *Laat X een normale ruimte zijn. Voor elk tweetal disjuncte gesloten verzamelingen F en G is er een continue afbeelding $f : X \to [0,1]$ met $f[F] = \{0\}$ en $f[G] = \{1\}$.*

Stelling A.2. *Het beeld van een normale ruimte onder een continue en gesloten afbeelding is normaal.*

A.3. Overdekkingen

Een *overdekking* van een ruimte X is een familie deelverzamelingen $\mathcal{A}$ met de eigenschap dat $X = \bigcup \mathcal{A}$. Een ruimte waarbij elke open overdekking een aftelbare deeloverdekking heeft noemen we een *Lindelöf*-ruimte. Een ruimte is *compact* als elke open overdekking een eindige deeloverdekking heeft. Elke reguliere Lindelöf-ruimte is normaal en elke compacte Hausdorff-ruimte is normaal. Een gesloten deelruimte van een Lindelöf-ruimte is Lindelöf en een gesloten deelruimte van een compacte ruimte is compact.

Stelling A.3. *Het beeld van een compacte ruimte onder een continue afbeelding is compact.*

Stelling A.4. *Laat X een compacte ruimte en Y een Hausdorff-ruimte zijn. Dan is elke continue bijectie $f : X \to Y$ een homeomorfisme.*

Een familie deelverzamelingen $\mathcal{A}$ van een ruimte X is *lokaal eindig* als er voor elk punt $x \in X$ een open omgeving is die eindig veel elementen van $\mathcal{A}$ snijdt. Voor deze families geldt $\overline{\bigcup \mathcal{A}} = \bigcup \{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\}$. Een ruimte is *paracompact* als elke open overdekking een lokaal eindige open verfijning heeft.

A.4. Metrizeerbare ruimten

Een *metriek* op een verzameling X is een afbeelding $\mathrm{d} : X \times X \to [0, \infty)$ met de volgende eigenschappen.

i. $\mathrm{d}(x,y) = 0$ dan en slechts dan als $x = y$.

ii. $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$ voor alle $x, y \in X$.

iii. $\mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$ voor alle $x, y, z \in X$.

De *open bol* ten opzichte van d rond het punt x met straal r definiëren we als $B_{\mathrm{d}}(x,r) := \{y \in X : \mathrm{d}(x,y) < r\}$. De *diameter* van een deelverzameling $A \subseteq X$ ten opzichte van d definiëren we als $\mathrm{diam}_{\mathrm{d}} A := \sup\{\mathrm{d}(x,y) : x,y \in X\}$. Voor een verzameling $A \subseteq X$ geldt $\mathrm{diam}_{\mathrm{d}} A = \mathrm{diam}_{\mathrm{d}} \overline{A}$.

Een ruimte X is *metrizeerbaar* als er een metriek d op X bestaat die de topologie van X bepaald. Dit betekent dat er voor elke open verzameling $U \subseteq X$ open is volgens de metriek d, dus voor elk punt $x \in U$ is er een $r > 0$ met $B_{\mathrm{d}}(x,r) \subseteq U$, en elke open bol ten opzichte van d is open volgens de gegeven topologie op X, dus voor elk punt x en $r > 0$ is er voor elk punt $y \in B_{\mathrm{d}}(x,r)$ een open $U \subseteq X$ met $y \in U \subseteq B(x,r)$. Elke metrizeerbare ruimte is normaal en *paracompact*, dat wil zeggen dat elke open overdekking een lokaal eindige open verfijning heeft. In metrizeerbare ruimten is de Lindelöf-eigenschap equivalent met separabiliteit.

A.5. Quotiëntruimten

Laat X een topologische ruimte en E een equivalentierelatie op X zijn. De verzameling X/E is de verzameling van alle equivalentieklassen van X onder E. We noemen $q : X \to X/E$, die aan elk element van X zijn equivalentieklasse toekent, de natuurlijke quotiëntafbeelding van X onder E. We definiëren $\tau_q := \{U \subseteq X/E : q^{-1}[U] \text{ is open}\}$ en we noemen $(X/E, \tau_q)$ een *quotiëntruimte*. Een quotiëntafbeelding q is gesloten als $q^{-1}[q[F]]$ gesloten is voor elke gesloten verzameling F.

