



Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

**Powerfactorverbetering in elektrische netwerken
(onder niet sinusvormige omstandigheden)
(Engelse titel: Controller design for power factor
improvement of networks under non-sinusoidal
conditions)**

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

**BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE**

door

Jordy Guldenaar

**Delft, Nederland
Juli 2017**



BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

“Powerfactorverbetering in elektrische netwerken (onder niet sinusvormige omstandigheden)”

(Engelse titel: “Controller design for power factor improvement of networks under non-sinusoidal conditions”)

Jordy Guldenaar
Studentnummer: 4274741

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr. J.W. van der Woude

Overige commissieleden

Prof. dr. ir. K. Vuik

Dr. B. van den Dries

Juli, 2017

Delft

Inhoudsopgave

1	Inleiding	5
2	Powerfactor (pf) in een eenvoudig circuit	7
3	Componenten in een elektrisch netwerk	9
3.1	Weerstand	9
3.2	Spoel	10
3.3	Condensator	11
4	Componenten toevoegen aan het netwerk (met lineaire componenten)	12
4.1	Ontbinden/opsplitsen van de stroom	13
5	Vereenvoudiging voor het vinden van powerfactorverbetering met vectorruimtes	18
6	Componenten aan het elektrisch netwerk toevoegen bij een in serie geschakeld compenserend gedeelte	22
6.1	Bij netwerk met lineaire componenten	22
6.2	Bij netwerk met niet-lineaire componenten	24
7	Numerieke benadering van de Fourierreeks voor $i(t)$	28
8	Compenserend gedeelte voor spanningsfunctie met drie verschillende frequenties	30
9	Resultaten	32
10	Conclusie en discussie	33
11	Appendix	34

Hoofdstuk 1

Inleiding

Uit laboratoriumonderzoek werd begin maart 2017 bekend dat naar schatting ruim 850.000 slimme energiemeters die in Nederlandse meterkasten hangen meer meten dan het daadwerkelijke verbruik. Een aantal energieapparaten in huis kunnen de meters beïnvloeden zoals:

- Opladers van mobiele telefoons
- Moderne laptops
- led- en/of spaarlampen

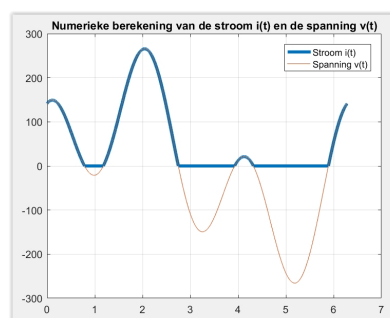
Zie [1] voor meer informatie

Op een bepaald tijdstip kan de stand tot wel zes keer hoger uitvallen dan het werkelijke energieverbruik. Dus betalen klanten ook meer aan een energiebedrijf dan ze daadwerkelijk gebruiken. De vragen die we hierbij kunnen stellen zijn: Hoe is dit nu mogelijk en kunnen we dit verhelpen?

In de elektrotechniek kunnen zowel de spanning als de stroom beschreven worden door sinusvormige functies. De spanning wordt geleverd door een spanningsbron (de centrale) en de stroom in het circuit zorgt ervoor dat deze spanning ook over de energieapparaten in huis kan komen te staan. Echter door schakelingen in het circuit kan het voorkomen dat er even geen stroom meer loopt door het circuit en daarmee tijdelijk het vermogen dat wordt gebruikt door de belasting nul wordt. Immers is het vermogen niets anders dan de spanning vermenigvuldigd met de stroomsterkte. Als we nu bijvoorbeeld het volgende periodieke signaal nemen voor de spanning, dan kan het bijbehorende signaal met schakelingen uitzien zoals in figuur 1.1 :

Een meter gaat grofweg met een fouriertransformatie het bijbehorende signaal voor de stroom benaderen. Echter is de periode waaraan de stroom nul is, moeilijk te beschrijven met een fouriertansformatie, omdat die daar niet meer sinusvormig is. Hier maakt de meter dus de fouten doordat het de verkeerde benadering maakt voor de stroom die erbij hoort. In dit bacheloreindproject (BEP) zal worden gekeken naar hoe we dit signaal alsnog zo goed mogelijk kunnen benaderen.

Eveneens willen we er in de praktijk voor zorgen dat de apparaten zelf al een optimaal vermogen gaan hebben bij een bepaalde spanning en stroom in een type netwerk. Zo kunnen we ervoor zorgen dat we bij verschillende netwerken een zo laag mogelijk energieverlies



Figuur 1.1: Stroom- en spanningsfunctie bij netwerk met diode

kunnen behalen. Dit houdt eigenlijk in dat we de powerfactor gaan maximaliseren. De powerfactor wordt gebruikt als maat om de effectiviteit van het uiteindelijke vermogen te bepalen. Het is gedefinieerd als de ratio tussen het actieve vermogen P (verbruikt door de belasting) en het schijnbaar vermogen dat geleverd wordt door de spanningsbron. De powerfactor 1 is de beste waarde, omdat de componenten in een circuit dan niet voor een energieverlies zorgen. In dit geval is het schijnbaar vermogen precies gelijk aan het actieve vermogen. Een powerfactor van 0 is de minst gunstige waarde, omdat het schijnbaar vermogen dan het grootst is en het actieve vermogen gelijk aan nul is.

Zie [1] voor meer informatie

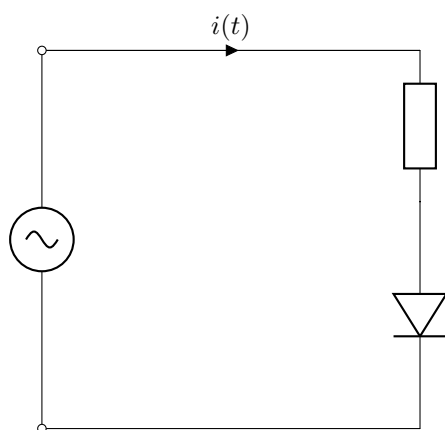
Om de powerfactor (pf) te maximaliseren (uitgaande van een $pf \neq 0$), willen we dus eigenlijk het schijnbaar vermogen minimaliseren. Het schijnbaar vermogen wordt beïnvloed door de componenten die in het oorspronkelijke netwerk geschakeld zijn zoals een weerstand, spoel en condensator. Het schijnbare vermogen kunnen we minimaliseren door een condensator of spoel parallel (of juist in serie) te schakelen ten opzichte van de belasting. Door de geschikte waarden van de componenten in het compenserende gedeelte te vinden, kan een minimum voor het schijnbaar vermogen worden vastgelegd. Dit kan gedaan worden met methoden uit Analyse 2, maar met hogere dimensies is het gemakkelijker om Numerieke Wiskunde te gebruiken. Ook Lineaire Algebra zal een rol kunnen spelen. Dit is vooral handig te gebruiken wanneer de spanningsbron een spanning geeft die bestaat uit meerdere frequenties. Volgens de theorie is het niet mogelijk bij elk geval van elektrische circuits om een pf gelijk aan 1 te krijgen, maar dat ligt vooral aan hoe de spanningsfunctie eruit ziet bij de wisselstroom. We weten uit de elektrotechniek dat we deze spanningsfunctie en stroomfunctie zoveel mogelijk in fase willen krijgen om de powerfactor optimaal te krijgen.

Het idee is dat een apparaat schommelingen, veroorzaakt door bijvoorbeeld een schakeling of diode, compenseert doordat de juiste spoel en/of condensator op de juiste manier aan het circuit in het apparaat is toegevoegd. Of omgekeerd kan een meter ook rekening houden met de eventuele apparaten die aangesloten zijn op het netwerk en daarmee zorgen dat een betrouwbare meting kan worden verricht. Dit zal ik in deze BEP verder gaan onderzoeken. Eventueel kan ook nog onderzoek worden gedaan door meetresultaten (data van meterstanden in Nederland) verder te analyseren.

Hoofdstuk 2

Powerfactor (pf) in een eenvoudig circuit

Het werkelijke vermogen van onderstaand elektrische circuit ligt lager, doordat er een diode inzit die de stroom in één richting doorlaat. De diode zorgt er op bepaalde momenten dus voor dat er tijdelijk geen stroom loopt. Er is immers sprake van wisselstroom.



Figuur 2.1: Eenvoudig circuit met niet-lineair element (diode)

de spanning uitgedrukt in de tijd en een formule voor de stroom uitgedrukt in de tijd vinden om met bovenstaande formule de powerfactor bij het gegeven netwerk te berekenen.

Normaal gesproken zijn de spanning $v(t)$ en stroom $i(t)$ zuivere sinusoiden:

$$v(t) = V_{max} \cos(\omega t + \phi_v) = \sqrt{2}V \cos(\omega t + \phi_v) \text{ waarbij } \bar{V}$$

$$i(t) = I_{max} \cos(\omega t + \phi_i) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \phi_i) \text{ waarbij } \bar{I}.$$

Hierbij is ω de hoekfrequentie. Deze is in de praktijk gelijk aan 2π vermenigvuldigd met de netfrequentie (meestal 50 Hertz), maar in dit geval één. Verder nemen we voor het gemak een weerstand van 1Ω . Daarmee vinden we :

$$v(t) = \sin(t) \text{ voor } 0 \leq t \leq T,$$

$$i(t) = \sin(t) \text{ voor } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \text{ en } i(t) = 0 \text{ voor } \frac{T}{2} \leq t \leq T.$$

Om de powerfactor te berekenen delen we het werkelijke vermogen door het totale vermogen. Bij het werkelijke vermogen kunnen we zeggen dat dit gelijk aan nul is op het moment dat er even geen stroom loopt door een (van de) component (en). Dus moeten we de stroom (en daarmee het werkelijke vermogen) in de periode waarin een zuivere sinus zichtbaar is op de tijdstippen waarin de sinus negatief is. Dit is te vergelijken met het geval van een elektrisch netwerk waarin een schakelaar zit. In elektrische netwerken kunnen we de powerfactor berekenen met de volgende uitdrukking:

$$pf = \frac{P}{|S|}$$

Hierbij is P het actieve vermogen en $|S|$ het schijnbaar vermogen. Nu willen we een formule voor

de stroom uitgedrukt in de tijd vinden om met bovenstaande formule de powerfactor bij het gegeven netwerk te berekenen.

Dus door de diode loopt er de helft van de tijd wel een stroom en de andere helft van de tijd niet. Met een berekening vinden we nu:

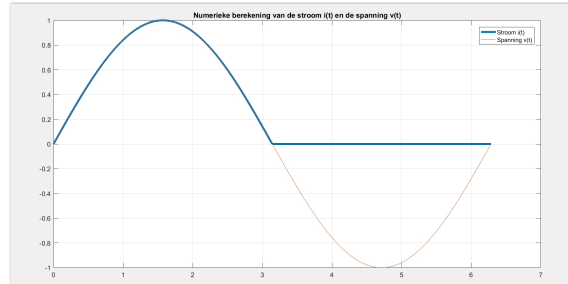
$$\begin{aligned}
 pf &= \frac{P}{|S|} = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t)dt}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t)dt} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t)dt}} \\
 &= \frac{\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} v(t)i(t)dt}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t)dt} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i^2(t)dt}} \\
 &= \frac{\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2(t)dt}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(t)dt} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2(t)dt}} \\
 &= \frac{\frac{1}{T}(\frac{1}{2}T - \frac{1}{4} \sin(\frac{T}{2}))}{\sqrt{\frac{1}{T}(\frac{1}{2}T - \frac{1}{4} \sin(\frac{T}{2}))} \sqrt{\frac{1}{T}(\frac{1}{2}T - \frac{1}{4} \sin(T))}} \\
 &= \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Omdat dit misschien nogal een omslachtige analytische berekening is, kunnen we deze berekening ook anders aanpakken. Wat de volgende aanpak zo mooi maakt is dat we dit eigenlijk voor alle functies kunnen gebruiken waarbij een diode en een weerstand van 1Ω in het circuit zit zolang de functie maar aan de bijbehorende symmetrie-eigenschappen (puntsymmetrie) voldoet.

Met de symmetrie-eigenschappen van de sinusfunctie en een plot zoals in figuur 2.2 (stroom dikgedrukt, spanning rood) volgt bijvoorbeeld al snel dat $\int i^2(t)dt = \int v(t) \cdot i(t)dt = \frac{1}{2} \cdot \int v^2(t)dt$.

Nu volgt hieruit weer dat:

$$\begin{aligned}
 pf &= \frac{\int v(t) \cdot i(t)dt}{\sqrt{\int i^2(t)dt} \sqrt{\int v^2(t)dt}} \\
 &= \frac{\int v(t) \cdot i(t)dt}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \int v^2(t)dt} \sqrt{\int v^2(t)dt}} \\
 &= \frac{\int v(t) \cdot i(t)dt}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \int v^2(t)dt}} \\
 &= \frac{\int v(t) \cdot i(t)dt}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int v(t)i(t)dt}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2}} \\
 \implies pf &= \frac{1}{2} \sqrt{2}
 \end{aligned}$$



Figuur 2.2: Stroom- en spanningsfunctie bij sinusfuncties

Hoofdstuk 3

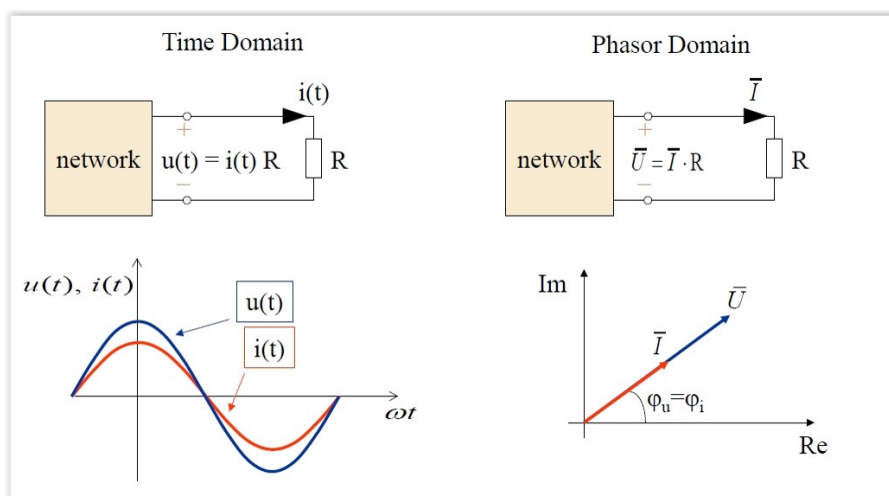
Componenten in een elektrisch netwerk

Nu is het de bedoeling dat de powerfactor wordt verbeterd door een component in het netwerk toe te voegen. We kunnen twee componenten met hun eigenschappen onderscheiden die belangrijk zijn als we een netwerk willen maken met een hogere powerfactor: een spoel en condensator. Verder wordt in het oorspronkelijke netwerk een weerstand gebruikt om aan te geven dat er energieverlies is.

