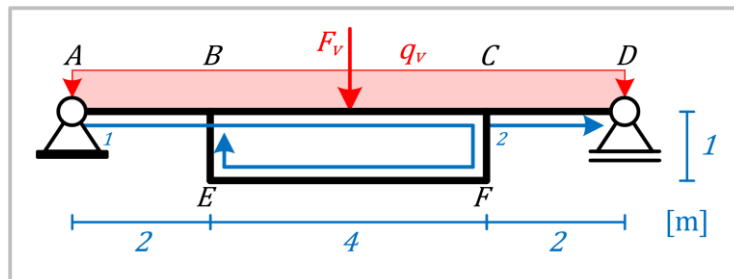
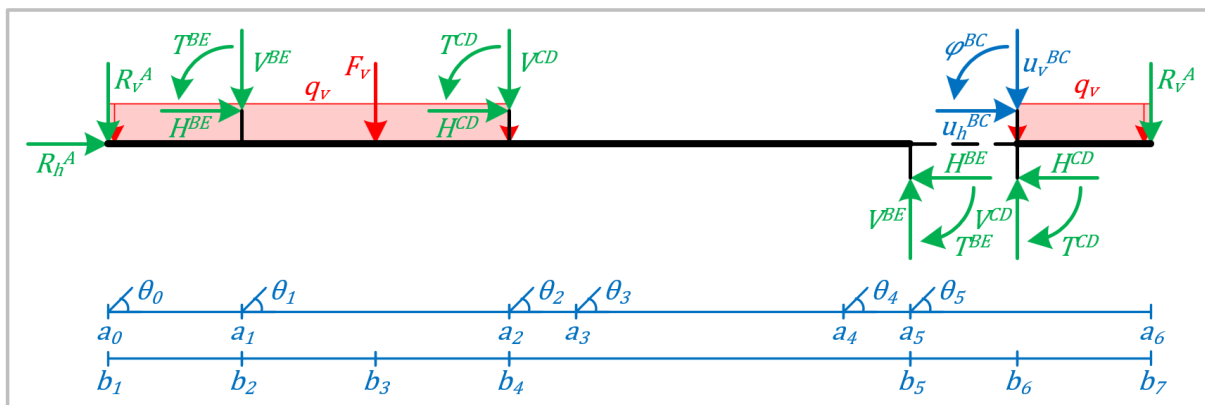


“Continue Macaulay methode voor geknikte, vertakte en gesloten constructies”

Bachelor Eindproject



figuur 1: Meermaals vertakte ingeklemde constructie.



figuur 2: overzichtsschema behorende bij de constructie in figuur 1.

A.J.D. Baudoin

Technische Universiteit Delft

Faculteit Civiele Techniek

[24-6-2024]

Auteur: A.J.D. Baudoin
Studienummer: 5278805
1^e begeleider: Ir. T.R. van Woudenberg
2^e begeleider: Ir. P. C. J. Hoogenboom

I. Voorwoord

Dit verslag heb ik geschreven als opdracht voor het bachelor eindproject van de faculteit Civiele Techniek & Geowetenschappen aan de Technische Universiteit Delft. Het onderzoek betreft de toepassing van de Macaulay methode voor geknikte, vertakte en gesloten constructies. Om de inhoud van het verslag te kunnen begrijpen is een gevorderde kennis van de constructie mechanica, analyse, lineaire algebra en differentiaalvergelijkingen vereist. Voor het uitvoeren van het onderzoek was verder ook een ontwikkeld begrip van python vereist.

Ik wil graag mijn begeleiders T.R. van Woudenberg en P.C.J. Hoogenboom bedanken voor het ondersteunen van het onderzoek d.m.v. wekelijkse feedback-sessies en het informeren over de ontwikkelingen rond de sympy package, die tijdens het onderzoek hevig gebruikt werd voor het testen van het model . Ook wil ik medestudent M. Van Gelder bedanken voor het bewerkstelligen van deze ontwikkelingen. Tot slot weel ik veel lof geven aan Van der Wulp (2023), wiens perquisitie veel heeft geholpen in de beginfase van het onderzoek.

II. Samenvatting

In dit rapport wordt uitgelegd hoe de Macaulay methode kan worden uitgebreid zodat het toepasbaar is op geknikte, vertakte en gesloten constructies, inclusief gescharnierde. Het model is robuust, systematisch toepasbaar, kan de snedekrachten en globale verplaatsingen op elk punt berekenen en de oplossingsvoorwaarden zijn eenvoudiger en geringer in aantal in vergelijking met de directe integratie methode.

Het model maakt gebruik van een globaal en een lokaal assenstelsel ((h, v) en (x, z)). In figuur 1 wordt het verloop van het lokaal assenstelsel aangegeven met de nummering van de blauwe pijlen. De belastingen en de verplaatsingen worden globaal genoteerd en de snedekracht diagrammen lokaal. Er zijn twee vergelijkingen die de lokale as volgen. $q_z(x)$ is voor de krachten loodrecht op de staaf en integreert naar de dwarskrachtenvergelijking, enz. en $q_x(x)$ is voor de krachten parallel aan de staaf en integreert naar de normaalkrachtenvergelijking, enz.

De belastingen worden in 2D anders gemodelleerd dan in 1D. Er wordt in het model onderscheid gemaakt tussen een koppel (T), verticale en horizontale puntlast (F_v en F_h), verticale en horizontale gelijkmatig verdeelde belasting (q_v en q_h) en scharnier ($EI\varphi_s$). De vergelijking voor elke belasting is anders voor $q_z(x)$ en $q_x(x)$ en bestaan telkens uit een beginterm (b) voor het aangrijppunt van de belasting en een systematische reeks hoektermen (a_i) voor elke hoek (θ_i) waar de functie van x langs gaat na het aangrijppunt van de belasting. De vergelijkingen zijn als volgt:

koppel

$$q_z(x) = T\langle x - b \rangle^{-2} \quad (1)$$

$$q_x(x) = 0 \quad (2)$$

Verticale Puntlast

$$q_z(x) = F_v(\langle x - b \rangle^{-1} \cos(\theta_b) + \sum(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) ; \text{ voor } a_i > b \quad (3)$$

$$q_x(x) = -F_v(\langle x - b \rangle^{-1} \sin(\theta_b) + \sum(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) ; \text{ voor } a_i > b \quad (4)$$

Horizontale puntlast

$$q_z(x) = F_h(\langle x - b \rangle^{-1} \sin(\theta_b) + \sum(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) ; \text{ voor } a_i > b \quad (5)$$

$$q_x(x) = F_h(\langle x - b \rangle^{-1} \cos(\theta_b) + \sum(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) ; \text{ voor } a_i > b \quad (6)$$

Verticale Gelijkmatig Verdeelde Belasting

$$q_z(x) = q_v \left(\langle x - b \rangle^0 \cos(\theta_b) + \sum \left((\langle x - a_i \rangle^0 + \langle x - a_i \rangle^{-1}(a_i - b))(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})) \right) \right) ; \text{ voor } a_i > b \quad (7)$$

$$q_x(x) = -q_v \left(\langle x - b \rangle^0 \sin(\theta_b) + \sum \left((\langle x - a_i \rangle^0 + \langle x - a_i \rangle^{-1}(a_i - b))(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})) \right) \right) ; \text{ voor } a_i > b \quad (8)$$

Horizontaal Gelijkmatig Verdeelde Belasting

$$q_z(x) = q_h \left(\langle x - b \rangle^0 \sin(\theta_b) + \sum \left((\langle x - a_i \rangle^0 + \langle x - a_i \rangle^{-1}(a_i - b))(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})) \right) \right) ; \text{ voor } a_i > b \quad (9)$$

$$q_x(x) = q_h \left(\langle x - b \rangle^0 \cos(\theta_b) + \sum \left((\langle x - a_i \rangle^0 + \langle x - a_i \rangle^{-1}(a_i - b))(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})) \right) \right) ; \text{ voor } a_i > b \quad (10)$$

Scharnier

$$q_z(x) = EI\varphi_s \langle x - b \rangle^{-3} \quad (11)$$

$$q_x(x) = 0 \quad (12)$$

De doorbuiging ($u_z(x)$) en extensie ($u_x(x)$) zijn voor tweedimensionale constructies hele abstracte termen die niet bruikbaar zijn voor de oplossingsvoorwaarden. Daarom moeten ze worden gebruikt als invoer voor de vergelijkingen van de horizontale en verticale verplaatsing van de constructie ($u_h(x)$ en $u_v(x)$). Deze vergelijkingen zijn als volgt:

$$u_v(x) = u_z(a_0) \cos(\theta_0) - u_x(a_0) \sin(\theta_0) + \sum_{i=0}^{i=n} \begin{pmatrix} \left((u_z(x) - u_z(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 - (u_z(x) - u_z(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0 \right) \cos(\theta_i) \\ - \left((u_x(x) - u_x(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 - (u_x(x) - u_x(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0 \right) \sin(\theta_i) \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$u_h(x) = u_z(a_0) \sin(\theta_0) + u_x(a_0) \cos(\theta_0) + \sum_{i=0}^{i=n} \begin{pmatrix} \left((u_z(x) - u_z(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 - (u_z(x) - u_z(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0 \right) \sin(\theta_i) \\ + \left((u_x(x) - u_x(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 - (u_x(x) - u_x(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0 \right) \cos(\theta_i) \end{pmatrix} \quad (14)$$

Hierbij is a_i het beginpunt, a_j het eindpunt en θ_i de hoek van staaf ij .

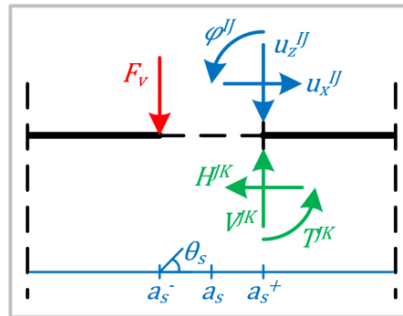
Voor vertakte en gesloten constructies bestaan er drie bijzondere punten met unieke eigenschappen. Dit zijn het knooppunt (a_k), sprongpunt (a_s) en aansluitpunt (a_a).

Het knooppunt is het punt waarbij de functie van x voor het eerst langs een knoop gaat. Op a_k moet voor elke staaf IJ waarnaar de functie niet direct de weg vervolgd drie onbekende krachten worden toegevoegd V^{IJ} , H^{IJ} en T^{IJ} . Hierin vertegenwoordigd V^{IJ} de verticale kracht, H^{IJ} de horizontale kracht en T^{IJ} de koppel voortkomend uit staaf IJ werkend op knoop I .

Het sprongpunt, (zie figuur 3) is het punt waar de functie van x in het globale assenstelsel een sprong maakt van punt I , wat een uiteinde of afsluiting is van een vertakking, naar punt J , wat een knoopverbinding is waar de functie van x al eerder langs is geweest. Belastingen werkende op punt I moeten gemodelleerd worden op a_s^- en op punt J op a_s^+ . Op a_s^+ moeten ook de onbekende krachten $-V^{JK}$, $-H^{JK}$ en $-T^{JK}$ worden toegevoegd voor staaf JK waarnaar de functie na de sprong de weg vervolgd. Verder moeten op a_s^+ de sprongconstanten φ^{IJ} , u_z^{IJ} en u_x^{IJ} toegevoegd worden voor de sprong in vervormingen tussen punt I en J . Deze worden als volgt gemodelleerd:

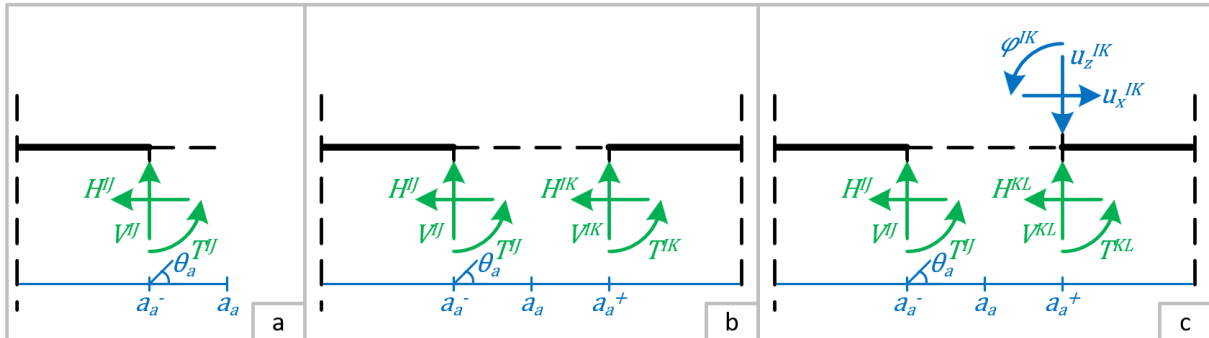
$$q_z(x) = EI\varphi^{ij} \langle x - a_s^+ \rangle^{-3} + EIu_z^{ij} \langle x - a_s^+ \rangle^{-4} \quad (15)$$

$$q_x(x) = EAu_x^{ij} \langle x - a_s^+ \rangle^{-2} \quad (16)$$



figuur 3: modelleren van een sprongpunt.

Het aansluitpunt is het punt waarbij de functie van x opnieuw langs een knoop gaat. Op a_a^- moeten de drie onbekende krachten $-V^{IJ}$, $-H^{IJ}$ en $-T^{IJ}$ voor de staaf IJ dat aansluit op punt I . Het aansluitpunt kan het einde zijn van de functie, maar de functie kan ook direct de weg vervolgen of een sprong maken. Het verschil in modelleren is te zien in figuur 4.



figuur 4: Modelleren van een aansluitpunt als het ook het eindpunt is (a), als de functie erna direct vervolgd (b) of het als het ook een sprongpunt is (c).

In Tabel 1 wordt voorgeschreven welke oplossingsvoorwaarden gelden voor starre tweedimensionale constructies als lokale afstand a_i de benoemde eigenschap heeft. Afstand a_i kan meerdere eigenschappen tegelijk hebben. Hierbij is a_k het knooppunt waarbij de functie voor het eerst langs dezelfde knoop komt als afstand a_i of a_i^+ .

Tabel 1: Oplossingsvoorwaarden voor tweedimensionale starre constructies.

a_i	Oplossingsvoorwaarden	a_i	Oplossingsvoorwaarden
Lokaal beginpunt	$N(a_i^-) = 0$ $V(a_i^-) = 0$ $M(a_i^-) = 0$	Scharnierverbinding	$M(a_i) = 0$
		Verticale roloplegging	$u_v(a_i) = 0$
		Horizontale roloplegging	$u_h(a_i) = 0$
Lokaal eindpunt	$N(a_i) = 0$ $V(a_i) = 0$ $M(a_i) = 0$	Scharnieroplegging	$u_v(a_i) = 0$ $u_h(a_i) = 0$
Globaal eindpunt / sprongpunt (Vertakte constructie)	Zie lokaal eindpunt + $\varphi(a_i^+) - \varphi(a_k) = 0$ $u_v(a_i^+) - u_v(a_k) = 0$ $u_h(a_i^+) - u_h(a_k) = 0$	Inklemming	$\varphi(a_i) = 0$ $u_v(a_i) = 0$ $u_h(a_i) = 0$
Aansluitpunt (Gesloten constructie)	Zie lokaal eindpunt + $\varphi(a_i) - \varphi(a_k) = 0$ $u_v(a_i) - u_v(a_k) = 0$ $u_h(a_i) - u_h(a_k) = 0$		

Een staaf JK kan ook scharnierend verbonden zijn aan een knoop. Het modelleren ervan verschilt voor een knoop-, sprong en aansluitpunt. In Tabel 2 staat een overzicht van welke onbekenden en voorwaarden moeten worden toegevoegd en/of wegelaten voor elke situatie t.o.v. een star verbonden staaf. Als alle staven scharnieren verbonden zijn in de knoop, dan moet voor n staven $n - 1$ staven een scharnierverbinding worden gemodelleerd in de knoop.

Tabel 2: Modelleren van een scharnierende knoopverbinding. * het punt is zowel een aansluitpunt als een eind- of sprongpunt.

scharnierverbinding	onbekenden		voorwaarden	
	toevoegen	weglaten	toevoegen	weglaten
Net voor knooppunt (a_k^-)	φ_s		$M(a_k^-) = 0$	
Net na knooppunt (a_k^+)	φ_s		$M(a_k^+) = 0$	
Net na sprongpunt (a_s^+)	φ_s^{IJ}	φ^{IJ} T^{JK}		$\varphi(a_s^+) - \varphi(a_k) = 0$
Net voor aansluitpunt (a_a^-) + eind- of sprongpunt*		T^{JK}		$\varphi(a_a) - \varphi(a_k) = 0$
Net voor aansluitpunt (a_a^-)	φ_s	T^{JK}		
Net na aansluitpunt (a_a^+)	φ_s	T^{JK}		

Inhoud

I.	Voorwoord.....	3
II.	Samenvatting.....	4
1.	Inleiding.....	9
2.	De Macaulay Methode	10
2.1	Euler-Bernoulli.....	10
2.2	De Singulariteitsfuncties	11
2.3	Modelleren van Belastingen en Verbindingen.....	11
2.4	Oplossingsvoorwaarden.....	13
3.	Continue Macaulay Methode Geknikte Constructies.....	14
3.1	Motivatie	14
3.2	Assenstelsels	15
3.3	Modelleren van de Belastingen en Scharnieren	16
3.4	Verplaatsingen in Globaal Assenstelsel.....	21
4.	Continue Macaulay Methode voor Vertakte en Gesloten Constructies.....	25
4.1	Modelleren van een Knooppunt	25
4.2	Modelleren van een Sprongpunt	26
4.3	Modelleren van een Aansluitpunt	29
4.4	Modelleren van een Gescharnierde Knooppuntverbinding	31
5.	Conclusie	34
6.	Discussie	38
	Verwijzingen	39
	Bijlage A – Uitwerkingen van de Voorbeelden	40
	Bijlage B – Intermezzo modellering belastingen	72
	Bijlage C – Retour Methode.....	74

1. Inleiding

Binnen de Constructiemechanica bestaan er meerdere methodes om de snedekrachten en vervormingen van een constructie te berekenen. Eén van deze methodes heet de Macaulay methode. De Macaulay methode heeft veel overeenkomsten met de directe integratiemethode. Beide methodes zijn gebaseerd op de balken theorie van Euler-Bernouilli die het analytische verband beschrijft tussen de verdeelde belasting, dwarskracht, buigend moment, kromme, hoekverdraaiing en doorbuiging (Todd, 1981). Het verschil is dat de Macaulay methode verder ook gebruik maakt van de singulariteitsfuncties. Dit zijn functies die pas worden geactiveerd zodra x een vooraf ingestelde waarde passeert. M.b.v. de singulariteitsfuncties kan de Macaulay methode als één enkele continue vergelijking worden opgeschreven. Dit is in contrast met de directe integratiemethode die bestaat uit meerdere vergelijkingen die d.m.v. continuïteitsvoorwaarden aan elkaar gesynchroniseerd moeten worden. Als gevolg hoeven er voor de Macaulay methode alleen maar rand- en vervormingsvoorwaarden worden gesteld en geen overgangsvorwaarden, wat zorgt voor minder benodigde oplosvergelijkingen dan de directe integratie methode.

Historisch is de Macaulay methode alleen toepasbaar op Euler-Bernouilli liggers met een constante buigstijfheid in een 1D stelsel. Sinds 2023 is er echter een initiatief gestart om de Macaulay methode uit te breiden zodat het ook toepasbaar is voor in andere situaties en voor andere doeleinden. Zo is er geanalyseerd hoe de Macaulay methode kan worden toegepast voor het bepalen van de normaalkracht, 1D liggers met veerverbindingen en -opleggingen, 2D-constructies zonder vertakkingen, zoals portalen, het bepalen van invloedslijnen voor 1D en 2D constructies zonder vertakkingen en is er een poging gemaakt voor liggers met een kromme. De hoofdvraag van dit rapport luidt:

“Hoe kan de Macaulay methode worden uitgebreid zodat het ook kan worden toegepast voor geknikte, vertakte en gesloten constructies?”

Om deze vraag te beantwoorden zal het verslag als volgt worden onderverdeeld. Als eerst zal in Hoofdstuk 2 beknopt worden uitgelegd hoe de Macaulay methode voor eendimensionale constructies en de relevante extensies werkt. Vervolgens zal er in hoofdstuk 3 een uitbreiding van de Macaulay methode worden omschreven voor geknikte constructies. Daarna zal in hoofdstuk 4 de theorie achter de uitbreiding worden aangevuld zodat het ook toepasbaar is voor vertakte constructies en gesloten constructies. In hoofdstuk 5 volgt vervolgens de conclusie. Tot slot volgt in hoofdstuk 7 een discussie met aanbevelingen voor mogelijke vervolgonderzoeken.

2. De Macaulay Methode

In dit hoofdstuk wordt de benodigde voorkennis over de Macaulay methode samengevat. In paragraaf 2.1 worden de vergelijking voor doorbuiging en extensie, die de basis van de Macaulay methode vormen, afgeleid. In paragraaf 2.2 wordt uitgelegd hoe de singulariteitsfuncties werken. Daarna wordt in paragraaf 2.3 uitgelegd hoe de krachten gemodelleerd kunnen worden. Tot slot wordt in paragraaf 2.4 uitgelegd hoeveel oplossingsvoorwaarden er voor een constructie nodig zijn en hoe ze gevonden kunnen worden.

Gedurende dit gehele hoofdstuk wordt er gerefereerd naar het werk van Van der Wulp (2023) en wordt er hevig gebruik gemaakt van citaties en parafraseringen.

2.1 Euler-Bernoulli

Ten grondslag van de methode van Macaulay liggen de differentiaalvergelijking voor buiging en extensie afkomstig van de balkentheorie van Euler-Bernoulli. Op basis van de kinematische, constitutieve en statische vergelijkingen voor buiging zijn deze differentiaalvergelijkingen af te leiden. Als er wordt aangenomen dat de buig- en rekstijfheid constant blijven, dan zijn deze vergelijkingen als volgt:

$$V(x) = -\int q_z(x) + C_V \quad (17) \quad ; \quad N(x) = -\int q_x(x) + C_N \quad (22)$$

$$M(x) = \int V(x) + C_M \quad (18) \quad ; \quad \varepsilon = \frac{1}{EA} N(x) \quad (23)$$

$$\kappa = \frac{1}{EI} M(x) \quad (19) \quad ; \quad u_x(x) = \int \varepsilon(x) + C_{u_x} \quad (24)$$

$$\varphi(x) = -\int \kappa(x) + C_\varphi \quad (20)$$

$$u_z(x) = \int \varphi(x) + C_{u_z} \quad (21)$$

Hierin is q_z de verdeelde belasting loodrecht op de staaf, V de dwarskracht, M het buigend moment, EI de buigstijfheid, κ de kromme, φ de hoekverdraaiing, u_z de doorbuiging, q_x de verdeelde belasting parallel aan de staaf, N de normaalkracht, EA de rekstijfheid, ε de rek, u_x de extensie en zijn $C_V, C_M, C_\varphi, C_{u_z}, C_N$ en C_{u_x} integratieconstanten waarvan de correcte waarde kan worden vastgesteld m.b.v. de oplosvergelijkingen te vinden in paragraaf 2.4.

2.2 De Singulariteitsfuncties

De methode van Macaulay biedt de mogelijkheid om discontinuïteiten werkend op de constructie in één vergelijking te schrijven. Om dit te realiseren wordt er gebruikgemaakt van de zogenoemde singulariteitsfuncties. Een singulariteitsfunctie is een functie dat activeert zodra de functie een vooraf bepaald punt (a) passeert. De exacte definitie kan per vakgebied verschillen. De definitie die in dit verslag wordt aangenomen is als volgt:

$$f(x) \equiv \langle x - a \rangle^n = \begin{cases} (x - a)^n & \text{als } x \geq a \wedge n \geq 0 \\ 0 & \text{als } x < a \wedge n \geq 0 \\ 0 & \text{als } n < 0 \end{cases} \quad (25)$$

Hierin is a het punt waarna de singulariteitsfunctie actief is en is n de orde van de singulariteitsfunctie. De meest voorkomende ordes voor de singulariteitsfunctie zijn van -2 t/m 2 , waarbij iedere orde een specifieke functie benaming heeft. Deze benamingen zijn in volgorde 'unit doublet', 'unit impulse (Diracdelta)', 'unit step (Heaviside)', 'unit ramp' en 'unit parabolic'.

Het integreren van de singulariteitsfunctie is afhankelijk van zijn orde. De integratie van de functie wordt als volgt gedefinieerd:

$$\int \langle x - a \rangle^n dx = \begin{cases} \langle x - a \rangle^{n+1}, & n < 0 \\ \frac{\langle x - a \rangle^{n+1}}{n+1}, & n \geq 0 \end{cases} \quad (26)$$

2.3 Modelleren van Belastingen en Verbindingen

Voor het modelleren van krachten op een constructie wordt er gebruikgemaakt van de singulariteitsfuncties. Elke kracht heeft een bijbehorende functie op basis van welk gedrag het vertoont in de snedekrachtvergelijkingen. Door de toepassing van superpositie en door de omvang van de kracht te vermenigvuldigen met zijn functie, is het vervolgens mogelijk om alle aanwezige krachten werkend op de constructie in één regel te schrijven. Naar aanleiding van het gekozen assenstelsel wordt een kracht positief of negatief gemodelleerd.

Koppel

Voor het modelleren van een koppel wordt de unit doublet functie gebruikt. Een koppel met waarde T gelegen op punt a wordt als volgt gemodelleerd:

$$q_z(x) = T \langle x - a \rangle^{-2} \quad (27)$$

Puntlast

Voor het modelleren van een puntlast wordt de Diracdeltafunctie gebruikt. Een puntlast loodrecht op de staaf met waarde F_z gelegen op punt a wordt als volgt gemodelleerd:

$$q_z(x) = F_z \langle x - a \rangle^{-1} \quad (28)$$

Een puntlast evenwijdig aan de staaf met waarde F_x gelegen op punt a wordt als volgt gemodelleerd:

$$q_x(x) = F_x \langle x - a \rangle^{-1} \quad (29)$$

Uniform verdeelde belasting

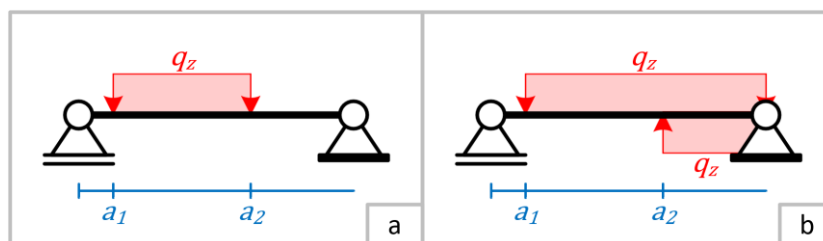
Een verdeelde belasting werkt niet op een punt, maar over een lengte. Echter wordt een singulariteitsfunctie wel geactiveerd op een punt. Daarom moet de gelijkmatig verdeelde belasting worden gemodelleerd met een beginterm en een even grote maar tegengestelde eindterm. Dit wordt gevisualiseerd in figuur 5.

Voor het modelleren van een uniform verdeelde belasting wordt de Heaviside gebruikt. Een verdeelde belasting loodrecht op de staaf met waarde q_z dat begint op punt a_1 en eindigt op punt a_2 wordt als volgt gemodelleerd:

$$q_z(x) = q_z \langle x - a_1 \rangle^{-1} - q_z \langle x - a_2 \rangle^{-1} \quad (30)$$

Een verdeelde evenwijdig aan de staaf met waarde q_x gelegen op punt a wordt als volgt gemodelleerd:

$$q_x(x) = q_x \langle x - a_1 \rangle^{-1} - q_x \langle x - a_2 \rangle^{-1} \quad (31)$$



figuur 5: modellering van een uniform verdeelde belasting.

Net zoals de uniform verdeelde belasting, kunnen ook lineair, parabolisch, etc. verdeelde belastingen worden gemodelleerd. Hier wordt dan telkens een singulariteitsfunctie van een hogere orde voor toegepast.

Scharnierverbinding

Een scharnier heeft geen directe invloed op snedekrachtendiagrammen, maar het zorgt wel voor een onbekende sprong in de hoekverdraaiingsdiagram.

Voor het modelleren van een scharnier wordt een singulariteitsfunctie van de orde -3 gebruikt. Een door het scharnier veroorzaakte hoekverdraaiing met onbekende waarde φ_s gelegen op punt a wordt als volgt gemodelleerd:

$$q_z(x) = EI\varphi_s \langle x - a \rangle^{-3} \quad (32)$$

2.4 Oplossingsvoorwaarden

Door de doorbuigingsvergelijking (vgl. 17 t/m 21) ontstaan er vier integratieconstanten en door de extensievergelijking (vgl. 22 t/m 24) ontstaan er nog twee integratieconstanten. In totaal zijn dit zes onbekenden. Verder zorgen verschillende constructieonderdelen zoals verbindingen en opleggingen voor extra onbekenden deze staan weergegeven in Tabel 3. Hierin is φ_s de hoekverdraaiing door het scharnier, R_z de reactiekracht loodrecht op de staaf, R_x de reactiekracht evenwijdig aan de staaf en T_R het inklemmingsmoment.

Het oplossen van alle onbekenden doet men a.d.h.v. oplossingsvoorwaarden. Er moeten altijd evenveel oplossingsvoorwaarden als onbekenden zijn. De oplossingsvoorwaarden komen voort uit algemene bekendheden van het krachtenverloop en vervormingen van de constructie. Dit verschilt per constructie en is afhankelijk van de constructieonderdelen. In Tabel 3 wordt weergegeven wat de corresponderende oplossingsvoorwaarden zijn op punt a als het de benoemde eigenschap heeft. Punt a kan meerdere eigenschappen tegelijk hebben. Zo kan het bijv. een beginpunt zijn met een inklemming.

Tabel 3: Oplosvergelijkingen en onbekenden voor eendimensionale constructies.

a	onbekenden	Oplossingsvoorwaarden
beginpunt		$N(a^-) = 0$ $V(a^-) = 0$ $M(a^-) = 0$
eindpunt		$N(a^+) = 0$ $V(a^+) = 0$ $M(a^+) = 0$
scharnierverbinding	φ_s	$M(a) = 0$
Roloplegging (rolt parallel aan staaf)	R_z	$u_z(a) = 0$
Roloplegging (rolt loodrecht op staaf)	R_x	$u_x(a) = 0$
scharnieroplegging	R_z R_x	$u_z(a) = 0$ $u_x(a) = 0$
Inklemming	T_R R_z R_x	$\varphi(a) = 0$ $u_z(a) = 0$ $u_x(a) = 0$

3. Continue Macaulay Methode Geknikte Constructies

In dit hoofdstuk wordt een nieuw model geïntroduceerd die de Macaulay methode integreert en uitbreid voor geknikte constructies. In paragraaf 3.1 wordt een motivatie gegeven voor het kiezen van dit model over voorgaande modellen. Daarna wordt in paragraaf 3.2 toegelicht hoe de assenstelsels werken. Vervolgens wordt er in paragraaf 3.3 uitgelegd hoe de verschillende belastingen en scharnieren kunnen worden gemodelleerd. Tot slot wordt er in paragraaf 3.4 verteld hoe de vergelijking voor doorbuiging en extensie kunnen worden omgeschreven naar een vergelijking voor verticale en horizontale verplaatsing. In Bijlage A zijn voorbeelden te vinden van het modelleren van geknikte constructies.

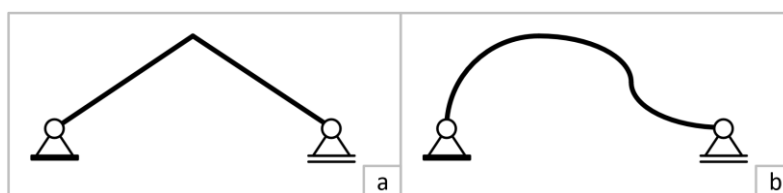
3.1 Motivatie

Al eerder zijn er door Van der Wulp (2023) en Qadriyeh (2023) stappen gemaakt naar een Macaulay methode voor 2D constructies. Echter hebben beide methodes een aantal tekortkomingen.

De methode van Van der Wulp (2023) is gelimiteerd tot geknikte constructies. Per hoekpunt komen er vier onbekenden bij. De eerste twee onbekende variabelen zijn voor de continuïteit van het krachtenverloop en de andere twee zijn voor de continuïteit van de vervorming van de constructie. Voor het oplossen van de vier onbekenden zijn tevens overgangsvoorwaarden vereist. Dat terwijl één van de belangrijkste eigenschappen van Macaulay methode is dat die overgangsvoorwaarden vermijdt. Met het model beschreven in dit hoofdstuk komen er per hoekpunt nul onbekenden bij, waardoor de vergelijking continue blijft.

De methode van Qadriyeh (2023) is specifiek van toepassing op schuine en kromme liggers. Een groot nadeel van de methode is dat het alleen gebruik maakt van een globaal assenstelsel, waarbij de functie verloopt langs de horizontale as. Hierdoor is het niet toepasbaar op constructies die meermaals de verticale as snijden op hetzelfde horizontale punt. Dit sluit al een aantal veelvoorkomende constructies uit waaronder kolommen en portalen. In het model beschreven in dit hoofdstuk zal wordt er gebruik gemaakt van een lokaal assenstelsel, waardoor het robuust is voor elke soort constructie.

