

Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

**Het wortelsysteem van E_8 :
een model voor elementaire deeltjes?
(Engelse titel: The root system of E_8 :
a model for elementary particles?)**

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics and Applied Physics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

**BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE
en
TECHNISCHE NATUURKUNDE**

door

ROY VAN HOUTE

**Delft, Nederland
Juni 2017**

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE en TECHNISCHE NATUURKUNDE

**“Het wortelsysteem van E_8 :
een model voor elementaire deeltjes?**

**(Engelse titel: The root system of E_8 :
a model for elementary particles?) ”**

ROY VAN HOUTE

Technische Universiteit Delft

Begeleiders

Prof. dr. P.J. de Jong

Dr. P.M. Visser

Overige commissieleden

Dr. J.M. Thijssen

Dr. W.G.M. Groenevelt

Dr. F.J. van de Bult

Dr. H.A.W.M. Kneppers

Juni, 2017

Delft

Samenvatting

In dit onderzoek wordt gekeken of het model voor elementaire deeltjes voorgesteld door de Amerikaanse fysicus Antony G. Lisi bevestigd of weerlegd kan worden. In dit model worden elementaire deeltjes gekoppeld aan wortels uit het wortelsysteem van E_8 en worden ladingen gekoppeld aan gewichten van dit wortelsysteem. Interacties tussen deeltjes moeten in het model voldoen aan optellingsregels van het wortelsysteem zodanig dat aan ladingsbehoud is voldaan voor elk type lading dat in het standaardmodel voorkomt.

Door het probleem te programmeren en het programma uit te voeren, wordt geconcludeerd dat alle ladingen afzonderlijk en combinaties van ladingen wel in het wortelsysteem van E_8 passen, maar het *niet* mogelijk is alle ladingen te laten werken. Hiermee wordt de theorie van Lisi weerlegd. We hebben echter verondersteld dat de gewichten die horen bij de ladingen orthogonaal zijn en er kan in een vervolgonderzoek gekeken worden of dit probleem ook valt op te lossen zonder deze aanname.

Notatie en symbolen

| Begrip of betekenis | Notatie | Begrip of betekenis | Notatie |
|---------------------------|-------------------|--|-----------------|
| Gehele getallen | \mathbf{Z} | Determinant | det |
| Positieve gehele getallen | $\mathbf{Z}_{>0}$ | Spoor | tr |
| Reële getallen | \mathbf{R} | Kern (v.e. afbeelding) | ker |
| Complexe getallen | \mathbf{C} | Beeld (v.e. afbeelding $f : X \rightarrow Y$) | $f(X)$ |
| Kardinaliteit | # | Dimensie | dim |
| Karakter | char | Getransponeerde | \cdot^\top |
| Idenditeit op X | id_X | Hermitisch getransponeerde | \cdot^\dagger |
| Directe som | \oplus | Semidirecte product (A normaal) | $A \rtimes B$ |

Groepen, ringen, lichamen, Lie-algebra's

| Groep/ring/lichaam/algebra | Notatie |
|--|---|
| Cyclische groep $n \geq 1$ | \mathcal{C}_n |
| Dihedrale groep (reg. n -hoek) $n \geq 1$ | \mathcal{D}_n |
| Permutatiegroep $n \geq 1$ | \mathcal{S}_n |
| Triviale groep | 1 |
| Lichaam van restklassen modulo priem p | $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ |
| Ring van $n \times n$ -matrices over een ring R | $\text{Mat}_n(R)$ |
| Lie-algebra van lineaire afbeeldingen over in een vectorruimte V | $\mathfrak{gl}(V), \mathfrak{gl}(n, K)$ |
| Ring van polynomen in X over een ring R | $R[X]$ |

Elementaire deeltjes [9]

| Categorie | Deeltje | Notatie | Massa (MeV/ c^2) | Vrijheidsgraden |
|---------------------------|-------------------|------------|---------------------------|-----------------|
| Fermionen, quarks | up | u | 3 | 12 |
| | down | d | 7 | 12 |
| | charm | c | $1.2 \cdot 10^3$ | 12 |
| | strange | s | 120 | 12 |
| | top | t | $174 \cdot 10^3$ | 12 |
| | bottom | b | $4.3 \cdot 10^3$ | 12 |
| Fermionen, leptonen | elektron | e | 0.510999 | 4 |
| | elektron neutrino | ν_e | > 0 | 2 |
| | muon | μ | 105.659 | 4 |
| | muon neutrino | ν_μ | > 0 | 2 |
| | tau | τ | $1.77699 \cdot 10^3$ | 4 |
| | tau neutrino | ν_τ | > 0 | 2 |
| Bosonen | foton | γ | 0 | 2 |
| | gluon | g | 0 | 16 |
| | Z-boson | Z | $91.190 \cdot 10^3$ | 2 |
| | W^\pm -boson | W^\pm | $80.420 \cdot 10^3$ | 4 |
| | Higgsboson | H | $125.09 \cdot 10^3$; [4] | 4 |
| (?) graviton ¹ | G | 0 | 2 | |

¹Het bestaan van het graviton is niet aangetoond.