3.1 Weerstand

Ten eerste wordt de weerstand gebruikt om verliezen zoals warmte weer te geven. Volgens de wet van Ohm geldt er dat het voltage gelijk is aan het product van de stroom en de weerstand. We kunnen rekenen met een tijdsdomein waarbij we direct de functies gebruiken. Daarnaast kunnen we ook gebruik maken van vectoren in het complexe vlak (het fasorendomein). Daarbij maken we gebruik van de complexe e - machten van de bijbehorende spannings - en stroomfuncties. In het tijdsdomein zijn $i(t)$ en $v(t)(= u(t))$ in de figuur) dus in fase en in het fasorendomein is de fasehoek tussen $v(t)$ en $i(t)$ gelijk aan 0. Een weerstand is lineair en frequentieonafhankelijk. De verhouding tussen stroom en spanning heeft voor iedere spanning een vaste waarde.

Zie [2] voor meer informatie

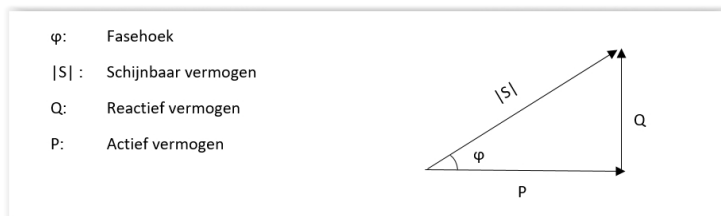


Figuur 3.1: Eigenschappen weerstand

3.2 Spoel

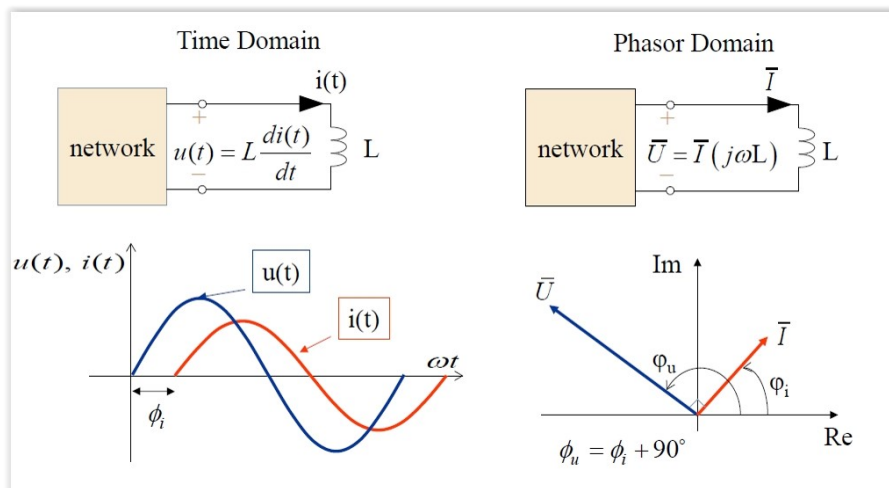
Allereerst wordt een spoel gebruikt om aan te geven dat er ergens (tijdelijk) energie wordt verkregen in het netwerk. Het deel van het vermogen dat de powerfactor meestal verslechterd is het reactief vermogen. Dit kan worden ingezien in figuur 3.2:

Hierin is P het actieve vermogen, Q het reactief vermogen (=het deel van het vermogen dat als niet nuttig kan worden beschouwd) en $|S|$ het schijnbaar vermogen. In het meest gunstige geval is $|S| = P$ en $Q = 0$. Immers is dan de powerfactor gelijk aan 1. De fasehoek φ wordt bepaald door faseverschuivingen tussen de spanningfunctie $v(t)$ en de stroomfunctie $i(t)$. Merk op dat er uit figuur 3.2 volgt dat $pf = \frac{P}{|S|} = \cos \varphi$.



Figuur 3.2: Meerdere vermogens

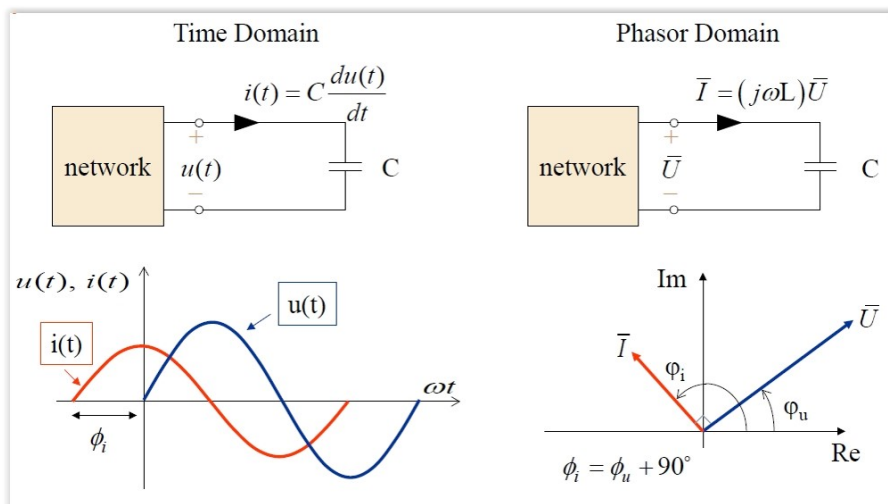
Doordat het element (tijdelijk) energie opslaat, betekent dit dat het element reactief vermogen consumeert. Een spoel (sterkte) wordt aangeduid met een L en de bijbehorende differentiaalvergelijking is: $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$. De weerstand van een component kan in het complexe vlak worden berekend als impedantie. De impedantie van de spoel is $Z_L = j\omega L$. In het tijdsdomein is $i(t)$ dus een fractie $\frac{\pi}{2}$ naar voren verschoven ten opzichte van $v(t)$ en in het fasorendomein is er een fasehoek van precies $\frac{\pi}{2}$. Een overzicht van de eigenschappen van de spoel is hieronder weergegeven:



Figuur 3.3: Eigenschappen spoel

3.3 Condensator

Ten slotte kunnen we ook een condensator toevoegen. Deze zorgt juist voor een verschuiving van de stroomfunctie ten opzichte van de spanningsfunctie naar achteren. De bijbehorende differentiaalvergelijking is $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$. De impedantie is $Z_C = -\frac{1}{j\omega C}$. In het tijdsdomein is $v(t)$ dus een fractie $\frac{\pi}{2}$



Figuur 3.4: Eigenschappen Condensator

verschoven ten opzichte van $i(t)$ en in het fasorendomein is er een fasehoek van precies $-\frac{\pi}{2}$. Een condensator is lineair en frequentieafhankelijk. De verhouding tussen spanning en stroom heeft voor iedere spanning een vaste waarde (lineair). De verhouding tussen spanning en stroom heeft voor iedere frequentie een verschillende waarde (frequentieafhankelijk).

Zie [2] voor meer informatie

Hoofdstuk 4

Componenten toevoegen aan het netwerk (met lineaire componenten)

Vervolgens willen we met de besproken spoel en condensator de powerfactor verbeteren door ze op de juiste manier te schakelen (parallel of in serie) in het gegeven netwerk.

Er zijn hierin heel veel verschillende mogelijkheden (met verschillende spoel- en condensatorwaarden die te gebruiken zijn in het compenserende gedeelte), maar in de literatuur worden al een aantal mogelijkheden gegeven die leiden tot een verhoogde powerfactor. Ook kan met een specifieke methode de optimale powerfactor worden berekend als er een niet-lineair element zoals een diode of schakelaar in het circuit zit. Allereerst bekijken we hoe we normaal gesproken in een netwerk met hooguit lineaire componenten de powerfactor kunnen verhogen. Neem hiervoor bijvoorbeeld onderstaand netwerk met een spanningsbron die spanning geeft volgens de volgende functie $v(t) = \sqrt{2} \cdot (100 \sin(t) + 100 \cos(t))$.

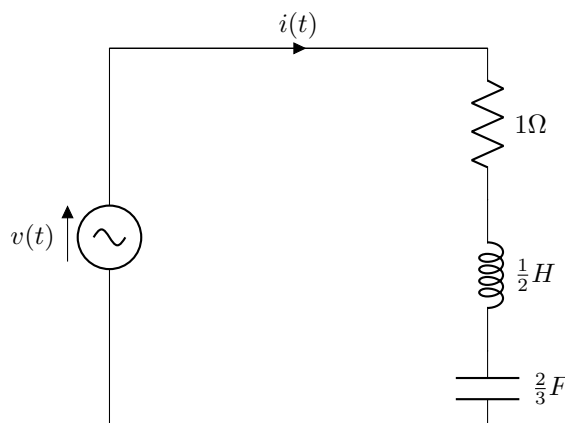
Volgens de wetten van Kirchoff (en de besproken vergelijkingen voor de componenten) geldt hierin de volgende differentiaalvergelijking:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = v(t).$$

Invullen van de gegeven waarden in de vergelijking en aan beide kanten van het = - teken differentiëren geeft:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{di(t)}{dt} + \frac{3}{2} i(t) = \sqrt{2}(100 \cos(t) - 300 \sin(3t))$$

Nu kunnen we de differentiaalvergelijking oplossen met behulp van de methode van onbepaalde coëfficiënten analytisch oplossen. Hiervoor proberen we als oplossing $i(t) = A \cos(t) + B \sin(t) + C \cos(3t) + D \sin(3t)$.



Invullen in de differentiaalvergelijking levert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{di(t)}{dt} + \frac{3}{2} i(t) = \\ \cos(t) \left(-\frac{1}{2} A + B + \frac{3}{2} A \right) + \\ \sin(t) \left(-\frac{1}{2} B - A + \frac{3}{2} B \right) + \\ \cos(3t) \left(-\frac{9}{2} C + 3D + \frac{3}{2} C \right) + \\ \sin(3t) \left(-\frac{9}{2} D - 3C + \frac{3}{2} D \right) = \\ \cos(t)(A + B) + \sin(t)(B - A) + \cos(3t)(3D - 3C) + \sin(3t)(-3D - 3C) \end{aligned}$$

Als we dit vergelijken met $v'(t)$, dan moet er gelden:

- (i) $A + B = \sqrt{2} \cdot 100$
- (ii) $B - A = 0$
- (iii) $3D - 3C = 0$
- (iv) $-3D - 3C = -300 \cdot \sqrt{2}$

Uit deze vergelijkingen vinden we $A = B = C = D = 50 \cdot \sqrt{2}$.

Dus is $i(t) = 50\sqrt{2}(\cos(t) + \sin(t) + \sin(3t) + \cos(3t))$.

4.1 Ontbinden/opsplitsen van de stroom

De stroom $i(t)$ kunnen we schrijven als een eindige Fourierreeks en kunnen we opsplitsen in een even en oneven deel. Als notatie voor de k -de afgeleide gebruiken we $v^{(k)}$ of we gebruiken k accenten. Dus we schrijven :

$$i(t) = i_e(t) + i_o(t)$$

waarin

$$\begin{aligned} i_e(t) &= \sum_{k=-N, k \text{ even}}^N \gamma_k v^{(k)}(t) \\ i_o(t) &= \sum_{k=-N, k \text{ oneven}}^N \gamma_k v^{(k)}(t). \end{aligned}$$

Verder gebruiken we voor het berekenen van de pf de norm (wortel van het inproduct) van een functie. De definitie is als volgt:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f^2(t) dt}$$

We doen de volgende bewering : Er geldt voor $k, m \in \mathbb{Z}$ dat $\langle v^k(t), v^m(t) \rangle = 0 \iff k - m$ is oneven. Een bewijs hiervan is als volgt:

Z.v.v.a. nemen we aan dat $k > m$.

Met partiële integratie vinden we:

$$\int_0^{2\pi} v^{(k)}(t)v^{(m)}(t)dt = v^{(k-1)}(t)v^{(m)}(t)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} v^{(k-1)}(t)v^{(m+1)}(t)dt$$

Vanwege de periodiciteit van $v^{(k-1)}$ en $v^{(m)}$ is de eerste term nul. Herhaald toepassen van bovenstaande levert op:

$$\int_0^{2\pi} v^{(k)}(t)v^{(m)}(t)dt = (-1)^{(k-m)} \int_0^{2\pi} v^{(k)}(t)v^{(m)}(t)dt$$

Omdat $k - m$ oneven is, volgt er:

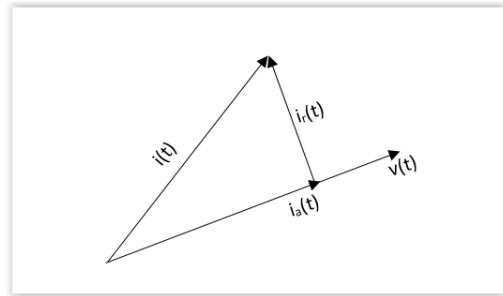
$$\int_0^{2\pi} v^{(k)}(t)v^{(m)}(t)dt = 0 \\ \implies \langle v^{(k)}, v^{(m)} \rangle = 0$$

Zie [3] voor meer informatie

Met de claim en de definitie voor $i_o(t)$ volgt direct dat $\langle v, i_o \rangle = 0$.