Verder kan deze methode alleen de snedekrachten en vervormingen van een constructie waarvan de vergelijking van een staaf continue verloopt, bijv. parabolisch, exact berekenen. Zodra er een knik in de constructie zit of de kromming discontinue verloopt, zoals respectievelijk in figuur 6a en b, dan wordt de constructie opgedeeld in meerdere segmenten die m.b.v. correctiekrachten aan elkaar gelijk moeten worden gesteld. Om deze correctiekrachten op te lossen wordt er gebruikgemaakt van numerieke methodes waarmee na een iteratief proces de snedekracht- en vervormingsdiagrammen slechts benaderd worden. Het model beschreven in dit hoofdstuk is volledig gebaseerd op de principes van evenwicht en continuïteit, waardoor de snedekracht- en vervormingsdiagrammen volledig exact berekend kunnen worden.

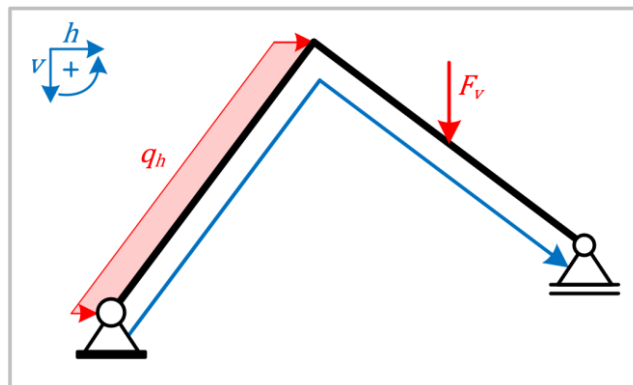


figuur 6: Een geknikte (a) en discontinue gekromde (b) constructie.

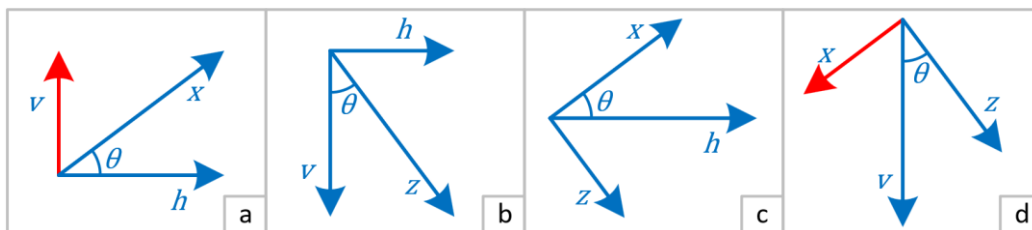
Samengevat, Het model beschreven in dit hoofdstuk voegt geen extra onbekenden toe, is oplosbaar met enkel rand- en vervormingsvoorwaarden, is toepasbaar op elke soort geknikte constructie en berekent de snedekracht- en vervormingsdiagrammen exact uit.

3.2 Assenstelsels

Zoals in paragraaf 3.1 al is aangegeven maakt dit model gebruik van zowel een globale als een lokale assenstelsel, om te bewerkstelligen dat het model robuust is. Het globale assenstelsel maakt gebruik van een horizontale as (h) en een verticale as (v). De positieve horizontale richting is naar rechts, de positieve verticale richting is naar beneden en de positieve draairichting is tegen de klok in, zoals afgebeeld in figuur 7. Het lokale assenstelsel maakt gebruik van een axiale as (x) en een dwars as (z). De positieve x -richting wordt aangegeven met een blauwe pijl, zichtbaar in figuur 7, de positieve z -richting is altijd een kwartslag met de klok mee t.o.v. de positieve x -richting en de positieve draairichting is tegen de klok in.



figuur 7: Het globale en lokale assenstelsel voor een geknikte constructie.



figuur 8: projectie van de lokale assen over de globale assen (a en b) en de projectie van de globale assen over de lokale assen (c en d). Rood geeft een negatief verband aan.

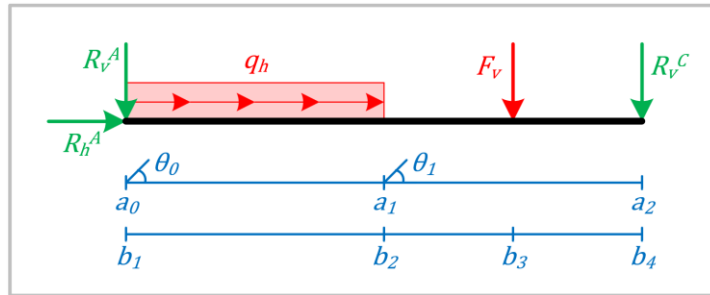
In figuur 8 wordt de projectie van de lokale assen over de globale assen en andersom afgebeeld. Hieruit volgen vgl. 34 t/m 37. Zoals te zien is er in sommige gevallen een negatief verband. Dit wordt ook in het rood aangegeven in figuur 8. Deze negatieve relaties verklaren waarom er in een aantal vergelijkingen in paragraaf 3.3 en 3.4 een minteken aan het begin staat.

$$v = -x \sin(\theta) + z \cos(\theta) \quad (34)$$

$$h = x \cos(\theta) + z \sin(\theta) \quad (35)$$

$$z = h \sin(\theta) + v \cos(\theta) \quad (36)$$

$$x = h \cos(\theta) - v \sin(\theta) \quad (37)$$



figuur 9: Overzichtsschema van de constructie in figuur 7.

Het model maakt gebruik van een krachtenvergelijking in de dwarsrichting ($q_z(x)$) en in de axiale richting ($q_x(x)$). Deze integreren hetzelfde als voor eendimensionale constructies (zie vgl. 17 t/m 24). Om de invoer van deze vergelijkingen begrijpelijk te houden wordt er gebruikgemaakt van een overzichtsschema (zie figuur 9). Hierin wordt de lokale x-as als een rechte lijn weergegeven, wat vooral bij vertakte en gesloten constructies praktisch is. Alle externe belastingen werken langs de (draai)assen van het globale assenstelsel en hebben een positieve waarde als ze in de positieve richting werken. Dit betekent dat een diagonale belasting moet worden gesplit in zijn horizontale en verticale component. Verder wordt er aangenomen dat de verdeelde belasting werkt over de lengte van de staaf (zoals het eigen gewicht) en niet over de lengte van de horizontale of verticale projectie van de staaf (zoals sneeuwbelasting). Daarnaast worden in het overzichtsschema ook de afstanden tot de hoekpunten (a_i) en de bijbehorende hoeken (θ_i) weergegeven. Voor a_i in $[0, n]$ is a_0 het beginpunt en a_n het eindpunt. De afstanden tot de aangrijppunten van de belastingen (of het begin- en eindpunt in geval van een verdeelde belasting) (b_i) worden los weergegeven. De beredenering hierachter wordt verhelderd in paragraaf 3.3.

3.3 Modelleren van de Belastingen en Scharnieren

Voor de Macaulay methode voor tweedimensionale constructies wordt het modelleren van de belastingen een stuk gecompliceerder dan voor de Macaulay methode voor ééndimensionale constructies. Ten eerste maakt het model onderscheid tussen een koppel, horizontale en verticale puntlast, horizontale en verticale uniform verdeelde belasting en scharnier. De modellering van deze belastingen verschilt voor de $q_z(x)$ en de $q_x(x)$. De vergelijkingen van alle belasting kunnen worden gegeneraliseerd tot een beginterm in additie met een reeks hoektermen voor elke hoek waarvoor geldt dat $a_i > b$. Hierin is a_i de afstand tot hoekpunt i en b de afstand tot het aangrijp-, begin- of eindpunt van de belasting. De beginterm is telkens overeenstemmend met de vergelijking van de belasting voor de Macaulay methode voor eendimensionale constructies vermenigvuldigd met een functie voor de hoek. De hoektermen zijn gevonden door te analyseren hoe een knikpunt de snedekracht diagrammen van een belasting beïnvloedt.

In het volgende stuk wordt uitgelegd hoe de vergelijkingen beredeneerd kunnen worden. Hierbij is telkens b de afstand tot het aangrijp-, begin of eindpunt van de belasting, θ_b de hoek op b , a_i de afstand tot hoekpunt i en θ_i de hoek op a_i . In bijlage B is een intermezzo van de afleiding van de vergelijkingen te vinden.

Koppels

Een koppel heeft alleen invloed op de momentenlijn. Op het aangrijppunt van de koppel (b) ontstaat een sprong in de momentenlijn ter grote van de waarde van de koppel (T). Op de hoekpunten (a_i) blijft de momentenlijn onveranderd. Hieruit volgen vgl. 38 en 39.

$$q_z(x) = T(x - b)^{-2} \quad (38)$$

$$q_x(x) = 0 \quad (39)$$

Puntlasten

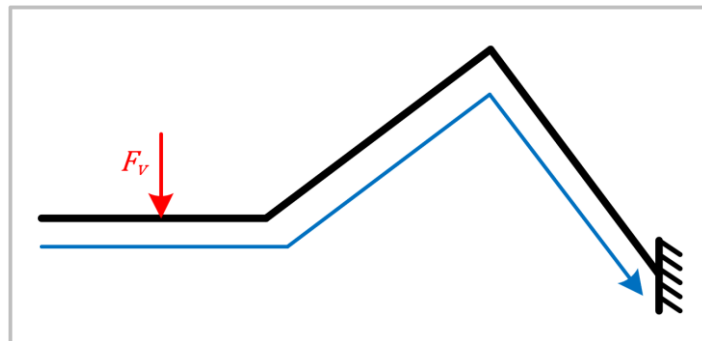
Een Puntlast heeft invloed op de normaalkrachten-, dwarskrachten- en momentenlijn. Op het aangrijppunt van de puntlast (b) ontstaat een sprong in de normaal- en dwarskrachtenlijn en een knik in de momentenlijn ter grote van de waarde van de verticale of horizontale puntlast (F_v en F_h) respectievelijk geprojecteerd over de x- en z-as van de staaf. Op een hoekpunt (a_i) ontstaat een sprong in de normaal- en dwarskrachtenlijn en een knik in de momentenlijn ter grote van het verschil in de projectie van de waarde van de verticale of horizontale puntlast (F_v en F_h) over respectievelijk de x- en z-as van de staaf net voor en na de knik. Hieruit volgen vgl. 40 t/m 43. In figuur 12 wordt weergegeven hoe de begin- en hoektermen de snedekracht diagrammen beïnvloeden van de verticale puntlast werkende op de constructie afgebeeld in figuur 10 met de bijbehorende overzichtsschema zichtbaar in figuur 11.

$$q_z(x) = F_v(\langle x - b \rangle^{-1} \cos(\theta_b) + \sum(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) \quad ; \text{ voor } a_i > b \quad (40)$$

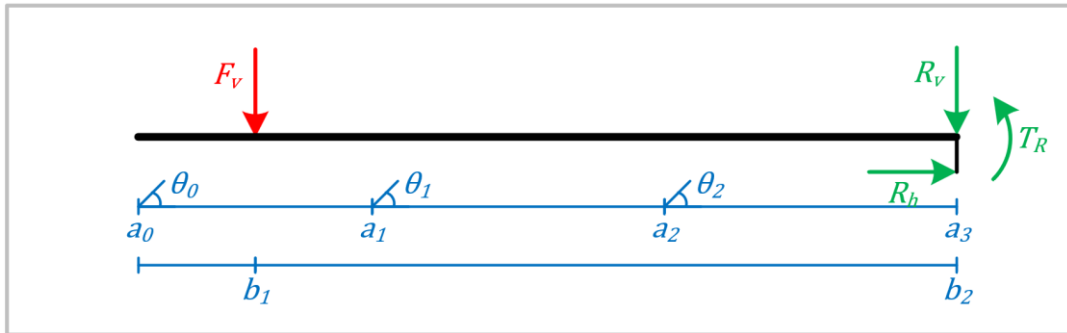
$$q_z(x) = F_h(\langle x - b \rangle^{-1} \sin(\theta_b) + \sum(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) \quad ; \text{ voor } a_i > b \quad (41)$$

$$q_x(x) = -F_v(\langle x - b \rangle^{-1} \sin(\theta_b) + \sum(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) \quad ; \text{ voor } a_i > b \quad (42)$$

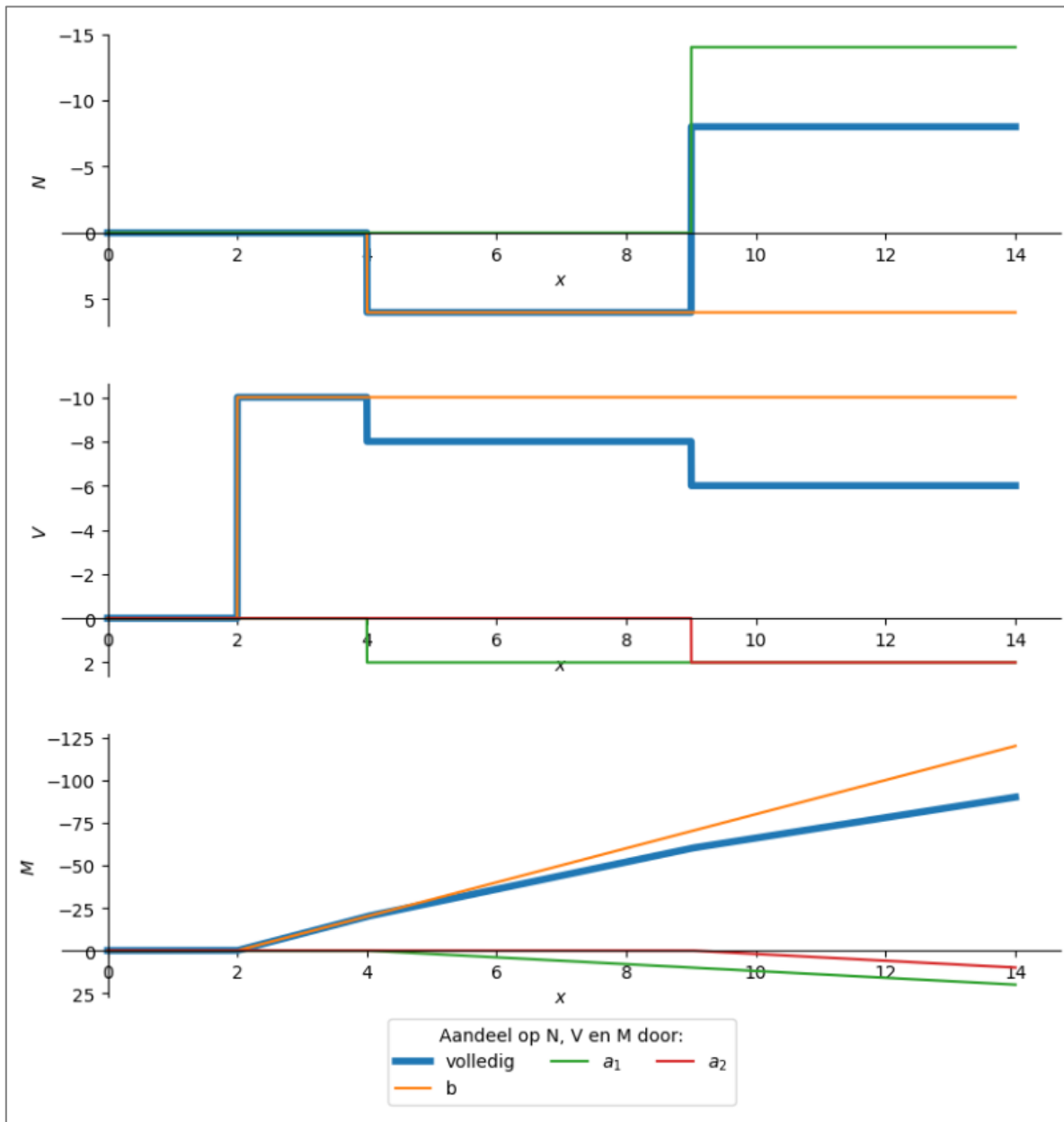
$$q_x(x) = F_h(\langle x - b \rangle^{-1} \cos(\theta_b) + \sum(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) \quad ; \text{ voor } a_i > b \quad (43)$$



figuur 10: Geknikte constructie belast door een verticale puntlast.



figuur 11: Overzichtsschema behorend bij figuur 10.



figuur 12: De invloed van de begin- en hoektermen op de volledige snedekracht diagrammen van de puntlast in figuur 10 geplot over de lokale as.

Uniform Verdeelde Belastingen

Een uniform verdeelde belasting heeft invloed op de normaalkrachten-, dwarskrachten- en momentenlijn. Op het beginpunt van de uniform verdeelde belasting (b) ontstaat een knik in de normaal- en dwarskrachtenlijn ter grote van de waarde van de verticale of horizontale gelijkmatig verdeelde belasting (q_v en q_h) respectievelijk geprojecteerd over de x - en z -as. Op een hoekpunt (a_i) ontstaat een knik en een sprong in de normaal- en dwarskrachtenlijn. De knik is ter grote van het verschil in de projectie van de waarde van de verticale of horizontale gelijkmatig verdeelde belasting (q_v en q_h) over respectievelijk de x - en z -as van de staaf voor en na de knik. De sprong is ter grote van het verschil in de projectie van de belasting vervangende puntlast van de verticale of horizontale gelijkmatig verdeelde belasting op het hoekpunt ($q_v(a_i - b)$ en $q_h(a_i - b)$) over respectievelijk de x - en z -as van de staaf net voor en na de knik. Hieruit volgen vgl. 44 t/m 47. In figuur 14 wordt weergegeven hoe de begin- en hoektermen de snedekracht diagrammen beïnvloeden van de verticale puntlast werkende op de constructie afgebeeld in figuur 13 met de bijbehorende overzichtsschema zichtbaar in figuur 14.

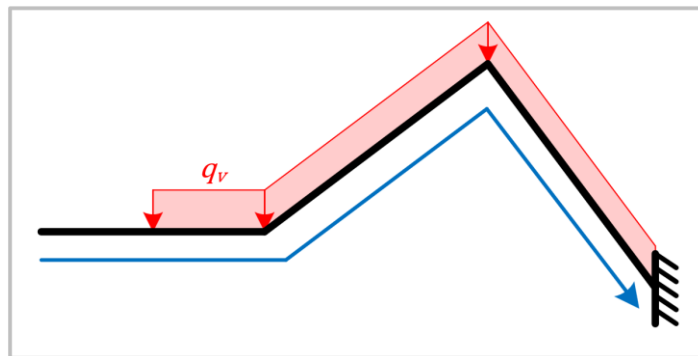
$$q_z(x) = q_v \left(\sum \left(((x - a_i)^0 + (x - a_i)^{-1}(a_i - b))(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})) \right) \right) ; \text{ voor } a_i > b \quad (44)$$

$$q_z(x) = q_h \left(\sum \left(((x - a_i)^0 + (x - a_i)^{-1}(a_i - b))(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})) \right) \right) ; \text{ voor } a_i > b \quad (45)$$

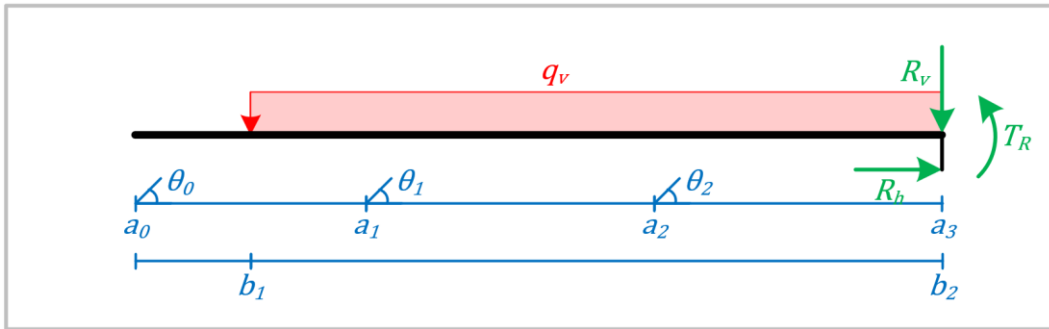
$$q_x(x) = -q_v \left(\sum \left(((x - a_i)^0 + (x - a_i)^{-1}(a_i - b))(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})) \right) \right) ; \text{ voor } a_i > b \quad (46)$$

$$q_x(x) = q_h \left(\sum \left(((x - a_i)^0 + (x - a_i)^{-1}(a_i - b))(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})) \right) \right) ; \text{ voor } a_i > b \quad (47)$$

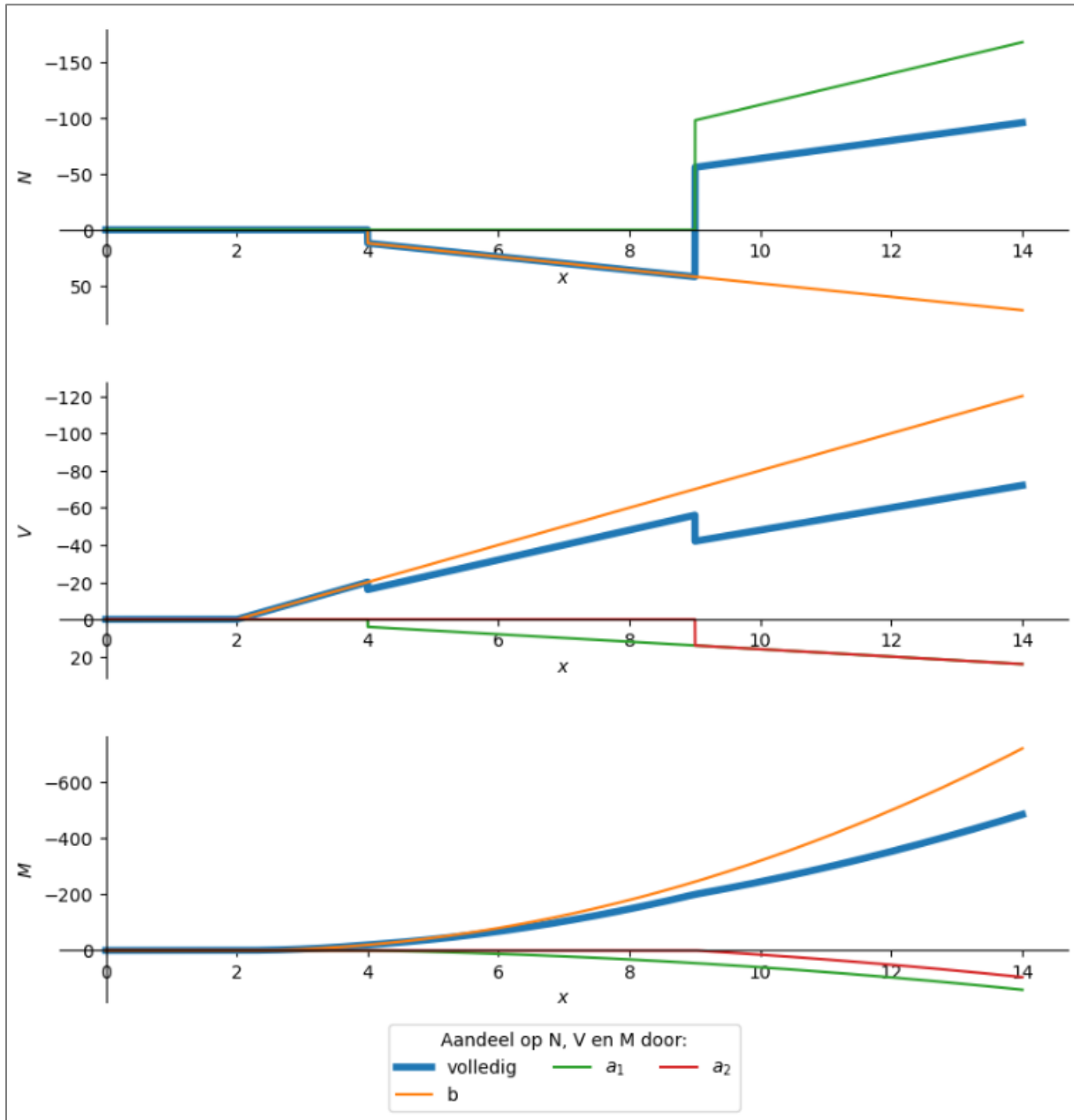
Tot slot geldt er net zoals bij een ééndimensionale ligger dat wanneer een lijnlast stopt voor het eindpunt van de functie, dat er dan een even grote maar tegengestelde lijnlast geïntroduceerd moet worden op dat punt.



figuur 13: Geknikte constructie belast door een verticale gelijkmatig verdeelde belasting.



figuur 14: Overzichtsschema behorend bij figuur 13.



figuur 15: De invloed van de begin- en hoektermen op de volledige snedekracht diagrammen van de uniform verdeelde belasting in figuur 13 geplot over de lokale as.

Scharnieren

Een scharnier heeft geen directe invloed op de snedekracht diagrammen, maar wel op de vervormingsdiagrammen. Op het aangrijppunt van het scharnier (b) ontstaat een sprong in de hoekverdraaiingsdiagram en een knik in de doorbuigingsdiagram met een onbekende grote φ_s . Op de hoekpunten (a_i) blijven de vervormingsdiagrammen onveranderd. Hieruit volgen vgl. 48 en 49. Om voor φ_s op te kunnen lossen moet worden gesteld dat $M(b) = 0$

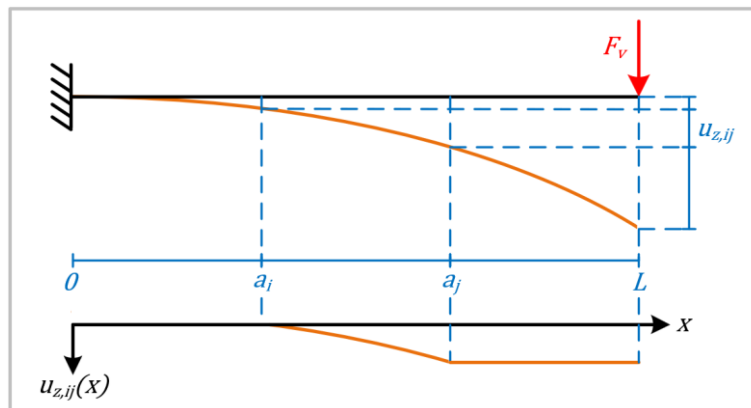
$$q_z(x) = EI\varphi_s(x - b)^{-3} \quad (48)$$

$$q_x(x) = 0 \quad (49)$$

3.4 Verplaatsingen in Globaal Assenstelsel

Door $q_z(x)$ vier keer en $q_x(x)$ twee keer te integreren kunnen respectievelijk de vergelijking voor doorbuiging ($u_z(x)$) en extensie ($u_x(x)$) worden verkregen. Er is echter één probleem. Doordat $u_z(x)$ en $u_x(x)$ in het lokale assenstelsel werken houden ze geen rekening met de tweedimensionale aspecten van de constructie, waardoor de vergelijkingen niet bruikbaar zijn voor de oplossingsvoorwaarden. Er moet dus een vergelijking worden geschreven voor de horizontale en verticale verplaatsing in het globale assenstelsel ($u_h(x)$ en $u_v(x)$) met als input $u_z(x)$ en $u_x(x)$. Binnen $u_h(x)$ en $u_v(x)$ wordt telkens de doorbuiging en extensie per staaf ij ($u_{z,ij}(x)$ en $u_{x,ij}(x)$) als functie van $u_z(x)$ en $u_x(x)$ berekent. Dat wordt vervolgens geprojecteerd over de horizontale en verticale as en tot slot voor alle staven bij elkaar opgeteld. In het volgende stuk wordt dit uitgebreid uitgewerkt. Eerst voor de doorbuiging en daarna voor de extensie.

Verticale en Horizontale Verplaatsing door Doorbuiging



figuur 16: de invloed van $u_{z,ij}(x)$ op $u_z(x)$.

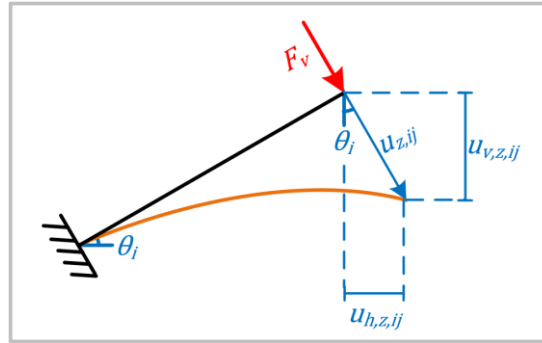
Als eerst wordt er gekeken naar de doorbuiging. Zie als voorbeeld figuur 16, waarin een ééndimensionale constructie is te zien. De vorm van de constructie en de erop werkende belastingen zijn nu niet van belang. Er wordt gekeken naar de invloed van $u_{z,ij}(x)$, dat is de doorbuiging tussen a_i en a_j , op de totale verticale verplaatsing over de lengte. Het volgende geldt:

$$\begin{cases} x < a_i & ; & u_{z,ij}(x) = 0 \\ a_i \leq x < a_j & ; & u_{z,ij}(x) = f(x) \\ x \geq a_j & ; & u_{z,ij}(x) = u_{z,ij}(a_j) \end{cases}$$

In vgl. 50 wordt $u_{z,ij}(x)$ a.d.h.v. deze voorwaarden m.b.v. de singulariteitsfuncties beschreven. Hierin geeft de eerste term aan dat $w_{ij}(x) = f(x)$ voor $a_i \leq x < a_j$ en geeft de tweede term aan dat $u_{z,ij}(x) = u_{z,ij}(a_j)$ voor $x \geq a_j$. Vervolgens wordt vgl. 50 omgeschreven tot vgl. 51.

$$u_{z,ij}(x) = (u_z(x) - u_z(a_i))(\langle x - a_i \rangle^0 - \langle x - a_j \rangle^0) + (u_z(a_j) - u_z(a_i)) \langle x - a_j \rangle^0 \quad (50)$$

$$u_{z,ij}(x) = (u_z(x) - u_z(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 - (u_z(x) - u_z(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0 \quad (51)$$



figuur 17: De verticale en horizontale componenten van de doorbuiging van een staaf.

Voor ééndimensionale constructies is de doorbuiging gelijk aan de verticale verplaatsing. Voor twee dimensionale constructies is dit echter niet het geval, zoals te zien in figuur 17. Daarom moet per staaf de doorbuiging opgesplitst worden in zijn verticale en horizontale component ($u_{v,z,ij}(x)$ en $u_{h,z,ij}(x)$). Dit kan gedaan worden m.b.v. vgl. 52 en 53. Daaropvolgend kunnen de verticale componenten van de doorbuiging van de staven opgesomd worden om de totale verticale verplaatsing door doorbuiging ($u_{v,z}(x)$) te krijgen. Hetzelfde geldt voor de totale horizontale verplaatsing door doorbuiging ($u_{h,z}(x)$). Dit gebeurt in vgl. 54 en 55, waarin de eerste term de projectie van de integratieconstante C_{u_z} is. Tot slot kunnen vgl. 51, 52 en 54 worden samengevoegd om vgl. 56 te verkrijgen en kunnen vgl. 51, 53 en 55 worden samengevoegd om vgl. 57 te verkrijgen.

$$u_{v,z,ij}(x) = u_{z,ij}(x) \cos(\theta_i) \quad (52) \quad ; \quad u_{h,z,ij}(x) = u_{z,ij}(x) \sin(\theta_i) \quad (53)$$

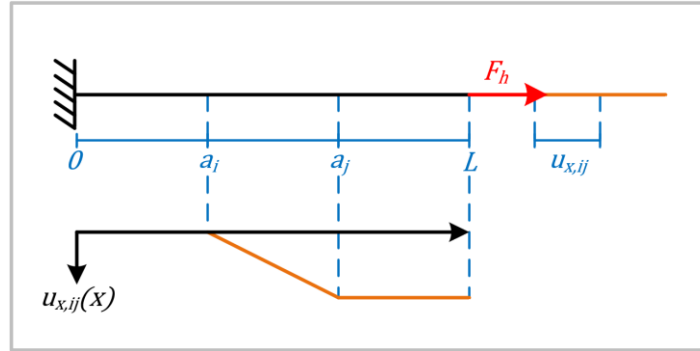
$$u_{v,z}(x) = u_z(a_0) \cos(\theta_0) + \sum_{i=0}^{i=n} u_{v,z,ij}(x) \quad (54)$$

$$u_{h,z}(x) = u_z(a_0) \sin(\theta_0) + \sum_{i=0}^{i=n} u_{h,z,ij}(x) \quad (55)$$

$$u_{v,z}(x) = u_z(a_0) \cos(\theta_0) + \sum_{i=0}^{i=n} \left(\begin{array}{l} (u_z(x) - u_z(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 \\ - (u_z(x) - u_z(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0 \end{array} \right) \cos(\theta_i) \quad (56)$$

$$u_{h,z}(x) = u_z(a_0) \sin(\theta_0) + \sum_{i=0}^{i=n} \left(\begin{array}{l} (u_z(x) - u_z(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 \\ - (u_z(x) - u_z(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0 \end{array} \right) \sin(\theta_i) \quad (57)$$

Verticale en Horizontale Verplaatsing door Extensie



figuur 18: de invloed van $u_{x,ij}(x)$ op $u_x(x)$.