Stelling A.5. *Laat X en Y twee topologische ruimten zijn. Laat F een gesloten deelruimte van X zijn en laat $f : F \to Y$ een continue afbeelding zijn. We definiëren de equivalentierelatie E op X door xEy als $x = y$ voor $x,y \notin F$ of $f(x) = f(y)$ voor $x,y \in F$. Als f gesloten is, dan is de natuurlijke quotiëntafbeelding $q : X \to X/E$ gesloten. De resulterende ruimte X/E noemen we een adjunctieruimte.*

A.6. Lineaire orde en ordinaalgetallen

Laat X een verzameling met een relatie $<$ zijn. We noemen $<$ een *lineaire orde* als ze de volgende drie eigenschappen heeft.

i. Als $x < z$ en $z < y$, dan $x < y$ voor alle $x,y,z \in X$.

ii. $x < y$ en $y < x$ kunnen niet allebei gelden voor alle $x,y \in X$.

iii. Als $x \neq y$, dan moet $x < y$ of $y < x$ gelden voor alle $x,y \in X$.

Een deelverzameling A van een lineair geordende verzameling X is *cofinaal* als er voor elke $x \in X$ een $a \in A$ bestaat met $x < a$.

Laat X en Y twee verzamelingen zijn met lineaire ordes $<$ en $\prec$ respectievelijk. Deze verzamelingen noemen we *isomorf* als er een bijectie $f : X \to Y$ bestaat, waarvoor geldt dat $f(x) \prec f(y)$ voor elk paar $x,y \in X$ met $x < y$.

Een lineaire orde $<$ op X noemen we een *welorde* als elke deelverzameling $A \subseteq X$ een kleinste element heeft, dat wil zeggen dat er een $x \in A$ bestaat met $x < y$ voor elke $y \in A \backslash \{x\}$. Een verzameling is *welgeordend* als er een welorde op die verzameling bestaat. Aan elke welgeordende verzameling kan een *ordinaalgetal* worden toegekend, met de eigenschap dat als twee welgeordende verzamelingen isomorf zijn, ze hetzelfde ordinaalgetal krijgen. De collectie ordinaalgetallen is zelf een welgeordende verzameling.

Een *opvolger* van een ordinaalgetal is het kleinste grotere ordinaalgetal. Een ordinaalgetal is een *limiet* als het van geen enkel ordinaalgetal de opvolger is. De *welordeningsstelling* zegt dat elke verzameling welgeordend kan worden. Hieruit volgt dat we *transfiniete* inductie kunnen gebruiken. Als we uitspraak $P(\alpha)$ willen bewijzen voor alle ordinaalgetallen α, moeten we niet alleen $P(0)$ en $P(\alpha) \Rightarrow P(\alpha+1)$ bewijzen, maar moeten we ook aantonen dat $P(\alpha)$ geldt als $P(\beta)$ geldt voor alle $\beta < \alpha$ in het geval dat α een limiet is.

Omdat er tussen twee isomorfe welgeordende verzamelingen een bijectie bestaat, kunnen we aan elk ordinaalgetal α een kardinaalgetal $\mathbf{m}$ toekennen, we duiden dit aan met $|\alpha| = \mathbf{m}$. Een ordinaalgetal α is aftelbaar als $|\alpha| \leq \aleph_0$. Het kleinste aftelbare ordinaalgetal duiden we aan met ω_0 en het kleinste ordinaalgetal met kardinaliteit $\aleph_1$ duiden we aan met ω_1. De welgeordende verzameling die bestaat uit alle aftelbare ordinaalgetallen duiden we aan met W_0.

B

Bewijs van de stelling van Dowker

Lemma B.1. *Laat $\mathcal{U}$ een open overdekking van een normale ruimte X zijn. Als er een lokaal eindige gesloten overdekking $\mathcal{F}$ van X bestaat waarbij voor elke $F \in \mathcal{F}$ geldt dat $\dim F \leq n$ en F eindig veel elementen van $\mathcal{U}$ snijdt, dan heeft $\mathcal{U}$ een open krimping van orde $\leq n$.*

Bewijs. We schrijven de open overdekking $\mathcal{U}$ als $(U_i)_{i\in I}$ en de gesloten overdekking $\mathcal{F}$ als een transfiniete rij $F_0, F_1, ..., F_\alpha, ...$ met $\alpha \leq \eta$ en $F_0 = \emptyset$. De indexverzameling van deze rij duiden we aan met W_η. We construeren een transfiniete rij open overdekkingen $(U_{0,i})_{i\in I}, (U_{1,i})_{i\in I}, ..., (U_{\alpha,i})_{i\in I}, ...$ met $\alpha \leq \eta$ met transfiniete inductie, die voor elke $\alpha \in W_\eta \backslash \{0\}$ voldoet aan de volgende eigenschappen.