De reactieve stroom $i_r(t) = i_o(t)$ vinden we in dit geval dus door te projecteren op de span van oneven orde afgeleides. Verder maken we onderscheid tussen actieve stroom $i_a(t)$ en reactieve stroom $i_r(t)$ zoals in de figuur hieronder. De stroom $i_a(t)$ is de orthogonale projectie van $i(t)$ op $v(t)$. Volgens de Lineaire Algebra kunnen we $i_a(t)$ dus verkrijgen met:

$$i_a := \frac{\langle i, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v(t)$$



Verder geldt $\langle v, i \rangle = \langle v, i_o + i_e \rangle = \langle v, i_o \rangle + \langle v, i_e \rangle = \langle v, i_e \rangle$. We berekenen de actieve stroom dan ook met

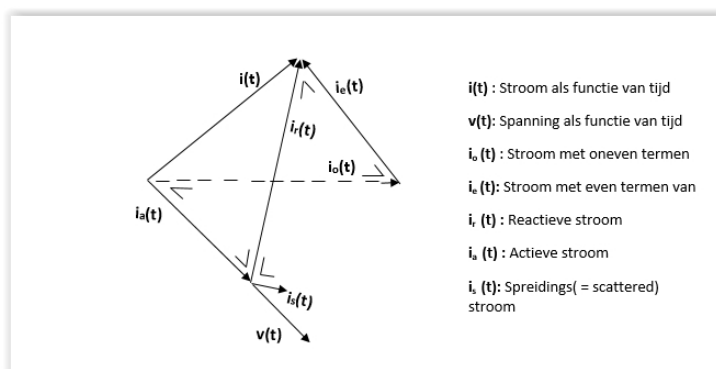
$$i_a(t) = \frac{\langle i_e, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v(t)$$

Figuur 4.1: Actieve - en reactieve stroomrichting

Eventuele foutmarges worden weergegeven met de 'spreidings'-stroom (scattered stroom) en is gedefinieerd als $i_s(t) = i_e(t) - i_a(t)$ ofwel met de andere berekende stroomsoorten vinden we $i_s(t)$ door $i(t) - i_a(t) - i_r(t)$. De scattered stroom $i_s(t)$ bepaald eigenlijk wat de maximale powerfactor is die we kunnen verkrijgen door componenten toe te voegen. Vervolgens vinden we de groottes van de componenten die we willen toevoegen door te stellen dat $i_r(t) + i_c(t) = 0$. Hierin is $i_c(t)$ de stroom die loopt door het compenserende gedeelte. Het gestelde betekent eigenlijk dat we een netwerk creëren dat helemaal energieloos is ofwel dat we een netwerk creëren dat een zo hoog mogelijke powerfactor geeft.

In een driedimensionale figuur kunnen we alle besproken soorten stroom weergeven.

Hierbij zien we direct van welke paren stroomsoorten het inproduct gelijk is aan nul. In dat geval zullen de vectoren daarvan loodrecht op elkaar staan. Nu kunnen we de opsplitsing van de stroom gebruiken zoals in het voorbeeld (de twee gegeven netwerken) hierboven.



Figuur 4.2: Actieve - en reactieve stroomrichting

Hogere oneven orde afgeleides van $v(t)$ bestaan uit $\cos(t)$ en $\sin(3t)$ ofwel alle oneven primitieven/afgeleides van $v(t)$ worden gegeven door de span $\mathbb{P}_o v(t) := \text{span} \{ \cos(t), \sin(3t) \}$.

Door $i(t)$ orthogonaal te projecteren op de span $\mathbb{P}_o v(t)$ verkrijgen we voor de oneven stroom:

$$i_o(t) = \sqrt{2}(50 \cos(t) + 50 \sin(3t))$$

De andere waarden voor de stroom volgen nu ook:

$$i_e(t) = i(t) - i_o(t) = \sqrt{2}(50 \sin(t) + 50 \cos(3t))$$

$$i_a(t) = \frac{\langle i_e(t), v \rangle}{\langle v, v \rangle} v(t) = \sqrt{2}(50 \sin(t) + 50 \cos(3t))$$

$$i_r(t) = i_o(t) = \sqrt{2}(50 \cos(t) + 50 \sin(3t))$$

$$i_s(t) = i_e(t) - i_r(t) = i(t) - i_r(t) - i_a(t) = 0$$

De laatste gelijkheid geeft aan dat we de powerfactor kunnen verhogen tot 1 als deze al niet 1 is. Om de powerfactor te berekenen, moeten we wel gebruik maken van de norm van een aantal functies. Zonder toevoeging van een component is de powerfactor nu gelijk aan:

$$pf = \frac{P}{|S|} = \frac{\|v\| \|i_a\|}{\|v\| \|i\|} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Dus voegen we een component of combinatie van elementen toe zodanig dat $i_r(t) + i_c(t) = 0$. Allereerst schrijven we daartoe $i_r(t)$ in termen van $v'(t)$ en $v^{-1}(t)$. Merk op dat we v^{-k} hierbij als k -de primitieve van v hebben geschreven (met in dit geval $k = 1$).

We lossen op (met $A, B \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} A \cdot v'(t) + B \cdot v^{-1}(t) &= \cos(t)(A\sqrt{2} \cdot 100 - B\sqrt{2} \cdot 100) + \\ &\sin(3t)(-3A\sqrt{2} \cdot 100 + \frac{1}{3}B\sqrt{2} \cdot 100) = i_r(t) \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
 50\sqrt{2} &= A\sqrt{2} \cdot 100 - B\sqrt{2} \cdot 100 \\
 50\sqrt{2} &= -3A\sqrt{2} \cdot 100 + \frac{1}{3}B\sqrt{2} \cdot 100 \\
 &\implies \\
 A &= -\frac{1}{4} \\
 B &= -\frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Dus $i_r(t) = -\frac{1}{4}v'(t) - \frac{3}{4}v^{-1}(t)$ en er geldt $i_r(t) + i_c(t) = 0 \iff i_c(t) = \frac{1}{4}v'(t) + \frac{3}{4}v^{-1}(t)$.

Als we gebruikmaken van de differentiaalvergelijking voor de componenten en deze omschrijven naar uitdrukkingen voor de stroom, dan vinden we dat de stroom in het compenserende gedeelte wordt weergegeven door de som van de stromen door deze elementen:

$$i_c(t) = C_c v'(t) + \frac{1}{L_c} v^{-1}(t)$$

Hieruit lezen we dus af dat we een compenserend gedeelte nodig hebben met een condensator met een waarde $C_c = \frac{1}{4}$ en een spoel met waarde $L_c = \frac{4}{3}$. In dit geval wordt de powerfactor dus mooi gegeven door $pf = \frac{P}{\sqrt{S^2 - Q_c^2}} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q_r^2 + Q_s^2 - Q_c^2}} \stackrel{Q_s=0}{=} \stackrel{Q_r=Q_c}{=} \frac{P}{P} = 1$, het meest optimale geval.

Als we nu hetzelfde voorbeeld nemen maar nu de condensatorwaarde C op $\frac{2}{7}F$ stellen, dan zullen we waarschijnlijk al een heel ander resultaat voor de maximale powerfactor vinden. Immers hebben we in het oorspronkelijke netwerk meer te maken met een inductieve werking bij die lagere condensatorwaarde.

In dit geval moeten we eerst de volgende differentiaalvergelijking oplossen:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{di(t)}{dt} + \frac{7}{2} i(t) = \sqrt{2}(100 \cos(t) - 300 \sin(3t))$$

Door weer de methode van onbepaalde coëfficiënten toe te passen vinden we nu:

$$i(t) = \sqrt{2}(30 \cos(t) + 10 \sin(t) + 90 \cos(3t) + 30 \sin(3t))$$

Als we nu $i(t)$ orthogonaal projecteren op de span van oneven orde afgeleides/primitieven $\mathbb{P}_o v(t)$, dan krijgen we

$$i_o(t) = \sqrt{2}(30 \cos(t) + 30 \sin(3t))$$

en dus

$$i_e(t) = i(t) - i_o(t) = \sqrt{2}(10 \sin(t) + 90 \cos(3t))$$

Hieruit vinden we :

$$\begin{aligned}
 i_a(t) &= \frac{\langle i_e, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v(t) \\
 &= \sqrt{2}(50 \sin(t) + 30 \cos(3t)) \\
 i_r(t) &= i_o(t) = \sqrt{2}(30 \cos(t) + 30 \sin(3t)) \\
 i_s(t) &= i_e(t) - i_r(t) = i(t) - i_a(t) - i_r(t) = \sqrt{2}(-40 \sin(t) + 40 \cos(3t)).
 \end{aligned}$$

Zonder een compenserend gedeelte vinden we ook dit keer voor de powerfactor dat deze gelijk is aan

$$pf = \frac{P}{\sqrt{S^2}} = \frac{\|v\| \|i_a\|}{\|v\| \|i\|} = \frac{\|i_a\|}{\|i\|} = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Ook nu schrijven we $i_r(t)$ weer in termen van $v'(t)$ en $v^{-1}(t)$:

$$i_r(t) = -\frac{3}{20}v'(t) - \frac{9}{20}v^{-1}(t).$$

Nu willen we dat deze reactieve stroom wordt opgeheven door de stroom in het compenserende gedeelte ofwel we willen dat $i_c(t) + i_r(t) = 0$. Dit is precies het geval als :

$$i_c(t) = C_c v'(t) + \frac{1}{L_c} v^{-1}(t) \text{ met } C_c = \frac{3}{20} \text{ en } L_c = \frac{20}{9}.$$

Met het compenserende gedeelte vinden we nu echter voor de (optimale) powerfactor:

$$pf = \frac{P}{\sqrt{S^2 - Q_c^2}} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q_s^2}} = \frac{\|v\| \|i_a\|}{\sqrt{\|v\|^2 \|i_a\|^2 + \|v\|^2 \|i_s\|^2}} = \frac{10}{\sqrt{100 + 64}} \approx 0.78087$$

Zie [4] voor meer informatie

Hoofdstuk 5

Vereenvoudiging voor het vinden van powerfactorverbetering met vectorruimtes

De powerfactorverbetering in de twee bovenstaande netwerken kan ook op een eenvoudigere manier worden opgelost in bijvoorbeeld Matlab of Maple. Hierbij zullen we gaan werken met rij / kolom-vectoren en matrices om afgeleides/primitieven weer te geven. Hierbij gaan we met coëfficiënten aan de slag en niet meer met de (periodieke) functies.

Om in de twee bovenstaande netwerken gebruik te kunnen maken van functie/vector-ruimtes moeten we wel aan een aantal aannames voldoen:

Allereerst veronderstellen we dat alle functies of signalen een eindige fourierreeks hebben. Immers kan de projectie dan ook worden gezien als een uitdrukking in termen van de coëfficiënten in de fourierreeks. Daarnaast veronderstellen we dat de functies in eerste instantie geen DC term hebben. Het kan ook zonder deze eis, maar het maakt de berekeningen voor nu gemakkelijker.

Nemen we nu als voorbeeld de twee bovenstaande netwerken, dan hebben we als spanningsfunctie een functie slechts bestaande uit $\sin(t)$ en $\cos(3t)$. De grootste hoekfrequentie is drie. Stel dat er geldt $j^2 = -1$. De spanningsfunctie kunnen we nu omschrijven als $v(t) = e(t)V$:

Met

$$e(t) = (e^{-3jt}, e^{-2jt}, e^{-jt}, e^{jt}, e^{2jt}, e^{3jt})$$

en

$$V = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 50j \\ -50j \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}$$

vinden we inderdaad terug $e(t)V = \sqrt{2} \cdot 100 \cdot (\sin(t) + \cos(3t)) = v(t)$. De bovenste termen corresponderen hierbij met wat er voor de cosinustermen in de spanningsfunctie staat en de onderste termen corresponderen hierbij met wat er voor de sinustermen in de spanningsfunctie staat. Ditzelfde kunnen we doen voor de stroom $i(t)$ waarbij we $i(t)$ schrijven als $e(t)I$ met I een 6×1 - vector.

De differentiaalvergelijking die we bij beide netwerken moesten oplossen was :

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = v(t)$$

Er geldt nu dat we $i'(t)$ kunnen vinden door de afgeleide van e -machten te nemen naar de tijd. Dus stel :

$$I = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_6 \end{pmatrix}$$

Dan is

$$i'(t) = e'(t)I = e(t) \begin{pmatrix} -3j \cdot i_1 \\ \vdots \\ 3j \cdot i_6 \end{pmatrix} = e(t) \begin{pmatrix} -3j & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 3j \end{pmatrix} I$$

Dus we vinden nu dat $i'(t) = WI$ met $W = \text{diag}(-3j, -2j, -j, j, 2j, 3j)$. Door de inverse te nemen van W kunnen we dus weer terug naar de oorspronkelijk vorm van $i(t)$ of naar de primitieve van $i(t)$.