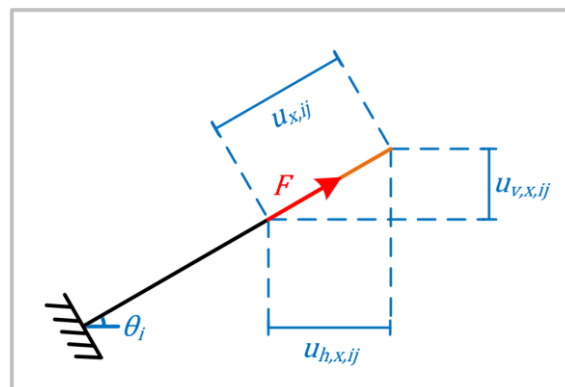
Nu wordt er gekeken naar de extensie. Dit proces is vergelijkbaar met de doorbuiging. Zie als voorbeeld figuur 18, waarin een ééndimensionale constructie is te zien. De vorm van de constructie en de erop werkende belastingen zijn nu niet van belang. Er wordt gekeken naar de invloed van $u_{x,ij}(x)$, dat is de extensie tussen a_i en a_j , op de totale horizontale verplaatsing over de lengte. Het volgende geldt:

$$\begin{cases} x < a_i & ; & u_{x,ij}(x) = 0 \\ a_i \leq x < a_j & ; & u_{x,ij}(x) = f(x) \\ x \geq a_j & ; & u_{x,ij}(x) = u_{x,ij}(a_j) \end{cases}$$

In vgl. 58 wordt $u_{x,ij}(x)$ a.d.h.v. deze voorwaarden m.b.v. de singulariteitsfuncties beschreven. Hierin geeft de eerste term aan dat $u_{x,ij}(x) = f(x)$ voor $a_i \leq x < a_j$ en geeft de tweede term aan dat $u_{x,ij}(x) = u_{x,ij}(a_j)$ voor $x \geq a_j$. Vervolgens wordt vgl. 58 omgeschreven tot vgl. 59.

$$u_{x,ij}(x) = (u_x(x) - u_x(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 - (u_x(x) - u_x(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0 + (u_x(a_j) - u_x(a_i)) \langle x - a_j \rangle^0 \quad (58)$$

$$u_{x,ij}(x) = (u_x(x) - u_x(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 - (u_x(x) - u_x(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0 \quad (59)$$



figuur 19: De verticale en horizontale componenten van de extensie van een staaf.

Voor ééndimensionale constructies is de extensie gelijk aan de horizontale verplaatsing. Voor twee dimensionale constructies is dit echter niet het geval, zoals te zien in figuur 19. Daarom moet per staaf de extensie opgesplitst worden in zijn verticale en horizontale component ($u_{v,x,ij}(x)$ en $u_{h,x,ij}(x)$). Dit kan gedaan worden m.b.v. vgl. 60 en 61. Merk voor vgl. 60 op dat positieve extensie met een positieve hoek voor verticale verplaatsing in de negatieve richting zorgt (zie figuur 18). Daaropvolgend kunnen de verticale componenten van de extensie van de staven opgesomd worden om de totale verticale verplaatsing door extensie ($u_{v,x}(x)$) te krijgen. Hetzelfde geldt voor de totale horizontale verplaatsing door extensie ($u_{h,x}(x)$). Dit gebeurt in vgl. 62 en 63, waarin de eerste term de projectie van de integratieconstante C_{u_x} is. Tot slot kunnen vgl. 59, 60 en 62 worden samengevoegd om vgl. 64 te verkrijgen en kunnen vgl. 59, 61 en 63 worden samengevoegd om vgl. 65 te verkrijgen.

$$u_{v,x,ij}(x) = -u_{x,ij}(x) \sin(\theta_i) \quad (60) \quad ; \quad u_{h,x,ij}(x) = u_{x,ij}(x) \cos(\theta_i) \quad (61)$$

$$u_{v,x}(x) = -u_x(a_0) \sin(\theta_0) + \sum_{i=0}^{i=n} u_{v,x,ij}(x) \quad (62)$$

$$u_{h,x}(x) = u_x(a_0) \cos(\theta_0) + \sum_{i=0}^{i=n} u_{h,x,ij}(x) \quad (63)$$

$$u_{v,x}(x) = -u_x(a_0) \sin(\theta_0) - \sum_{i=0}^{i=n} \begin{pmatrix} (u_x(x) - u_x(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 \\ - (u_x(x) - u_x(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0 \end{pmatrix} \sin(\theta_i) \quad (64)$$

$$u_{h,x}(x) = u_x(a_0) \cos(\theta_0) + \sum_{i=0}^{i=n} \begin{pmatrix} (u_x(x) - u_x(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 \\ - (u_x(x) - u_x(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0 \end{pmatrix} \cos(\theta_i) \quad (65)$$

Verticale en Horizontale Verplaatsing door Doorbuiging en Extensie

Tot slot kan de vergelijking voor de totale verticale verplaatsing (u_v) worden verkregen door de vergelijkingen voor de verticale verplaatsing door doorbuiging en extensie bij elkaar op te tellen. Hetzelfde geldt voor de vergelijking voor de totale horizontale verplaatsing (u_h). Hieruit volgen vgl. 66 en 67. Door vervolgens vgl. 56 en 64 te substitueren in vgl. 66 kan vgl. 68 worden verkregen en door vgl. 57 en 65 te substitueren in vgl. 65 kan vgl. 69 worden verkregen. Vgl. 68 en 69 geven respectievelijk de totale verticale en horizontale verplaatsing in het globale assenstelsel aan t.o.v. de oorspronkelijke positie voor elk punt in de constructie.

$$u_v(x) = u_{v,z}(x) + u_{v,x}(x) \quad (66)$$

$$u_h(x) = u_{h,z}(x) + u_{h,x}(x) \quad (67)$$

$$u_v(x) = u_z(a_0) \cos(\theta_0) - u_x(a_0) \sin(\theta_0) + \sum_{i=0}^{i=n} \begin{pmatrix} ((u_z(x) - u_z(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 - (u_z(x) - u_z(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0) \cos(\theta_i) \\ - ((u_x(x) - u_x(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 - (u_x(x) - u_x(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0) \sin(\theta_i) \end{pmatrix} \quad (68)$$

$$u_h(x) = u_z(a_0) \sin(\theta_0) + u_x(a_0) \cos(\theta_0) + \sum_{i=0}^{i=n} \begin{pmatrix} ((u_z(x) - u_z(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 - (u_z(x) - u_z(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0) \sin(\theta_i) \\ + ((u_x(x) - u_x(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 - (u_x(x) - u_x(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0) \cos(\theta_i) \end{pmatrix} \quad (69)$$

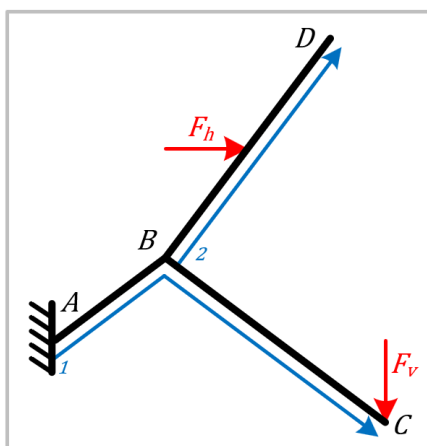
4. Continue Macaulay Methode voor Vertakte en Gesloten Constructies

In het vorige hoofdstuk is alle kennis benodigd voor het modelleren van geknikte constructies vrijgeven. Voor het modelleren van vertakte en gesloten constructies is daarentegen bijkomende informatie vereist. Deze wordt in dit hoofdstuk toegelicht. In paragraaf 4.1 t/m 4.3 wordt achtereenvolgens uitgelegd hoe een knooppunt, sprongpunt (voor vertakte constructies) en aansluitpunt (voor gesloten constructies) voor een starre knoopverbinding moeten worden gemodelleerd. Afsluitend wordt in paragraaf 4.4 omschreven hoe gescharnierde knooppunten moeten worden gemodelleerd. In Bijlage A zijn voorbeelden te vinden van het modelleren van vertakte en gesloten constructies.

Het model maakt dus voor vertakte constructies gebruik van een sprong methode, waarin de functie een sprong maakt in het globale assenstelsel. Alternatief is er ook een opzet gemaakt voor een retour methode, waarin de functie een retourbeweging maakt over een vertakking. Deze is te vinden in Bijlage C.

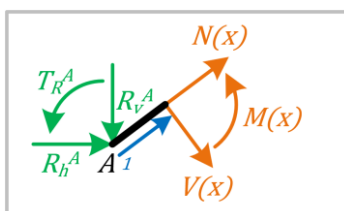
4.1 Modelleren van een Knooppunt

Bij het modelleren van een vertakte of gesloten constructie komen er een aantal complicaties bij kijken. Te beginnen met het knooppunt. Zie als voorbeeld figuur 20, waarin de functie van x de nummering van de blauwe pijlen volgt. In het globale assenstelsel maakt de functie dus een sprong van punt C terug naar punt B . In het lokale assenstelsel verloopt de functie echter continue.



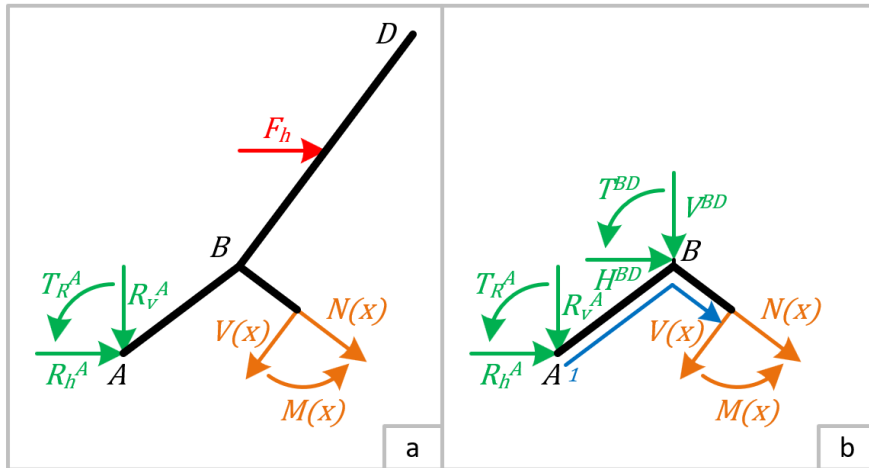
figuur 20: Vertakte constructie. De functie van x volgt de nummering van de pijlen.

Als $A < x < B$, dan is het deellichaam waarmee de snedekrachten met de hand en met het model worden berekend hetzelfde. Dit deellichaam wordt afgebeeld in figuur 21.



figuur 21: Deellichaam van de constructie in figuur 20 voor $A < x < B$.

Echter, als $B < x < C$, dan is het deellichaam waarmee de snedekrachten met de hand en met het model worden berekend verschillend. Het deellichaam waarmee de snedekrachten met de hand kunnen worden berekend is zichtbaar in figuur 22a. Het deellichaam bestaat uit staaf AB , BD en Bx . Het deellichaam waarmee de snedekrachten met het model worden berekend bestaat echter enkel uit staaf AB en Bx , want de functie van x is nog niet langs staaf BD geweest. Desondanks hebben de belastingen werkende op staaf BD wel invloed op de snedekrachten in staaf BC . Daarom moeten er drie onbekende snedekrachten worden toegevoegd op punt B , wat wordt afgebeeld in figuur 22b. Hierin vertegenwoordigd V^{BD} de verticale kracht, H^{BD} de horizontale kracht en T^{BD} de koppel voortkomend uit staaf BD werkend op knooppunt B .



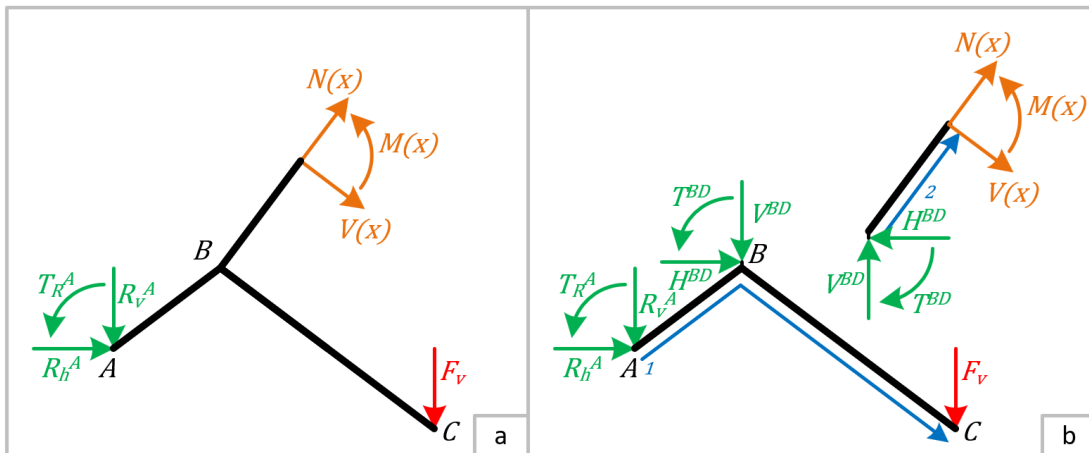
figuur 22: Deellichaam van de constructie in figuur 20 voor $B < x < C$ met de hand (a) en het model (b).

De algemene regel voor het modelleren van een knooppunt is dat de eerste keer dat de functie van x langs een knooppunt I gaat (dus niet na een sprong of aansluiting!) moeten er drie onbekende snedekrachten (V^{IJ} , H^{IJ} en T^{IJ}) worden toegevoegd voor elke staaf IJ waarvan de functie niet vandaan komt of waarnaar de functie niet direct zijn weg vervolgd. Dit betekent dat als er n staven samenkomen op een knooppunt, dat er dan $3(n - 2)$ onbekenden ontstaan. De oplosvergelijkingen voor deze onbekenden verschillen voor vertakte en gesloten constructies en worden toegelicht in paragraaf 4.2 en 4.3.

4.2 Modelleren van een Sprongpunt

In dit model wordt er gebruikgemaakt van de sprongmethode, waarin de functie van x een sprong maakt in het globale assenstelsel. In het lokale assenstelsel verloopt de functie daarentegen continue door. De functie kan alleen een sprong maken als op het punt alle drie de snedekrachtendiagrammen gelijk zijn aan nul en ook gelijk aan nul zullen blijven in het geval er geen sprong wordt gemaakt. Er zijn twee punten die aan deze eis voldoen. Dit zijn het eindpunt van een vertakking en het aansluitpunt van een gesloten constructiedeel. Voor het laatste wordt het bewijs getoond in paragraaf 4.3. De functie kan in principe een sprong maken naar elk willekeurig punt in de constructie waar het nog niet geweest is. Echter is het modelleren van een sprong naar een eindpunt, een knooppunt waar de functie al langs is geweest en een staaf of knooppunt waar de functie nog niet langs is geweest afwijkend van elkaar. Om het overzichtelijk te houden wordt alleen uitgelegd hoe een sprong naar een knooppunt waar de functie al langs is geweest kan worden gemodelleerd. Dit is tevens voldoende om elke vertakte constructie te kunnen modelleren.

Er wordt opnieuw gekeken naar figuur 20. Hierin maakt de functie van x een sprong in het globale assenstelsel van punt C naar punt B . In het lokale assenstelsel verloopt de functie echter continue. Net voor de sprong, op punt C , zijn de snedekracht diagrammen gelijk aan nul. Net na de sprong, op punt B , zijn de snedekracht diagrammen gelijk aan de snedekrachten van staaf BD op punt B . Dit is tevens ook de waarde dat de drie onbekende snedekrachten V^{BD} , H^{BD} en T^{BD} representeren. Daarom moeten er drie even grote maar tegengestelde onbekende snedekrachten $-V^{BD}$, $-H^{BD}$ en $-T^{BD}$ worden toegevoegd net na de sprong op punt B . Het kan worden geïnterpreteerd alsof het model op het sprongpunt de constructie opsplijst in twee deellichamen, zoals afgebeeld in figuur 23b. Hieruit kan ook duidelijk opgehaald worden dat net na de sprong niet V^{BD} , H^{BD} en T^{BD} , maar $-V^{BD}$, $-H^{BD}$ en $-T^{BD}$ toegevoegd moeten worden om het evenwicht tussen de twee deellichamen te waarborgen.

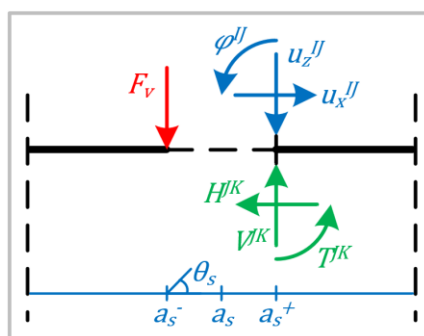


figuur 23: Deellichaam van de constructie in figuur 20 voor $B < x < D$ met de hand (a) en het model (b)

De algemene regel voor het modelleren van een sprongpunt is dat als I het punt net voor de sprong, J het punt net na de sprong en K het punt is waarnaar de functie van x direct na de sprong verloopt, dat dan drie onbekende snedekrachten $(-V^{IJ}, -H^{IJ}$ en $-T^{IJ})$ moeten worden toegevoegd op het sprongpunt net na de sprong (a_s^+). Dit wordt afgebeeld in figuur 24. Om deze onbekende op te kunnen lossen worden de volgende voorwaarden gesteld:

$$N(a_s) = 0, \quad V(a_s) = 0, \quad M(a_s) = 0$$

Mogelijke belastingen werkende op het sprongpunt (a_s) net voor de sprong moeten worden op afstand a_s^- en mogelijke belastingen werkende op het sprongpunt net na de sprong moeten worden gemodelleerd op afstand a_s^+ . Dit wordt afgebeeld in figuur 24. Merk op dat a_s^- , a_s en a_s^+ wel dezelfde afstand hebben, ondanks de verschillende definitie.



figuur 24: modelleren van een sprongpunt.

Op een sprongpunt ontstaat echter niet alleen een sprong in de snedekracht diagrammen, maar ook in de vervormingsdiagrammen. Daarom moeten er ook drie onbekende sprongconstanten (φ^{IJ} , u_z^{IJ} en u_x^{IJ}) toegevoegd worden. Hierin vertegenwoordigd φ^{IJ} de sprong in hoekverdraaiing, u_z^{IJ} de sprong in doorbuiging en u_x^{IJ} de sprong in extensie tussen punt I net voor de sprong en J net na de sprong. De sprongconstanten moeten worden toegevoegd op het sprongpunt net na de sprong (a_s^+), zoals weergegeven in figuur 24. Het modelleren van de sprongconstanten moet als volgt:

$$q_z(x) = EI\varphi^{IJ}\langle x - a_s^+ \rangle^{-3} + EIu_z^{IJ}\langle x - a_s^+ \rangle^{-4} \quad (70)$$

$$q_x(x) = EIu_x^{IJ}\langle x - a_s^+ \rangle^{-2} \quad (71)$$

Om de correcte waarde voor de sprongconstanten te kunnen vinden moeten de volgende voorwaarden worden gesteld:

$$\varphi(a_s^+) - \varphi(a_k) = 0, \quad u_v(a_s^+) - u_v(a_k) = 0, \quad u_h(a_s^+) - u_h(a_k) = 0$$

Hierin is a_k de afstand langs de lokale as tot de eerste keer dat de functie van x langs knooppunt J gaat. De rechterzijde van het '=' symbool wordt gelijk gehouden aan nul, zodat het sneller op te lossen is met computersystemen.

Ter verheldering is in figuur 25 het overzichtsschema behorende bij figuur 20 weergegeven. Er zijn drie reactiekrachten, drie snedekrachten, drie sprongconstanten en zes integratieconstanten. In totaal zijn er dus 15 onbekenden en 15 oplosvoorwaarden nodig. Deze zijn als volgt:

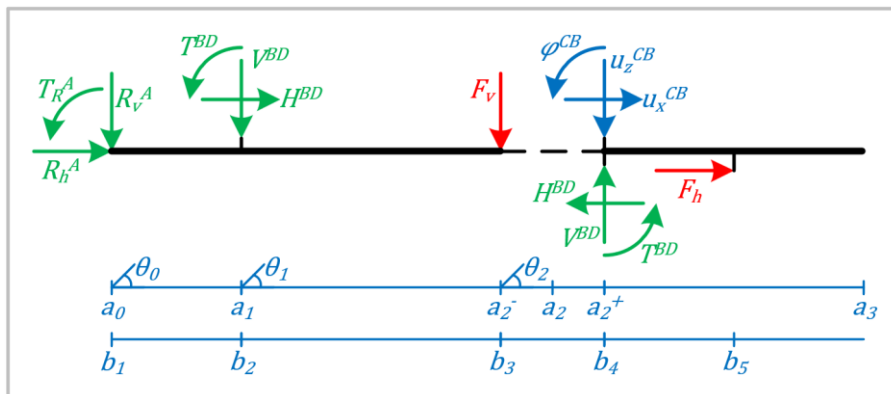
$$N(a_0^-) = 0, \quad V(a_0^-) = 0, \quad M(a_0^-) = 0$$

$$N(a_2) = 0, \quad V(a_2) = 0, \quad M(a_2) = 0$$

$$N(a_3^+) = 0, \quad V(a_3^+) = 0, \quad M(a_3^+) = 0$$

$$\varphi(a_0) = 0, \quad u_v(a_0) = 0, \quad u_h(a_0) = 0$$

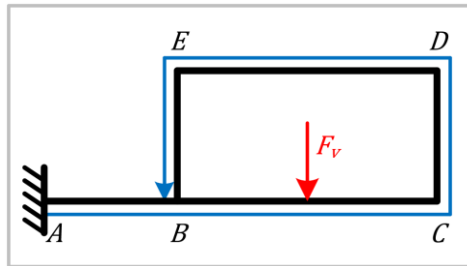
$$\varphi(a_2^+) - \varphi(a_1) = 0, \quad u_v(a_2^+) - u_v(a_1) = 0, \quad u_h(a_2^+) - u_h(a_1) = 0$$



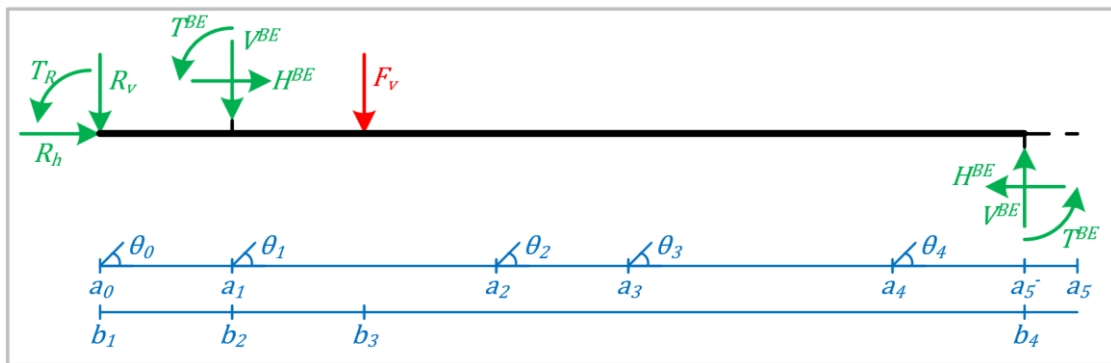
figuur 25: Overzichtsschema behorende bij figuur 20.

4.3 Modelleren van een Aansluitpunt

Het modelleren van een aansluitpunt is vergelijkbaar met het modelleren van een sprongpunt. Zie als voorbeeld figuur 26 met de bijbehorende overzichtsschema in figuur 27. Net voor de aansluiting, op punt B vanuit punt E zijn de snedekrachtsdiagrammen gelijk aan de snedekrachten van staaf BE op punt B . Dit is tevens ook de waarde dat de drie onbekende snedekrachten V^{BE} , H^{BE} en T^{BE} representeren. Door drie even grote maar tegengestelde onbekende snedekrachten $-V^{BE}$, $-H^{BE}$ en $-T^{BE}$ toe te voegen net voor de aansluiting op punt B zijn de snedekrachtsdiagrammen op punt B gelijk aan nul en zullen ze ook gelijk blijven aan nul.



figuur 26: Gesloten constructie.



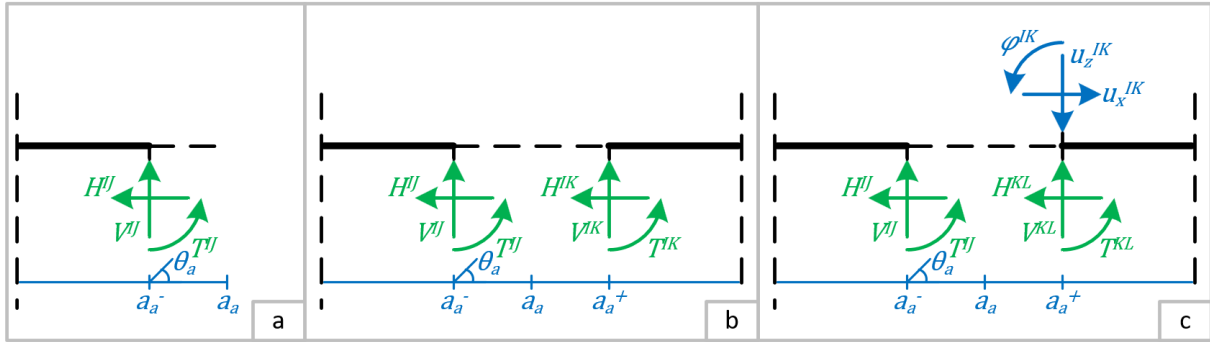
figuur 27 Overzichtsschema behorende bij figuur 26.

De algemene regel voor het modelleren van een aansluitpunt is dat, als I het aansluitpunt is en J het punt is waarvan de functie van x naar het aansluitpunt verloopt, dat dan drie onbekende snedekrachten ($-V^{IJ}$, $-H^{IJ}$ en $-T^{IJ}$) moeten worden toegevoegd op het aansluitpunt net voor de aansluiting (a_a^-). Dit wordt afgebeeld in figuur 28a. Daarnaast moeten de volgende voorwaarden worden gesteld:

$$N(a_a) = 0, \quad V(a_a) = 0, \quad M(a_a) = 0$$

$$\varphi(a_a) - \varphi(a_{k,I}) = 0, \quad u_v(a_a) - u_v(a_{k,I}) = 0, \quad u_h(a_a) - u_h(a_{k,I}) = 0$$

Hierin is $a_{k,I}$ de afstand langs de lokale as tot de eerste keer dat de functie van x langs knooppunt I gaat. De rechterzijde van het '=' symbool wordt gelijk gehouden aan nul, zodat het sneller op te lossen is met computersystemen.



figuur 28: Modelleren van een aansluitpunt als het ook het eindpunt is (a), als de functie erna direct vervolgd (b) of het als het ook een sprongpunt is (c).

Voor de constructie in figuur 26 met de bijbehorende overzichtsschema afgebeeld in figuur 27 zijn er drie reactiekrachten drie snedekrachten en zes integratieconstanten. In totaal zijn er dus 12 onbekenden en dus 12 oplossingsvoorwaarden nodig. Deze zijn als volgt:

$$N(a_0^-) = 0, \quad V(a_0^-) = 0, \quad M(a_0^-) = 0$$

$$N(a_5) = 0, \quad V(a_5) = 0, \quad M(a_5) = 0$$

$$\varphi(a_0) = 0, \quad u_v(a_0) = 0, \quad u_h(a_0) = 0$$

$$\varphi(a_5) - \varphi(a_1) = 0, \quad u_v(a_5) - u_v(a_1) = 0, \quad u_h(a_5) - u_h(a_1) = 0$$

Als het aansluitpunt niet het eindpunt is van de functie, maar de functie erna direct de weg vervolgd naar punt K , dan moeten er drie onbekende snedekrachten ($-V^{IK}$, $-H^{IK}$ en $-T^{IK}$) toegevoegd worden op het aansluitpunt net na de aansluiting (a_a^+), zoals te zien in figuur 28b. Er hoeven geen extra voorwaarden worden gesteld op het aansluitpunt.

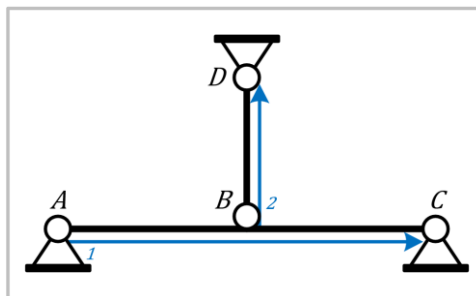
Als het aansluitpunt niet het eindpunt is van de functie, maar de functie erna een sprong maakt naar punt K en vervolgens de weg vervolgd naar punt L , dan moeten er drie onbekende snedekrachten ($-V^{KL}$, $-H^{KL}$ en $-T^{KL}$) en drie onbekende sprongconstanten (φ^{IK} , u_z^{IK} en u_x^{IK}) toegevoegd worden op het aansluitpunt net na de aansluiting (a_a^+), zoals te zien in figuur 28c. Als extra voorwaarde moet het volgende gesteld worden:

$$\varphi(a_a^+) - \varphi(a_{k,K}) = 0, \quad u_v(a_a^+) - u_v(a_{k,K}) = 0, \quad u_h(a_a^+) - u_h(a_{k,K}) = 0$$

Hierin is $a_{k,K}$ de afstand langs de lokale as tot de eerste keer dat de functie van x langs knooppunt K gaat.

Net na sprongpunt

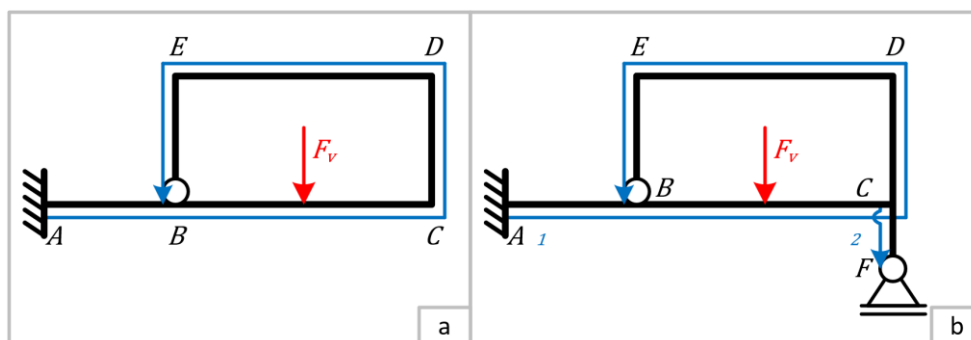
Als de staaf waarnaartoe de functie van x de weg vanaf het knooppunt vervolgd direct na een sprong scharnierend verbonden is, zoals in figuur 31, dan hoeft er geen extra scharnier gemodelleerd te worden. Dit komt doordat de sprongconstante φ^{CB} al voor een sprong in de hoekverdraaiingsdiagram zorgt. Om aan te geven dat de hoekverdraaiing door zowel de sprong als het scharnier komt wordt het aangeduid met " φ_s^{CB} ". Verder geldt dat een scharnierend verbonden staaf geen moment levert op het knooppunt. Daarom hoeft de onbekende snedekracht T^{BD} niet toegevoegd te worden. De constructie in figuur 31 heeft dus één onbekende minder dan als het volledig star verbonden was. Daarom moet er niet een voorwaarde toegevoegd worden, maar een voorwaarde worden weggehaald. Dit is de oplossingsvoorwaarde $\varphi(a_s^+) - \varphi(a_k) = 0$, waarin a_s^+ de afstand tot het sprongpunt net na de sprong is en a_k de afstand tot de eerste keer dat de functie langs het knooppunt gaat.



figuur 31: Scharnierverbinding net na sprongpunt.

Net voor aansluitpunt + eind-/sprongpunt

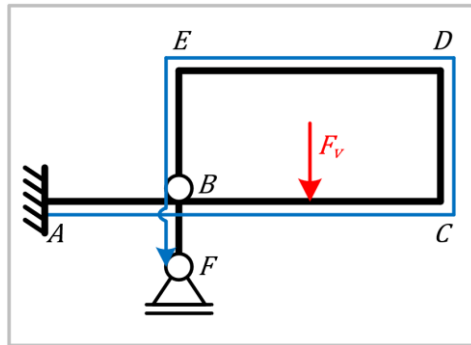
Als de staaf waarvandaan de functie van x over het aansluitpunt gaat scharnierend verbonden is en het aansluitpunt is ook nog een eind- of sprongpunt, zoals respectievelijk in figuur 32a en b, dan hoeft er opnieuw geen scharnier gemodelleerd te worden, want door de oplossingsvoorwaarde $\varphi(a_a) - \varphi(a_k) = 0$ weg te laten (waarin a_a de afstand tot het aansluitpunt en a_k de afstand tot knooppunt voor dezelfde knoop is) zal de constructie vanzelf juist vervormen. Deze oplossingsvoorwaarde mag weggelaten worden doordat opnieuw geldt dat een scharnierend verbonden staaf geen moment levert op het knooppunt, waardoor de onbekende snedekracht T^{BE} niet toegevoegd hoeft te worden en de constructies in figuur 32a en b dus één onbekende minder hebben dan als knoop B volledig star verbonden was.



figuur 32: Scharnierverbinding net voor aansluitpunt dat tevens een eindpunt (a) of sprongpunt is (b).