i. Voor elke $\beta \in W_\eta$ en $i \in I$ geldt $U_{\alpha,i} \subseteq U_{\beta,i}$ als $\beta < \alpha$.

ii. $\mathrm{ord}\,(U_{\alpha,i} \cap F_\alpha)_{i\in I} \leq n$.

iii. Voor elke $\beta \in W_\eta$ en $i \in I$ geldt $U_{\beta,i} \backslash U_{\alpha,i} \subseteq \bigcup_{\beta\leq\gamma\leq\alpha} F_\gamma$ als $\beta < \alpha$.

Voor $\alpha = 0$ definiëren we $U_{0,i} = U_i$ voor elke $i \in I$. De rij open overdekkingen begint dus bij de gegeven overdekking en de verzamelingen van de overdekkingen worden kleiner voor grotere α. Neem een $\alpha_0 \in W_\eta \backslash \{0\}$ en neem aan dat voor elke $\alpha \in W_\eta$ met $\alpha < \alpha_0$ geldt dat de open overdekking $(U_{\alpha,i})_{i\in I}$ gedefinieerd is en de drie eigenschappen heeft.

Voor elke $i \in I$ definiëren we de verzameling $U'_{\alpha,i} := \bigcap_{\alpha<\alpha_0} U_{\alpha,i}$. We laten zien dat $(U'_{\alpha_0,i})_{i\in I}$ een open overdekking van X is. Er zijn twee gevallen te onderscheiden. Voor het geval dat α_0 een directe opvolger is van een $\alpha_1 \in W_\eta$ hebben we dat $U'_{\alpha_0,i} = U_{\alpha_1,i}$ voor elke $i \in I$, dus is het een open overdekking vanwege de inductiehypothese. Er geldt namelijk voor elke $i \in I$ dat $\bigcap_{\alpha<\alpha_0} U_{\alpha,i} = \bigcap_{\alpha\leq\alpha_1} U_{\alpha,i} = U_{\alpha_1,i}$, want voor $\alpha < \alpha_1$ geldt dat $U_{\alpha_1,i} \subseteq U_{\alpha,i}$ vanwege eigenschap (i).

Nu kijken we naar het geval dat α_0 een limietgetal is. Laat $x \in X$ willekeurig. Omdat $\mathcal{F}$ lokaal eindig is, kunnen we een open omgeving U nemen die eindig veel elementen van $\mathcal{F}$ raakt. Dit betekent dat er een $\beta \in W_\eta$ moet zijn, waarbij U disjunct is van elke F_γ met $\beta \leq \gamma < \alpha_0$. We hebben aangenomen dat $(U_{\beta,i})_{i\in I}$ een open overdekking van X is, dus er is een $i \in I$ met $x \in U_{\beta,i}$.

Voor elke $\alpha \in W_\eta$ met $\beta \leq \alpha < \alpha_0$ hebben we dat $U \cap U_{\beta,i} \subseteq U_{\alpha,i}$. We hebben namelijk dat

$$\begin{aligned}(U \cap U_{\beta_i}) \backslash U_{\alpha,i} &= U \cap (U_{\beta,i} \backslash U_{\alpha,i}) \\ &\subseteq U \cap \left(\bigcup_{\beta\leq\gamma\leq\alpha} F_\gamma \right) \\ &= \bigcup_{\beta\leq\gamma\leq\alpha} U \cap F_\gamma \\ &= \emptyset,\end{aligned}$$

want U is disjunct van elke F_γ met $\beta \leq \gamma \leq \alpha < \alpha_0$. Hieruit volgt dat $x \in U \cap U_{\beta,i} \subseteq U_{\alpha,i}$ als $\beta \leq \alpha < \alpha_0$. Vanwege eigenschap (i) hebben we nu $x \in \bigcap_{\beta\leq\alpha<\alpha_0} U_{\alpha,i} = \bigcap_{\alpha<\alpha_0} U_{\alpha,i} = U'_{\alpha,i}$, dus $(U'_{\alpha_0,i})_{i\in I}$ is een overdekking en alle elementen $U'_{\alpha_0,i}$ zijn open, want we hebben voor elk punt in de verzameling een open omgeving, namelijk $U \cap U_{\beta,i}$, gevonden dat bevat is in $U'_{\alpha_0,i}$.