Inhoudsopgave

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Inleiding | 7 |
| 1.1 | Wortelsystemen | 7 |
| 1.2 | Lisi's <i>An Exceptionally Simple Theory of Everything</i> | 8 |
| 1.3 | Bollenstapelings- en <i>Kissing sphere</i> -probleem | 13 |
| 2 | Elementaire deeltjes en het standaardmodel | 16 |
| 2.1 | Elementaire deeltjes | 16 |
| 2.2 | Feynmandiagrammen | 17 |
| 2.3 | Ladingen | 21 |
| 2.4 | Het standaardmodel | 23 |
| 3 | Lie-algebra's | 26 |
| 3.1 | Ontbinding van semisimpele Lie-algebra's | 27 |
| 4 | Wortelsystemen | 32 |
| 4.1 | Wortelsystemen in \mathbf{R}^n | 32 |
| 4.2 | Simpele wortels en de Weylgroep | 40 |
| 4.3 | De Weylgroep | 42 |
| 4.4 | Irreducibele wortelsystemen | 43 |
| 4.5 | Classificatie van irreducibele wortelsystemen | 44 |
| 4.6 | Irreducibele wortelsystemen en Dynkindiagrammen | 45 |
| 4.7 | Constructie van wortelsystemen. | 51 |
| 4.8 | Gewichten in een wortelsysteem | 53 |
| 4.9 | Dominante gewichten | 56 |
| 5 | Lisi's model: deeltjes als wortels van E_8 | 58 |
| 5.1 | Lisi's model: elementaire deeltjes in E_8 | 59 |
| 5.2 | Programmeren van gewichten | 60 |
| 6 | Resultaten | 65 |
| 6.1 | Resultaten van programma I | 65 |
| 6.2 | Resultaten van programma II | 66 |
| 7 | Conclusie en discussie | 68 |
| 8 | Referenties | 69 |
| 9 | Appendices | 71 |
| 9.1 | Cartanmatrices A_ℓ, \dots, G_2 | 71 |
| 9.2 | Determinanten van Cartanmatrices | 71 |
| 9.3 | Elementaire deeltjes en hun ladingen | 74 |
| 9.4 | Dominante gewichten voor de ladingen Y_W en g^8 | 77 |
| 9.5 | MATLAB®-code voor het aanmaken van dominante gewichten, programma I . . | 78 |
| 9.6 | MATLAB®-code voor het zoeken naar gecombineerde gewichten, programma II | 82 |

1 Inleiding

In november 2007 bracht de Amerikaans theoretisch fysicus Antony Garrett Lisi een artikel uit waarin hij beweert een veldentheorie van alles te hebben gevonden, een theorie die zowel de krachten uit het standaardmodel als zwaartekracht bevat. Zijn theorie wordt beschreven met behulp van de 248 dimensionale Lie-algebra E_8 , een van de meest bijzondere wiskundige structuren. In deze inleiding presenteren we zijn model, de hoofdvraag van dit onderzoek en aan E_8 gerelateerde onderwerpen.

1.1 Wortelsystemen

Voor dit onderzoek wordt in deze inleiding eerst de opzet beschreven, de hoofdvraag geformuleerd en eventueel naar de nodige kennis verderop verwezen. Tevens worden problemen die aan E_8 gerelateerd zijn behandeld. Vervolgens wordt in het hoofdstuk *Elementaire deeltjes* een beschrijving gegeven van de betrokken elementaire deeltjes en de ladingen die van belang zijn. Ook worden interacties behandeld die in het model moeten voorkomen. Om wortelsystemen en hun oorsprong te begrijpen wordt in het hoofdstuk *Lie-algebra's en Wortelsystemen* de kennis verder uitgebreid om te kunnen gebruiken bij het oplossen van het probleem. Het probleem wordt in deze context nogmaals geschetst en de methode om de hoofdvraag te beantwoorden wordt behandeld. Hierna worden in de *resultaten* de uitkomsten van deze methode getoond.

Centraal in dit verslag staat het idee van een wortelsysteem. Wortelsystemen komen voort uit representatie's van Lie-algebra. Een wortelsysteem is een eindig stel vectoren in een euclidische ruimte met een bepaalde structuur. Deze structuur wijkt af van de bekende algebraïsche systemen zoals een groep, ring, lichaam of moduul. De vectoren in een wortelsysteem heten ook wel wortels. In de toepassing van Lisi op elementaire deeltjes stemt iedere vector overeen met een deeltje. De mogelijke rekenkundige bewerkingen die een wortelsysteem toelaat corresponderen met interacties tussen deeltjes.