Net voor aansluitpunt

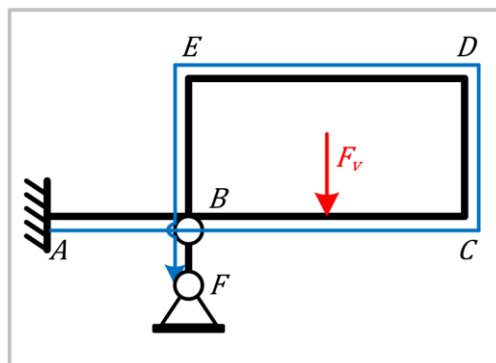
Als de staaf waarvandaan de functie van x over het aansluitpunt gaat scharnierend verbonden is en de functie , zoals in figuur 33, dan moet het scharnier gemodelleerd worden op het aansluitpunt net voor de aansluiting (a_a^-). Opnieuw geldt dat een scharnierend verbonden staaf geen moment levert op het knooppunt, waardoor de onbekende snedekracht T^{BE} niet toegevoegd hoeft te worden. Er komen netto geen extra onbekende bij t.o.v. als de constructie in figuur 33 volledig star is. Daarom hoeven er geen voorwaarden toegevoegd of weggehaald te worden.



figuur 33: Scharnierverbinding net voor aansluitpunt.

Net na aansluitpunt

Als de staaf waarnaartoe de functie van x de weg vanaf het aansluitpunt vervolgd direct na de aansluiting scharnierend verbonden is, zoals in figuur 34, dan moet het scharnier gemodelleerd worden op het aansluitpunt net na de aansluiting (a_a^+). Opnieuw geldt dat een scharnierend verbonden staaf geen moment levert op het knooppunt, waardoor de onbekende snedekracht T^{EB} niet toegevoegd hoeft te worden. Er komen netto geen extra onbekende bij t.o.v. als de constructie in figuur 34 volledig star is. Daarom hoeven er geen voorwaarden toegevoegd of weggehaald te worden.



figuur 34: Scharnierverbinding net na aansluitpunt.

Scharnierverbinding

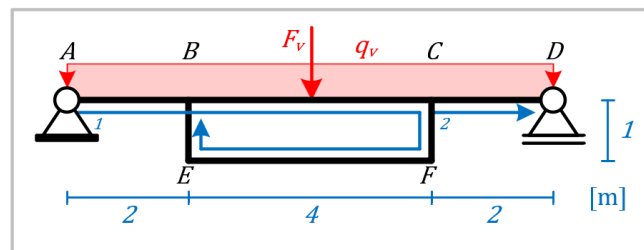
Als het knooppunt in het geheel scharnierend is, zoals bij een vakwerk, dan moet voor n aantal staven verbonden in het knooppunt voor $n - 1$ aantal staven een scharnier worden gemodelleerd. Er wordt aangeraden om het scharnier niet te modelleren voor of net voor of net na het knooppunt, zodat het aantal benodigde oplosvergelijkingen zo gering mogelijk is.

5. Conclusie

In dit verslag is er gezocht naar een antwoord op de volgende vraag:

“Hoe kan de Macaulay methode worden uitgebreid zodat het ook kan worden toegepast voor geknikte, vertakte en gesloten constructies?”

Hiervoor maakt het model gebruik van een globaal en een lokaal assenstelsel ((h, v) en (x, z)). In figuur 35 wordt het verloop van het lokaal assenstelsel aangegeven met de nummering van de blauwe pijlen. De belastingen en de verplaatsingen worden globaal genoteerd en de snedekracht diagrammen lokaal. Er zijn twee vergelijkingen die de lokale as volgen. $q_z(x)$ is voor de krachten loodrecht op de staaf en integreert naar de dwarskrachtenvergelijking, enz. en $q_x(x)$ is voor de krachten parallel aan de staaf en integreert naar de normaalkrachtenvergelijking, enz.



figuur 35

De belastingen worden in 2D anders gemodelleerd dan in 1D. Er wordt in het model onderscheid gemaakt tussen een koppel (T), verticale en horizontale puntlast (F_v en F_h), verticale en horizontale gelijkmatig verdeelde belasting (q_v en q_h) en scharnier ($EI\varphi_s$). De vergelijking voor elke belasting is anders voor $q_z(x)$ en $q_x(x)$ en bestaan telkens uit een beginterm (b) voor het aangrijppunt van de belasting en een systematische reeks hoektermen (a_i) voor elke hoek (θ_i) waar de functie van x langs gaat na het aangrijppunt van de belasting. De vergelijkingen zijn als volgt:

koppel

$$q_z(x) = T\langle x - b \rangle^{-2} \quad (72)$$

$$q_x(x) = 0 \quad (73)$$

Verticale Puntlast

$$q_z(x) = F_v(\langle x - b \rangle^{-1} \cos(\theta_b) + \sum(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) ; \text{voor } a_i > b \quad (74)$$

$$q_x(x) = -F_v(\langle x - b \rangle^{-1} \sin(\theta_b) + \sum(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) ; \text{voor } a_i > b \quad (75)$$

Horizontale puntlast

$$q_z(x) = F_h(\langle x - b \rangle^{-1} \sin(\theta_b) + \sum(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) ; \text{voor } a_i > b \quad (76)$$

$$q_x(x) = F_h(\langle x - b \rangle^{-1} \cos(\theta_b) + \sum(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) ; \text{voor } a_i > b \quad (77)$$

Verticale Gelijkmatig Verdeelde Belasting

$$q_z(x) = q_v \left(\langle x - b \rangle^0 \cos(\theta_b) + \sum \left((\langle x - a_i \rangle^0 + \langle x - a_i \rangle^{-1}(a_i - b)) (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})) \right) \right) ; \text{voor } a_i > b \quad (78)$$

$$q_x(x) = -q_v \left(\langle x - b \rangle^0 \sin(\theta_b) + \sum \left((\langle x - a_i \rangle^0 + \langle x - a_i \rangle^{-1}(a_i - b)) (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})) \right) \right) ; \text{voor } a_i > b \quad (79)$$

Horizontaal Gelijkmatic Verdeelde Belasting

$$q_z(x) = q_h \left(\sum \left((\langle x - a_i \rangle^0 + \langle x - a_i \rangle^{-1}(a_i - b)) (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})) \right) \right) ; \text{ voor } a_i > b \quad (80)$$

$$q_x(x) = q_h \left(\sum \left((\langle x - a_i \rangle^0 + \langle x - a_i \rangle^{-1}(a_i - b)) (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})) \right) \right) ; \text{ voor } a_i > b \quad (81)$$

Scharnier

$$q_z(x) = EI\varphi_s \langle x - b \rangle^{-3} \quad (82)$$

$$q_x(x) = 0 \quad (83)$$

De doorbuiging ($u_z(x)$) en extensie ($u_x(x)$) zijn voor tweedimensionale constructies hele abstracte termen die niet bruikbaar zijn voor de oplossingsvoorwaarden. Daarom moeten ze worden gebruikt als invoer voor de vergelijkingen van de horizontale en verticale verplaatsing van de constructie ($u_h(x)$ en $u_v(x)$). Deze vergelijkingen zijn als volgt:

$$u_v(x) = u_z(a_0) \cos(\theta_0) - u_x(a_0) \sin(\theta_0) + \sum_{i=0}^{i=n} \left(\begin{aligned} & \left((u_z(x) - u_z(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 - (u_z(x) - u_z(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0 \right) \cos(\theta_i) \\ & - \left((u_x(x) - u_x(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 - (u_x(x) - u_x(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0 \right) \sin(\theta_i) \end{aligned} \right) \quad (84)$$

$$u_h(x) = u_z(a_0) \sin(\theta_0) + u_x(a_0) \cos(\theta_0) + \sum_{i=0}^{i=n} \left(\begin{aligned} & \left((u_z(x) - u_z(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 - (u_z(x) - u_z(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0 \right) \sin(\theta_i) \\ & + \left((u_x(x) - u_x(a_i)) \langle x - a_i \rangle^0 - (u_x(x) - u_x(a_j)) \langle x - a_j \rangle^0 \right) \cos(\theta_i) \end{aligned} \right) \quad (85)$$

Hierbij is a_i het beginpunt, a_j het eindpunt en θ_i de hoek van staaf ij .

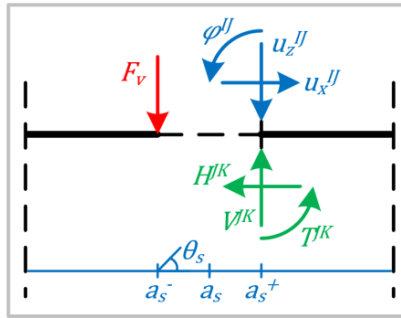
Voor vertakte en gesloten constructies bestaan er drie bijzondere punten met unieke eigenschappen. Dit zijn het knooppunt (a_k), sprongpunt (a_s) en aansluitpunt (a_a).

Het knooppunt is het punt waarbij de functie van x voor het eerst langs een knoop gaat. Op a_k moet voor elke staaf IJ waarnaar de functie niet direct de weg vervolgd drie onbekende krachten worden toegevoegd V^{IJ} , H^{IJ} en T^{IJ} . Hierin vertegenwoordigd V^{IJ} de verticale kracht, H^{IJ} de horizontale kracht en T^{IJ} de koppel voortkomend uit staaf IJ werkend op knoop I .

Het sprongpunt, (zie figuur 36) is het punt waar de functie van x in het globale assenstelsel een sprong maakt van punt I , wat een uiteinde of afsluiting is van een vertakking, naar punt J , wat een knoopverbinding is waar de functie van x al eerder langs is geweest. Belastingen werkende op punt I moeten gemodelleerd worden op a_s^- en op punt J op a_s^+ . Op a_s^+ moeten ook de onbekende krachten $-V^{JK}$, $-H^{JK}$ en $-T^{JK}$ worden toegevoegd voor staaf JK waarnaar de functie na de sprong de weg vervolgd. Verder moeten op a_s^+ de sprongconstanten φ^{IJ} , u_z^{IJ} en u_x^{IJ} toegevoegd worden voor de sprong in vervormingen tussen punt I en J . Deze worden als volgt gemodelleerd:

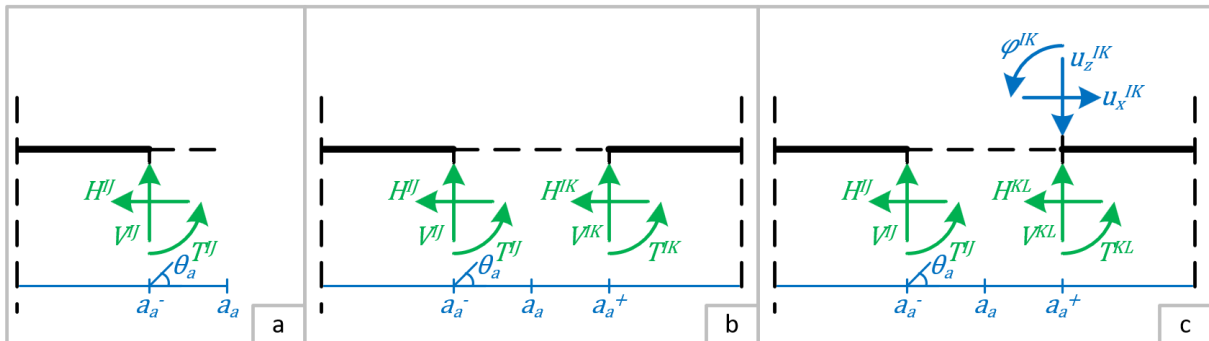
$$q_z(x) = EI\varphi^{ij} \langle x - a_s^+ \rangle^{-3} + EIu_z^{ij} \langle x - a_s^+ \rangle^{-4} \quad (86)$$

$$q_x(x) = EAu_x^{ij} \langle x - a_s^+ \rangle^{-2} \quad (87)$$



figuur 36: modelleren van een sprongpunt.

Het aansluitpunt is het punt waarbij de functie van x opnieuw langs een knoop gaat. Op a_a^- moeten de drie onbekende krachten $-V^{IJ}$, $-H^{IJ}$ en $-T^{IJ}$ voor de staaf IJ dat aansluit op punt I . Het aansluitpunt kan het einde zijn van de functie, maar de functie kan ook direct de weg vervolgen of een sprong maken. Het verschil in modelleren is te zien in figuur 37.



figuur 37: Modelleren van een aansluitpunt als het ook het eindpunt is (a), als de functie erna direct vervolgd (b) of het als het ook een sprongpunt is (c).

In Tabel 4 wordt voorgeschreven welke oplossingsvoorwaarden gelden voor starre tweedimensionale constructies als lokale afstand a_i de benoemde eigenschap heeft. Afstand a_i kan meerdere eigenschappen tegelijk hebben. Hierbij is a_k het knooppunt waarbij de functie voor het eerst langs dezelfde knoop komt als afstand a_i of a_i^+ .

Tabel 4: Oplossingsvoorwaarden voor tweedimensionale starre constructies.

a_i	Oplossingsvoorwaarden	a_i	Oplossingsvoorwaarden
Lokaal beginpunt	$N(a_i^-) = 0$ $V(a_i^-) = 0$ $M(a_i^-) = 0$	Scharnierverbinding	$M(a_i) = 0$
		Verticale roloplegging	$u_v(a_i) = 0$
		Horizontale roloplegging	$u_h(a_i) = 0$
Lokaal eindpunt	$N(a_i) = 0$ $V(a_i) = 0$ $M(a_i) = 0$	Scharnieroplegging	$u_v(a_i) = 0$ $u_h(a_i) = 0$
		Inklemming	$\varphi(a_i) = 0$ $u_v(a_i) = 0$ $u_h(a_i) = 0$
Globaal eindpunt / sprongpunt (Vertakte constructie)	Zie lokaal eindpunt + $\varphi(a_i^+) - \varphi(a_k) = 0$ $u_v(a_i^+) - u_v(a_k) = 0$ $u_h(a_i^+) - u_h(a_k) = 0$		
Aansluitpunt (Gesloten constructie)	Zie lokaal eindpunt + $\varphi(a_i) - \varphi(a_k) = 0$ $u_v(a_i) - u_v(a_k) = 0$ $u_h(a_i) - u_h(a_k) = 0$		

Een staaf JK kan ook scharnierend verbonden zijn aan een knoop. Het modelleren ervan verschilt voor een knoop-, sprong en aansluitpunt. In Tabel 5 staat een overzicht van welke onbekenden en voorwaarden moeten worden toegevoegd en/of wegelaten voor elke situatie t.o.v. een star verbonden staaf. Als alle staven scharnieren verbonden zijn in de knoop, dan moet voor n staven $n - 1$ staven een scharnierverbinding worden gemodelleerd in de knoop.

Tabel 5: Modelleren van een scharnierende knoopverbinding. Het punt is zowel een aansluitpunt als een eind- of sprongpunt.

scharnierverbinding	onbekenden		voorwaarden	
	toevoegen	weglaten	toevoegen	weglaten
Net voor knooppunt (a_k^-)	φ_s		$M(a_k^-) = 0$	
Net na knooppunt (a_k^+)	φ_s		$M(a_k^+) = 0$	
Net na sprongpunt (a_s^+) + eind- of sprongpunt*	φ_s^{IJ}	φ^{IJ} T^{JK}		$\varphi(a_s^+) - \varphi(a_k) = 0$
Net voor aansluitpunt (a_a^-)		T^{JK}		$\varphi(a_a^-) - \varphi(a_k) = 0$
Net voor aansluitpunt (a_a^-)	φ_s	T^{JK}		
Net na aansluitpunt (a_a^+)	φ_s	T^{JK}		

Het resultaat is een model dat toepasbaar is voor alle geknikte, vertakte en gesloten tweedimensionale constructies, zolang de staven geen kromming hebben, de buig- en rekstijfheid constant is over de gehele constructie en er geen kabels zijn. Het model kan de snedekracht diagrammen en verplaatsingen van elk punt in de constructie exact berekenen en heeft daarbij ook nog eens minder oplossingsvergelijkingen nodig dan de traditionele integratie methode. Daarbovenop zijn de oplossingsvergelijkingen ook nog eens simpeler van aard, doordat het enkel rand- en vervormingsvoorwaarden zijn.

6. Discussie

In dit hoofdstuk worden suggesties gedaan voor een vervolgonderzoek naar de uitbreiding van de in dit rapport beschreven model.

Ten eerste is het model op dit moment voor koppels, puntlasten en gelijkmatig verdeelde belastingen, maar nog niet voor hogere orde belastingen zoals een lineaire of parabolische belasting. Sinds tot nu toe is gebleken dat hogere ordes voor gecompliceerdere vergelijkingen met meer termen per hoekpunt zorgen is het interessant om te zien of dit ook aanhoudt bij hogere orde verdeelde belastingen en of er een systematische reeks kan worden geschreven voor alle ordes.

Het beschreven model is al inzetbaar voor vakwerken. In bijlage A voorbeeld 7 wordt dit aangetoond. Echter zou er ook een meer simplistische model moeten kunnen worden ontwikkeld die zich specialiseert in vakwerken, aangezien de dwarskrachtenlijn en de verdere integraties ervan bij definitie gelijk zijn aan nul voor vakwerken.

Daarnaast werkt het model nu alleen voor rechte en geknikte staven, maar nog niet voor gekromde staven. Een kromme kan worden gezien als een eindige reeks van kleine hoeken $d\theta$ die op een kleine afstand dx van elkaar liggen. Dit is gelijk aan integreren. Daarom kan een gekromde ligger naar verwachting continue gemodelleerd worden m.b.v. een hogere orde singulariteitsfunctie. Een ander probleem die erbij komt kijken is de lengte van een gekromde staaf, wat relevant is sinds de functie over de lokale x -as verloopt. De lengte van de staaf is makkelijk genoeg te bepalen als de staaf cirkelvormig kromt, maar voor parabolische of hogere orde krommingen wordt het ingewikkelder.

Qadriyeh (2023) heeft ook al een methode hiervoor ontwikkeld. Echter is deze methode niet robuust voor alle tweedimensionale constructies doordat de functie van x langs de globale horizontale as verloopt en de methode geen antwoord biedt voor constructies met een discontinuïteit in de kromming of een knik, zoals beschreven in paragraaf 3.1.

Insgelijks is het model reeds niet bestendig voor veranderlijke buig- en rekstijfheden. Doordat ze nu als constant zijn aangenomen wordt nu de momentenlijn botweg gedeeld door de buigstijfheid om de krommenlijn te verkrijgen en wordt de normaalkrachtenlijn gedeeld door de rekstijfheid om de extensiediagram te verkrijgen. Als de buig- en rekstijfheid veranderlijk zijn over de functie, dan is dat niet meer mogelijk. Een potentiële mogelijkheid is om voor de krachtenvergelijkingen $q_z(x)$ en $q_x(x)$ in plaats van één variabele (x) twee variabelen (x_1 en x_2) te gebruiken. Hierbij integreert x_1 hetzelfde als x nu doet en integreert x_2 van de momentenlijn naar de kromme en van de normaalkrachtenlijn naar de extensie.

Tot slot is het model nog niet inzetbaar voor kabelconstructies. Kabels gebruiken een andere differentiaalvergelijking dan Euler-Bernoulli liggers. Deze wordt uitgedrukt in vgl. 88. Hierin is $H(x)$ de horizontale krachtenvergelijking en is $q_v(x)$ de verticale belastingvergelijking. Voor meer informatie hierover wordt verwezen naar Welleman (2019). Ondanks dat kabels geen Euler-Bernoulli balken zijn is het interessant om te weten of

$$H(x) \frac{d^2z}{dx^2} = -q_v(x) \tag{88}$$

Verwijzingen

Baudoin, A. (2024, Juni 19). *Macaulay-2D*. Opgehaald van GitHub:
<https://github.com/AJDBaudoin/Macaulay-2D>

Qadriyeh, E. (2023). *Analyse van Schuine en Kromme Liggers met de Macaulay Methode: Een Diepgaande Studie*. Delft: Technisch Universiteit Delft.

Todd, J. (1981). *Structural Theory and Analysis*. University of Oxford: THE MACMILLAN PRESS LTD.

Van der Wulp, J. D. (2023). *De methode van Macaulay voor tweedimensionale constructies*. Delft: Technische Universiteit Delft.

Welleman, J. W. (2019, Augustus). *2018 Notities over kabels en bogen*. Opgehaald van icozct.tudelft.nl:
https://icozct.tudelft.nl/TUD_CT/BendAndBreak/files/2019%20Notities%20over%20kabels%20en%20bogen.pdf

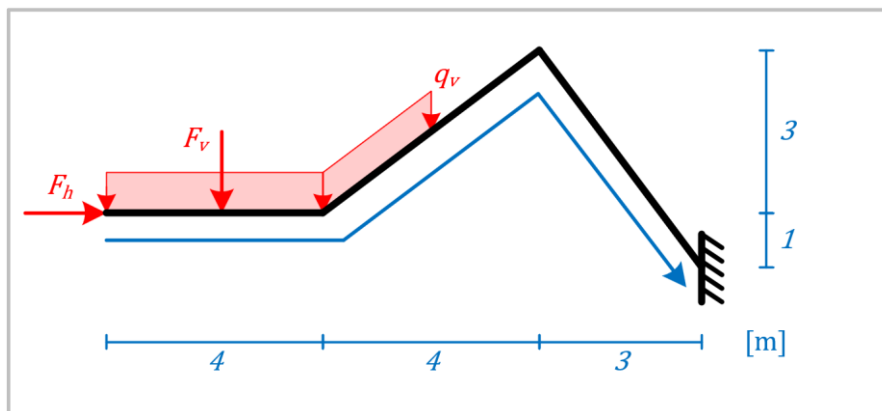
Bijlage A – Uitwerkingen van de Voorbeelden

In deze bijlage worden zeven voorbeelden uitgewerkt die aantonen dat en hoe het model toepasbaar is voor verschillende complicaties. In voorbeeld 1 is een meermaals geknikte ligger te vinden dat vrij is op $x = 0$. In voorbeeld 2 is een geknikte samengestelde constructie te vinden. In voorbeeld 3 is een statisch onbepaalde geknikte constructie te vinden. In voorbeeld 4 is een meermaals vertakte constructie te vinden. In voorbeeld 5 is een statisch onbepaalde vertakte constructie te vinden met een scharnierende knoopverbinding. In voorbeeld 6 is een constructie te vinden dat zowel gesloten als vertakt is. In voorbeeld 7 is een vakwerk te vinden.

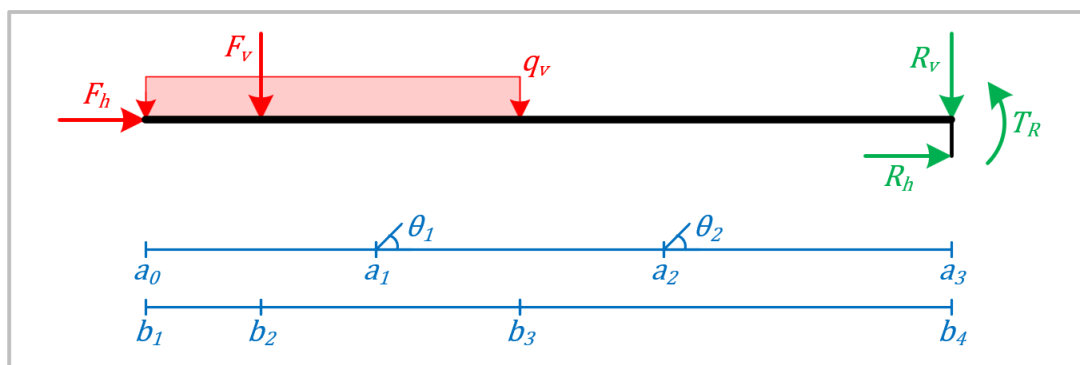
De snedekracht diagrammen worden telkens afgebeeld langs de lokale x-as net zoals de overzichtsschema's. De python code voor alle voorbeelden is te vinden op GitHub Baudoin (2024).

Voorbeeld 1

In figuur 38 is een ingeklemde ligger te zien met twee knikken dat belast wordt door een verticale kracht (F_v), een horizontale kracht (F_h) en een verticale uniform verdeelde belasting (q_v). In figuur 39 wordt het bijbehorende overzichtsschema weergegeven. Er is voor deze constructie gekozen om aan te tonen dat het model werkt voor constructies met meerdere knikpunten en voor constructies waarvan het beginpunt ($x = 0$) volledig vrij is om te verplaatsen. Ook heeft deze constructie elke soort belasting inbegrepen.



figuur 38: Ingeklemd ligger met twee knikken.



figuur 39: Overzichtsschema behorende bij figuur 38.

De gegeven waardes zijn als volgt:

$$\begin{aligned}
 F_v &= 16 \text{ [kN]}, & F_h &= 15 \text{ [kN]}, & q_h &= 6 \text{ [kN/m]}, \\
 b_1 &= 0 \text{ [m]}, & b_2 &= 2 \text{ [m]}, & b_3 &= 6,5 \text{ [m]}, & b_4 &= 14 \text{ [m]} \\
 a_0 &= 0 \text{ [m]}, & a_1 &= 4 \text{ [m]}, & a_2 &= 9 \text{ [m]}, & a_3 &= L = 14 \text{ [m]} \\
 \theta_0 &= 0 \text{ [rad]}, & \theta_1 &= \tan^{-1}(3/4) \text{ [rad]}, & \theta_2 &= \tan^{-1}(-4/3) \text{ [rad]} \\
 EA &= 10^4 \text{ [kN/m]}, & EI &= 3 * 10^4 \text{ [kNm]}
 \end{aligned}$$

In vgl. 89 en 90 staan de vergelijkingen voor $q_z(x)$ en $q_x(x)$.

$$\begin{aligned}
 q_z(x) &= F_h \left(\langle x - b_1 \rangle^{-1} \sin(\theta_0) + \langle x - a_1 \rangle^{-1} (\sin(\theta_1) - \sin(\theta_0)) + \langle x - a_2 \rangle^{-1} (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \right) \\
 &+ q_v \left(\langle x - b_1 \rangle^0 \cos(\theta_0) + (\langle x - a_1 \rangle^0 + \langle x - a_1 \rangle^{-1} (a_1 - b_1)) (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_0)) \right) \\
 &\quad + (\langle x - a_2 \rangle^0 + \langle x - a_2 \rangle^{-1} (a_2 - b_1)) (\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)) \\
 &- q_v \left(\langle x - b_3 \rangle^{-1} \cos(\theta_1) + (\langle x - a_2 \rangle^0 + \langle x - a_2 \rangle^{-1} (a_2 - b_3)) (\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)) \right) \\
 &+ F_v \left(\langle x - b_2 \rangle^{-1} \cos(\theta_0) + \langle x - a_1 \rangle^{-1} (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_0)) + \langle x - a_2 \rangle^{-1} (\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)) \right) \\
 &+ R_v \langle x - b_4 \rangle^{-1} \cos(\theta_2) + R_h \langle x - b_4 \rangle^{-1} \sin(\theta_2) + T_R \langle x - b_4 \rangle^{-2} \tag{89}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_x(x) &= F_h \left(\langle x - b_1 \rangle^{-1} \cos(\theta_0) + \langle x - a_1 \rangle^{-1} (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_0)) \right) \\
 &\quad + \langle x - a_2 \rangle^{-1} (\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)) \\
 &- q_v \left(\langle x - b_1 \rangle^0 \sin(\theta_0) + (\langle x - a_1 \rangle^0 + \langle x - a_1 \rangle^{-1} (a_1 - b_1)) (\sin(\theta_1) - \sin(\theta_0)) \right) \\
 &\quad + (\langle x - a_2 \rangle^0 + \langle x - a_2 \rangle^{-1} (a_2 - b_1)) (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \\
 &+ q_v \left(\langle x - b_3 \rangle^{-1} \sin(\theta_1) + (\langle x - a_2 \rangle^0 + \langle x - a_2 \rangle^{-1} (a_2 - b_3)) (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \right) \\
 &- F_v \left(\langle x - b_2 \rangle^{-1} \sin(\theta_0) + \langle x - a_1 \rangle^{-1} (\sin(\theta_1) - \sin(\theta_0)) + \langle x - a_2 \rangle^{-1} (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \right) \\
 &- R_v \langle x - b_4 \rangle^{-1} \sin(\theta_2) + R_h \langle x - b_4 \rangle^{-1} \cos(\theta_2) \tag{90}
 \end{aligned}$$

Vgl. 89 kan vervolgens vier keer geïntegreerd worden om achtereenvolgend de vergelijking voor de dwarskracht, het buigend moment, de kromme, de hoekverdraaiing en de doorbuiging te verkrijgen (vgl. 17 t/m 21). Eveneens kan vgl. 90 twee keer geïntegreerd worden om sequentieel de vergelijking voor de normaalkracht, rek en extensie te verkrijgen (vgl. 22 t/m 24). Daarna worden de vergelijking voor doorbuiging en extensie toegepast in vgl. 68 en 69 om de horizontale en verticale verplaatsingen te kunnen bepalen.

Er zijn drie reactiekrachten en 6 integratieconstanten. Er zijn dus negen oplosvergelijkingen nodig. Deze zijn als volgt:

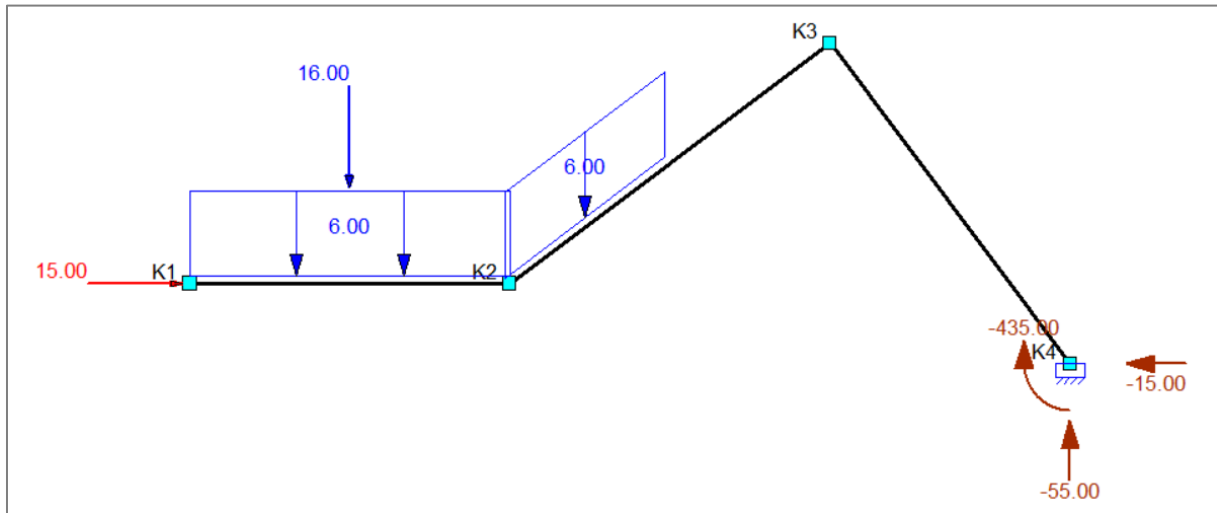
$$\begin{aligned}
 N(0^-) &= 0, & N(L^+) &= 0, & V(0) &= 0, & V(L^+) &= 0, & M(0) &= 0, & M(L^+) &= 0, \\
 \varphi(L) &= 0, & u_v(L) &= 0, & u_h(L) &= 0
 \end{aligned}$$

De resultaten zijn als volgt:

De uitkomsten voor de negen onbekenden staan hieronder. De gevonden waarden voor de reactiekrachten zijn exact hetzelfde als dat van Matrixframe, weergegeven in figuur 40.

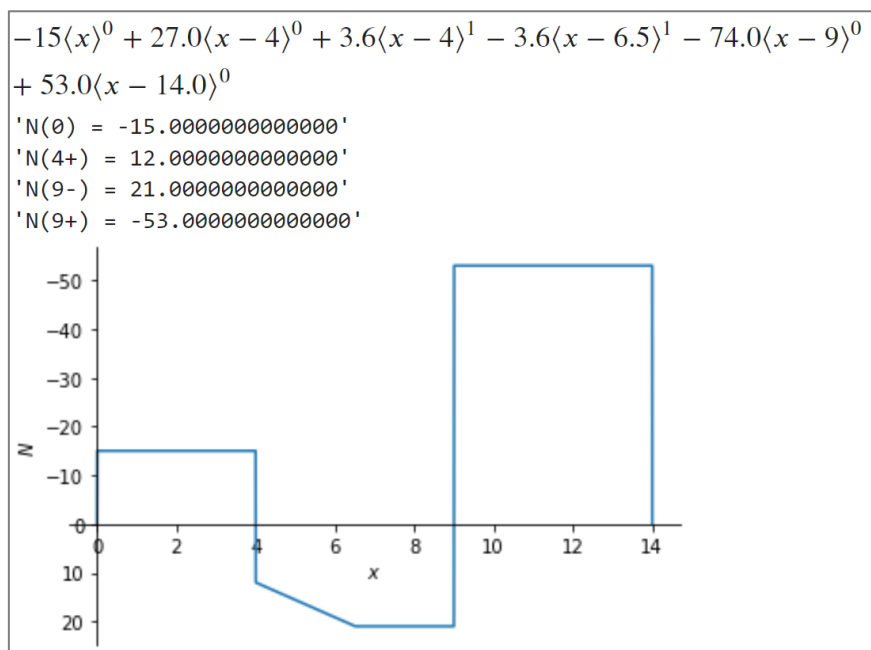
$$R_v = -55,00 \text{ [kN]}, \quad R_h = -15,00 \text{ [kN]}, \quad T_R = -435,00 \text{ [kNm]},$$

$$C_N = C_V = C_M = 0, \quad C_\varphi = 0,100 \text{ [rad]}, \quad C_{u_h} = 0,133 \text{ [m]}, \quad C_{u_v} = 0,861 \text{ [m]}$$

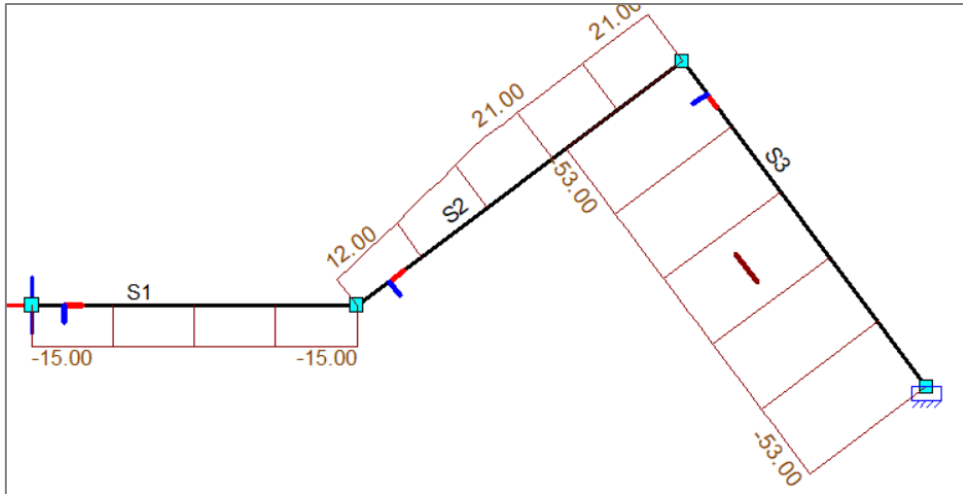


figuur 40: Reactiekrachten in Matrixframe.