Merk op dat de open overdekking $(F_{\alpha_0} \cap U'_{\alpha_0,i})_{i\in I}$ van de gesloten deelruimte F_{α_0} eindig is. We hebben namelijk aangenomen dat F_{α_0} maar eindig veel U_i's raakt en er geldt vanwege (i), de definitie van $U'_{\alpha_0,i}$ en het feit dat $U_{0,i} = U_i$ dat $U'_{\alpha_0,i}$ binnen U_i ligt voor elke $i \in I$. Dus F_{α_0} snijdt ook maar eindig veel $U'_{\alpha_0,i}$'s. Omdat $\dim F_{\alpha_0} \leq n$, is er een open krimping $(V_i)_{i\in I}$ van $(F_{\alpha_0} \cap U'_{\alpha_0,i})_{i\in I}$ van orde $\leq n$, vanwege stelling 2.9. Deze overdekking van F_{α_0} kunnen we krimpen tot een gesloten overdekking $(G_i)_{i\in I}$ vanwege stelling 2.12. De verzamelingen G_i zijn ook gesloten in de hele ruimte X, want het zijn gesloten verzamelingen van een gesloten deelruimte. We kunnen nu stelling 2.11 gebruiken om deze gesloten familie op te zwellen tot een familie verzamelingen $(V'_i)_{i\in I}$ die open zijn in X en waarbij elke V'_i bevat is in $U'_{\alpha,i}$. Nu hebben we dat $\operatorname{ord}(V'_i)_{i\in I} = \operatorname{ord}(G_i)_{i\in I} \leq \operatorname{ord}(V_i)_{i\in I} \leq n$ en $V'_i \subseteq U'_{\alpha_0,i}$ voor elke $i \in I$. Daarnaast overdekt deze familie nog de hele deelruimte F_{α_0}.

Definieer voor elke $i \in I$ de open verzameling $U_{\alpha_0,i} := (U'_{\alpha_0,i} \backslash F_{\alpha_0}) \cup V'_i$. Nu is $(U_{\alpha_0,i})_{i\in I}$ de open overdekking waar we naar op zoek waren. Om te laten zien dat deze familie de hele ruimte X overdekt laten we $x \in X$ willekeurig. Als $x \in F_{\alpha_0}$, dan hebben we $x \in V'_i$ voor een $i \in I$ en voor het geval dat x buiten F_{α_0} zit, is er een $i \in I$ met $x \in U'_{\alpha_0,i}$. Het is duidelijk dat elke verzameling $U_{\alpha_0,i}$ open is, dus we moeten alleen nog verifiëren dat deze overdekking eigenschappen (i), (ii) en (iii) heeft.

Dat (i) geldt volgt uit $U_{\alpha_0,i} \subseteq U'_{\alpha_0,i} = \bigcap_{\alpha<\alpha_0} U_{\alpha,i} \subseteq U_{\beta,i}$ voor elke $\beta < \alpha_0$ en $i \in I$. Eigenschap (ii) bewijzen we met tegenspraak: stel dat $x \in \bigcap_{i\in I'} F_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_0,i}$ waarbij I' een deelverzameling is van I met $|I'| = n+2$. Vanwege de definitie van $U_{\alpha_0,i}$ hebben we dat x in geen enkele $U'_{\alpha_0,i}$ zit, want $x \in F_{\alpha_0}$. Dus $x \in \bigcap_{i\in I'} V'_i$, maar dit spreekt $\operatorname{ord}(V'_i)_{i\in I} \leq n$ tegen. Ten slotte volgt eigenschap (iii) uit het feit dat

$$
\begin{aligned}
U_{\beta,i} \backslash U_{\alpha_0,i} &= U_{\beta,i} \backslash \left[\left(U'_{\alpha_0,i} \backslash F_{\alpha_0}\right) \cup V'_i\right] \\
&= U_{\beta,i} \backslash \left(U'_{\alpha_0,i} \backslash F_{\alpha_0}\right) \cap \left(U_{\beta,i} \backslash V'_i\right) \\
&= \left(U_{\beta,i} \cap F_{\alpha_0}\right) \cup \left(U_{\beta,i} \backslash U'_{\alpha_0,i}\right) \cap \left(U_{\beta,i} \backslash V'_i\right) \\
&\subseteq F_{\alpha_0} \cup \left[U_{\beta,i} \backslash \left(U'_{\alpha_0,i} \cup V'_i\right)\right] \\
&= F_{\alpha_0} \cup \left(U_{\beta,i} \backslash U'_{\alpha_0,i}\right) \\
&= F_{\alpha_0} \cup \left(U_{\beta,i} \backslash \bigcap_{\alpha<\alpha_0} U_{\alpha,i}\right) \\
&= F_{\alpha_0} \cup \bigcup_{\alpha<\alpha_0} U_{\beta,i} \backslash U_{\alpha,i} \\
&= F_{\alpha_0} \cup \bigcup_{\alpha<\alpha_0} \bigcup_{\beta\leq\gamma\leq\alpha} F_\gamma \\
&= F_{\alpha_0} \cup \bigcup_{\beta\leq\gamma\leq\alpha} F_\gamma \\
&= \bigcup_{\beta\leq\gamma\leq\alpha_0} F_\gamma
\end{aligned}
$$