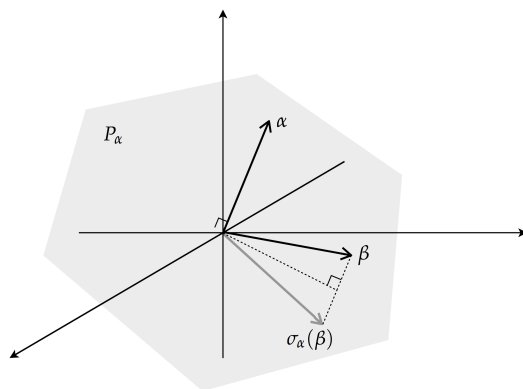
Om het begrip van een wortelsysteem te introduceren gaan we eerst wat begrippen introduceren. We noteren met E een euclidische ruimte (\mathbf{R}^n) met standaard inwendig product $(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$ gedefinieerd door $(x, y \in \mathbf{R}^n)$

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n. \quad (1.1.1)$$

Een *hypervlak* is een deelruimte van E met dimensie $\dim E - 1$. Expliciet definieert een niet-nulvector $\alpha \in E$ een zogenaamd *reflecterend hypervlak*, gegeven door de deelruimte $P_\alpha = \{\beta \in E : (\beta, \alpha) = 0\}$. Een *reflectie in het hypervlak* P_α is de afbeelding

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha : E &\rightarrow E \\ \beta &\mapsto \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

waarbij $\langle \beta, \alpha \rangle = 2(\beta, \alpha) / (\alpha, \alpha)$ voor alle $\alpha \in E \setminus \{0\}$ en $\beta \in E$. In figuur (1) wordt een voorstelling in \mathbf{R}^3 gegeven van een hypervlak en een spiegeling.



Figuur 1: Een vector en diens (hyper)vlak in de ruimte \mathbf{R}^3 .
Geometrisch is te zien dat van de vector β twee maal de projectie $(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha)\alpha$ wordt afgetrokken en $\sigma_\alpha(\beta)$ oplevert.

De afbeelding σ_α is tevens een involutie (en dus bijtief), groepentheoretisch heeft de afbeelding orde 2 onder samenstelling, er geldt namelijk voor alle $\alpha, \beta \in E$ met $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} (\sigma_\alpha \circ \sigma_\alpha)(\beta) &= \sigma_\alpha(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha - \langle \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha, \alpha \rangle \alpha \\ &= \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha + \underbrace{\langle \alpha, \alpha \rangle}_{=2(\alpha, \alpha)/(\alpha, \alpha)=2} \alpha = \beta \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

dus $\sigma_\alpha \circ \sigma_\alpha = \text{id}_E$.

Een wortelsysteem laat zich nu als volgt axiomatiseren.

Definitie 1.1.1 (axioma's van een wortelsysteem). Een deelverzameling Φ van een euclidische ruimte E heet een wortelsysteem in E als aan de volgende axioma's voldaan is

- R1) Φ is eindig, spant de ruimte E op en $0 \notin \Phi$;
- R2) Als $\alpha \in \Phi$, dan zijn de enige veelvouden van α in Φ de vectoren $\pm\alpha$;
- R3) Als $\alpha \in \Phi$, dan laat de reflectie σ_α de verzameling Φ invariant;
- R4) Als $\alpha, \beta \in \Phi$, dan geldt $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbf{Z}$.

Een eerste enigzins triviaal voorbeeld is in de ruimte $E = \mathbf{R}$ met $\Phi = \{-x, x\}$ en $x \in \mathbf{R}^*$. Tevens geldt dat alle wortelsystemen in \mathbf{R} van deze vorm zijn vanwege axioma R2). Dit wortelsysteem wordt geassocieerd met de Lie-algebra $A_1 = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$.

1.2 Lisi's An Exceptionally Simple Theory of Everything

Het artikel van Lisi [15] heeft de titel *An Exceptionally Simple Theory of Everything*, wat doelt op de classificatie van E_8 , dit is namelijk een exceptionele simpele Lie-algebra. Een *theorie van alles* is een alomvattende theorie die alle deeltjes en krachten omschrijft. Het huidige standaardmodel van elementaire deeltjes omvat de velden van de elektromagnetische kracht, de zwakke kernkracht en de sterke kernkracht [23]. Een ontbrekende kracht in het standaardmodel is de zwaartekracht, deze laat zich beschrijven door de algemene relativiteitstheorie. Het is echter nog niet gelukt de algemene relativiteitstheorie te verenigen met het standaardmodel.