Neem I_6 als 6×6 - eenheidsmatrix. De differentiaalvergelijking hierboven wordt dan gegeven door onderstaande vergelijking en er volgt:

$$\begin{aligned} RI_6 e(t)I + LW e(t)I + \frac{1}{C} W^{-1} e(t)I &= e(t)V \implies \\ (RI_6 + LW + \frac{1}{C} W^{-1}) e(t)I &= e(t)V \implies \\ (RI_6 + LW + \frac{1}{C} W^{-1}) I &= V \implies \\ I &= (RI_6 + LW + \frac{1}{C} W^{-1})^{-1} V \end{aligned}$$

Zie [3] voor meer informatie

Dus kunnen we de vector voor stroom I relatief eenvoudig berekenen. Voor netwerk 1 respectievelijk netwerk 2 volgt:

$$I = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 25 + 25j \\ 0 \\ 25 + 25j \\ 25 - 25j \\ 0 \\ 25 - 25j \end{pmatrix}, I = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 45 + 15j \\ 0 \\ 15 + 5j \\ 15 - 5j \\ 0 \\ 45 - 15j \end{pmatrix}$$

We vinden vervolgens weer dezelfde functies voor $i(t)$ voor beide netwerken terug door linksvermenigvuldiging met $e(t)$. De vector voor de stroom I (waarin de Fouriercoëfficiënten van de stroom kunnen worden genomen) moet orthogonaal geprojecteerd worden op de ruimte die wordt opgespannen door $W^k V$ waarbij k oneven is. Er geldt nu dat:

$$\begin{aligned} \text{span} \{W^k V | k \text{ oneven} \} &= \\ \text{span} \{W^{-k} V, \dots, W^{-1} V, W V, \dots, W^k V | k \text{ oneven} \} &= \\ \text{span} \{W^{-1} V, W V\} \end{aligned}$$

met

$$WV = \begin{pmatrix} -150j \\ 0 \\ 50 \\ 50 \\ 0 \\ 150j \end{pmatrix} \text{ en } W^{-1}V = \begin{pmatrix} \frac{50}{3}j \\ 0 \\ -50 \\ -50 \\ 0 \\ -\frac{50}{3}j \end{pmatrix}.$$

Vervolgens kunnen we de vector I_r vinden door I orthogonaal te projecteren op de ruimte die wordt opgespannen door WV en $W^{-1}V$. Om die orthogonale projectie te maken, moeten we eerst een basis hebben voor het vlak zelf en een basis voor het orthogonale complement van dat vlak. Een basis voor het vlak kan gegeven worden door WV^* en $W^{-1}V^*$. Hierbij is V^* de getransponeerde van de geconjugeerde matrix van V (Hermitisch getransponeerde). Het orthogonale complement van het vlak is dus eigenlijk de normaalvector op het vlak die we moeten berekenen. Het orthogonale complement is hier niets anders dan de nulruimte van de rijruimte van de vectoren die deze ruimte opspannen ofwel het orthogonale complement is nu:

$$\begin{aligned} \text{Nul} \begin{pmatrix} WV^* \\ W^{-1}V^* \end{pmatrix} &= \text{Nul} \begin{pmatrix} -150j\sqrt{2} & 0 & 50\sqrt{2} & 50\sqrt{2} & 0 & 150j\sqrt{2} \\ \frac{50}{3}j\sqrt{2} & 0 & -50\sqrt{2} & -50\sqrt{2} & 0 & -\frac{50}{3}j\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Noem deze vectoren respectievelijk v_1, v_2, v_3, v_4 . Er geldt nu dat deze vectoren plus de vectoren WV en $W^{-1}V$ een basis vormen voor de gehele ruimte. Dus bestaat I altijd uit een lineaire combinatie van deze vectoren en er geldt inderdaad voor het eerste netwerk dat:

$$I = -\frac{1}{4}WV - \frac{3}{4}W^{-1}V - 25j\sqrt{2}v_1 + 25\sqrt{2}v_4$$

en voor het tweede netwerk dat:

$$I = -\frac{3}{20}WV - \frac{9}{20}W^{-1}V - 5j\sqrt{2}v_1 + 45\sqrt{2}v_4$$

De orthogonale projectie van I op het vlak, dat opgespannen wordt door WV en $W^{-1}V$, wordt nu gegeven door het deel van deze lineaire combinatie dat door de basisvectoren (WV en $W^{-1}V$) van het vlak bepaald wordt. Dus voor het eerste netwerk geldt er dat:

$$I_r = -\frac{1}{4}WV - \frac{3}{4}W^{-1}V = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 25j \\ 0 \\ 25 \\ 25 \\ 0 \\ -25j \end{pmatrix}$$

en voor het tweede netwerk geldt er dat:

$$I_r = -\frac{3}{20}WV - \frac{9}{20}W^{-1}V = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 15j \\ 0 \\ 15 \\ 15 \\ 0 \\ -15j \end{pmatrix}$$

Vervolgens kunnen we I_a (de vector voor de actieve stroom) vinden door de projectie van I op V te vinden, oftewel met de kennis van lineaire algebra vinden we (voor beide netwerken):

$$I_a = \frac{\langle I, V \rangle}{\langle V, V \rangle} \cdot V = \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ 25j \\ -25j \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}$$

I_s (de vector voor de 'spreidings' (scattered) stroom) kunnen we vervolgens berekenen met $I_s = I - I_a - I_r$. Voor I_s vinden we voor netwerk 1 respectievelijk netwerk 2:

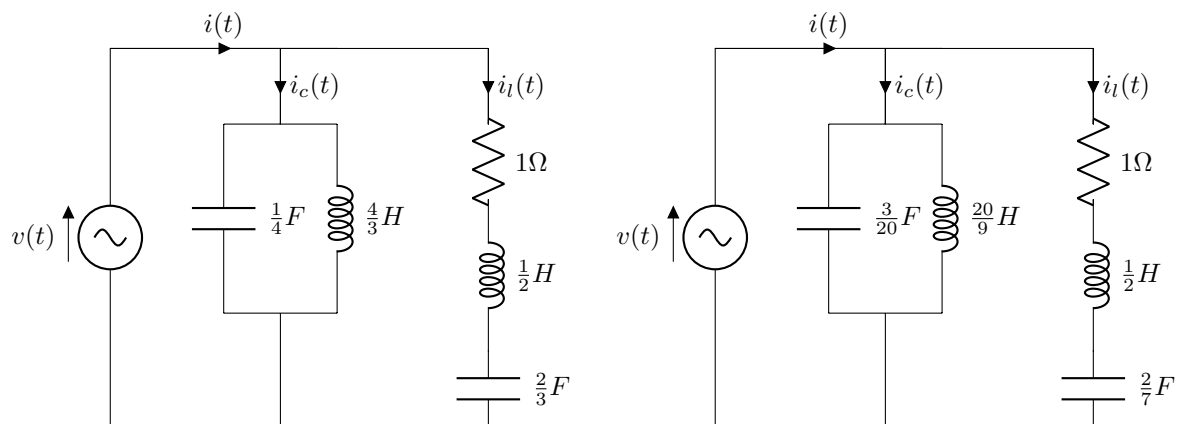
$$I_s = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, I_s = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ -20j \\ 20j \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Ook de norm van de functies is nu ook veel eenvoudiger uit te rekenen door de norm van de bijbehorende vector te nemen. Zo vinden we nu dat er voor netwerk 1 resp. netwerk 2 geldt:

$$\begin{array}{ll} \|v\| = 100\sqrt{2} & \|v\| = 100\sqrt{2} \\ \|i\| = 100 & \|i\| = 100 \\ \|i_r\| = 50\sqrt{2} & \|i_r\| = 30\sqrt{2} \\ \|i_a\| = 50\sqrt{2} & \|i_a\| = 50\sqrt{2} \\ \|i_s\| = 0 & \|i_s\| = 40\sqrt{2} \end{array}$$

Uiteindelijk kunnen we ook de oorspronkelijke functies voor $v(t)$, $i(t)$, $i_a(t)$, $i_r(t)$ en $i_s(t)$ weer terugvinden door linksvermenigvuldiging van resp. V , I , I_a , I_r en I_s met $e(t)$.

Het verbeterde netwerk met de meest optimale powerfactor komt er dus voor respectievelijk netwerk 1 en netwerk 2 als volgt uit te zien:



Figuur 5.1: Verbeterde netwerken van resp. netwerk 1 & 2 met optimale powerfactors

Zie [4] voor meer informatie

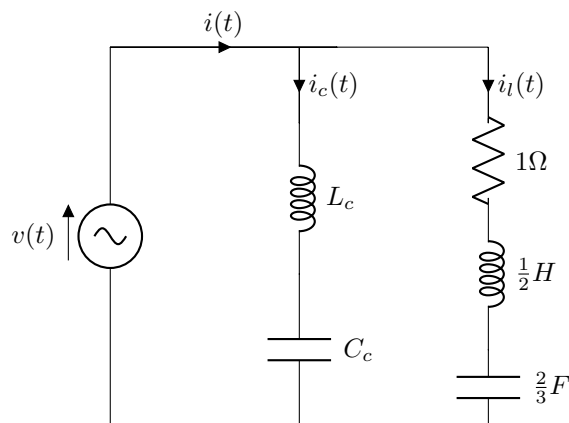
Hoofdstuk 6

Componenten aan het elektrisch netwerk toevoegen bij een in serie geschakeld compenserend gedeelte

De volgende stap in de analyse van mogelijke compenserende gedeeltes die de powerfactor moet verhogen is door de componenten in serie te schakelen. Dit zal waarschijnlijk niet bij alle netwerken even goed werken maar bij een aantal netwerken zal het ook een betere optimale powerfactor geven dan eerder was gevonden met andere methodes.

6.1 Bij netwerk met lineaire componenten

We bekijken vervolgens weer het netwerk met een spanningsbron, weerstand, spoel en condensator die in serie geschakeld zijn. Nu gaan we eerst kijken naar een mogelijke verbetering door op de plaats waar eerst de spoel en condensator parallel geschakeld waren (in het compenserende deel) een spoel en condensator te plaatsen die in serie geschakeld zijn. We moeten dus in onderstaand netwerk de waarden voor L_c , en C_c weer gaan bepalen:



Op dezelfde manier bepalen we de vector voor de stroom I en I_r . Zo volgt er dat de vector

voor de compenserende stroom tegengesteld is aan I_r , oftewel er moet gelden

$$I_c = -I_r = \begin{pmatrix} -25j\sqrt{2} \\ 0 \\ -25\sqrt{2} \\ -25\sqrt{2} \\ 0 \\ 25j\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Als we alleen de tak van de stroom $i_c(t)$ bekijken, dan zien we dat de spanning gelijk is aan som van de spanning over de condensator en de spoel. Dit betekent dat we de volgende differentiaalvergelijking krijgen:

$$v(t) = \frac{1}{C_c} \cdot \int i_c(t) dt + L_c \cdot \frac{di_c(t)}{dt} \implies V = \left(\frac{1}{C_c} W^{-1} + L_c W \right) I_c \implies I_c = \left(\frac{1}{C_c} W^{-1} + L_c W \right)^{-1} V$$

$$\implies I_c = \begin{pmatrix} \frac{-150\sqrt{2}L_c}{C_c L_c 9j - j} \\ 0 \\ \frac{-\sqrt{2}L_c \cdot 50j}{C_c L_c j - j} \\ \frac{-\sqrt{2}L_c \cdot 50j}{C_c L_c j - j} \\ 0 \\ \frac{-150\sqrt{2}L_c}{C_c L_c 9j - j} \end{pmatrix}$$

Als we deze vector voor de compenserende stroomtak vergelijken met de vector I_c die we al hadden, dan vinden we de volgende twee vergelijkingen:

$$\frac{-150\sqrt{2}L_c}{C_c L_c 9j - j} = -25j\sqrt{2}$$

$$\frac{-\sqrt{2}L_c 50j}{C_c L_c j - j} = -25\sqrt{2}$$

Nu moeten we de reële en imaginaire delen van beide vergelijkingen aan elkaar gelijk stellen. Uit de eerste vergelijking vinden we dat:

$$\frac{-150\sqrt{2}L_c}{C_c L_c 9j - j} = \frac{-150\sqrt{2}L_c}{1 - C_c L_c 9} j \implies \frac{150\sqrt{2}L_c}{1 - C_c L_c 9} = 25\sqrt{2} \implies 150L_c = 25 \cdot (1 - 9 \cdot C_c L_c) (*)$$

Uit de tweede vergelijking vinden we:

$$\frac{-\sqrt{2}L_c 50j}{C_c L_c j - j} = -25\sqrt{2} \implies \frac{2L_c j}{C_c L_c j - j} = 1 \implies 2L_c - C_c L_c = -1 \implies L_c = \frac{1}{C_c - 2}$$

Deze waarde voor L_c substitueren in (*) levert de vergelijking:

$$\frac{150}{C_c - 2} = 25 \cdot (1 - 9 \cdot \frac{C_c}{C_c - 2}) \implies C_c = -1 \implies L_c = -\frac{1}{3}$$

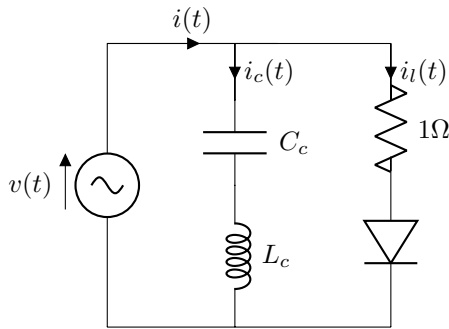
De spoel - en condensatorwaarden zijn altijd verondersteld groter of gelijk aan nul te zijn. Dus moeten we concluderen dat het in serie schakelen van een spoel en condensator (als compenserend deel) voor het verhogen van de powerfactor niet gaat werken in dit circuit met deze spanningsfunctie.

6.2 Bij netwerk met niet-lineaire componenten

We bekijken vervolgens het netwerk met een spanningsbron, diode en weerstand. Het gaat dus om het eerste niet-lineaire netwerk dat aan het begin werd bekeken en waar we al van concludeerden dat de powerfactor gelijk is aan $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Een diode is niet-lineair en frequentieonafhankelijk. De verhouding stroom en spanning heeft voor iedere spanning een verschillende waarde. Deze verhouding is voor alle frequenties gelijk aan elkaar. Vandaar dat de powerfactor verlaagd wordt.