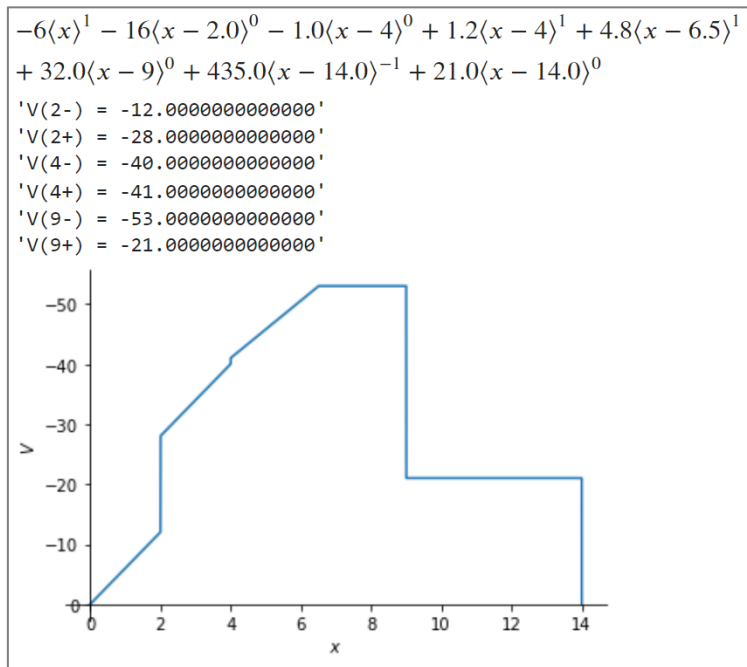
De vergelijking voor de normaalkracht, dwarskracht en het buigend moment worden afgebeeld in figuur 41, figuur 43 en figuur 45. Dit komt exact overeen met de resultaten van Matrixframe, zoals te zien in figuur 42, figuur 44 **Fout! Verwijzingsbron niet gevonden.** en figuur 46.



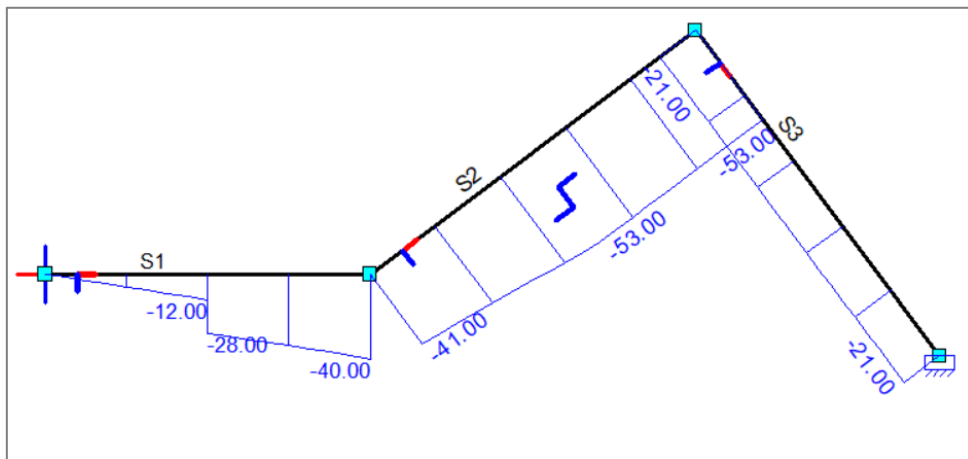
figuur 41: Normaalkrachtenlijn.



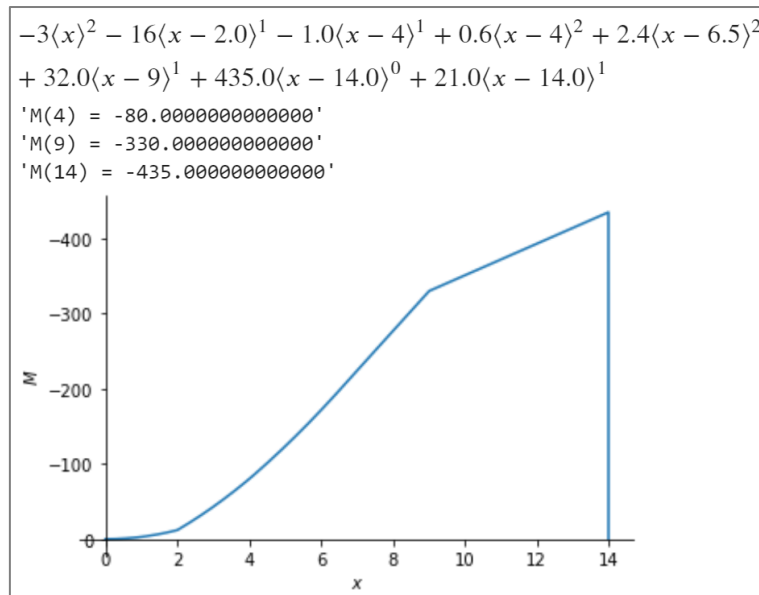
figuur 42: Normaalkrachtenlijn volgens Matrixframe.



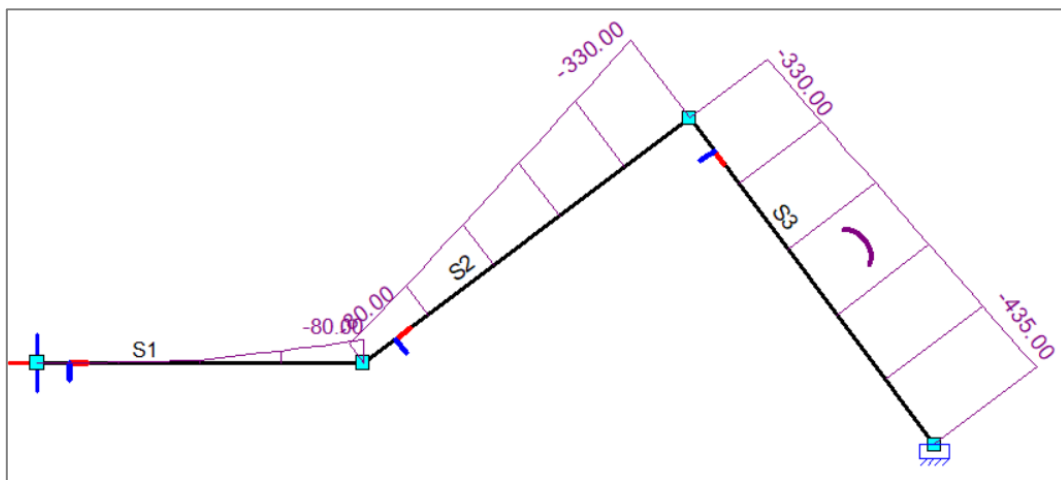
figuur 43: Dwarskrachtenlijn.



figuur 44: Dwarskrachtenlijn volgens Matrixframe.

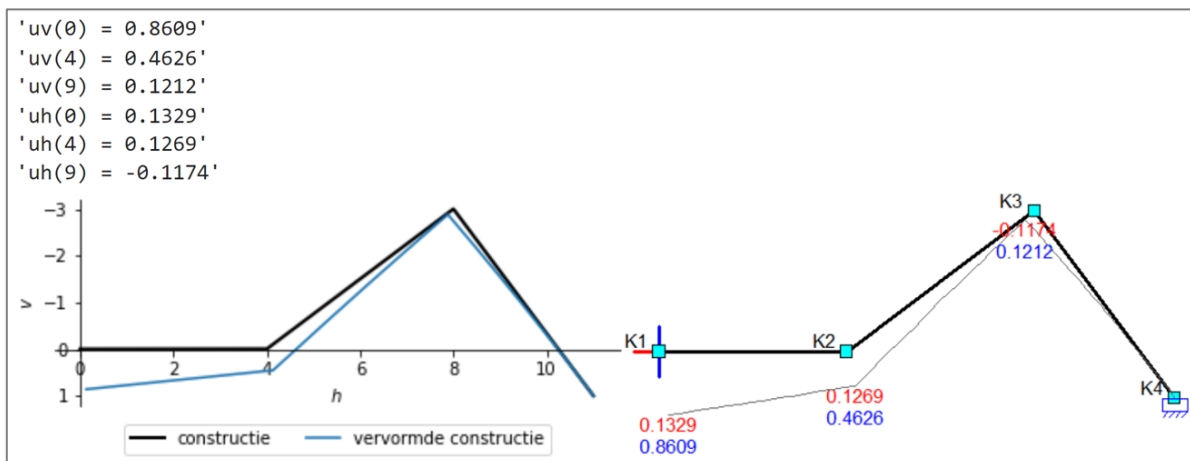


figuur 45: Momentenlijn.



figuur 46: Momentenlijn volgens Matrixframe.

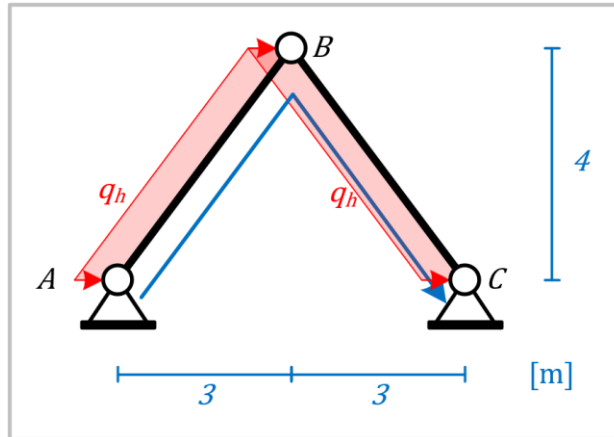
In figuur 47 is afgebeeld hoe de constructie vervormt volgens het model en volgens Matrixframe. Zoals te zien komen de knooppuntverplaatsingen exact overeen.



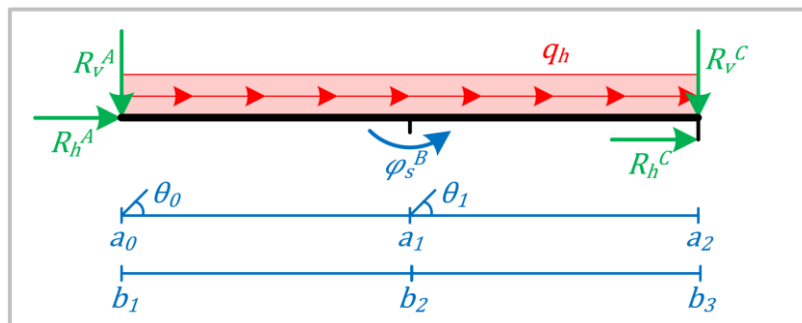
figuur 47: Vervorming van de constructie volgens het model links en volgens matrixframe rechts.

Voorbeeld 2

In figuur 48 **Fout! Verwijzingsbron niet gevonden.** is een driescharnierspant afgebeeld waarop een horizontale uniforme verdeelde belasting (q_h) werkt. In figuur 49 is het bijbehorende overzichtsschema weergegeven. Er is voor deze constructie gekozen om te laten zien hoe een scharnier gemodelleerd wordt.



figuur 48: Driescharnierspant.



figuur 49: Overzichtsschema behorende bij figuur 48.

De gegeven waardes zijn als volgt:

$$q_h = 60 \text{ [kN/m]},$$

$$b_1 = 0 \text{ [m]}, \quad b_2 = 5 \text{ [m]}, \quad b_3 = 10 \text{ [m]}$$

$$a_0 = 0 \text{ [m]}, \quad a_1 = 5 \text{ [m]}, \quad a_2 = L = 10 \text{ [m]}$$

$$\theta_0 = \tan^{-1}(4/3) \text{ [rad]}, \quad \theta_1 = \tan^{-1}(-4/3) \text{ [rad]}$$

$$EA = 10^4 \text{ [kN/m]}, \quad EI = 10^4 \text{ [kNm]}$$

In vgl. 91 en 92 staan de vergelijkingen voor $q_z(x)$ en $q_x(x)$.

$$\begin{aligned} q_z(x) = & R_v^A \left(\langle x - b_1 \rangle^{-1} \cos(\theta_0) + \langle x - a_1 \rangle^{-1} (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_0)) \right) \\ & + R_h^A \left(\langle x - b_1 \rangle^{-1} \sin(\theta_0) + \langle x - a_1 \rangle^{-1} (\sin(\theta_1) - \sin(\theta_0)) \right) \\ & + q_h \left(\langle x - b_1 \rangle^0 \sin(\theta_0) + (\langle x - a_1 \rangle^0 + \langle x - a_1 \rangle^{-1} (a_1 - b_1)) (\sin(\theta_1) - \sin(\theta_0)) \right) \\ & + EI \varphi_s^B \langle x - b_2 \rangle^{-3} + R_v^C \langle x - b_3 \rangle^{-1} \cos(\theta_1) + R_h^C \langle x - b_3 \rangle^{-1} \sin(\theta_1) \end{aligned} \quad (91)$$

$$\begin{aligned}
q_z(x) = & R_h^A \left(\langle x - b_1 \rangle^{-1} \cos(\theta_0) + \langle x - a_1 \rangle^{-1} (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_0)) \right) \\
& - R_v^A \left(\langle x - b_1 \rangle^{-1} \sin(\theta_0) + \langle x - a_1 \rangle^{-1} (\sin(\theta_1) - \sin(\theta_0)) \right) \\
& + q_h \left(\langle x - b_1 \rangle^0 \cos(\theta_0) + (\langle x - a_1 \rangle^0 + \langle x - a_1 \rangle^{-1} (a_1 - b_1)) (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_0)) \right) \\
& - R_v^C \langle x - b_3 \rangle^{-1} \sin(\theta_1) + R_h^C \langle x - b_3 \rangle^{-1} \cos(\theta_1)
\end{aligned} \tag{92}$$

Vgl. 91 kan vervolgens vier keer geïntegreerd worden om achtereenvolgend de vergelijking voor de dwarskracht, het buigend moment, de kromme, de hoekverdraaiing en de doorbuiging te verkrijgen (vgl. 17 t/m 21). Eveneens kan vgl. 92 twee keer geïntegreerd worden om sequentieel de vergelijking voor de normaalkracht, rek en extensie te verkrijgen (vgl. 22 t/m 24). Daarna worden de vergelijking voor doorbuiging en extensie toegepast in vgl. 68 en 69 om de horizontale en verticale verplaatsingen te kunnen bepalen.

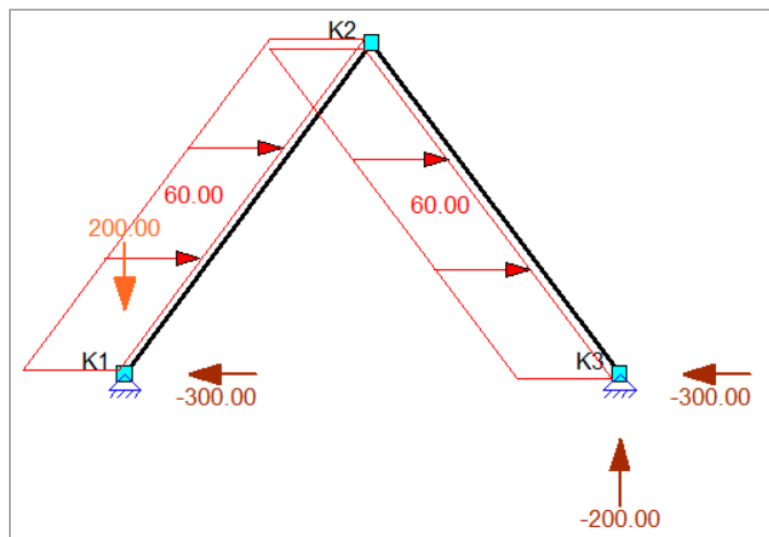
Er zijn drie reactiekrachten en 6 integratieconstanten. Er zijn dus negen oplosvergelijkingen nodig. Deze zijn als volgt:

$$\begin{aligned}
N(0^-) = 0, \quad N(L^+) = 0, \quad V(0^-) = 0, \quad V(L^+) = 0, \quad M(0) = 0, \quad M(a_1) = 0, \\
M(L) = 0, \quad \varphi(L) = 0, \quad u_v(L) = 0, \quad u_h(L) = 0
\end{aligned}$$

De resultaten zijn als volgt:

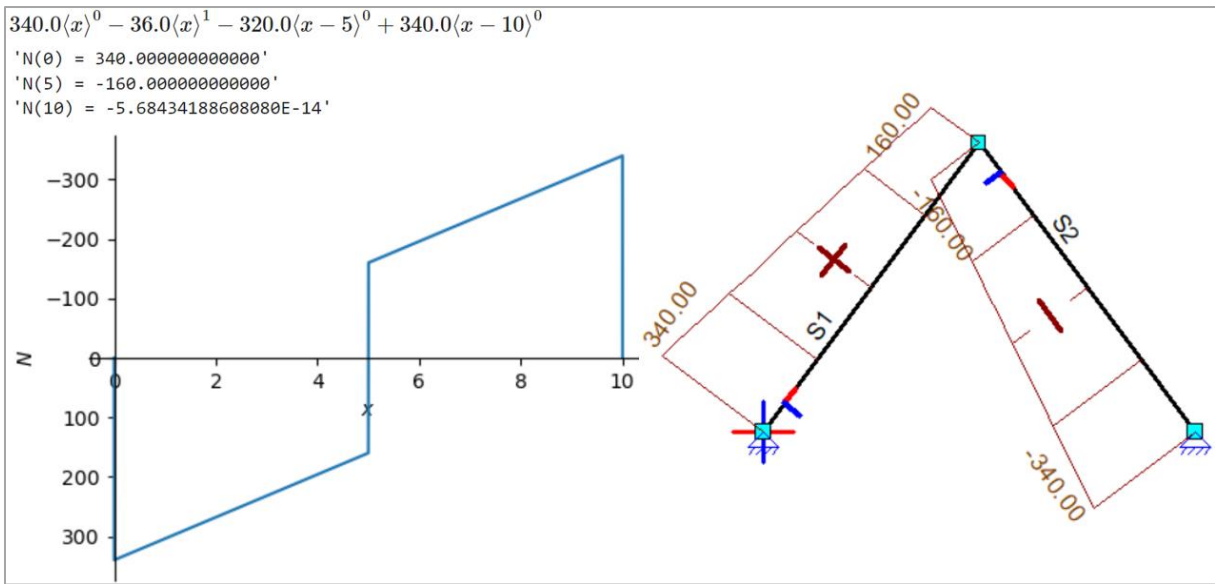
De uitkomsten voor de negen onbekenden staan hieronder en de reactiekrachten komen exact overeen met die van Matrixframe te zien in figuur 50.

$$\begin{aligned}
R_v^A = -R_v^C = 200,00 \text{ [kN]}, \quad R_h^A = R_h^C = -300,00 \text{ [kN]}, \quad \varphi_s^B = 0,00 \text{ [rad]}, \\
C_N = C_V = C_M = C_{u_v} = C_{u_h} = 0, \quad C_\varphi = -0,06 \text{ [rad]}
\end{aligned}$$

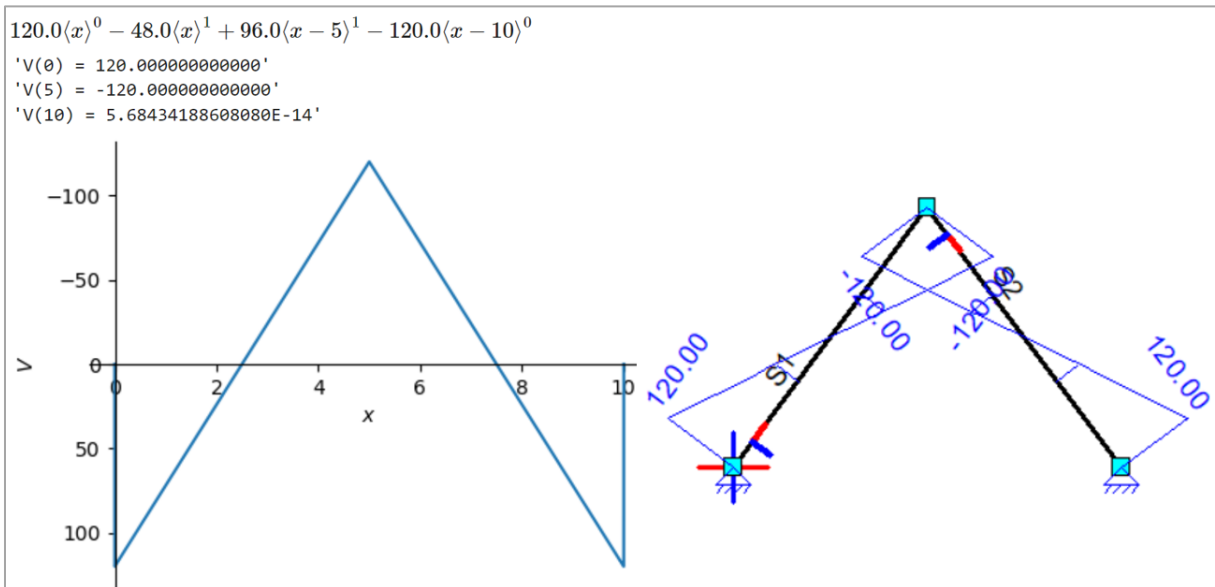


figuur 50: Resultaten voor de reactiekrachten volgens Matrixframe.

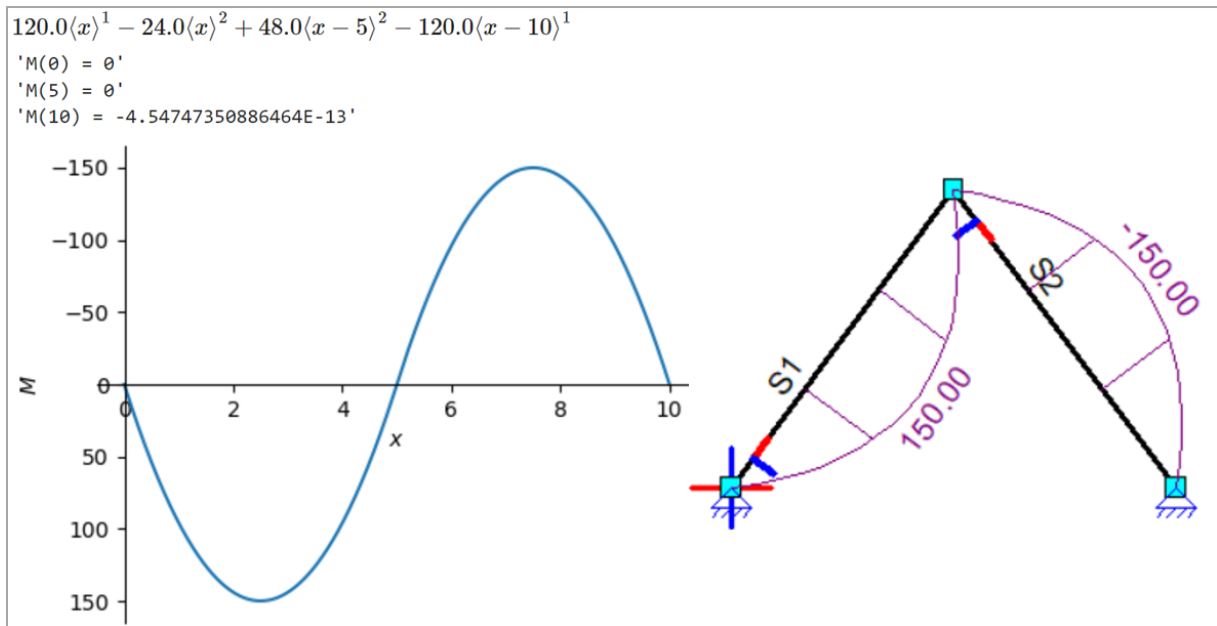
De normaalkrachten-, dwarskrachten- en momentenlijn worden afgebeeld in figuur 51, figuur 52 en figuur 53. Zoals te zien komen ze exact overeen met de resultaten van Matrixframe.



figuur 51: Normaalkrachtenlijn volgens het model links en Matrixframe rechts.

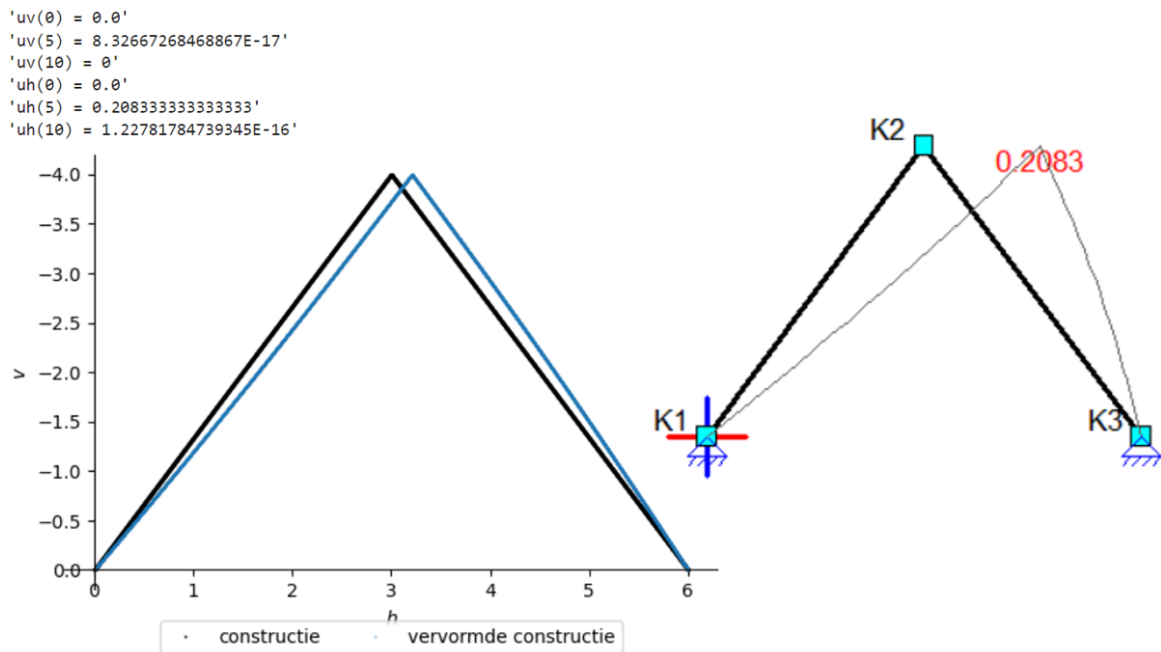


figuur 52: Dwarskrachtenlijn volgens het model links en Matrixframe rechts.



figuur 53: momentenlijn volgens het model links en Matrixframe rechts.

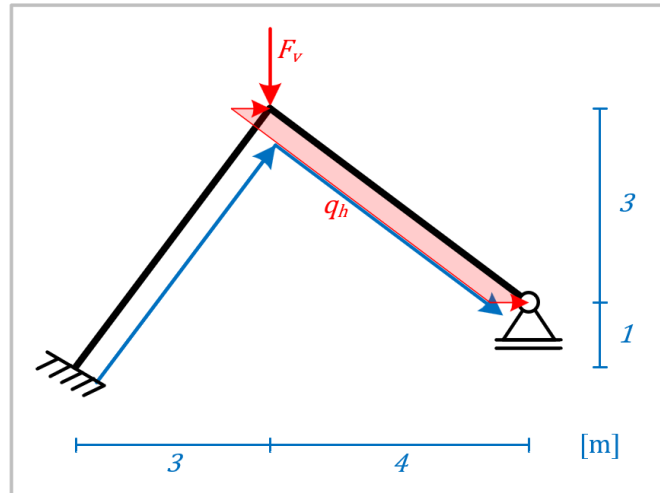
In figuur 54 is afgebeeld hoe de constructie vervormt volgens het model en volgens Matrixframe. Zoals te zien komen de knooppuntverplaatsingen exact overeen.



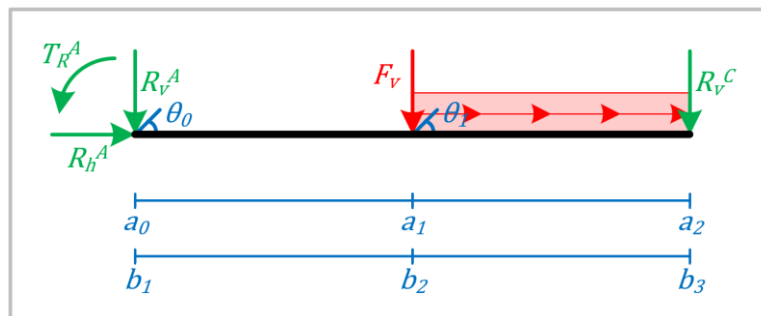
figuur 54: Vervorming van de constructie volgens het model links en volgens matrixframe rechts.

Voorbeeld 3

In figuur 55 is een geknikte statisch onbepaalde constructie te zien dat belast wordt door een verticale kracht (F_v) en een horizontale gelijkmatig verdeelde belasting (q_h). In figuur 56 wordt het bijbehorende overzichtsschema weergegeven. Er is voor deze constructie gekozen om aan te tonen dat het model ook voor statisch onbepaalde constructies werkt.



figuur 55: Geknikte Statisch Onbepaalde constructie.



figuur 56: Overzichtsschema behorende bij figuur 55..

De gegeven waarden zijn als volgt:

$$\begin{aligned}
 F_v &= 60 \text{ [kN]}, & q_h &= 18 \text{ [kN/m]} \\
 b_1 &= 0 \text{ [m]}, & b_2 &= 5 \text{ [m]}, & b_3 &= 10 \text{ [m]} \\
 a_0 &= 0 \text{ [m]}, & a_1 &= 5 \text{ [m]}, & a_2 &= 10 \text{ [m]} \\
 \theta_0 &= \tan^{-1}(4/3) \text{ [rad]}, & \theta_1 &= \tan^{-1}(-3/4) \text{ [rad]} \\
 EA &= 10^4 \text{ [kN/m]}, & EI &= 10^4 \text{ [kNm]}
 \end{aligned}$$

In vgl. 93 en 94 staan de vergelijkingen voor $q_z(x)$ en $q_x(x)$.

$$\begin{aligned}
 q_z(x) = & R_v^A (\langle x - b_1 \rangle^{-1} \cos(\theta_0) + \langle x - a_1 \rangle^{-1} (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_0))) \\
 & + R_h^A (\langle x - b_1 \rangle^{-1} \sin(\theta_0) + \langle x - a_1 \rangle^{-1} (\sin(\theta_1) - \sin(\theta_0))) + T_R \langle x - b_1 \rangle^{-2} + F_v \langle x - b_2 \rangle^{-1} \cos(\theta_1) \\
 & + R_v^C \langle x - b_3 \rangle^{-1} \cos(\theta_1)
 \end{aligned} \tag{93}$$

$$\begin{aligned}
 q_x(x) = & R_h^A (\langle x - b_1 \rangle^{-1} \cos(\theta_0) + \langle x - a_1 \rangle^{-1} (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_0))) \\
 & - R_v^A (\langle x - b_1 \rangle^{-1} \sin(\theta_0) + \langle x - a_1 \rangle^{-1} (\sin(\theta_1) - \sin(\theta_0))) - F_v \langle x - b_2 \rangle^{-1} \sin(\theta_1) \\
 & - R_v^C \langle x - b_3 \rangle^{-1} \sin(\theta_1)
 \end{aligned} \tag{94}$$

Vgl. 93 kan vervolgens vier keer geïntegreerd worden om achtereenvolgend de vergelijking voor de dwarskracht, het buigend moment, de kromme, de hoekverdraaiing en de doorbuiging te verkrijgen (vgl. 17 t/m 21). Eveneens kan vgl. 94 twee keer geïntegreerd worden om sequentieel de vergelijking voor de normaalkracht, rek en extensie te verkrijgen (vgl. 22 t/m 24). Daarna worden de vergelijking voor doorbuiging en extensie toegepast in vgl. 68 en 69 om de horizontale en verticale verplaatsingen te kunnen bepalen.