geldt voor elke $\beta \in W_\eta$ met $\beta < \alpha_0$ en $i \in I$.

Hierbij is de constructie van de transfiniete rij $(U_{0,i})_{i\in I}, (U_{1,i})_{i\in I}, \ldots, (U_{\alpha,i})_{i\in I}, \ldots$ met $\alpha \leq \eta$ voldaan. Er geldt nu dat $(U_{\eta,i})_{i\in I}$ een open krimping van $(U_i)_{i\in I}$ is met orde $\leq n$. Het feit dat deze open overdekking een krimping is, volgt uit eigenschap (i): $U_{\eta,i} \subseteq U_{0,i} = U_i$ voor elke $i \in I$. Het feit dat $\operatorname{ord}(U_{\eta,i})_{i\in I} \leq n$ geldt, volgt uit eigenschap (ii). Stel namelijk dat er een $x \in \bigcap_{i\in I'} U_{\eta,i}$ bestaat voor een $I' \subseteq I$ met $|I'| = n+2$. Dan volgt uit (i) dat $x \in U_{\alpha,i}$ voor elke $\alpha \in W_\eta$ en $i \in I'$. Daarnaast is $\mathcal{F}$ een overdekking van X, dus er is een $\alpha \in W_\eta$ met $x \in F_\alpha$. We hebben nu dat x in $\bigcap_{i\in I'} U_{\alpha,i} \cap F_\alpha$ zit, maar dit spreekt eigenschap (ii) tegen. □

Stelling B.2. *Voor een normale ruimte X zijn de volgende twee uitspraken equivalent met $\dim X \leq n$.*

i. Elke lokaal eindige open overdekking heeft een open krimping van orde $\leq n$.

ii. Elke lokaal eindige open overdekking heeft een open verfijning van orde $\leq n$.

Bewijs. De implicatie (i) ⇒ (ii) is triviaal, want elke krimping is een verfijning. Dat $\dim X \leq n$ volgt uit uitspraak (ii) is ook duidelijk, want elke eindige open overdekking is ook lokaal eindig. We hoeven dus alleen nog maar te laten zien dat elke lokaal eindige open overdekking een open krimping van orde $\leq n$ heeft, als $\dim X \leq n$ geldt.

Laat $(U_i)_{i\in I}$ een lokaal eindige open overdekking zijn. We duiden de familie van alle eindige niet-lege deelverzamelingen van I aan met $\mathcal{J}$. Voor elke $J \in \mathcal{J}$ definiëren we de gesloten verzameling $F_J := \bigcap_{i\in J} \overline{U}_i \cap \bigcap_{i\notin J} X \backslash U_i$. Omdat dit een gesloten deelruimte van X is, mogen we vanwege stelling 2.14 concluderen dat $\dim F_J \leq \dim X \leq n$ voor elke $J \in \mathcal{J}$. We tonen aan dat de familie $(F_J)_{J\in\mathcal{J}}$ een lokaal eindige gesloten overdekking van X is en waarvan elke F_j maar eindig veel U_i's snijdt. Dit zijn precies de eisen van lemma B.1, dus we mogen dan concluderen dat $(U_i)_{i\in I}$ een open krimping van orde $\leq n$ heeft.

Om aan te tonen dat $(F_J)_{J\in\mathcal{J}}$ een overdekking is, laten we $x \in X$ willekeurig zijn. Omdat $(U_i)_{i\in I}$ een overdekking van X is, moet er een $i \in I$ zijn met $x \in U_i$. Kijk naar de verzameling J die bestaat uit indices j, waarvoor geldt dat $x \in U_j$. Omdat $(U_i)_{i\in I}$ lokaal eindig is, moet J eindig zijn. We hebben nu $x \in \bigcap_{j\in J} U_j \subseteq \bigcap_{j\in J} \overline{U}_j$ en x zit in geen enkele U_j met $j \notin J$, dus $x \in F_J$ voor een $J \in \mathcal{J}$.