Zie [2] voor meer informatie

Nu gaan we eerst kijken naar een mogelijke verbetering door als compenserend gedeelte een element of een combinatie van elementen toe te voegen (in serie) en te bekijken wat er met de powerfactor gebeurt. Het gaat dan dus om de volgende situatie hieronder waarbij we de (positieve) waarden voor C_c en L_c proberen te bepalen. De spanningsfunctie $v(t)$ wordt gegeven door $v(t) = \sqrt{2} \cdot 100 \cdot (\sin(t) + \cos(3t))$.



Figuur 6.1: Netwerk met diode waarin C_c en L_c bepaald gaan worden

Om de projectiemethode toe te passen, zullen we eerst $i(t)$ moeten schrijven in een fourierreeks. De stroom $i(t)$ is, vanwege de diode die in het netwerk zit, gelijk aan het maximum van $v(t)$ en 0. Er geldt:

$$i(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

waarbij

$$a_0 = \langle i, 1 \rangle = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_0^{2\pi} i(t) dt$$

$$a_n = \frac{\langle i, \cos(nt) \rangle}{\langle \cos(nt), \cos(nt) \rangle} = 2 \cdot \langle i, \cos(nt) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i(t) \cos(nt) dt.$$

$$b_n = \frac{\langle i, \sin(nt) \rangle}{\langle \sin(nt), \sin(nt) \rangle} = 2 \cdot \langle i, \sin(nt) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i(t) \sin(nt) dt.$$

Om die integralen te berekenen, bepalen we daarvoor eerst wanneer $v(t)$ groter of gelijk aan nul is in het interval 0 tot 2π . Met een plotje en de roots-functie in Maple vinden we een exacte oplossing voor de ongelijkheid:

$$v(t) \geq 0 \iff t \in [0, \frac{1}{4}\pi] \cup [\frac{3}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi] \cup [\frac{5}{4}\pi, \frac{11}{8}\pi] \cup [\frac{15}{8}\pi, 2\pi].$$

Dus we integreren $i(t)$ alleen voor waarden van t in bovenstaande intervallen. Dit geldt dan ook voor de integralen bij a_0 , a_n en b_n . De fourierreeks van de functie/signaal $i(t)$ kunnen we zo met

Matlab tot een eindig aantal termen berekenen. Ook nu geldt er weer dat de span van alle oneven orde afgeleides wordt gegeven door $\mathbb{P}_o v(t) = sp\{\cos(t), \sin(3t)\}$. Als we dus $i(t)$ als Fourierreeks gaan projecteren op $\mathbb{P}_o v(t)$, dan vinden we dat $i_r(t) = i_o(t) = a_1 \cdot \cos(t) + b_3 \cdot \sin(3t)$. De stroom $i_e(t)$ vinden we vervolgens door van de benaderde functie voor de stroom de oneven stroom $i_o(t)$ af te halen.

Zoals eerder vinden we de actieve stroom $i_a(t)$ en de scattered stroom $i_s(t)$ met :

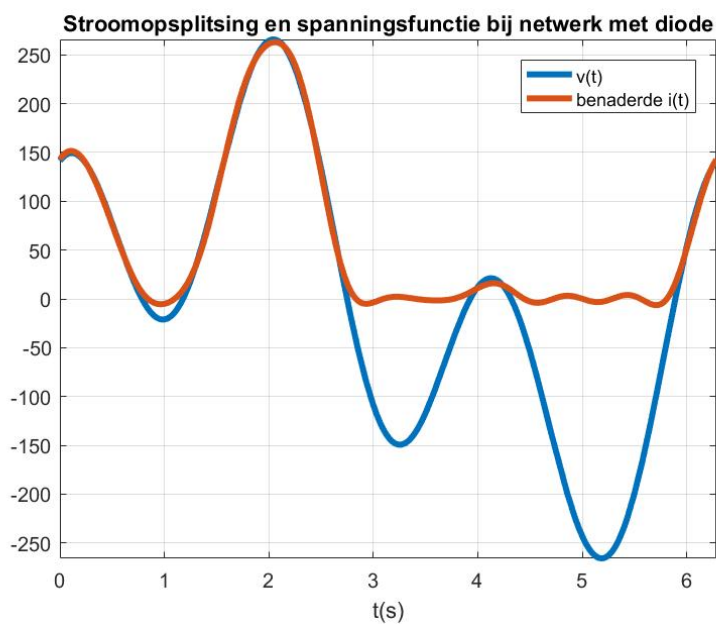
$$i_a(t) = \frac{\langle i_e, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i_e(t) \cdot v(t) dt}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(t) \cdot v(t) dt}$$

$$i_s(t) = i(t) - i_a(t) - i_r(t)$$

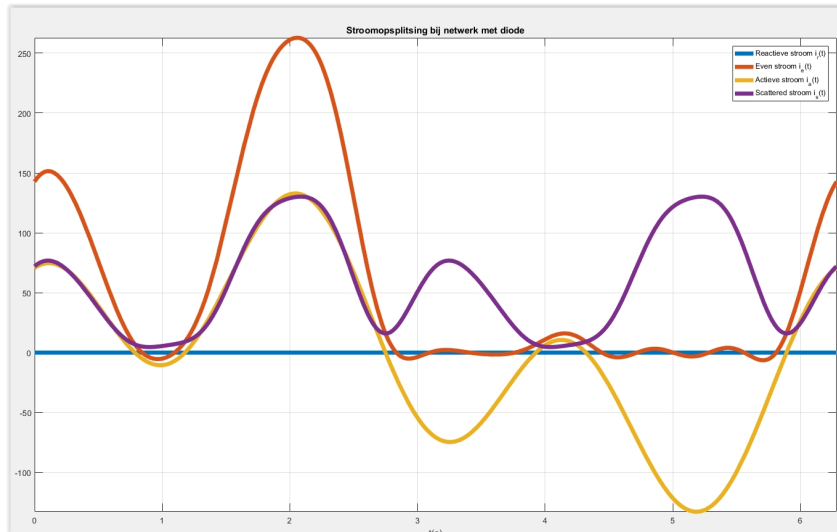
We vinden dat $i_r(t) = i_o(t) = a_1 \cos(t) + b_3 \sin(3t) = 0$. Dit komt, doordat de fouriercoëfficiënten a_1 en b_3 gelijk aan nul zijn.

Hieruit volgt dat de compenerende stroom gegeven wordt door $i_c(t) = -i_r(t) = 0$. Een compenserend gedeelte zal dan ook niet nodig zijn.

Plots waarin de benaderde stroom(werkelijke stroom is $\max(v(t), 0)$) en spanning tegen de tijd zijn uitgezet zien er als volgt uit:

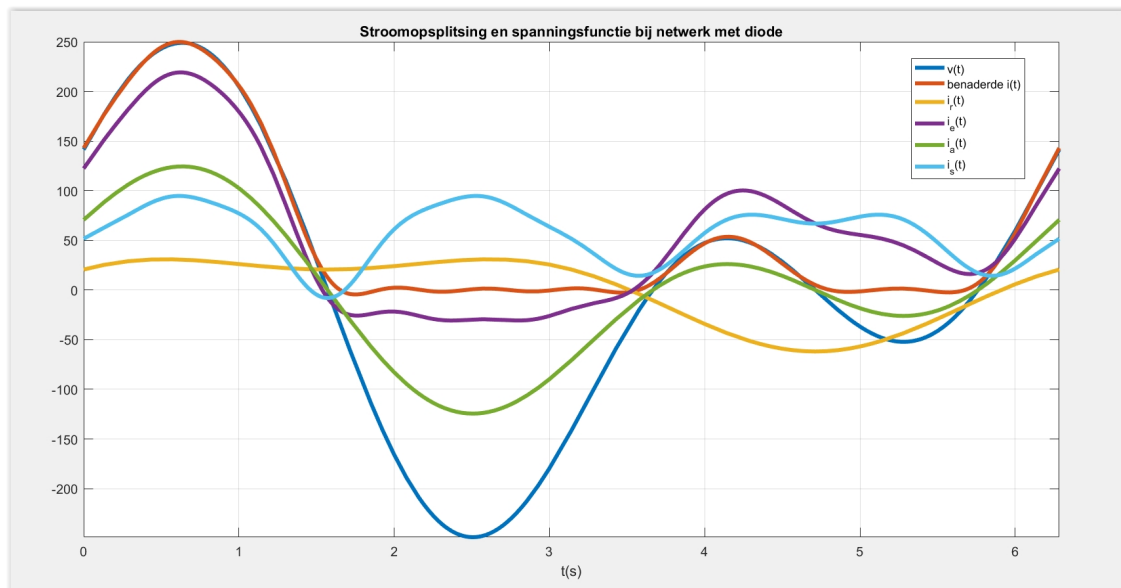


Figuur 6.2: $v(t)$ en benaderde $i(t)$



Figuur 6.3: Soorten stroom waarbij $i(t)$ tot de tiende term in de fourierreeks is benaderd

We zien ook dat de actieve stroom de spanningsfunctie volgt als we figuur 6.3 en figuur 6.2 vergelijken. Veranderen we nu echter de spanningsfunctie door $v(t) = \sqrt{2} \cdot 100 \cdot (\cos(t) + \sin(2t))$, dan vinden we de plot zoals in figuur 6.4 met de vergelijkbare berekeningen voor de stroom:



Figuur 6.4: Soorten stroom bij $v(t) = \sqrt{2} \cdot 100 \cdot (\cos(t) + \sin(2t))$

Nu geldt er alleen dat:

$$i_r(t) = i_o(t) = b_1 \sin t + a_2 \cos(2t)$$

Dus $i_c(t) = -i_r(t) = -b_1 \sin t - a_2 \cos(2t)$ Deze functie substitueren we voor $i(t)$ in onderstaande differentiaalvergelijking:

$$v'(t) = \frac{1}{C_c} i(t) + L_c \cdot i''(t)$$

Als we dit invullen in de differentiaalvergelijking vinden we voor het rechterlid:

$$\sin(t) \cdot \left(L_c - \frac{1}{C_c}\right) \cdot b_1 + \cos(2t) \cdot \left(4 \cdot L_c - \frac{1}{C_c}\right) \cdot a_2$$

Het linkerlid is $v'(t) = 100\sqrt{2} \cdot (-\sin(t) + 2 \cdot \cos(2t))$.

Hieruit volgen de volgende twee vergelijkingen:

$$\begin{aligned} L_c - \frac{1}{C_c} &= \frac{-\sqrt{2} \cdot 100}{b_1} \\ 4 \cdot L_c - \frac{1}{C_c} &= \frac{200 \cdot \sqrt{2}}{a_2} \end{aligned}$$

Vergelijkingen van elkaar afhalen leidt tot:

$$\begin{aligned} L_c &= \frac{-\sqrt{2} \cdot 100}{-3 \cdot b_1} - \frac{200\sqrt{2}}{-3 \cdot a_2} \\ &\implies L_c \approx 5.7063 \\ &\implies C_c \approx 0.0797 \end{aligned}$$

Hiermee kunnen we de reactieve stroom $i_r(t)$ dus volledig mee opheffen. De powerfactor wordt hierdoor verhoogd naar 0.74822 .

Ditzelfde kunnen we niet doen bij een parallel geschakeld compenserend gedeelte. Dit is als volgt in te zien:

We hebben de volgende differentiaalvergelijking (DV):

$$\begin{aligned} i_c(t) &= C_c v'(t) + \frac{1}{L_c} \cdot \int v(t) dt \\ &\implies i'_c = C_c v'' + \frac{1}{L_c} \cdot v(t) \end{aligned}$$

Het linkerlid is gelijk aan:

$$i'_c = -b_1 \cdot \sin(t) + 2 \cdot a_2 \cdot \cos(2t)$$

Het rechterlid is gelijk aan:

$$\begin{aligned} C_c v''(t) + \frac{1}{L_c} \cdot v(t) &= \\ \cos(t) \cdot (-\sqrt{2} \cdot 100 \cdot C_c + \frac{1}{L_c} \cdot \sqrt{2} \cdot 100) &+ \sin(2t) \cdot (-4 \cdot \sqrt{2} \cdot 100 \cdot C_c + \frac{1}{L_c} \cdot \sqrt{2} \cdot 100) \end{aligned}$$

Hieruit volgt het volgende stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} \begin{cases} -\sqrt{2} \cdot 100 \cdot C_c + \frac{1}{L_c} \cdot \sqrt{2} \cdot 100 = -b_1 \\ -4 \cdot \sqrt{2} \cdot 100 C_c + \frac{1}{L_c} \sqrt{2} \cdot 100 = 2 \cdot a_2 \end{cases} \\ \implies \begin{cases} L_c \approx -2.05 \\ C_c \approx -0.19 \end{cases} \end{aligned}$$

Met andere woorden omdat er dan negatieve spoel- en condensatorwaarden nodig zijn, is het niet mogelijk om een parallelschakeling als compenserend gedeelte te gebruiken bij deze spanningsfunctie.