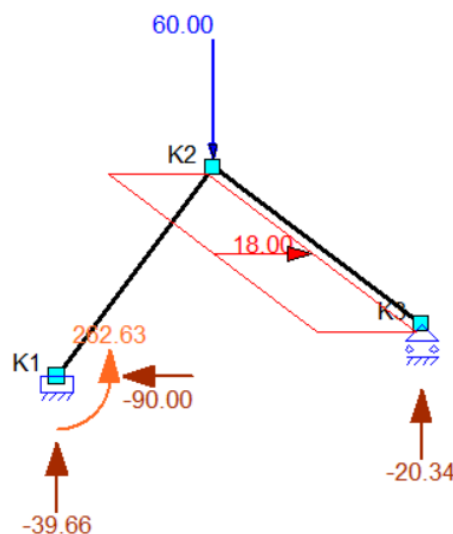
Er zijn vier reactiekrachten en zes integratieconstanten. Er zijn dus tien oplosvergelijkingen nodig. Deze zijn als volgt:

$$\begin{aligned}
 N(0^-) = 0, \quad N(L^+) = 0, \quad V(0^-) = 0, \quad V(L^+) = 0, \quad M(0^-) = 0, \quad M(L) = 0, \\
 \varphi(L) = 0, \quad u_v(0) = 0, \quad u_v(L) = 0, \quad u_h(0) = 0
 \end{aligned}$$

De resultaten zijn als volgt:

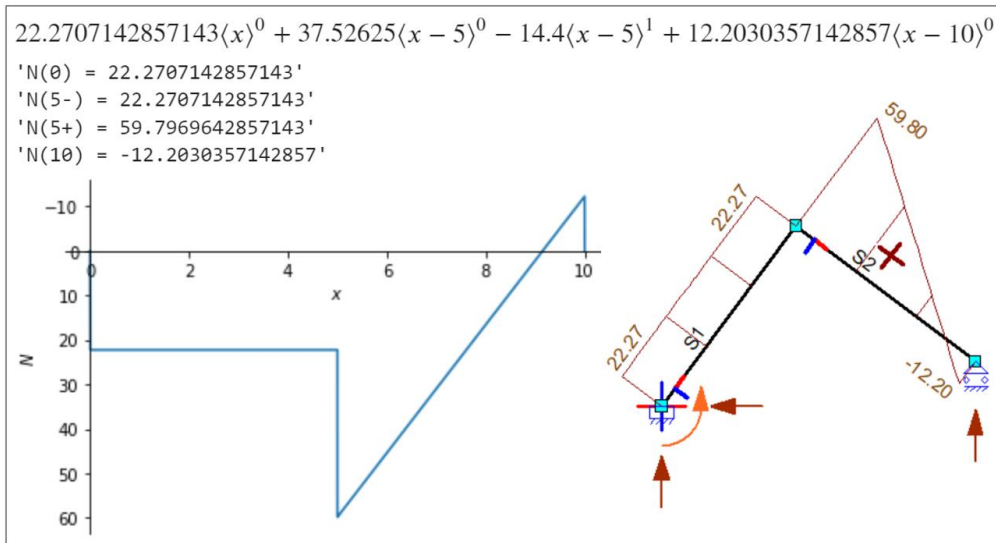
De uitkomsten voor de negen onbekenden staan hieronder. Zoals te zien in figuur 57 komen de waardes voor de reactiekrachten exact overeen met die van Matrixframe. Ook zijn de waardes voor de constanten te verwachten sinds de constructie is ingeklemd op $x = 0$.

$$\begin{aligned}
 R_v^A = -39,66 \text{ [kN]}, \quad R_h^A = -90,00 \text{ [kN]}, \quad T_R^A = 262,63 \text{ [kNm]}, \quad R_v^C = -20,34 \text{ [kN]} \\
 C_N = C_V = C_M = C_\varphi = C_{u_v} = C_{u_h} = 0,00
 \end{aligned}$$

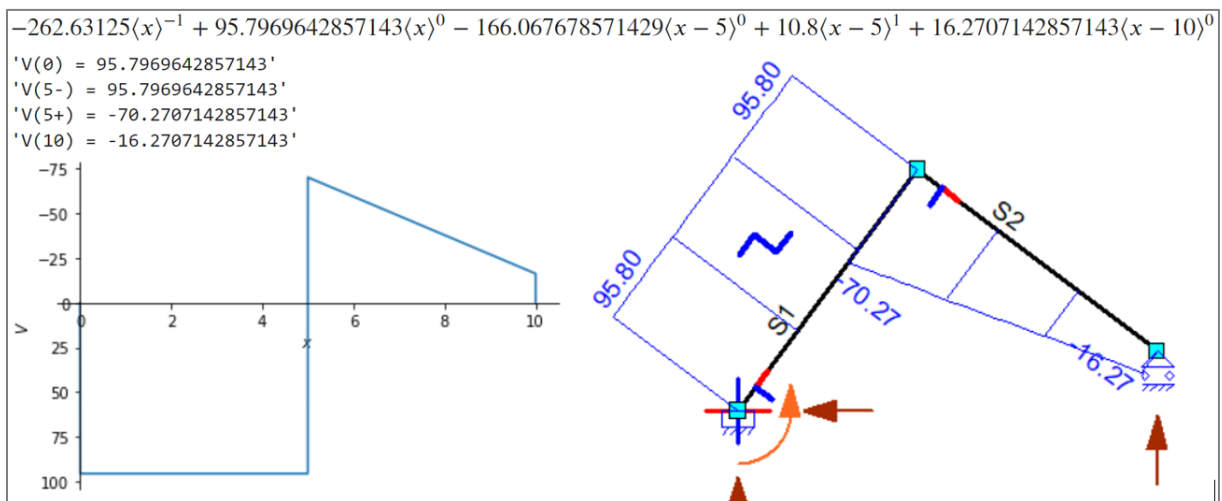


figuur 57: Reactiekrachten in Matrixframe.

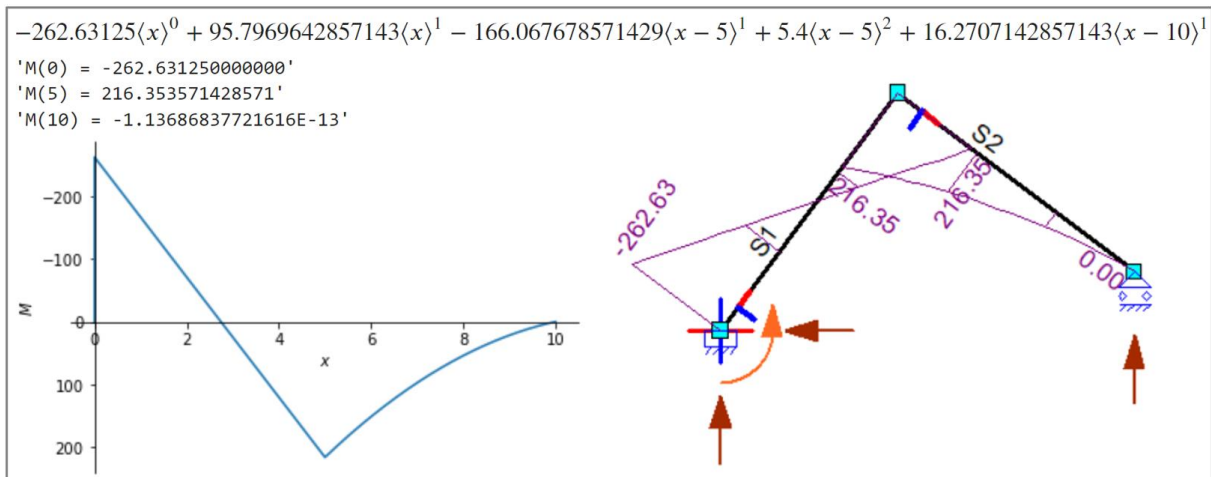
De vergelijking voor de normaalkrachten- dwarskrachten- en momentenlijn worden volgens de Macaulay methode en Matrixframe worden weergegeven in figuur 58, figuur 59 en figuur 60. Zoals te zien komen de waardes exact overeen.



figuur 58: De normaalkrachtenlijn volgens de Macaulay methode links en Matrixframe rechts(zelfgemaakt).

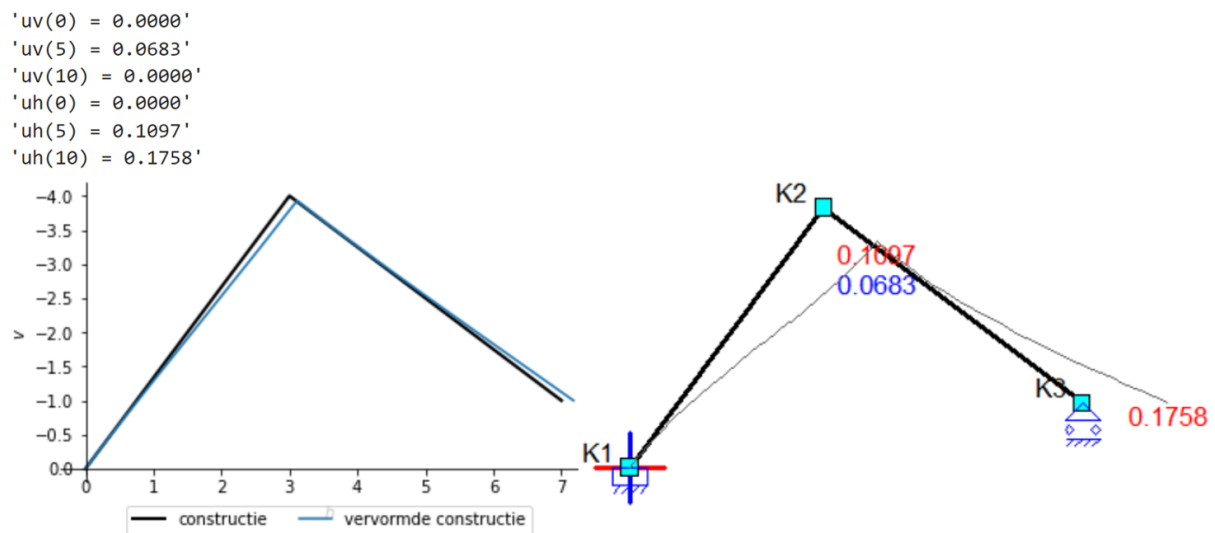


figuur 59: De dwarskrachtenlijn volgens de Macaulay methode links en Matrixframe rechts.



figuur 60: De momentenlijn volgens de Macaulay methode links en Matrixframe rechts.

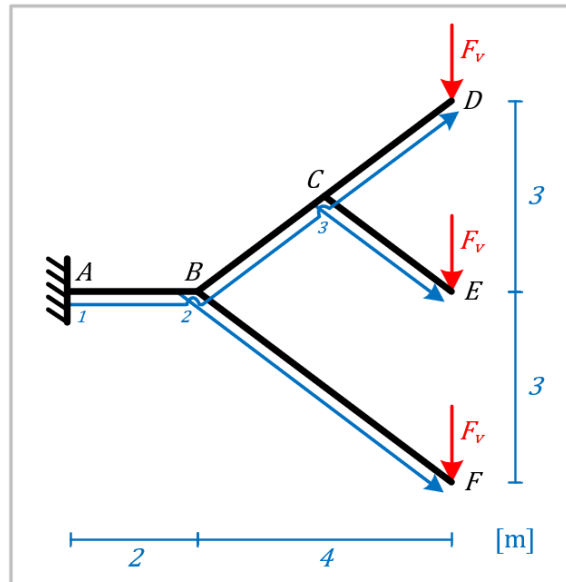
In figuur 61 is afgebeeld hoe de constructie vervormt volgens het model en volgens Matrixframe. Zoals te zien komen de knooppuntverplaatsingen exact overeen.



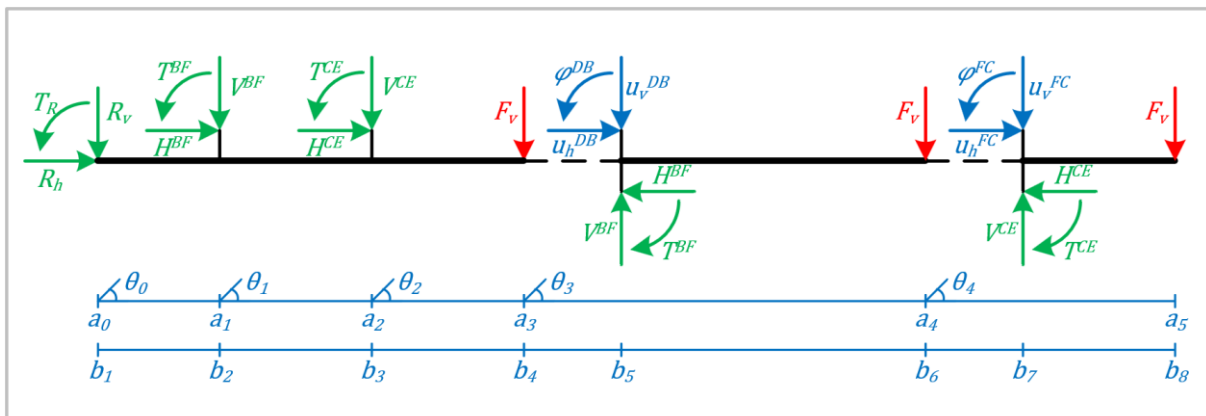
figuur 61: De knooppunt verplaatsingen volgens Matrixframe. Blauw is verticaal en rood is horizontaal.

Voorbeeld 4

In figuur 62 is een constructie te zien dat ingeklemd is in punt A , vertakt op punt B en C , en belast wordt door een verticale puntlast (F_v) in punt D , E en F . De functie van x volgt de nummering van de blauwe pijlen. In figuur 63 is het bijbehorende overzichtsschema weergegeven. Er is voor dit voorbeeld gekozen om te laten zien hoe een constructie met meerdere sprongpunten kan worden gemodelleerd.



figuur 62: Meermaals vertakte ingeklemde constructie.



figuur 63: Overzichtsschema behorende bij figuur 62.

De gegeven waarden zijn als volgt:

$$F_v = 20 \text{ [kN]}$$

$$b_1 = 0 \text{ [m]}, \quad b_2 = 2 \text{ [m]}, \quad b_3 = 4,5 \text{ [m]}, \quad b_4 = 7 \text{ [m]}, \quad b_5 = 7^+ \text{ [m]}, \quad b_6 = 12 \text{ [m]}, \\ b_7 = 12^+ \text{ [m]}, \quad b_8 = 14,5 \text{ [m]}$$

$$a_0 = 0 \text{ [m]}, \quad a_1 = 2 \text{ [m]}, \quad a_2 = 4,5 \text{ [m]}, \quad a_3 = 7 \text{ [m]}, \quad a_4 = 12 \text{ [m]}, \\ a_5 = 14,5 \text{ [m]}$$

$$\theta_0 = 0 \text{ [rad]}, \quad \theta_1 = \theta_2 = \tan^{-1}(3/4) \text{ [rad]}, \quad \theta_3 = \theta_4 = \tan^{-1}(-3/4) \text{ [rad]}$$

$$EA = 10^4 \text{ [kN/m]}, \quad EI = 10^4 \text{ [kNm]}$$

In vgl. 95 en 96 staan de vergelijkingen voor $q_z(x)$ en $q_x(x)$.

$$\begin{aligned}
q_z(x) = & R_v \left(\langle x - b_1 \rangle^{-1} \cos(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=4} \left(\langle x - a_i \rangle^{-1} (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})) \right) \right) \\
& + R_h \left(\langle x - b_1 \rangle^{-1} \sin(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=4} \left(\langle x - a_i \rangle^{-1} (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})) \right) \right) + T_R \langle x - b_1 \rangle^{-2} \\
& + V^{BF} \left(\langle x - b_2 \rangle^{-1} \cos(\theta_1) + \sum_{i=2}^{i=4} \left(\langle x - a_i \rangle^{-1} (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})) \right) \right) \\
& + H^{BF} \left(\langle x - b_2 \rangle^{-1} \sin(\theta_1) + \sum_{i=2}^{i=4} \left(\langle x - a_i \rangle^{-1} (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})) \right) \right) + T^{BF} \langle x - b_2 \rangle^{-2} \\
& + V^{CE} \left(\langle x - b_3 \rangle^{-1} \cos(\theta_2) + \sum_{i=3}^{i=4} \left(\langle x - a_i \rangle^{-1} (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})) \right) \right) \\
& + H^{CE} \left(\langle x - b_3 \rangle^{-1} \sin(\theta_2) + \sum_{i=3}^{i=4} \left(\langle x - a_i \rangle^{-1} (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})) \right) \right) + T^{BCE} \langle x - b_3 \rangle^{-2} \\
& + F_v \left(\langle x - b_4 \rangle^{-1} \cos(\theta_3) + \langle x - a_4 \rangle^{-1} (\cos(\theta_4) - \cos(\theta_3)) \right) \\
& - V^{BF} \left(\langle x - b_5 \rangle^{-1} \cos(\theta_3) + \langle x - a_4 \rangle^{-1} (\cos(\theta_4) - \cos(\theta_3)) \right) \\
& + EI\varphi^{DB} \langle x - b_5 \rangle^{-3} + EIu_z^{DB} \langle x - b_5 \rangle^{-4} \\
& - H^{BF} \left(\langle x - b_5 \rangle^{-1} \sin(\theta_3) + \langle x - a_4 \rangle^{-1} (\sin(\theta_4) - \sin(\theta_3)) \right) - T^{BF} \langle x - b_5 \rangle^{-2} \\
& + F_v \langle x - b_6 \rangle^{-1} \cos(\theta_4) + EI\varphi^{FC} \langle x - b_7 \rangle^{-3} + EIu_z^{FC} \langle x - b_7 \rangle^{-4} \\
& - V^{CE} \langle x - b_7 \rangle^{-1} \cos(\theta_4) - H^{CE} \langle x - b_7 \rangle^{-1} \sin(\theta_4) - T^{CE} \langle x - b_7 \rangle^{-2} \\
& + F_v \langle x - b_8 \rangle^{-1} \cos(\theta_4) \tag{95}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_x(x) = & R_h \left(\langle x - b_1 \rangle^{-1} \cos(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=4} \left(\langle x - a_i \rangle^{-1} (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})) \right) \right) \\
& - R_v \left(\langle x - b_1 \rangle^{-1} \sin(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=4} \left(\langle x - a_i \rangle^{-1} (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})) \right) \right) \\
& + H^{BF} \left(\langle x - b_2 \rangle^{-1} \cos(\theta_1) + \sum_{i=2}^{i=4} \left(\langle x - a_i \rangle^{-1} (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})) \right) \right) \\
& - V^{BF} \left(\langle x - b_2 \rangle^{-1} \sin(\theta_1) + \sum_{i=2}^{i=4} \left(\langle x - a_i \rangle^{-1} (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})) \right) \right) \\
& + H^{CE} \left(\langle x - b_3 \rangle^{-1} \cos(\theta_2) + \sum_{i=3}^{i=4} \left(\langle x - a_i \rangle^{-1} (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})) \right) \right) \\
& - V^{CE} \left(\langle x - b_3 \rangle^{-1} \sin(\theta_2) + \sum_{i=3}^{i=4} \left(\langle x - a_i \rangle^{-1} (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})) \right) \right) \\
& - F_v \left(\langle x - b_4 \rangle^{-1} \sin + \langle x - a_4 \rangle^{-1} (\sin(\theta_4) - \sin(\theta_3)) \right) \\
& - H^{BF} \left(\langle x - b_5 \rangle^{-1} \cos(\theta_3) + \langle x - a_4 \rangle^{-1} (\cos(\theta_4) - \cos(\theta_3)) \right) \\
& + V^{BF} \left(\langle x - b_5 \rangle^{-1} \sin(\theta_3) + \langle x - a_4 \rangle^{-1} (\sin(\theta_4) - \sin(\theta_3)) \right) + EAu_z^{DB} \langle x - b_5 \rangle^{-2} \\
& - F_v \langle x - b_6 \rangle^{-1} \sin(\theta_4) + EAu_z^{FC} \langle x - b_7 \rangle^{-2} \\
& - H^{CE} \langle x - b_7 \rangle^{-1} \cos(\theta_4) + V^{CE} \langle x - b_7 \rangle^{-1} \sin(\theta_4) - F_v \langle x - b_8 \rangle^{-1} \sin(\theta_4) \tag{96}
\end{aligned}$$

Vgl. 95 kan vervolgens vier keer geïntegreerd worden om achtereenvolgend de vergelijking voor de dwarskracht, het buigend moment, de kromme, de hoekverdraaiing en de doorbuiging te verkrijgen (vgl. 17 t/m 21). Eveneens kan vgl. 96 twee keer geïntegreerd worden om sequentieel de vergelijking voor de normaalkracht, rek en extensie te verkrijgen (vgl. 22 t/m 24). Daarna worden de vergelijking voor doorbuiging en extensie toegepast in vgl. 68 en 69 om de horizontale en verticale verplaatsingen te kunnen bepalen.

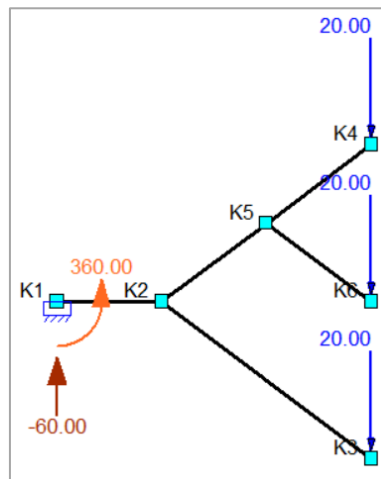
Er zijn drie reactiekrachten, zes snedekrachten en zes sprongconstanten en zes integratieconstanten. Er zijn dus 21 oplosvergelijkingen nodig. Deze zijn als volgt:

$$\begin{aligned}
 N(a_0^-) &= 0, & N(a_3) &= 0, & N(a_4) &= 0, & N(a_5^+) &= 0, \\
 V(a_0^-) &= 0, & V(a_3) &= 0, & V(a_4) &= 0, & V(a_5^+) &= 0, \\
 M(a_0^-) &= 0, & M(a_3) &= 0, & M(a_4) &= 0, & M(a_5^+) &= 0, \\
 \varphi(a_0) &= 0, & \varphi(a_3^+) - \varphi(a_1) &= 0, & \varphi(a_4^+) - \varphi(a_2) &= 0 \\
 u_v(a_0) &= 0, & u_v(a_3^+) - u_v(a_1) &= 0, & u_v(a_4^+) - u_v(a_2) &= 0 \\
 u_h(a_0) &= 0, & u_h(a_3^+) - u_h(a_1) &= 0, & u_h(a_4^+) - u_h(a_2) &= 0
 \end{aligned}$$

De resultaten zijn als volgt:

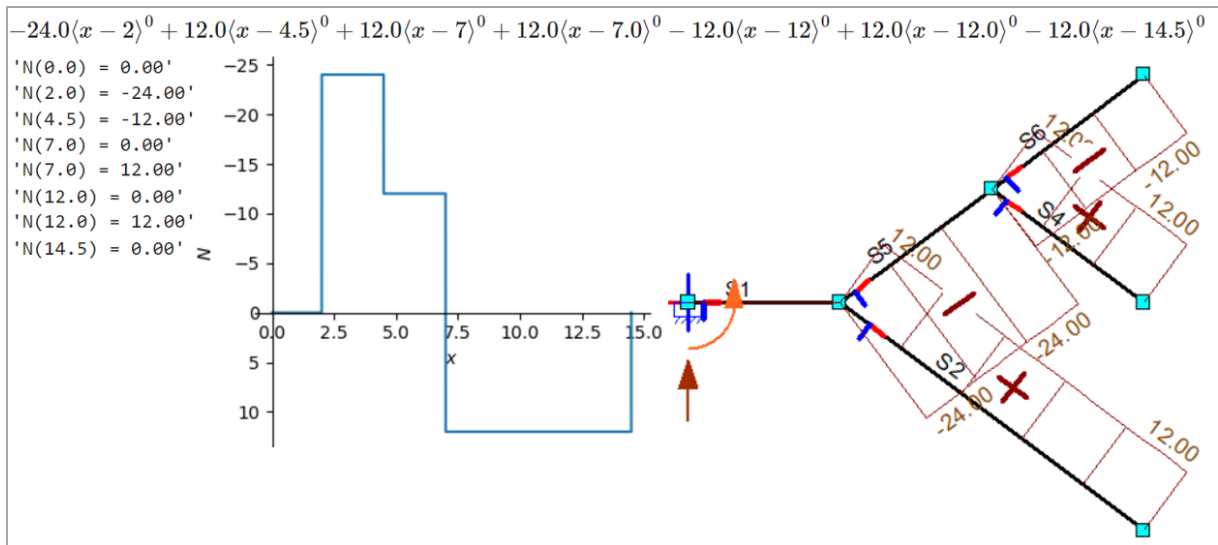
De uitkomsten voor de 21 onbekenden staan hieronder. De gevonden waarden voor de reactiekrachten zijn exact hetzelfde als dat van Matrixframe, weergegeven in figuur 64.

$$\begin{aligned}
 R_v &= -60,00 \text{ [kN]}, & R_h &= 0,00 \text{ [kN]}, & T_R &= 360,00 \text{ [kNm]}, \\
 V^{BF} &= 20,00 \text{ [kN]}, & H^{BF} &= 0,00 \text{ [kN]}, & T^{BF} &= -80 \text{ [kNm]} \\
 V^{CE} &= 20,00 \text{ [kN]}, & H^{CE} &= 0,00 \text{ [kN]}, & T^{CE} &= -80 \text{ [kNm]} \\
 \varphi^{DB} &= -0,0350 \text{ [rad]}, & u_v^{DB} &= -0,3454 \text{ [m]}, & u_h^{DB} &= -0,2478 \text{ [m]} \\
 \varphi^{FC} &= 0,0100 \text{ [rad]}, & u_v^{FC} &= -0,1400 \text{ [m]}, & u_h^{FC} &= 0,3254 \text{ [m]} \\
 C_N &= C_V = C_M = C_\varphi = C_{u_h} = C_{u_v} = 0
 \end{aligned}$$

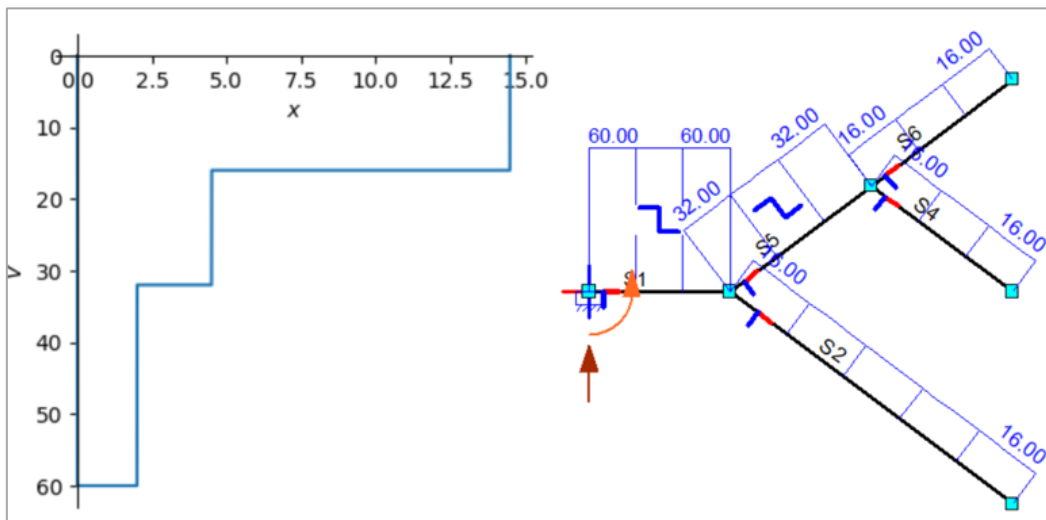


figuur 64: Reactiekrachten in Matrixframe.

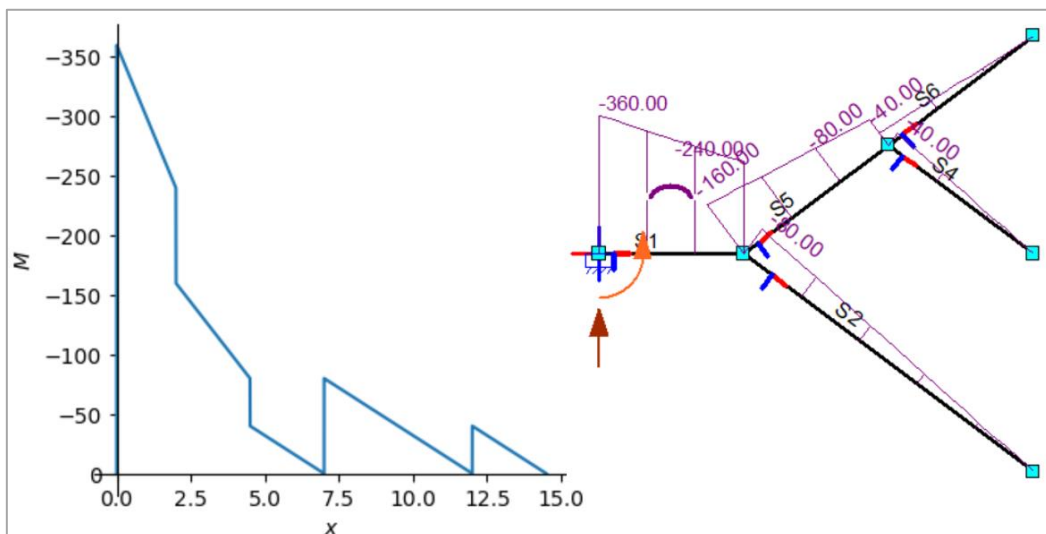
De normaalkrachten-, dwarskrachten- en momentenlijn worden afgebeeld in figuur 65, figuur 66 en figuur 67. Zoals te zien komen ze exact overeen met de resultaten van Matrixframe.



figuur 65: Normaalkrachtenlijn volgens het model links en Matrixframe rechts.

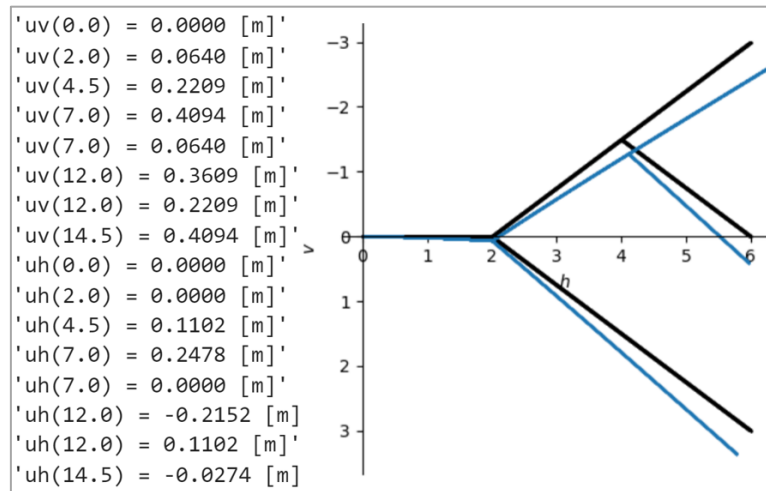


figuur 66: Dwarskrachtenlijn volgens het model links en Matrixframe rechts.

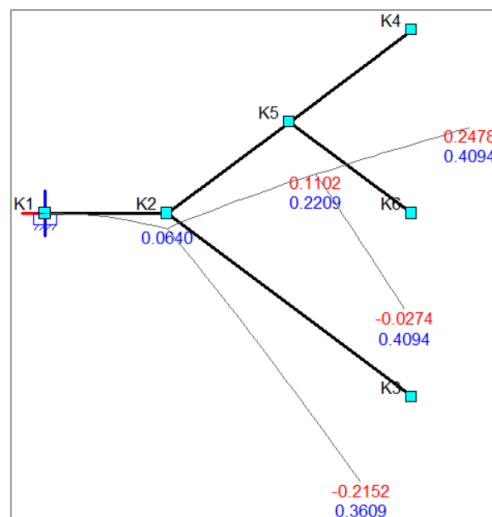


figuur 67: Momentenlijn volgens het model links en Matrixframe rechts.

In figuur 68 wordt de vervorming van de constructie volgens het model afgebeeld en in figuur 69 volgens Matrixframe. Zoals te zien komen deze exact overeen.



figuur 68: Vervorming volgens het model.



figuur 69: Vervorming volgens Matrixframe.