We hebben F_J zó gedefinieerd dat die maar eindig veel U_i's snijdt, dus we moeten alleen nog checken dat de overdekking lokaal eindig is. Omdat $(U_i)_{i\in I}$ lokaal eindig is, is er voor elke $x \in X$ een open omgeving U_x en een $J_x \in \mathcal{J}$ zó dat U_x disjunct is van U_j, en omdat U_x en U_j allebei open zijn ook disjunct van $\overline{U}_j$, voor elke $j \notin J_x$. Dus als U_x de verzameling $F_{J'}$ snijdt, moet J' bevat zijn in J_x, want als $j \in J'$ niet in J_x zit, dan hebben we $U_x \cap F_{J'} \subseteq U_x \cap \overline{U}_j = \emptyset$. We weten dat J_x eindig is, dus er zijn maar eindig veel mogelijkheden voor J'. We hebben dus voor elk punt $x \in X$ een open omgeving U_x gevonden die maar eindig veel elementen van $(F_J)_{J\in\mathcal{J}}$, dus deze overdekking is lokaal eindig. □

Bibliografie

[1] F. Borceux. *Euclid's Elements*, page 43–110. 2014. doi: 10.1007/978-3-319-01730-3_3.

[2] L.E.J. Brouwer. Beweis der invarianz der dimensionenzahl. *Mathematische Annalen*, 70(2):161–165, 1911. doi: 10.1007/bf01461154.

[3] L.E.J. Brouwer. Über den natürlichen dimensionsbegriff. *Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik*, 1913(142):146–152, 1913. doi: 10.1515/crll.1913.142.146.

[4] G. Cantor. *Briefe*. Springer, 1991.

[5] R. Engelking. *Dimension Theory*. 1978.

[6] R. Engelking. *General Topology*. 1989.

[7] M. Fréchet. Les dimensions d'un ensemble abstrait. *Mathematische Annalen*, 68(2):145–168, 1910. doi: 10.1007/bf01474158.

[8] F Hausdorff. Dimension und äußeres maß. *Mathematische Annalen*, 79(1–2):157–179, 1918. doi: 10.1007/bf01457179.

[9] I.M. James. *History of Topology*. Elsevier, 1999.

[10] M. Katětov. О размерности несепарабельных пространств. i. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 02(4):333–368, 1952.

[11] H. Lebesgue. Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des espaces à n et $n + p$ dimensions. *Mathematische Annalen*, 70(2):166–168, 1911. doi: 10.1007/bf01461155.

[12] S. Leggatt. *Aristotle: On the Heavens I & II*. 1995. doi: 10.2307/j.ctv1228h9n.

[13] O.V. Lokucievskiĭ. On the dimension of bicompacta. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 67:217–219, 1949.

[14] A. Lunc. A bicompactum whose inductive dimension is greater than its dimension defined by means of coverings. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 66:801–803, 1949.

[15] K. Menger. Über die dimensionalität von punktmengen. *Monatshefte Für Mathematik*, 33(1):148–160, 1923. doi: 10.1007/bf01705597.

[16] K. Morita. Normal families and dimension theory for metric spaces. *Mathematische Annalen*, 128(1):350–362, 1954. doi: 10.1007/bf01360142.

[17] B.A. Pasynkov. On bicompacta with noncoinciding dimensions. *Sov. Math., Dokl.*, 11:671–675, 1970.

[18] G. Peano. Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane. *Mathematische Annalen*, 36(1):157–160, 1890. doi: 10.1007/bf01199438.

[19] H. Poincaré. Pourquoi l'espace a trois dimensions. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 20(4):483–504, 1912.

[20] P. Roy. Failure of equivalence of dimension concepts for metric spaces. *Bulletin (New Series) Of The American Mathematical Society*, 68(6):609–613, 1962. doi: 10.1090/s0002-9904-1962-10872-6.

[21] P. Urysohn. Les multiplicités cantoriennes. *C.R. Acad. Paris*, 175:440–442, 1922.

[22] E. Čech. Sur la théorie de la dimension. *C.R. Acad. Paris*, 193:976–977, 1931.

[23] E. Čech. Příspěvek k theorii dimense. *Časopis Pěst. Mat. Fys.*, 62:277–291, 1933.