Hoofdstuk 7

Numerieke benadering van de Fourierreeks voor $i(t)$

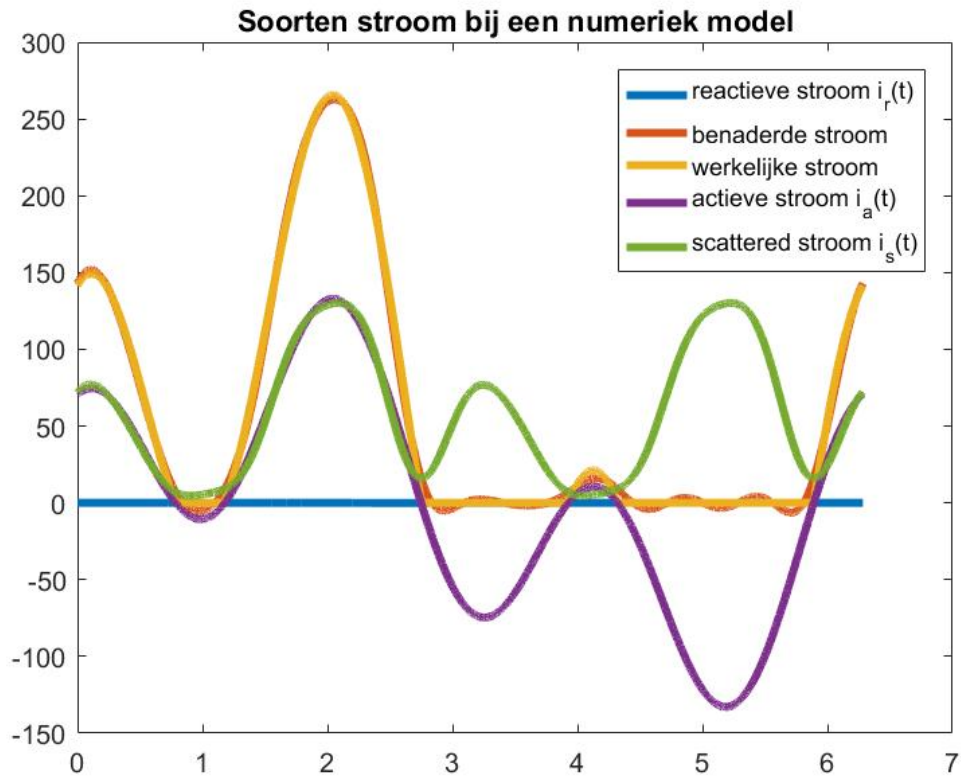
De Fourierreeks voor de stroom $i(t)$ kunnen we ook eenvoudiger bepalen door gebruik te maken van een tijdreeks. Hiermee bepalen we dus met een numerieke methode wat de waardes zijn van de Fourierreeks van de stroom $i(t)$.

De echte waarde van $i(t)$ in het circuit met spanningsbron, weerstand en diode is dan de maximale waarde van $v(t)$ en 0 zoals eerst. Alleen bepalen we nu voor afzonderlijke tijdstippen die waarde van $i(t)$. Dus verkrijgen we een vectoren voor de spanning (voltage) en stroom (realcurrent) die we kunnen plotten ten opzichte van de tijdvector t (waarin alle tijdstappen staan). In het model kunnen we bijvoorbeeld de periode van 2π verdelen in 10001 intervallen. Dus hebben we steeds tijdstappen van $\Delta t = \frac{2 \cdot \pi}{10001}$.

Hiermee worden dus de coëfficiënten van de Fourierreeks van $i(t)$ als volgt bepaald:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} i(t) dt & a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} i(t) \cdot \cos(nt) dt \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \cdot (\Delta t \cdot \sum_j i(j)) & &\approx \frac{1}{\pi} (\Delta t \cdot \sum_j i(j) \cdot \cos(n \cdot t(j))) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{2\pi}{10001} \cdot \sum_j i(j) \right) & &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2\pi}{10001} \cdot \langle i(j), \cos(n \cdot t(j)) \rangle \right) \\ &= \frac{1}{10001} \cdot \langle i, \underline{1} \rangle. & & \end{aligned}$$

Vergelijkbaar volgt er voor b_n dat $b_n \approx \frac{1}{\pi} \left(\frac{2\pi}{10001} \cdot \langle i(j), \sin(n \cdot t(j)) \rangle \right)$. Met deze numerieke methode hoeven we dus ook niet meer de nulpunten te bepalen van de spanningsfunctie. De afwijkingen t.o.v. het werkelijke antwoord (eventuele fouten) zijn erg klein. Het resultaat voor de numerieke benadering met een weerstand van 1Ω en een spanningsfunctie $v(t) = \sqrt{2} \cdot 100 \cdot (\cos(t) + \sin(3 \cdot t))$ is te zien in figuur 7.1.



Figuur 7.1: Functies voor de stroom bij een numeriek model

Merk op dat we bij deze numerieke methode ook orthogonale projecties toe kunnen passen met vectorruimtes. Hierbij komen de coëfficiënten van de Fourierreeks in de vectoren V en I te staan. Nemen we bijvoorbeeld de vector V voor de spanning dan wordt deze als volgt geschreven in zijn Fouriercoëfficiënten:

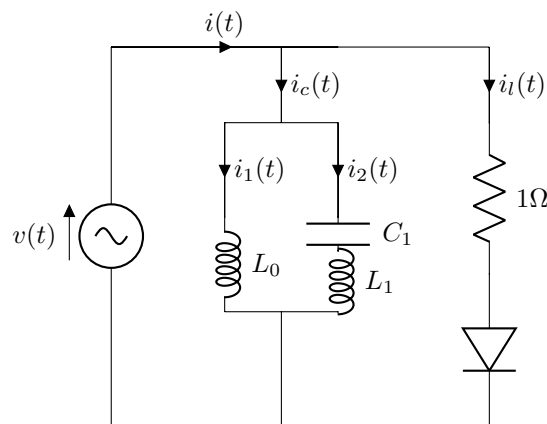
$$V = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} a_n + b_n j \\ a_{n-1} + b_{n-1} j \\ \vdots \\ a_1 + b_1 j \\ a_1 - b_1 j \\ \vdots \\ a_{n-1} - b_{n-1} j \\ a_n - b_n j \end{pmatrix}.$$

Nu verkrijgen we $v(t)$ weer met $e(t) \cdot V$ waarbij $e(t) = (e^{-jnt} \dots e^{jnt})$.

Hoofdstuk 8

Compenserend gedeelte voor spanningsfunctie met drie verschillende frequenties

In hetzelfde netwerk met diode en weerstand kunnen we verder variëren met de spanningsfunctie die we gebruiken bij de spanningsbron. Stel nu dat we een spanningsfunctie nemen met drie frequenties gegeven door $v(t) = \sqrt{2} \cdot 100 \cdot (\sin(t) + \sin(2t) + \sin(3t))$. Ook nu is de stroomfunctie $i(t)$ weer gegeven door het maximum van $v(t)$ en nul. Met de numerieke benadering van zojuist kunnen we snel de bijbehorende fourierreeks bepalen van $i(t)$. Er geldt nu dat de compenserende stroom gelijk is aan: $i_c(t) = -i_r(t) = -i_o(t) = -a_1 \cos t - a_2 \cos(2t) - a_3 \cos(3t)$. Voor het compenserende gedeelte maken we nu gebruik van een spoel L_0 , een spoel L_1 en een condensator C_1 die zijn geschakeld zoals in onderstaande figuur.



Figuur 8.1: Netwerk bij spanningsfunctie van drie frequenties

Hierin hebben we door de bijkomende component een extra vrijheidsgraad. Deze is nodig vanwege de veranderde spanningsfunctie. Met de opsplitsing van de compenserende stroom $i_c(t) = i_1(t) + i_2(t)$ (zie figuur), verkrijgen we de volgende differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} v(t) = \frac{1}{C_1} \int i_1(t) dt + L_1 \cdot i_1'(t) \\ v(t) = L_0 \cdot i_2'(t) \end{cases}$$

Uit de tweede vergelijking volgt nu dat:

$$i_2(t) = \frac{1}{L_0} \cdot \sqrt{2} \cdot 100 \cdot (-\cos(t) - \frac{1}{2} \cos(2t) - \frac{1}{3} \cos(3t))$$

$$\implies$$

$$i_1(t) = i_c(t) - i_2(t) =$$

$$\left(\frac{1}{L_0} \sqrt{2} \cdot 100 - a_1\right) \cdot \cos t + \left(\frac{1}{2 \cdot L_0} \sqrt{2} \cdot 100 - a_2\right) \cos(2t) + \left(\frac{1}{3 \cdot L_0} \sqrt{2} \cdot 100 - a_3\right) \cos(3t)$$

Verder volgt uit de eerste vergelijking (door voor $A, B, C \in \mathbb{R}$ als oplossing $i_1(t) = A \cdot \cos t + B \cdot \cos(2t) + C \cdot \cos(3t)$ te proberen) :

$$i_1(t) = \frac{\sqrt{2} \cdot 100}{-L_1 + \frac{1}{C_1}} \cdot \cos t + \frac{\sqrt{2} \cdot 100}{-2 \cdot L_1 + \frac{1}{2 \cdot C_1}} \cdot \cos(2t) + \frac{\sqrt{2} \cdot 100}{-3 \cdot L_1 + \frac{1}{3 \cdot C_1}} \cdot \cos(3t)$$

De coëfficiënten voor de cosinustermen kunnen we nu gaan vergelijken met de andere vergelijking voor $i_1(t)$. Hieruit volgt dat:

$$\begin{cases} \frac{1}{L_0} \cdot \sqrt{2} \cdot 100 - a_1 = \frac{\sqrt{2} \cdot 100}{-L_1 + \frac{1}{C_1}} \\ \frac{1}{2 \cdot L_0} \cdot \sqrt{2} \cdot 100 - a_2 = \frac{\sqrt{2} \cdot 100}{-2 \cdot L_1 + \frac{1}{2 \cdot C_1}} \\ \frac{1}{3 \cdot L_0} \cdot \sqrt{2} \cdot 100 - a_3 = \frac{\sqrt{2} \cdot 100}{-3 \cdot L_1 + \frac{1}{3 \cdot C_1}} \end{cases}$$

Dit stelsel niet-lineaire vergelijkingen is met Matlab op te lossen waaruit volgt dat:

$$L_0 \approx 3.1596$$

$$L_1 \approx 3.4061$$

$$C_1 \approx 0.0237$$

Als controle bekijken we wat de waarde van de powerfactor is die bij deze spoel- en condensatorwaarden hoort. Hiertoe berekenen we de nieuwe waarde voor de reactieve stroom. Deze bedraagt $i_{r_{new}} = i_r - i_c$. Hiermee verandert ook de waarde voor Q_r . Deze wordt $Q_{r_{new}} = \|i_{r_{new}}\| \cdot \|v\|$. De powerfactor wordt dan : $pf = \frac{P}{\sqrt{S^2 - Q_{r_{new}}^2}} \approx 0.76$. Op zich komt dit aardig in de buurt van de meest optimale powerfactor van 0.7694 die we kunnen behalen in het geval dat de reactieve stroom volledig wordt opgeheven door de compenserende stroom. Hoe groter de orde van de Fourierreeks des te nauwkeuriger de oplossing zal zijn. Een kleine afwijking is dus niet ongewoon en we kunnen concluderen dat de bijbehorende waarden correct zijn.

Hoofdstuk 9

Resultaten

Allereerst is een lineair netwerk bekeken met een weerstand (1Ω), spoel ($\frac{1}{2}\text{H}$) en een condensator ($\frac{2}{3}\text{F}$). De bijbehorende spanningsfunctie is $v(t) = 100\sqrt{2} \cdot (\sin(t) + \cos(3 \cdot t))$. In het oorspronkelijke netwerk vinden we een powerfactor van $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ zonder compensatie. Daarbij vinden we dat de reactieve stroom (in dit netwerk) volledig kan worden opgeheven, want deze is ongelijk aan nul. De afwezigheid van de scattered stroom zorgt ervoor dat we een (verhoogde) en maximale powerfactor van 1 kunnen krijgen. Het compenserend gedeelte kan bestaan uit een parallelschakeling van een spoel met een spoelwaarde L_c van $\frac{4}{3}\text{H}$ en een condensator met een condensatorwaarde C_c van $\frac{1}{4}\text{F}$. Een serieschakeling van een spoel en condensator zal helaas niet gaan werken. Vervolgens hebben we hetzelfde netwerk genomen, maar dan met een condensator met condensatorwaarde van $C_c = \frac{2}{7}\text{F}$. Ook nu is de powerfactor zonder compensatie $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Echter kan de powerfactor nu maar verhoogd worden tot 0.78087 en vinden we nu wel een scattered stroom ongelijk aan nul terug. Ook bij de methode van orthogonale projecties waarbij gerekend wordt met vectorruimtes, vinden we dezelfde resultaten terug.

Vervolgens is er in het bacheloreindproject gekeken naar een netwerk met dezelfde spanningsfunctie, maar nu eentje waarin een weerstand (1Ω) en een diode in serie zijn geschakeld. Hierbij is gevonden dat de powerfactor weer gelijk is aan $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. We vinden hierbij dat de reactieve stroom nul is en dat er geen compensatie nodig/mogelijk is. Als we echter de spanningsfunctie $v(t) = \sqrt{2} \cdot 100 \cdot (\cos(t) + \sin(2t))$ gebruiken, dan vinden we dat de reactieve stroom wel opgeheven kan worden door een serieschakeling van een spoel met een spoelwaarde van $L_c = 5.7063\text{H}$ en een condensator met een condensatorwaarde van $C_c = 0.0797\text{F}$. De powerfactor zal hierbij worden verhoogd naar 0.74822. We merkten tegelijkertijd op dat een parallelschakeling van een spoel en condensator als compenserend gedeelte niet zal werken bij deze spanningsfunctie.

Daarnaast is er nog gekeken naar een netwerk waarin een spanningsbron aanwezig is met een spanningsfunctie die drie frequenties heeft, namelijk $v(t) = 100 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sin(t) + \sin(2t) + \sin(3t))$. Bij dit model hebben we met een numerieke methode de berekeningen uitgevoerd. Door drie componenten toe te voegen (spoel L_1 en condensator C_1 in serie die parallel geschakeld zijn aan een andere spoel L_0) vinden we dat de reactieve stroom i_r kan worden opgeheven door de volgende spoel- en condensatorwaarden te nemen:

$$L_0 \approx 3.1596$$

$$L_1 \approx 3.4061$$

$$C_1 \approx 0.0237$$

Hiermee wordt de reactieve stroom volledig opgeheven en we vinden een verhoogde powerfactor van ongeveer 0.7694.