In vgl. 97 en 98 staan de vergelijkingen voor $q_z(x)$ en $q_x(x)$.

$$\begin{aligned}
q_z(x) = & R_v^A (\langle x - b_1 \rangle^{-1} \cos(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=4} (\langle x - a_i \rangle^{-1} (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) \\
& + R_h^A (\langle x - b_1 \rangle^{-1} \sin(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=4} (\langle x - a_i \rangle^{-1} (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) + T_R \langle x - b_1 \rangle^{-2} \\
& + q_h \left(\langle x - b_1 \rangle^0 \sin(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=4} \left((\langle x - a_i \rangle^0 + \langle x - a_i \rangle^{-1} (a_i - b_1)) (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})) \right) \right) \\
& - q_h \left(\langle x - b_2 \rangle^0 \sin(\theta_1) + \sum_{i=2}^{i=4} \left((\langle x - a_i \rangle^0 + \langle x - a_i \rangle^{-1} (a_i - b_2)) (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})) \right) \right) \\
& + q_v \left(\langle x - b_2 \rangle^0 \cos(\theta_1) + \sum_{i=2}^{i=4} \left((\langle x - a_i \rangle^0 + \langle x - a_i \rangle^{-1} (a_i - b_2)) (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})) \right) \right) \\
& - q_v \left(\langle x - b_4 \rangle^0 \cos(\theta_3) + (\langle x - a_4 \rangle^0 + \langle x - a_4 \rangle^{-1} (a_4 - b_4)) (\cos(\theta_4) - \cos(\theta_3)) \right) \\
& + V^{EB} (\langle x - b_3 \rangle^{-1} \cos(\theta_1) + \sum_{i=3}^{i=4} (\langle x - a_i \rangle^{-1} (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) \\
& + H^{EB} (\langle x - b_3 \rangle^{-1} \sin(\theta_1) + \sum_{i=3}^{i=4} (\langle x - a_i \rangle^{-1} (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) \\
& + R_v^C \langle x - b_5 \rangle^{-1} \cos(\theta_4) + R_h^C \langle x - b_5 \rangle^{-1} \sin(\theta_4) \\
& - V^{EB} \langle x - b_6 \rangle^{-1} \cos(\theta_4) - H^{EB} \langle x - b_6 \rangle^{-1} \sin(\theta_4) + EI \varphi_s^{EB} \langle x - b_6 \rangle^{-3} + EI u_z^{EB} \langle x - b_6 \rangle^{-4} \\
& + R_v^B \langle x - b_7 \rangle^{-1} \cos(\theta_4) + R_h^B \langle x - b_7 \rangle^{-1} \sin(\theta_4) \tag{97}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_x(x) = & R_h^A (\langle x - b_1 \rangle^{-1} \cos(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=4} (\langle x - a_i \rangle^{-1} (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) \\
& - R_v^A (\langle x - b_1 \rangle^{-1} \sin(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=4} (\langle x - a_i \rangle^{-1} (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) + T_R \langle x - b_1 \rangle^{-2} \\
& + q_h \left(\langle x - b_1 \rangle^0 \cos(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=4} \left((\langle x - a_i \rangle^0 + \langle x - a_i \rangle^{-1} (a_i - b_1)) (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})) \right) \right) \\
& - q_h \left(\langle x - b_2 \rangle^0 \cos(\theta_1) + \sum_{i=2}^{i=4} \left((\langle x - a_i \rangle^0 + \langle x - a_i \rangle^{-1} (a_i - b_2)) (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})) \right) \right) \\
& - q_v \left(\langle x - b_2 \rangle^0 \sin(\theta_1) + \sum_{i=2}^{i=4} \left((\langle x - a_i \rangle^0 + \langle x - a_i \rangle^{-1} (a_i - b_2)) (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})) \right) \right) \\
& + q_v \left(\langle x - b_4 \rangle^0 \sin(\theta_3) + (\langle x - a_4 \rangle^0 + \langle x - a_4 \rangle^{-1} (a_4 - b_4)) (\sin(\theta_4) - \sin(\theta_3)) \right) \\
& + H^{EB} (\langle x - b_3 \rangle^{-1} \cos(\theta_1) + \sum_{i=3}^{i=4} (\langle x - a_i \rangle^{-1} (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) \\
& - V^{EB} (\langle x - b_3 \rangle^{-1} \sin(\theta_1) + \sum_{i=3}^{i=4} (\langle x - a_i \rangle^{-1} (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) \\
& + R_h^C \langle x - b_5 \rangle^{-1} \cos(\theta_4) - R_v^C \langle x - b_5 \rangle^{-1} \sin(\theta_4) \\
& - H^{EB} \langle x - b_6 \rangle^{-1} \cos(\theta_4) + V^{EB} \langle x - b_6 \rangle^{-1} \sin(\theta_4) + EA u_x^{EB} \langle x - b_6 \rangle^{-2} \\
& + R_h^B \langle x - b_7 \rangle^{-1} \cos(\theta_4) - R_v^B \langle x - b_7 \rangle^{-1} \sin(\theta_4) \tag{98}
\end{aligned}$$

Vgl. 97 kan vervolgens vier keer geïntegreerd worden om achtereenvolgend de vergelijking voor de dwarskracht, het buigend moment, de kromme, de hoekverdraaiing en de doorbuiging te verkrijgen (vgl. 17 t/m 21). Eveneens kan vgl. 98 twee keer geïntegreerd worden om sequentieel de vergelijking voor de normaalkracht, rek en extensie te verkrijgen (vgl. 22 t/m 24). Daarna worden de vergelijking

voor doorbuiging en extensie toegepast in vgl. 68 en 69 om de horizontale en verticale verplaatsingen te kunnen bepalen.

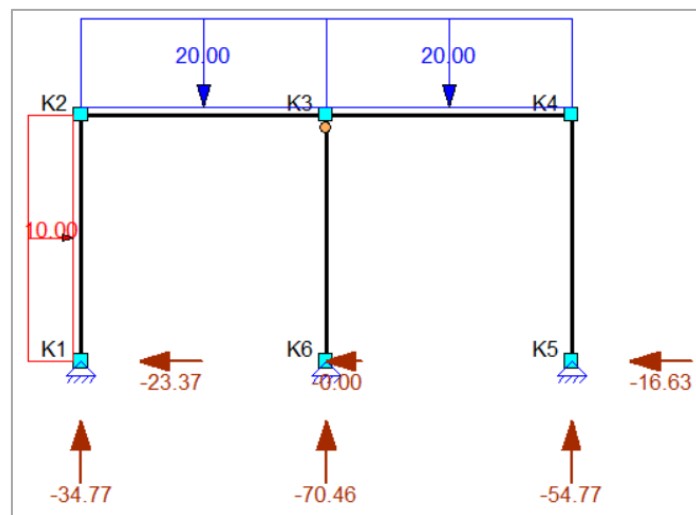
Er zijn zes reactiekrachten, één scharnier, twee snedekrachten, twee sprongconstanten en zes integratieconstanten. Er zijn dus 17 oplosvergelijkingen nodig. Deze zijn als volgt:

$$\begin{aligned}
 N(a_0^-) &= 0, & N(a_4) &= 0, & N(a_5^+) &= 0, \\
 V(a_0^-) &= 0, & V(a_4) &= 0, & V(a_5^+) &= 0, \\
 M(a_0^-) &= 0, & M(a_4) &= 0, & M(a_5^+) &= 0, \\
 u_v(a_0) &= 0, & u_v(a_4^+) - u_v(a_2) &= 0, & u_v(a_4) &= 0, & u_v(a_5) &= 0 \\
 u_h(a_0) &= 0, & u_h(a_4^+) - u_h(a_2) &= 0, & u_h(a_4) &= 0, & u_h(a_5) &= 0
 \end{aligned}$$

De resultaten zijn als volgt:

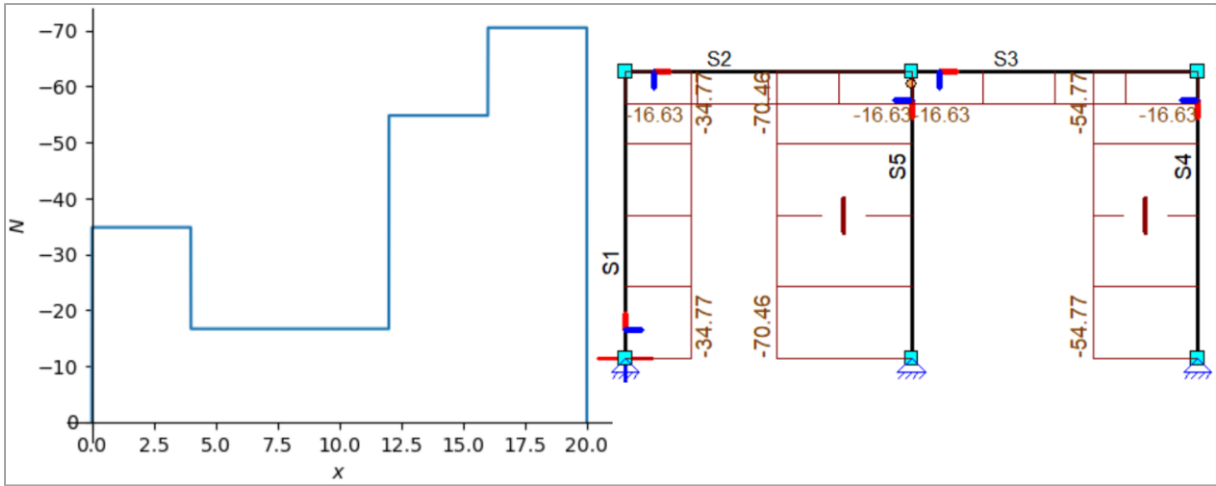
De uitkomsten voor de 17 onbekenden staan hieronder. De gevonden waarden voor de reactiekrachten zijn exact hetzelfde als dat van Matrixframe, weergegeven in figuur 72.

$$\begin{aligned}
 R_v^A &= -34,77 \text{ [kN]}, & R_h^A &= -23,37 \text{ [kN]}, & R_v^B &= -70,46 \text{ [kN]}, & R_h^B &= 0,00 \text{ [kN]}, \\
 R_v^C &= -54,77 \text{ [kN]}, & R_h^C &= -16,63 \text{ [kN]}, & \varphi_s^{EB} &= -0,0277 \text{ [rad]} \\
 V^{EB} &= -70,46 \text{ [kN]}, & H^{EB} &= 0,00 \text{ [kN]} \\
 u_v^{CE} &= 0,2819 \text{ [m]}, & u_h^{CE} &= 0,5200 \text{ [m]} \\
 C_N &= C_V = C_M = C_{u_h} = C_{u_v} = 0, & C_\varphi &= -0,1823 \text{ [rad]}
 \end{aligned}$$

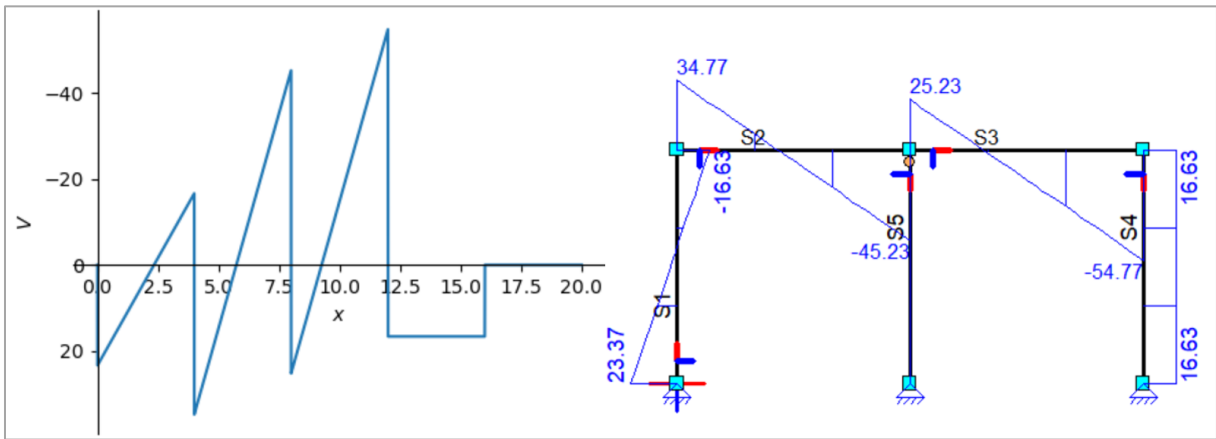


figuur 72: Reactiekrachten in Matrixframe.

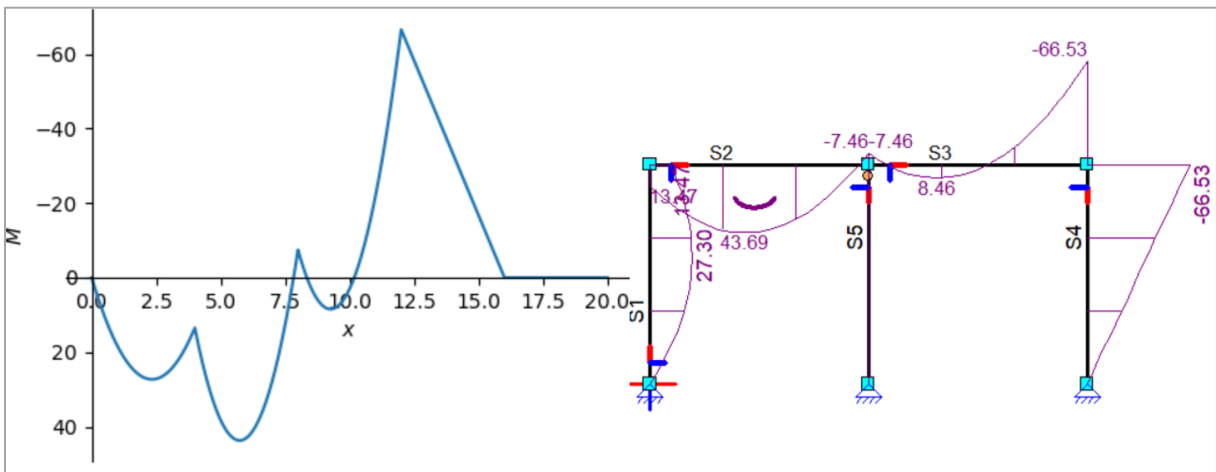
De normaalkrachten-, dwarskrachten- en momentenlijn worden afgebeeld in figuur 73, figuur 74 en figuur 75. Zoals te zien komen ze exact overeen met de resultaten van Matrixframe.



figuur 73: Normaalkrachtenlijn volgens het model links en Matrixframe rechts.

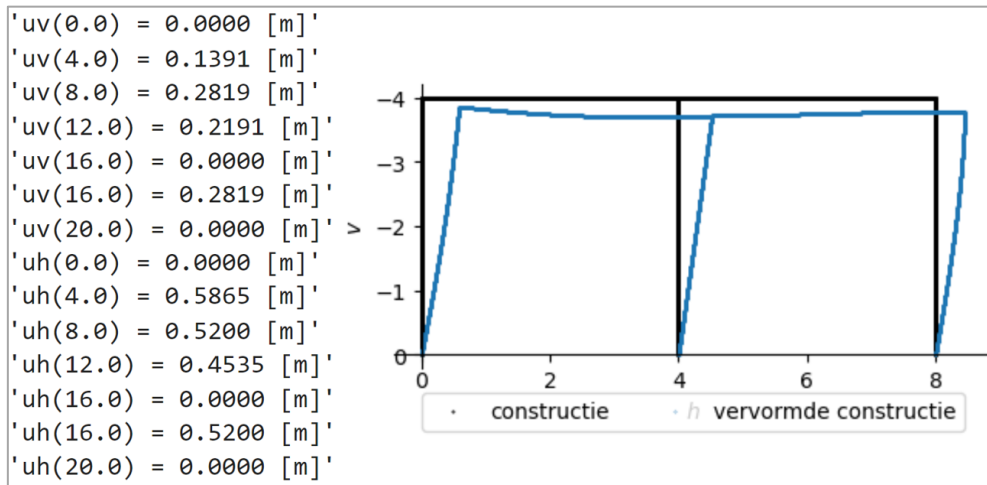


figuur 74: Dwarskrachtenlijn volgens het model links en Matrixframe rechts.

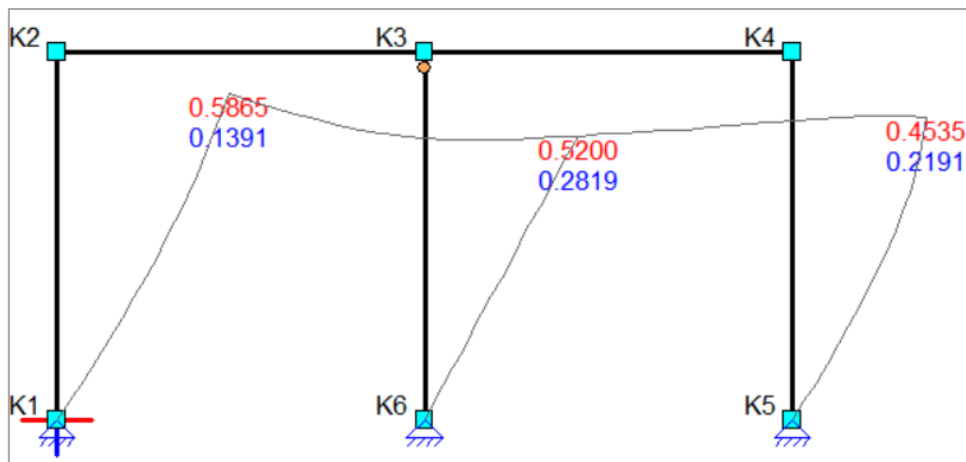


figuur 75: Momentenlijn volgens het model links en Matrixframe rechts.

In figuur 76 wordt de vervorming van de constructie volgens het model afgebeeld en in figuur 77 volgens Matrixframe. Zoals te zien komen deze exact overeen.



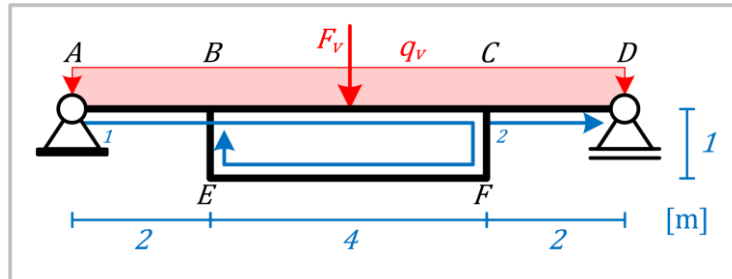
figuur 76: Vervormingen volgens het model.



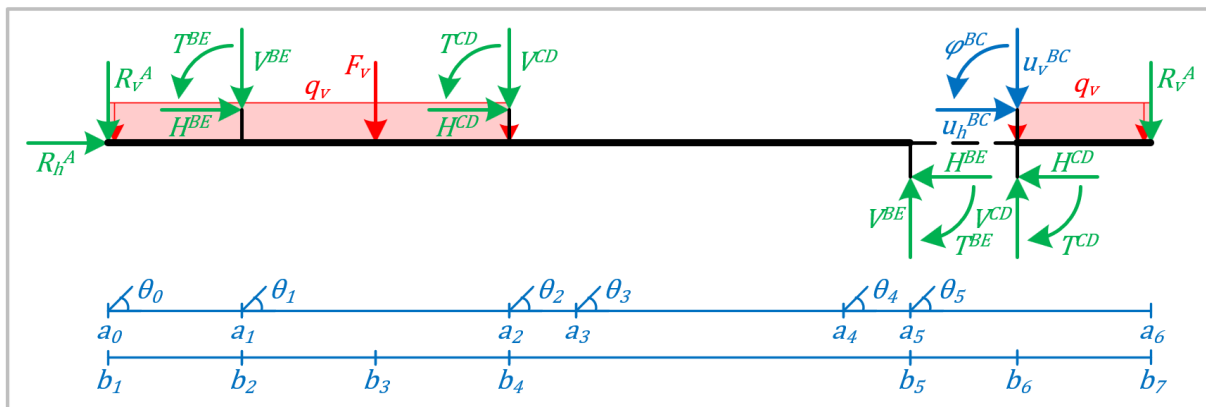
figuur 77: Vervormingen volgens Matrixframe

Voorbeeld 6

In figuur 78 is een opgelegde versterkte ligger afgebeeld. De functie van x volgt de nummering van de blauwe pijlen. In figuur 79 is de bijbehorende overzichtsschema te vinden. Er is voor deze constructie gekozen om te laten zien hoe een punt (a_5) moet worden gemodelleerd als het zowel een aansluitpunt als een sprongpunt is.



figuur 78: Opgelegde versterkte ligger



figuur 79: Overzichtsschema behorende bij figuur 78.

De gegeven waardes zijn als volgt:

$$F_v = 50 \text{ [kN]}, \quad q_v = 10 \text{ [kN/m]}$$

$$b_1 = 0 \text{ [m]}, \quad b_2 = 2 \text{ [m]}, \quad b_3 = 4 \text{ [m]}, \quad b_4 = 6 \text{ [m]}, \quad b_5 = 12 \text{ [m]}, \quad b_6 = 12^+ \text{ [m]}, \\ b_7 = 14 \text{ [m]}$$

$$a_0 = 0 \text{ [m]}, \quad a_1 = 2 \text{ [m]}, \quad a_2 = 6 \text{ [m]}, \quad a_3 = 7 \text{ [m]}, \quad a_4 = 11 \text{ [m]}, \quad a_5 = 12 \text{ [m]}, \\ a_6 = 14 \text{ [m]}$$

$$\theta_0 = \theta_1 = \theta_5 = 0 \text{ [rad]}, \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{2} \text{ [rad]}, \quad \theta_3 = \pi \text{ [rad]}, \quad \theta_4 = \frac{\pi}{2} \text{ [rad]}$$

$$EA = 10^3 \text{ [kN/m]}, \quad EI = 3 * 10^3 \text{ [kNm]}$$

In vgl. 99 en 100 staan de vergelijkingen voor $q_z(x)$ en $q_x(x)$.

$$\begin{aligned}
q_z(x) = & R_v^A(\langle x - b_1 \rangle^{-1} \cos(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=5}(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) \\
& + R_h^A(\langle x - b_1 \rangle^{-1} \sin(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=5}(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) \\
& + q_v(\langle x - b_1 \rangle^0 \cos(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=5}(\langle x - a_i \rangle^0 + \langle x - a_i \rangle^{-1}(a_i - b_2))(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1}))) \\
& - q_v(\langle x - b_4 \rangle^0 \cos(\theta_2) + \sum_{i=3}^{i=5}(\langle x - a_i \rangle^0 + \langle x - a_i \rangle^{-1}(a_i - b_2))(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1}))) \\
& + V^{BE}(\langle x - b_2 \rangle^{-1} \cos(\theta_1) + \sum_{i=2}^{i=5}(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) \\
& + H^{BE}(\langle x - b_2 \rangle^{-1} \sin(\theta_1) + \sum_{i=2}^{i=5}(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) + T^{BE}\langle x - b_2 \rangle^{-2} \\
& + F_v(\langle x - b_3 \rangle^{-1} \cos(\theta_1) + \sum_{i=2}^{i=5}(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) \\
& + V^{CD}(\langle x - b_4 \rangle^{-1} \cos(\theta_2) + \sum_{i=3}^{i=5}(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) \\
& + H^{CD}(\langle x - b_4 \rangle^{-1} \sin(\theta_2) + \sum_{i=3}^{i=5}(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) + T^{CD}\langle x - b_4 \rangle^{-2} \\
& - V^{BE}\langle x - b_5 \rangle^{-1} \cos(\theta_5) - H^{BE}\langle x - b_5 \rangle^{-1} \sin(\theta_5) - T^{BE}\langle x - b_5 \rangle^{-2} \\
& - V^{CD}\langle x - b_6 \rangle^{-1} \cos(\theta_5) - H^{CD}\langle x - b_6 \rangle^{-1} \sin(\theta_5) - T^{CD}\langle x - b_6 \rangle^{-2} \\
& + EI\varphi^{BC}\langle x - b_6 \rangle^{-3} + EIU_z^{BC}\langle x - b_6 \rangle^{-4} + q_v\langle x - b_6 \rangle^0 \cos(\theta_5) + R_v^D\langle x - b_7 \rangle^{-1} \cos(\theta_5) \quad (99)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_x(x) = & R_h^A(\langle x - b_1 \rangle^{-1} \cos(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=5}(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) \\
& - R_v^A(\langle x - b_1 \rangle^{-1} \sin(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=5}(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) \\
& - q_v(\langle x - b_1 \rangle^0 \sin(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=5}(\langle x - a_i \rangle^0 + \langle x - a_i \rangle^{-1}(a_i - b_2))(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1}))) \\
& + q_v(\langle x - b_4 \rangle^0 \sin(\theta_2) + \sum_{i=3}^{i=5}(\langle x - a_i \rangle^0 + \langle x - a_i \rangle^{-1}(a_i - b_2))(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1}))) \\
& + H^{BE}(\langle x - b_2 \rangle^{-1} \cos(\theta_1) + \sum_{i=2}^{i=5}(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) \\
& - V^{BE}(\langle x - b_2 \rangle^{-1} \sin(\theta_1) + \sum_{i=2}^{i=5}(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) \\
& - F_v(\langle x - b_3 \rangle^{-1} \sin(\theta_1) + \sum_{i=2}^{i=5}(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) \\
& + H^{CD}(\langle x - b_4 \rangle^{-1} \cos(\theta_2) + \sum_{i=3}^{i=5}(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) \\
& - V^{CD}(\langle x - b_4 \rangle^{-1} \sin(\theta_2) + \sum_{i=3}^{i=5}(\langle x - a_i \rangle^{-1}(\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) \\
& - H^{BE}\langle x - b_5 \rangle^{-1} \cos(\theta_5) + V^{BE}\langle x - b_5 \rangle^{-1} \sin(\theta_5) \\
& - H^{CD}\langle x - b_6 \rangle^{-1} \cos(\theta_5) - V^{CD}\langle x - b_6 \rangle^{-1} \sin(\theta_5) + EAu_x^{BC}\langle x - b_6 \rangle^{-2} \\
& + q_v\langle x - b_6 \rangle^0 \cos(\theta_5) + R_v^D\langle x - b_7 \rangle^{-1} \cos(\theta_5) \quad (100)
\end{aligned}$$

Vgl. 99 kan vervolgens vier keer geïntegreerd worden om achtereenvolgend de vergelijking voor de dwarskracht, het buigend moment, de kromme, de hoekverdraaiing en de doorbuiging te verkrijgen (vgl. 17 t/m 21). Eveneens kan vgl. 100 twee keer geïntegreerd worden om sequentieel de vergelijking voor de normaalkracht, rek en extensie te verkrijgen (vgl. 22 t/m 24). Daarna worden de vergelijking voor doorbuiging en extensie toegepast in vgl. 68 en 69 om de horizontale en verticale verplaatsingen te kunnen bepalen.

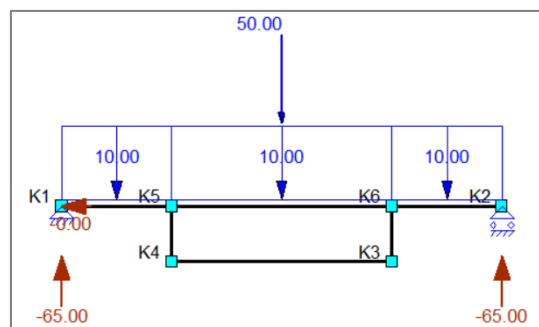
Er zijn drie reactiekrachten, zes snedekrachten, drie sprongconstanten en zes integratieconstanten. Er zijn dus 18 oplosvergelijkingen nodig. Deze zijn als volgt:

$$\begin{aligned}
 N(a_0^-) &= 0, & N(a_5) &= 0, & N(a_7^+) &= 0, \\
 V(a_0^-) &= 0, & V(a_5) &= 0, & V(a_7^+) &= 0, \\
 M(a_0^-) &= 0, & M(a_5) &= 0, & M(a_7^+) &= 0, \\
 \varphi(a_5) - \varphi(a_1) &= 0, & \varphi(a_5^+) - \varphi(a_2) &= 0 \\
 u_v(a_0) &= 0, & u_v(a_5) - u_v(a_1) &= 0, & u_v(a_5^+) - u_v(a_2) &= 0, & u_v(a_7) &= 0 \\
 u_h(a_0) &= 0, & u_h(a_5) - u_h(a_1) &= 0, & u_h(a_5^+) - u_h(a_2) &= 0
 \end{aligned}$$

De resultaten zijn als volgt:

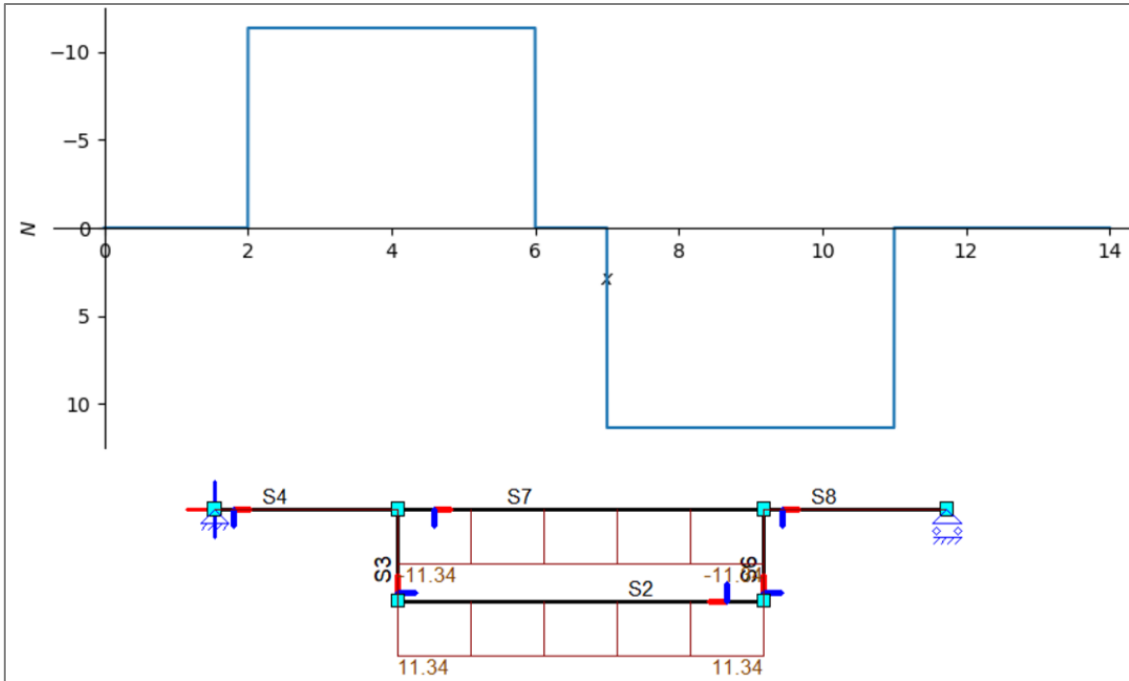
De uitkomsten voor de 18 onbekenden staan hieronder. De gevonden waarden voor de reactiekrachten zijn exact hetzelfde als dat van Matrixframe, weergegeven in figuur 80.

$$\begin{aligned}
 R_v^A &= R_v^D = -65,00 \text{ [kN]}, & R_h^A &= 0,00 \text{ [kN]} \\
 V^{CD} &= -45,00 \text{ [kN]}, & H^{CD} &= 0,00 \text{ [kN]}, & T^{CD} &= 110,00 \text{ [kNm]} \\
 V^{BE} &= 0,00 \text{ [kN]}, & H^{BE} &= 11,34 \text{ [kN]}, & T^{BE} &= 65,00 \text{ [kNm]} \\
 \varphi^{BC} &= -0,1111 \text{ [rad]}, & u_v^{BC} &= 0,0000 \text{ [m]}, & u_h^{BC} &= -0,0454 \text{ [m]} \\
 C_N &= C_V = C_M = C_{u_h} = C_{u_v} = 0, & C_\varphi &= -0,0944 \text{ [rad]}
 \end{aligned}$$

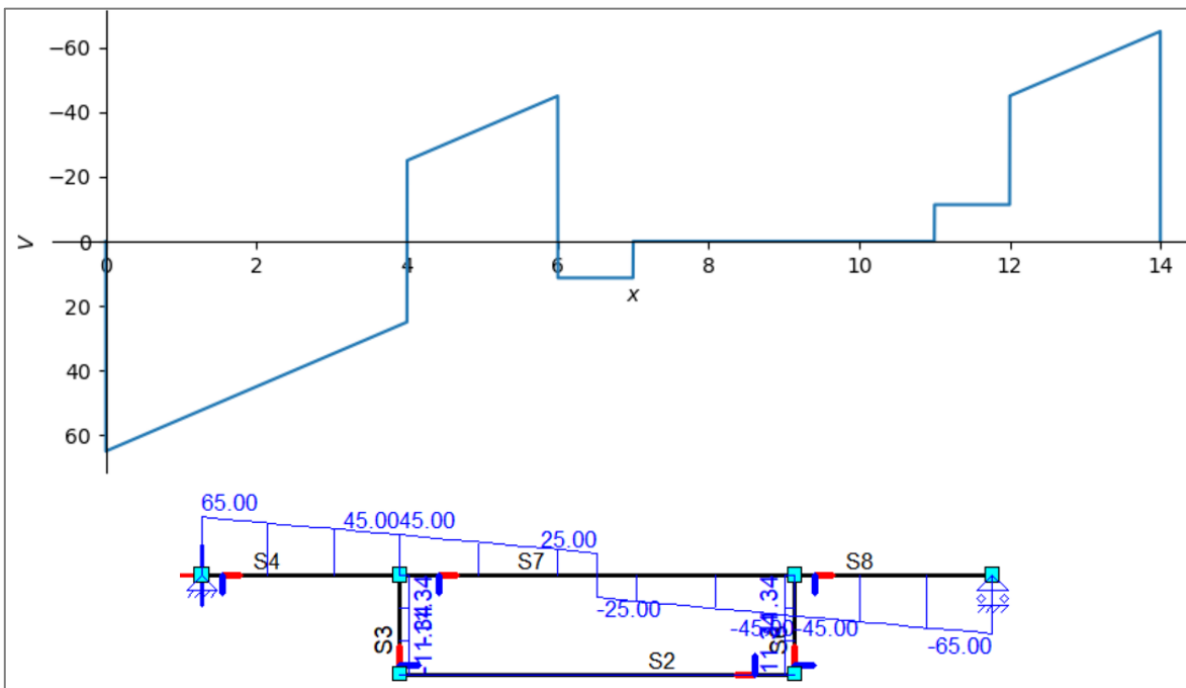


figuur 80: Reactiekrachten in Matrixframe.

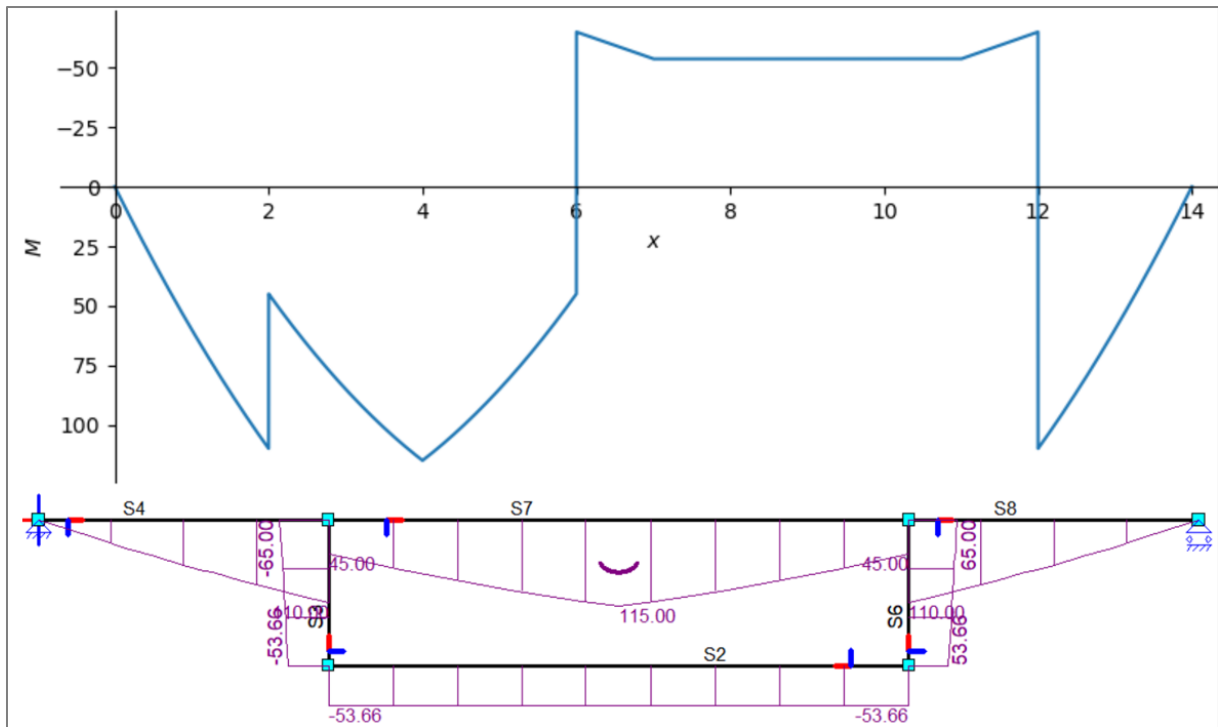
De normaalkrachten-, dwarskrachten- en momentenlijn worden afgebeeld in figuur 81, figuur 82 en figuur 83. Zoals te zien komen ze exact overeen met de resultaten van Matrixframe.



figuur 81: Normaalkrachtenlijn volgens het model boven en Matrixframe onder.

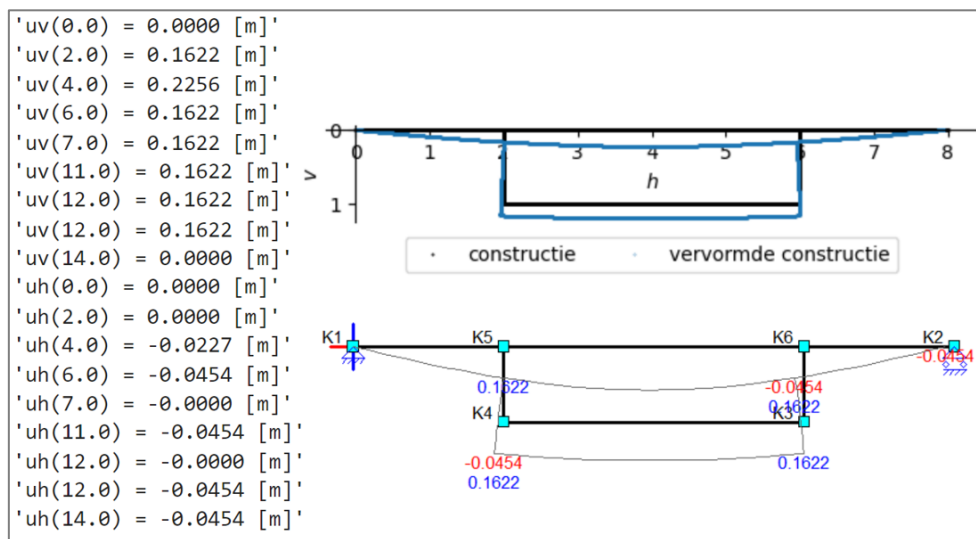


figuur 82: Dwarskrachtenlijn volgens het model boven en Matrixframe onder.



figuur 83: Momentenlijn volgens het model boven en Matrixframe onder.

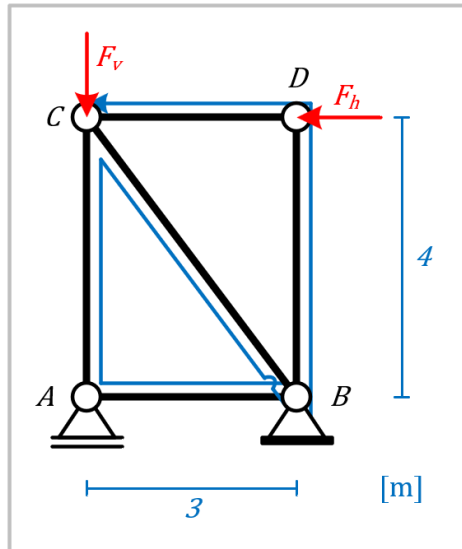
In figuur 84 wordt de vervorming van de constructie volgens het model en volgens Matrixframe afgebeeld. Zoals te zien komen deze exact overeen.



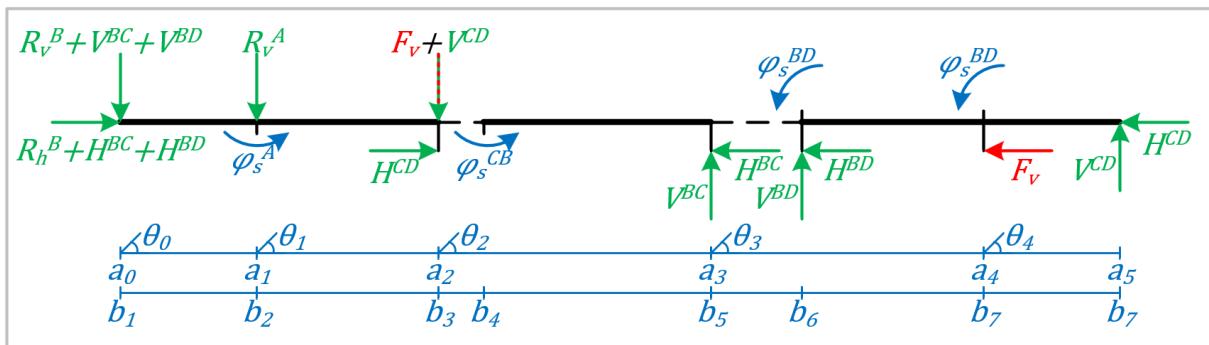
figuur 84: vervormingen volgens het model boven (met de waardes links) en Matrixframe onder.

Voorbeeld 7

In figuur 85 is een vakwerk constructie afgebeeld. In figuur 86 wordt de bijbehorende overzichtsschema weergegeven. Er is voor dit voorbeeld gekozen om te laten zien dat het model ook voor vakwerken werkt. Tevens toont het ook aan hoe knopen die volledig scharnierend zijn verbonden worden gemodelleerd.



figuur 85: Vakwerk



figuur 86: Overzichtsschema behorende bij figuur 85.

De gegeven waarden zijn als volgt:

$$F_v = 60 \text{ [kN]}, \quad F_h = -30 \text{ [kN]}$$

$$b_1 = 0 \text{ [m]}, \quad b_2 = 3 \text{ [m]}, \quad b_3 = 7 \text{ [m]}, \quad b_4 = 7^+ \text{ [m]}, \quad b_5 = 12 \text{ [m]}, \quad b_6 = 12^+ \text{ [m]}, \\ b_7 = 16 \text{ [m]}, \quad b_8 = 19 \text{ [m]}$$

$$a_0 = 0 \text{ [m]}, \quad a_1 = 3 \text{ [m]}, \quad a_2 = 7 \text{ [m]}, \quad a_3 = 12 \text{ [m]}, \quad a_4 = 16 \text{ [m]}, \quad a_5 = 19 \text{ [m]}$$

$$\theta_0 = \theta_4 = \pi \text{ [rad]}, \quad \theta_1 = \theta_3 = \frac{\pi}{2} \text{ [rad]}, \quad \theta_2 = \tan^{-1}(-4/3) \text{ [rad]}$$

$$EA = 10^3 \text{ [kN/m]}, \quad EI = 3 * 10^3 \text{ [kNm]}$$

$$\begin{aligned}
q_z(x) = & (R_v^B + V^{BC} + V^{BD})(\langle x - b_1 \rangle^{-1} \cos(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=4} (\langle x - a_i \rangle^{-1} (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) \\
& + (R_h^B + H^{BC} + H^{BD})(\langle x - b_1 \rangle^{-1} \sin(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=4} (\langle x - a_i \rangle^{-1} (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) \\
& + R_v^A (\langle x - b_1 \rangle^{-1} \cos(\theta_1) + \sum_{i=2}^{i=4} (\langle x - a_i \rangle^{-1} (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) + EI \varphi_s^A \langle x - b_2 \rangle^{-3} \\
& + (F_v + V^{CD})(\langle x - b_2 \rangle^{-1} \cos(\theta_2) + \sum_{i=3}^{i=4} (\langle x - a_i \rangle^{-1} (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) \\
& + (H^{CD})(\langle x - b_2 \rangle^{-1} \sin(\theta_2) + \sum_{i=3}^{i=4} (\langle x - a_i \rangle^{-1} (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) + EI \varphi_s^{CB} \langle x - b_4 \rangle^{-3} \\
& - V^{BC} (\langle x - b_5 \rangle^{-1} \cos(\theta_3) + \langle x - a_4 \rangle^{-1} (\cos(\theta_4) - \cos(\theta_3))) \\
& - H^{BC} (\langle x - b_5 \rangle^{-1} \sin(\theta_3) + \langle x - a_4 \rangle^{-1} (\sin(\theta_4) - \sin(\theta_3))) \\
& - V^{BD} (\langle x - b_6 \rangle^{-1} \cos(\theta_3) + \langle x - a_4 \rangle^{-1} (\cos(\theta_4) - \cos(\theta_3))) \\
& - H^{BD} (\langle x - b_6 \rangle^{-1} \sin(\theta_3) + \langle x - a_4 \rangle^{-1} (\sin(\theta_4) - \sin(\theta_3))) + EI \varphi_s^{BD} \langle x - b_6 \rangle^{-3} \\
& + F_h \langle x - b_7 \rangle^{-1} \sin(\theta_4) + EI \varphi_s^D \langle x - b_7 \rangle^{-3} \\
& - V^{CD} \langle x - b_8 \rangle^{-1} \cos(\theta_4) - H^{CD} \langle x - b_5 \rangle^{-1} \sin(\theta_3)
\end{aligned} \tag{101}$$

$$\begin{aligned}
q_z(x) = & (R_h^B + H^{BC} + H^{BD})(\langle x - b_1 \rangle^{-1} \cos(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=4} (\langle x - a_i \rangle^{-1} (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) \\
& - (R_v^B + V^{BC} + V^{BD})(\langle x - b_1 \rangle^{-1} \sin(\theta_0) + \sum_{i=1}^{i=4} (\langle x - a_i \rangle^{-1} (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) \\
& - R_v^A (\langle x - b_1 \rangle^{-1} \sin(\theta_1) + \sum_{i=2}^{i=4} (\langle x - a_i \rangle^{-1} (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) \\
& + (H^{CD})(\langle x - b_2 \rangle^{-1} \sin(\theta_2) + \sum_{i=3}^{i=4} (\langle x - a_i \rangle^{-1} (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})))) \\
& - (F_v + V^{CD})(\langle x - b_2 \rangle^{-1} \cos(\theta_2) + \sum_{i=3}^{i=4} (\langle x - a_i \rangle^{-1} (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})))) \\
& - H^{BC} (\langle x - b_5 \rangle^{-1} \cos(\theta_3) + \langle x - a_4 \rangle^{-1} (\cos(\theta_4) - \cos(\theta_3))) \\
& + V^{BC} (\langle x - b_5 \rangle^{-1} \sin(\theta_3) + \langle x - a_4 \rangle^{-1} (\sin(\theta_4) - \sin(\theta_3))) \\
& - H^{BD} (\langle x - b_6 \rangle^{-1} \cos(\theta_3) + \langle x - a_4 \rangle^{-1} (\cos(\theta_4) - \cos(\theta_3))) \\
& + V^{BD} (\langle x - b_6 \rangle^{-1} \sin(\theta_3) + \langle x - a_4 \rangle^{-1} (\sin(\theta_4) - \sin(\theta_3))) \\
& + F_h \langle x - b_7 \rangle^{-1} \cos(\theta_4) - H^{CD} \langle x - b_8 \rangle^{-1} \cos(\theta_4) + V^{CD} \langle x - b_5 \rangle^{-1} \sin(\theta_3)
\end{aligned} \tag{102}$$

Vgl. 101 kan vervolgens vier keer geïntegreerd worden om achtereenvolgend de vergelijking voor de dwarskracht, het buigend moment, de kromme, de hoekverdraaiing en de doorbuiging te verkrijgen (vgl. 17 t/m 21). Eveneens kan vgl. 102 twee keer geïntegreerd worden om sequentieel de vergelijking voor de normaalkracht, rek en extensie te verkrijgen (vgl. 22 t/m 24). Daarna worden de vergelijking voor doorbuiging en extensie toegepast in vgl. 68 en 69 om de horizontale en verticale verplaatsingen te kunnen bepalen.

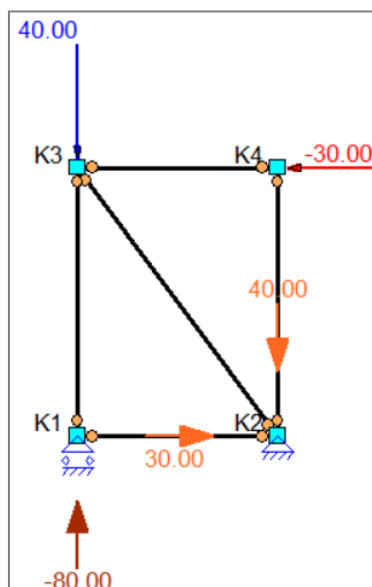
Er zijn drie reactiekrachten, zes snedekrachten, vier scharnieren en zes integratieconstanten. Er zijn dus 19 oplosvergelijkingen nodig. Deze zijn als volgt:

$$\begin{aligned}
 N(a_0^-) &= 0, & N(a_3) &= 0, & N(a_5^+) &= 0, \\
 V(a_0^-) &= 0, & V(a_3) &= 0, & V(a_5^+) &= 0, \\
 M(a_0^-) &= 0, & M(a_1) &= 0, & M(a_2) &= 0, & M(a_3) &= 0, & M(a_4) &= 0, & M(a_5^+) &= 0, \\
 u_v(a_0) &= 0, & u_v(a_1) &= 0, & u_v(a_3) - u_v(a_0) &= 0, & u_v(a_5) - u_v(a_2) &= 0 \\
 u_h(a_0) &= 0, & u_h(a_3) - u_h(a_0) &= 0, & u_h(a_5) - u_h(a_2) &= 0
 \end{aligned}$$

De resultaten zijn als volgt:

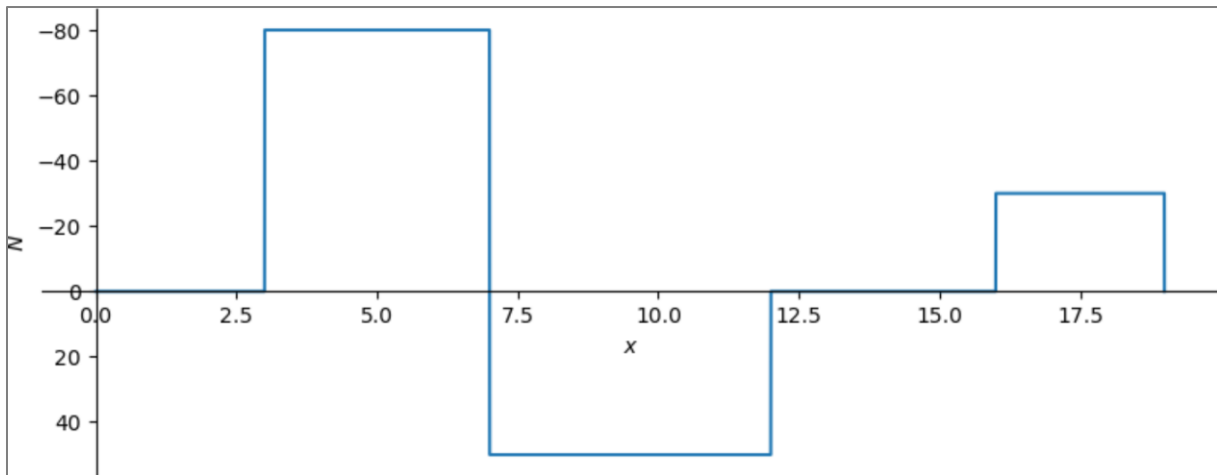
De uitkomsten voor de 18 onbekenden staan hieronder. De gevonden waarden voor de reactiekrachten zijn exact hetzelfde als dat van Matrixframe, weergegeven in figuur 87.

$$\begin{aligned}
 R_v^A &= -80,00 \text{ [kN]}, & R_v^B &= 40,00 \text{ [kN]}, & R_h^B &= 30,00 \text{ [kN]} \\
 V^{BC} &= -40,00 \text{ [kN]}, & H^{BC} = H^{CD} &= -30,00 \text{ [kN]}, & V^{BD} = H^{BD} = V^{CD} &= 0,00 \text{ [kN]}, \\
 \varphi_s^A &= -0,2108 \text{ [rad]}, & \varphi_s^{CB} &= 0,0375 \text{ [rad]}, \\
 \varphi_s^{BD} &= -0,060 \text{ [rad]}, & \varphi_s^D &= 0,1267 \text{ [rad]}, \\
 C_N &= C_V = C_M = C_\varphi = C_{u_h} = C_{u_v} = 0
 \end{aligned}$$

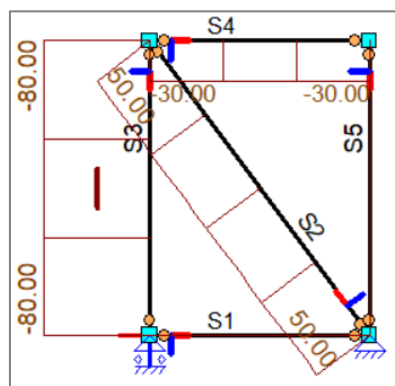


figuur 87: Reactiekrachten in Matrixframe

Sinds de constructie een vakwerk is zijn de dwarskrachten- en momentenlijn uiteraard gelijk aan nul. De normaalkrachtenlijn volgens het model wordt afgebeeld in figuur 88 en komt exact overeen met die van Matrixframe in figuur 89.

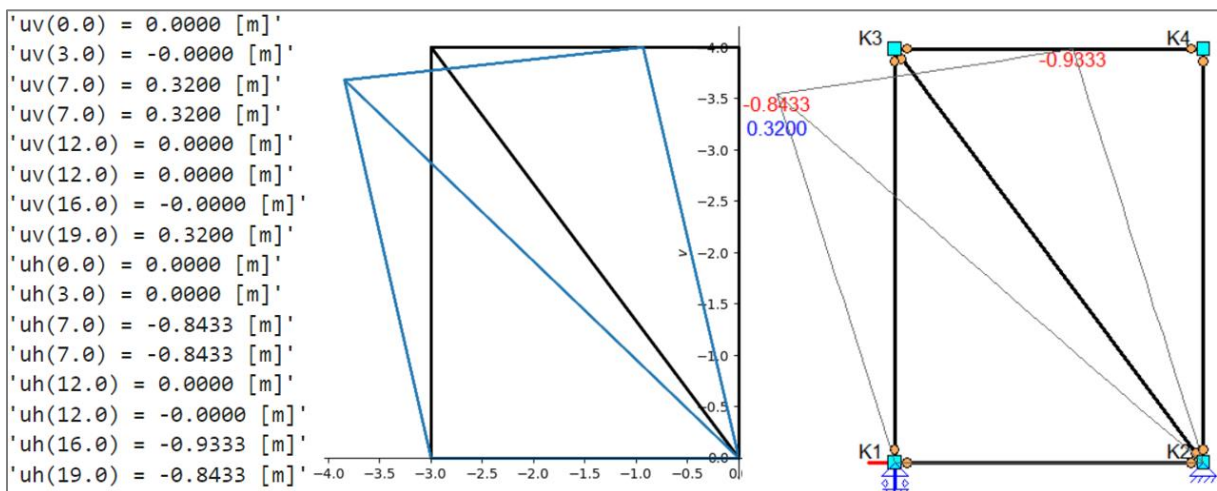


figuur 88: Normaalkrachtenlijn volgens het model.



figuur 89: Normaalkrachtenlijn volgens Matrixframe.

In figuur 90 wordt de vervorming van de constructie volgens het model en volgens Matrixframe afgebeeld. Zoals te zien komen deze exact overeen.

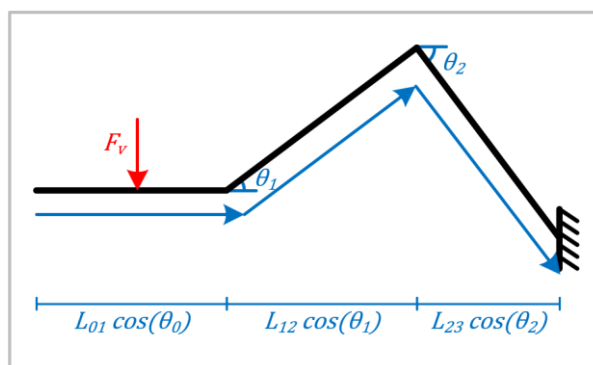


figuur 90: vervormingen volgens het model links en Matrixframe rechts.

Bijlage B – Intermezzo modellering belastingen

In deze bijlage wordt uitgewerkt hoe vanuit een momentensom de modellering van een puntlast kan worden herleidt.

Zie figuur 91. Hierin is een ingeklemde ligger te zien met twee knikpunten waarop een verticale puntlast werkt. Om het inklemmingsmoment te berekenen moet de kracht vermenigvuldigd worden met de arm van de kracht. De arm van de kracht is gelijk aan de som van de over de horizontale as geprojecteerde lengtes van de staven. Hieruit volgt vgl. 103. In vgl. 104 wordt dit beschreven m.b.v. singulariteitsfuncties. Hierin is a_i de afstand tot hoekpunt i t.o.v. de lokale x-as. Vervolgens wordt vgl. 104 herschreven tot vgl. 105. Hierin is duidelijker zichtbaar hoe de hoeken de invloed van een puntlast op het krachtenverloop beïnvloeden. De eerste term geeft het beginpunt van de puntlast aan en elk volgende punt geeft een hoekpunt aan. Daarbij geldt dat een hoekpunt de invloed van een puntlast op het krachtenverloop alleen aanpast als de afstand tot de hoekpunt groter is dan de afstand tot de puntlast. Door vgl. 105 twee keer af te leiden ontstaat vgl. 106.



figuur 91: ingeklemde ligger met een knik in punt 1 en 2 dat belast wordt door F_v .

$$-M_3 = F_v \left(\frac{1}{2} L_{01} \cos(\theta_0) + L_{12} \cos(\theta_1) + L_{23} \cos(\theta_2) \right) \quad (103)$$

$$-M(x) = F_v \left((\langle x - b \rangle^1 - \langle x - a_1 \rangle^1) \cos(\theta_0) + (\langle x - a_1 \rangle^1 - \langle x - a_2 \rangle^1) \cos(\theta_1) + \langle x - a_2 \rangle^1 \cos(\theta_2) \right) \quad (104)$$

$$-M(x) = F_v \left(\langle x - b \rangle^1 \cos(\theta_0) + \langle x - a_1 \rangle^1 (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_0)) + \langle x - a_2 \rangle^1 (\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)) \right) \quad (105)$$

$$q_z(x) = F_v \left(\langle x - b \rangle^{-1} \cos(\theta_0) + \langle x - a_1 \rangle^{-1} (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_0)) + \langle x - a_2 \rangle^{-1} (\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)) \right) \quad (106)$$

Als laatste stap wordt vgl. 106 herschreven tot een algemeen geldende vergelijking. Dit is vgl. 107. Uiteraard gelden voor een horizontale puntlast dezelfde stappen, maar dit keer moet de lengtes van de staven geprojecteerd worden over de verticale as. Dit proces volgende leidt tot vgl. 108. Vgl. 107 en 108 kunnen opgevat worden als dat de verticale en horizontale puntlast worden geprojecteerd over de lokale z-as van de staaf. Door de verticale en horizontale puntlast te projecteren over de x-as ontstaan vgl. 109 en 110.

$$q_z(x) = F_v \left(\langle x - b \rangle^{-1} \cos(\theta_b) + \sum \left(\langle x - a_i \rangle^{-1} (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})) \right) \right); \text{ voor } a_i > b \quad (107)$$

$$q_z(x) = F_h \left(\langle x - b \rangle^{-1} \sin(\theta_b) + \sum \left(\langle x - a_i \rangle^{-1} (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})) \right) \right); \text{ voor } a_i > b \quad (108)$$

$$q_x(x) = -F_v \left(\langle x - b \rangle^{-1} \sin(\theta_b) + \sum \left(\langle x - a_i \rangle^{-1} (\sin(\theta_i) - \sin(\theta_{i-1})) \right) \right); \text{ voor } a_i > b \quad (109)$$

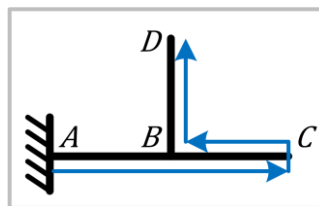
$$q_x(x) = F_h \left(\langle x - b \rangle^{-1} \cos(\theta_b) + \sum \left(\langle x - a_i \rangle^{-1} (\cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i-1})) \right) \right); \text{ voor } a_i > b \quad (110)$$

Hierin is F_v de verticale puntlast, F_h de horizontale puntlast, b het beginpunt van de belasting, θ_b de hoek van de staaf op het beginpunt van de belasting, a_i de afstand van knikpunt i en θ_i de hoek van de staaf op hoekpunt i . Verder geldt voor de eerste hoekpunt waarvoor geldt $a_i > b$ dat $\theta_{i-1} = \theta_b$.

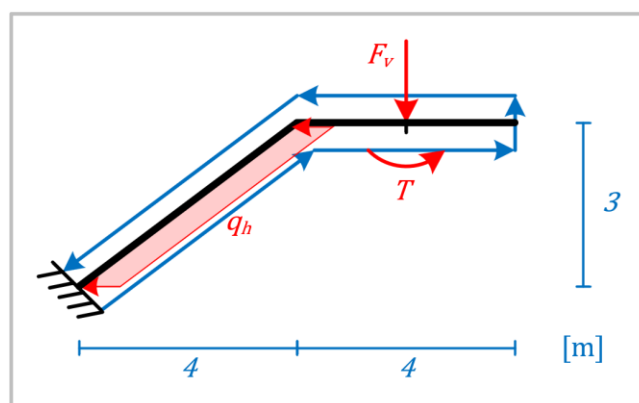
Bijlage C – Retour Methode

In deze bijlage wordt een opzet voor de retour methode beschreven. Deze methode is echter niet volledig uitgewerkt, sinds de sprong methode betere uitkomsten bleek te hebben.

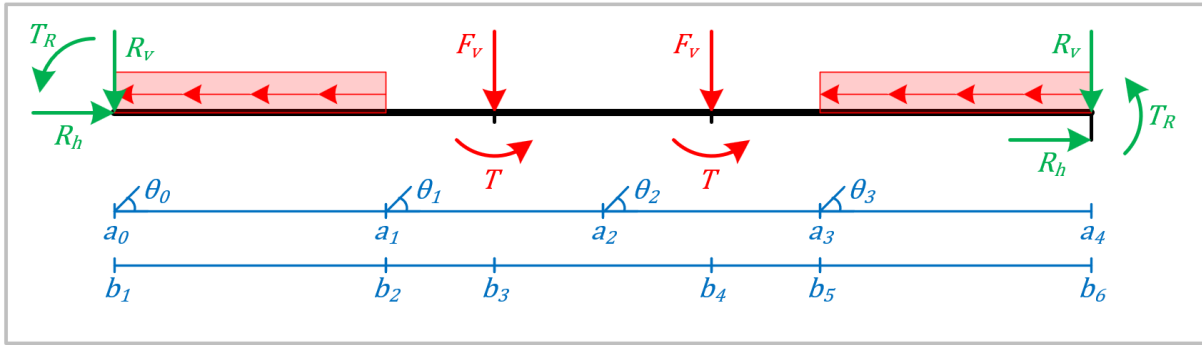
Om vertakte constructies te modelleren in een continue vergelijking zal de functie op een gegeven moment een retour beweging moeten maken zoals het geval is tussen punt B en C in figuur 92, waarin de blauwe pijl de beweging van de functie aangeeft. Hoe dit kan worden gemodelleerd wordt aangetoond m.b.v. figuur 93 en figuur 94. Voor de retour over dezelfde staaf beschouwd het model de staaf als twee staven. Één voor de heenweg en één voor de terugweg. Op beide gemodelleerde staven werken alle krachten die in werkelijkheid op de staaf werken. Onthoud dat de grote en richting van de belastingen worden bepaald t.o.v. het globale assenstelsel en de grote en richting van de hoeken worden bepaald door de conversie tussen het globale en lokale assenstelsel. Dit betekent dat de grote en richting van de belastingen over beide staven gelijk zijn, maar die van de hoeken anders zijn. In figuur 94 geldt bijv. dat $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ [rad] en $\theta_3 = \theta_0 + \pi$ [rad]. Sinds de reactiekrachten op punt b_1 en b_6 hetzelfde zijn, ontstaan er geen nieuwe onbekenden en dus hoeven er ook geen nieuwe oplosvergelijkingen komen. Wel kunnen oplosvergelijkingen afhankelijk worden. Bijv. $M(a_0^-) = 0$ en $M(a_4^+) = 0$. Om dit te voorkomen moeten alleen oplosvergelijkingen opgesteld worden die betrekking hebben op de heenweg van de functie. Tot slot werkt deze modelering ook voor een partiële retour beweging. Als de functie bijv. slechts tot punt a_3 zou gaan, dan zullen het krachtenverloop en de verplaatsingen tot dat punt volledig correct worden gemodelleerd.



figuur 92: Vertakte constructie met retourfunctie.

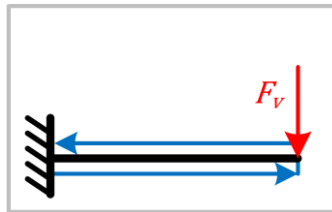


figuur 93: retour over een geknikte constructie.

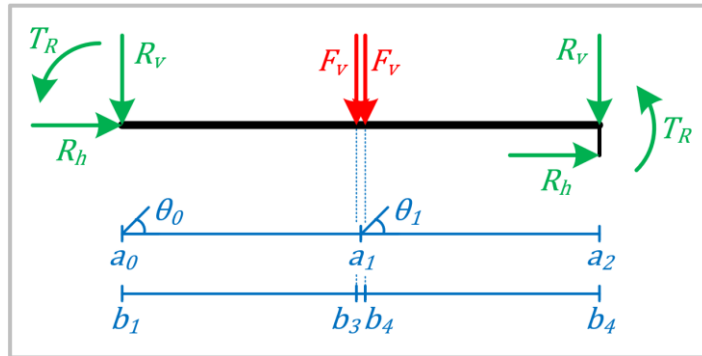


figuur 94: Gelineariseerde weergave van de constructie in figuur 93.

Het kan zijn dat een puntlast of koppel werkt op het uiteinde van een staaf waarover een retourbeweging wordt gemaakt, zoals het geval is in figuur 95. In dat geval moet dat gemodelleerd worden zoals wordt gedaan in figuur 96. Net zoals elke andere belasting, wordt de puntlast twee keer gemodelleerd. Één keer op de 'heenweg staaf' en één keer op de 'terugweg staaf' op een afstand dx van het punt a_1 , wat voor dit geval het uiteinde van de ligger is. De reden hiervoor is dat als dit niet wordt gedaan, de oplossingsvoorwaarden op punt a_1 dan niet meer kloppen.



figuur 95: Retour over ingeklemde ligger met een puntlast op het uiteinde.



figuur 96: : Gelineariseerde weergave van de constructie in figuur 95.