Hoofdstuk 10

Conclusie en discussie

De powerfactor in het oorspronkelijke netwerk is eenvoudig te berekenen als de spanningsfunctie en stroomfunctie met bepaalde componenten gegeven zijn. De volgende vraag die we hierbij steeds stellen is wat de optimale powerfactor is die we uiteindelijk kunnen verkrijgen door componenten toe te voegen. Door de stroom op te splitsen vinden we die optimaal te verkrijgen powerfactor. Hoe hoger de besproken scattered stroom is, des te kleiner de optimale powerfactor zal zijn. We merken dus op dat deze scattered stroom niet wordt opgeheven. Het doel is uiteindelijk toch om de reactieve stroom op te heffen met een compenserende stroom (als er een reactieve stroom ongelijk aan nul is). Vaak is het op veel verschillende manieren (hoe de componenten geschakeld zijn ten opzichte van elkaar en het oorspronkelijk netwerk) mogelijk die reactieve stroom op te heffen. Uiteindelijk kan de reactieve stroom altijd worden opgeheven mits we maar voldoende componenten hebben. Het vermoeden dat we hebben gekregen in dit Bacheloreindproject is dat het aantal frequenties in de spanningsfuncties gelijk moet zijn aan het aantal componenten in het compenserende gedeelte van het netwerk. Dit geeft de gewenste vrijheidsgraad bij de berekeningen. In de literatuur is nog wel meer bekend over type netwerken zoals de Foster vorm of de Cauer vorm (*Zie [3] voor meer informatie*) waarbij snel de gewenste spoel- en/of condensatorwaarden kunnen worden berekend. Daar ben ik niet zo zeer op ingegaan in deze BEP. Echter kunnen we al vrij snel een idee krijgen of er in het oorspronkelijke netwerk sprake is van een capacitatieve werking (waar we een spoel tegenover zullen moeten plaatsen) of juist van een inductieve werking (waar we een condensator tegenover moeten plaatsen). Bovendien kan er in de computer met een programma als Matlab of Maple snel nagegaan worden welke gevallen wel of juist niet in aanmerking komen voor een compenserend gedeelte. Numerieke methodes zorgen er hierbij voor dat vaak lastige analytische berekeningen onnodig zijn. Ook kan er snel van functieruimtes worden overgegaan op vectorruimtes. Met deze BEP vinden we dus dat apparaten aangepast kunnen worden door te kijken naar de manier waarop ze het netwerk belasten. Zo kunnen we een zo efficiënt mogelijke manier vinden om ze aan te sluiten op het net en zal er een maximale hoeveelheid nuttig/actief vermogen zijn. Tegelijkertijd kunnen we stroommeters zodanig aanpassen dat het scattered gedeelte van de stroom zo min mogelijk wordt betrokken bij de stroommeting, omdat dit eigenlijk niet wordt verbruikt door de klant. Uiteindelijk streeft het energiebedrijf ernaar om een betrouwbare energierekening te kunnen tonen aan zijn klanten.

Hoofdstuk 11

Appendix

```
syms t
V = sqrt (2)*[50; 0 ;50*i ;-50*i; 0; 50]
e = [ exp (-3*i*t), exp (-2*i*t),exp (-i*t),exp (i*t),exp (2*i*t),exp (3*i*t)]
W_fill = [-3*i -2*i -i i 2*i 3*i];
W = diag (W_fill);
syms C3 L3
I_c = inv (C3*W + (1/L3)*inv (W))*V
%% Fourierreeks bepalen voor de stroom i (t)
syms t
v = 100*sqrt (2)* (sin (t) + cos (3*t) );
a_0 = (1/ (2*pi))* ( int (v, t, 0, 0.25*pi) +
int (v, t, (3/8)*pi, (7/8)*pi) + int (v, t, (5/4)*pi, (11/8)*pi)
+ int (v ,t, (15/8)*pi, 2*pi) );
current = a_0;
k = input ('Wat is de orde van de fourierreeks van i (t)? ');
for n = 1:k
a (n) = (1/pi)* ( int (v*cos (n*t), t, 0, 0.25*pi)
+ int (v*cos (n*t), t, (3/8)*pi, (7/8)*pi)
+ int (v*cos (n*t), t, (5/4)*pi, (11/8)*pi) + int (v*cos (n*t), t,
(15/8)*pi, 2*pi) );
b (n) = (1/pi)* ( int (v*sin (n*t), t, 0, 0.25*pi)
+ int (v*sin (n*t), t, (3/8)*pi, (7/8)*pi)
+ int (v*sin (n*t), t, (5/4)*pi, (11/8)*pi) + int (v*sin (n*t), t,
(15/8)*pi, 2*pi) );
current = current + a (n)*cos (n*t) + b (n) * sin (n*t) ;
end
%% Soorten stroom bepalen en plotten
syms t
i_r = a (1)*cos (t) + b (3)*sin (3*t);
i_e = current - i_r;
i_a = (int (i_e*v, t, 0, 2*pi)/int (v*v, t, 0, 2*pi))*v;
i_s = current - i_a - i_r;
realcurrent = zeros (1001);
t2 = 0: (1/500)*pi:2*pi ;
for k = 1: length (t2)
if v1 ( (1/500)*pi* (k-1)) < 0
realcurrent (k) = 0;
else
```

```

realcurrent (k) = v1 ( (1/500)*pi* (k-1));
end
end
%% Plotten

figure;
fplot ( v, [0 2*pi])
hold on
fplot ( current, [ 0 2*pi] )
grid on
legend ('v (t)', 'benaderde i (t)')
title ('Stroomopsplitsing en spanningsfunctie bij netwerk met diode');
xlabel ('t (s)')

figure;
fplot ( i_r, [0 2*pi] )
hold on
fplot ( i_e, [0 2*pi] )
fplot ( i_a, [0 2*pi] )
fplot ( i_s, [0 2*pi] )
grid on
hold off
legend ('i_r (t)', 'i_e (t)', 'i_a (t)', 'i_s (t)');
title ('Stroomopsplitsing bij netwerk met diode');
xlabel ('t (s)')
%% Powerfactor berekenen
norm_v = sqrt ( 1/ (2*pi)* int (v*v, t, 0, 2*pi)) ;
norm_i_a = sqrt ( 1/ (2*pi)* int (i_a*i_a, t, 0, 2*pi));
norm_i_r = sqrt ( 1/ (2*pi)* int (i_r*i_r, t, 0, 2*pi));
norm_i_s = sqrt ( 1/ (2*pi)* int (i_s*i_s, t, 0, 2*pi));
norm_current = sqrt ( 1/ (2*pi)* int (current*current, t, 0, 2*pi));
X2 = ['De norm van i_r (t) is ', num2str (double (norm_i_r)) ];
X3 = ['De norm van i_a (t) is ', num2str (double (norm_i_a)) ];
X4 = ['De norm van i_s (t) is ', num2str (double (norm_i_s)) ];
X5 = ['De norm van de benaderde i (t) is ', num2str (double (norm_current)) ];
P = norm_v*norm_i_a;
Q_r = norm_v*norm_i_r;
Q_s = norm_v*norm_i_s;
S = norm_v*norm_current;
X6 = ['Het actief vermogen is ', num2str (double (P)) ];
X7 = ['Het reactief vermogen Q_r is ', num2str (double (Q_r)) ];
X8 = ['Het scattered vermogen Q_s is ', num2str (double (Q_s))];
X9 = ['Het schijnbaar vermogen S is ', num2str (double (S)) ];
powerfactor = double ( P/ (sqrt (P*P+Q_s*Q_s)) );
powerfactor1 = double ( P/ (sqrt (S*S - Q_r*Q_r)));
%verificatie: powerfactor1 = powerfactor
powerfactor_zonder = P/sqrt (S*S);
X10 = ['De powerfactor zonder compensatie is ',
num2str (double ( powerfactor_zonder)), '.' ];
X = ['De powerfactor in het geval van een volledig compenserend deel
is ', num2str (powerfactor) , '.' ];
disp (X2)
disp (X3)
disp (X4)

```

```

disp (X5)
disp (X6)
disp (X7)
disp (X8)
disp (X9)
disp (X10)
disp (X)

```

```

function y = v1 (t)
y = 100*sqrt (2)* (sin (t) + cos (3*t));
end

```

```

%% Fourierreeks bepalen voor de stroom i (t)
syms t
v = 100*sqrt (2)* (sin (t) + sin (2*t) );
a_0 = (1/ (2*pi))* ( int (v, t, 0, (2/3)*pi) + int (v, t, pi, (4/3)*pi) );
current = a_0;
k = input ('Wat is de orde van de fourierreeks van i (t)? ');
for n = 1:k
a (n) = (1/pi)* ( int (v*cos (n*t), t, 0, (2/3)*pi) +
int (v*cos (n*t), t, pi, (4/3)*pi) );
b (n) = (1/pi)* ( int (v*sin (n*t), t, 0, (2/3)*pi) +
int (v*sin (n*t), t, pi, (4/3)*pi) );
current = current + a (n)*cos (n*t) + b (n) * sin (n*t) ;
end
%% Soorten stroom bepalen en plotten
syms t
i_r = a (1)*cos (t)+a (2)*cos (2*t) ;
i_e = current - i_r;
i_a = (int (i_e*v, t, 0, 2*pi)/int (v*v, t, 0, 2*pi))*v;
i_s = current - i_a - i_r;

%% Plotten

figure
fplot ( v, [0 2*pi])
hold on
%plot (t2, realcurrent )
fplot ( current, [ 0 2*pi] )
fplot ( i_r, [0 2*pi] )
fplot ( i_e, [0 2*pi] )
fplot ( i_a, [0 2*pi] )
fplot ( i_s, [0 2*pi] )
hold off
grid on
legend ('v (t)', 'benaderde i (t)', 'i_r (t)', 'i_e (t)', 'i_a (t)', 'i_s (t)',
'Location', 'southwest');
title ('Stroomopsplitsing en spanningsfunctie bij netwerk met diode');
xlabel ('t (s)')

%% Powerfactor berekenen
norm_v = sqrt ( 1/ (2*pi)* int (v*v, t, 0, 2*pi)) ;
norm_i_a = sqrt ( 1/ (2*pi)* int (i_a*i_a, t, 0, 2*pi));

```

```

norm_i_r = sqrt ( 1/ (2*pi)* int (i_r*i_r , t, 0, 2*pi));
norm_i_s = sqrt ( 1/ (2*pi)* int (i_s*i_s , t, 0, 2*pi));
norm_current = sqrt ( 1/ (2*pi)* int (current*current , t, 0, 2*pi));
X2 = ['De norm van i_r (t) is ' , num2str (double (norm_i_r)) ];
X3 = ['De norm van i_a (t) is ' , num2str (double (norm_i_a)) ];
X4 = ['De norm van i_s (t) is ' , num2str (double (norm_i_s)) ];
X5 = ['De norm van de benaderde i (t) is ' , num2str (double (norm_current)) ];
P = norm_v*norm_i_a;
Q_r = norm_v*norm_i_r;
Q_s = norm_v*norm_i_s;
S = norm_v*norm_current;
X6 = ['Het actief vermogen is ' , num2str (double (P)) ];
X7 = ['Het reactief vermogen Q_r is ' , num2str (double (Q_r)) ];
X8 = ['Het scattered vermogen Q_s is ' , num2str (double (Q_s)) ];
X9 = ['Het schijnbaar vermogen S is ' , num2str (double (S)) ];
powerfactor = double ( P/ (sqrt (P*P+Q_s*Q_s)) );
powerfactor1 = double ( P/ (sqrt (S*S - Q_r*Q_r)));
%verificatie: powerfactor1 = powerfactor
powerfactor_zonder = P/sqrt (S*S);
X10 = ['De powerfactor zonder compensatie is ' ,
num2str (double ( powerfactor_zonder)), '.' ];
X = ['De powerfactor in het geval van een volledig
compenserend deel is ' , num2str (powerfactor) , '.' ];
disp (X2)
disp (X3)
disp (X4)
disp (X5)
disp (X6)
disp (X7)
disp (X8)
disp (X9)
disp (X)

```

```

clear all; close all;
realcurrent = zeros (10001,1);
voltage = zeros (10001,1);
derrivative_voltage = zeros (10001,1) ;
anti_derrivative_voltage = zeros (10001,1);
t2 = 0: (2*pi)/10000:2*pi ;

for k = 1: length (t2)
realcurrent (k) = max ( v1 ( (2*pi/10000)* (k-1)), 0) ;
voltage (k) = v1 ( (2*pi/10000)* (k-1)) ;
derrivative_voltage (k) = v2 ( (2*pi/10000)* (k-1)) ;
anti_derrivative_voltage (k) = v3 ( (2*pi/10000)* (k-1)) ;
end

%% Plotten van spannings- en stroomfunctie
figure;
plot (t2, realcurrent , 'LineWidth', 3 )
hold on
plot (t2, voltage)
%plot (t2, derrivative_voltage)
%plot (t2, anti_derrivative_voltage)

```

```

title ('Numerieke berekening van de stroom i (t) en de spanning v (t)') ;
legend ('Stroom i (t)', 'Spanning v (t)') ;
grid on
hold off
%% De soorten stroom berekenen en afzonderlijk plotten
n = input ('Wat is de orde van de fourierreeks? ');
a = zeros (n,1);
b = zeros (n,1);
a_0= (1/10001)*dot (realcurrent , ones (10001,1));
t2 = 0: (2*pi)/10000 : 2*pi ;
benaderde_current = a_0*ones (10001,1) ;

for k = 1:n
a (k) = (2/10001)*dot (realcurrent , cos (k*transpose (t2)));
b (k) = (2/10001)*dot (realcurrent , sin (k*transpose (t2))) ;
benaderde_current = benaderde_current + a (k).*cos (k*transpose (t2))
+ b (k).*sin (k*transpose (t2)) ;
end
reactieve_stroom = a (1)*cos (transpose (t2)) + b (3)*sin (3*transpose (t2)) ;
actieve_stroom = ( (dot (realcurrent , voltage)) / (dot (voltage , voltage)))
* voltage;
scattered_stroom = benaderde_current - actieve_stroom - reactieve_stroom ;

figure ;
plot (t2, reactieve_stroom) ;
hold on
plot (t2, benaderde_current);
plot (t2, realcurrent);
plot (t2, actieve_stroom);
plot (t2, scattered_stroom) ;
legend ('reactieve stroom i_r (t) ', 'benaderde stroom' , 'werkelijke stroom' ,
'actieve stroom i_a (t)', 'scattered stroom i_s (t) ');
title ('Soorten stroom bij een numeriek model') ;
hold off

%% Normen bepalen
norm_voltage = sqrt ( (1/10001)*dot (voltage ,voltage) );
norm_current = sqrt ( (1/10001)*dot (realcurrent ,realcurrent) );
norm_reactieve_stroom = sqrt ( (1/10001)*dot (reactieve_stroom ,reactieve_stroom) );
norm_actieve_stroom = sqrt ( (1/10001)*dot (actieve_stroom ,actieve_stroom) );
norm_scattered_stroom = sqrt ( (1/10001)*dot (scattered_stroom , scattered_stroom) );

P = norm (actieve_stroom)*norm (voltage) ;
Q_r = norm (reactieve_stroom)*norm (voltage) ;
Q_s = norm (scattered_stroom)*norm (voltage) ;
S = norm (voltage)*norm (realcurrent) ;

X = [ 'De powerfactor in het oorspronkelijke netwerk is ' , num2str (P/abs (S) ) ];
X2 = [ 'De norm van de stroom is ' , num2str (norm_current) ];
X3 = [ 'De norm van de spanning is ' , num2str (norm_voltage) ];
X4 = [ 'De norm van de actieve stroom is ' , num2str (norm_actieve_stroom) ];
X5 = [ 'De norm van de reactieve stroom is ' , num2str (norm_reactieve_stroom) ];
X6 = [ 'De norm van de scattered stroom is ' , num2str (norm_scattered_stroom) ];
X7 = [ 'De optimale powerfactor in een verbeterd netwerk is '

```

```

    , num2str ( P / sqrt ( S^2 - Q_r^2 ) ) ];
X8 = [ 'Verificatie powerfactor: ' , num2str ( P / sqrt ( P^2 + Q_s^2 ) ) ];
disp (X)
disp (X2)
disp (X3)
disp (X4) disp (X5) disp (X6) disp (X7) disp (X8)

```

```

function y = v2 (t)
y = 100*sqrt (2)* (cos (t) -3*sin (3*t));
end

```

```

function y = v3 (t)
y = 100*sqrt (2)* (-cos (t) + (1/3)*sin (3*t));
end

```

```

function y = v5 (t)
y = 100*sqrt (2)* (sin (t) +sin (2*t) + sin (3*t) );
end

```

```

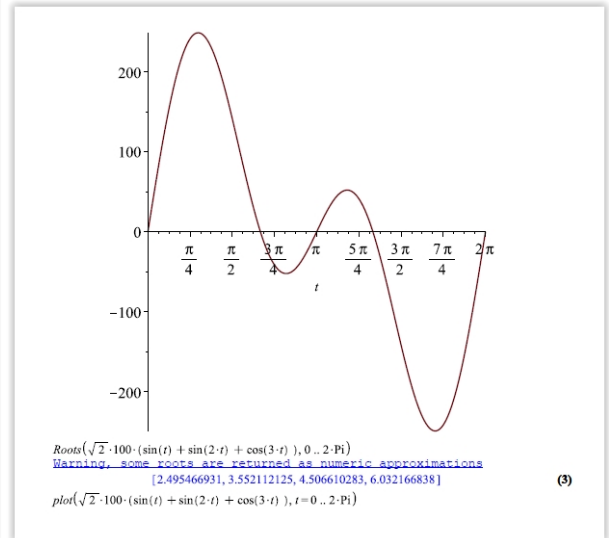
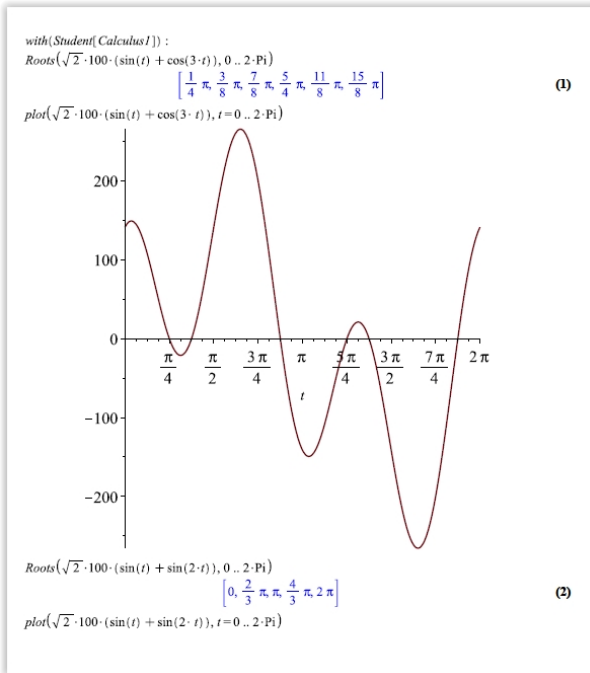
function F = root3d (x)
F (1) = 1/x (1) - 1/ (-x (1)+ (1/x (3))) - 58.1396/ (sqrt (2)*100) ;
F (2) = 1/ (2*x (1)) - 1/ (-2*x (2)+0.5* (1/x (3))) - 17.6294/ (sqrt (2)*100);
F (3) = 1/ (3*x (1)) - 1/ (-3*x (2)+ (1/3)* (1/x (3))) + 31.1328/ (sqrt (2)*100) ;
end

```

```

% x1 = L0 , x2 = L1, x3 = C1

```

Voorbeeld waarin de methode met orthogonale projectie wordt toegepast:

with(linalg): with(LinearAlgebra):
 e := t -> [exp(-3*I*t) exp(-2*I*t) exp(-I*t) exp(I*t) exp(2*I*t) exp(3*I*t)];
 t -> rtable(1..6, [e^{-3It}, e^{-2It}, e^{-It}, e^{It}, e^{2It}, e^{3It}], subtype = Vector[linalg-row])

(1)

$$V := \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 50 \cdot I \\ -50 \cdot I \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix};$$

$$W := \text{diag}(-3 \cdot I, -2 \cdot I, -I, I, 2 \cdot I, 3 \cdot I);$$

$$R := 1 : C := \frac{2}{3} : L := \frac{1}{2};$$

$$\text{Current} := \text{inverse} \left(R \cdot \text{IdentityMatrix}(6) + L \cdot W + \frac{1}{C} \cdot \text{inverse}(W) \right) \cdot V;$$

Eerst vinden we I_r door I te projecteren op het vlak dat wordt opgespannen door WV en $\text{inverse}(W)V$:

$$\text{field} := \begin{pmatrix} -150 \cdot I \cdot \sqrt{2} & \frac{50}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot I \\ 0 & 0 \\ 50 \sqrt{2} & -50 \sqrt{2} \\ 50 \sqrt{2} & -50 \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 150 \cdot I \cdot \sqrt{2} & -\frac{50}{3} \cdot I \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -150 \cdot I \cdot \sqrt{2} & \frac{50}{3} \cdot I \cdot \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 50 \sqrt{2} & -50 \sqrt{2} \\ 50 \sqrt{2} & -50 \sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 150 \cdot I \cdot \sqrt{2} & -\frac{50}{3} \cdot I \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Step1} := \text{nullspace}(\text{transpose}(\text{field}))$$

$$\left[\left[0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \right], \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \right], \left[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right], \left[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \right] \right]$$

(3)

$$\text{Step2} := \begin{pmatrix} -150 \cdot I \cdot \sqrt{2} & \frac{50}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot I & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 50 \sqrt{2} & -50 \sqrt{2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 50 \sqrt{2} & -50 \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 150 \cdot I \cdot \sqrt{2} & -\frac{50}{3} \cdot I \cdot \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -150 \cdot I \cdot \sqrt{2} & \frac{50}{3} \cdot I \cdot \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 50 \sqrt{2} & -50 \sqrt{2} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 50 \sqrt{2} & -50 \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 150 \cdot I \cdot \sqrt{2} & -\frac{50}{3} \cdot I \cdot \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{LinearSolve}(\text{Step2}, \text{Current})$$

(4)

$$I_r := \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ -25\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 25\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$I_r := \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot W \cdot V + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \text{inverse}(W) \cdot V$$

$$I_a := \begin{pmatrix} 25\sqrt{2} \\ 0 \\ 25\sqrt{2} \\ 25\sqrt{2} \\ 0 \\ -25\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Vervolgens vinden we I_a door I te projecteren op V :

$$I_a := \frac{\text{DotProduct}(\text{Current}, V)}{\text{DotProduct}(V, V)} \cdot V$$

$$I_a := \begin{pmatrix} 25\sqrt{2} \\ 0 \\ 25\sqrt{2} \\ -25\sqrt{2} \\ 0 \\ 25\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (7)$$

I_s vinden we door de oplossing van de soorten stroom:

$$I_s := \text{Current} - I_a - I_r$$

$$I_s := \begin{pmatrix} 151\sqrt{2} \\ 0 \\ 15\sqrt{2} \\ 15\sqrt{2} \\ 0 \\ -151\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Vervolgens vinden we I_{a2} door $I2$ te projecteren op V :

$$I_{a2} := \frac{\text{DotProduct}(\text{Current2}, V)}{\text{DotProduct}(V, V)} \cdot V$$

$$I_{a2} := \begin{pmatrix} 25\sqrt{2} \\ 0 \\ 25\sqrt{2} \\ -25\sqrt{2} \\ 0 \\ 25\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

I_{s2} vinden we door de oplossing van de soorten stroom:

$$I_{s2} := \text{simplify}(\text{Current2} - I_{a2} - I_{r2})$$

$$I_{s2} := \begin{pmatrix} 20\sqrt{2} \\ 0 \\ -201\sqrt{2} \\ 201\sqrt{2} \\ 0 \\ 20\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\text{Norm}_V := \sqrt{V \cdot V} \quad (18)$$

$$\text{Norm}_{\text{Current2}} := \sqrt{\text{Current2} \cdot \text{Current2}} \quad (19)$$

$$\text{Norm}_{I_{r2}} := \sqrt{I_{r2} \cdot I_{r2}} \quad (20)$$

$$\text{Norm}_{I_{a2}} := \sqrt{I_{a2} \cdot I_{a2}} \quad (20)$$

$$I_s := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\text{Norm}_V := \sqrt{V \cdot V} \quad (9)$$

$$\text{Norm}_{\text{Current}} := \sqrt{\text{Current} \cdot \text{Current}} \quad (10)$$

$$\text{Norm}_{I_r} := \sqrt{I_r \cdot I_r} \quad (11)$$

$$\text{Norm}_{I_a} := \sqrt{I_a \cdot I_a} \quad (12)$$

$$\text{Norm}_{I_s} := \sqrt{I_s \cdot I_s} \quad (13)$$

Nu voor het tweede netwerk :

$$R2 := 1; C2 := \frac{2}{7}; L2 := \frac{1}{2};$$

$$\text{Current2} := \text{inverse}\left(R2 \cdot \text{IdentityMatrix}(6) + L2 \cdot W + \frac{1}{C2} \cdot \text{inverse}(W)\right) \cdot V;$$

Eerst vinden we I_{r2} door $I2$ te projecteren op het vlak dat wordt opgespannen door WV en $\text{inverse}(W)V$:

$$\text{LinearSolve}(\text{Step2}, \text{Current2})$$

$$I_{r2} := \begin{pmatrix} -\frac{3}{20} \\ -\frac{9}{20} \\ -51\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 45\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$I_{r2} := -\frac{3}{20} \cdot W \cdot V - \frac{9}{20} \cdot \text{inverse}(W) \cdot V$$

$$\text{Norm}_{I_{s2}} := \text{simplify}(\sqrt{I_{s2} \cdot I_{s2}}) \quad (21)$$

$$\text{Norm}_{I_{s2}} := 40\sqrt{2} \quad (22)$$

Bibliografie

- [1] *Deel energiemeters onbetrouwbaar*, 29-03-17, Available from:http://binnenland.eenvandaag.nl/tv-items/72489/deel_energiemeters_onbetrouwbaar, [Accessed: 29-03-17]
- [2] *Enkelzijdige gelijkrichter*, 13-05-17, Available from: <https://www.circuitsonline.net/forum/view/message/1896145>, [Accessed: 31-05-17]
- [3] Wadhwa, C.L. (2008) *Network Analysis And Synthesis. Including Linear System Analysis*. Delft: TU Delft Library
- [4] Woude, J. van der, Jeltsema, D. (2014), '*An Orthogonal Projection Method for Computing Active, Reactive and Scattered Power and its Application to Compensator Design*', 21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, pp. 429 - 436
- [5] *Guide: How to cite a Website in Harvard Reference format*, 31-05-2017, <http://www.citethisforme.com/guides/harvard7de/how-to-cite-a-website>, [Accessed: 31-05-17]

Zie [5] voor meer informatie