In Lisi's beschrijving wordt beweerd dat alle velden van het standaardmodel én zwaartekracht verenigd worden en het model beschreven kan worden met behulp van Lie-algebra E_8 . Aan

deze wiskundige structuur is een wortelsysteem gerelateerd, dat is de verzameling van reële vectoren

$$\Phi = \{x \in \mathbf{Z}^8 \cup (\mathbf{Z} + \frac{1}{2})^8 : \|x\|^2 = 2 \text{ en } \sum_i x_i \equiv 0 \pmod{2}\}. \quad (1.2.1)$$

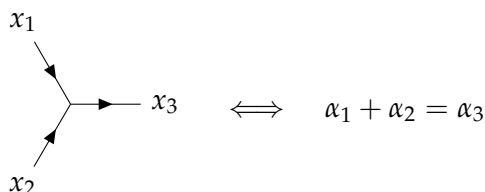
Merk op dat de enige manier om $\|x\|^2 = 2$ te schrijven als de som van gehele getallen (dus alleen in \mathbf{Z}) is als de som van twee 1'en, wanneer we 0 buiten beschouwing laten. Er geldt dus dat elke vector met twee maal een component ± 1 en zes 0'en een element is van Φ . Tevens geldt dat $(3/2)^2 = 2^{1/4} > 2$, dus voor de vectoren uit $(\mathbf{Z} + \frac{1}{2})^8$ kunnen de componenten slechts $\pm \frac{1}{2}$ zijn en ook geldt $8 \cdot (\pm \frac{1}{2})^2 = 2$. Om aan de eis dat $\sum_i x_i \equiv 0 \pmod{2}$ te voldoen, is het eenvoudig na te gaan dat er een even aantal maal $+1/2$ moet voorkomen. Dus is het wortelsysteem van van E_8 :

$$\Phi = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ \pm 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{2} \\ \pm \frac{1}{2} \\ \pm \frac{1}{2} \\ \pm \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \pm \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}. \quad (1.2.2)$$

Waarbij de voor de geheeltallig vectoren alle combinaties mogen voorkomen en bij de half-tallige vectoren slechts degene met een even aantal maal $+1/2$.

Om te bepalen hoeveel wortels dit wortelsysteem heeft lopen we de combinaties af. De wortels met componenten ± 1 worden bepaald door een eerste positie in de vector (8 mogelijkheden) en een tweede positie (7 mogelijkheden), waarbij we natuurlijk zullen dubbel tellen en dus moeten we het aantal mogelijkheden halveren. Het aantal mogelijk tekens is $(--, +-, -+, ++)$, dus 4, dit geeft een totaal aantal vectoren $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 = 112$. Voor de half-tallige vectoren geldt dat per component het teken onderscheid maakt, in de eerste component zijn twee mogelijkheden, in de tweede component zijn twee mogelijkheden, enzovoorts tot de achtste component, wat een totaal van $2^8 = 256$ mogelijkheden oplevert. Echter moeten er een even aantal maal $+1/2$ (en natuurlijk ook een even aantal maal $-1/2$) voorkomen, dus is de helft van de mogelijkheden niet toegestaan. Er geldt dus $\#\Phi = 112 + \frac{1}{2} \cdot 256 = 240$.

De theorie van Lisi is gebaseerd op interactie in de primitieve knoop met deeltjes $x_1 + x_2 \rightarrow x_3$ weergegeven in het Feynmandiagram



Hierbij zijn α_1 , α_2 en α_3 wortels die uniek verbonden zijn aan de deeltjes x_1 , x_2 respectievelijk x_3 .

Omdat in deze Feynmandiagrammen behoud van lading geldt moet ook dit terugkomen in termen van het wortelsysteem. De ladingen die in het standaardmodel voorkomen zijn te vinden in tabel 11.

Laat $R_8 = \Phi_{E_8} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{240}\}$ en X de verzameling van elementaire deeltjes. In tabel 11 in de appendix is een overzicht weergegeven van de ladingen die we onderzoeken voor de mogelijke

toewijzing aan een wortel. Zij $F = \{\pi_{T_3}, \pi_{Y_W}, \pi_{g^3}, \pi_{g^8}, \pi_B, \pi_L\} = \{\pi_1, \dots, \pi_6\}$ de verzameling van afbeeldingen $\pi_i : X \rightarrow \mathbf{Z}$ die aan van elke deeltje in X aangeven hoe groot de lading is. Voor deze theorie zijn de de uitkomsten zodanig geschaald zodat de uitkomst geheeltallig is, zoals ook te zien in tabel 11. Daartoe worden dus in feite eenheden zodanig gekozen dat kleinst voorkomende, positieve waarde gelijk is aan 1. Dit houdt in dat we kijken naar $2T_3$, $6Y_W$, $\frac{2}{\sqrt{3}}g^3$, $2g^8$, $3B$ en L ten opzichte van de gebruikelijke eenheden.

In Lisi's model bestaat een bijectieve afbeelding tussen de alle deeltjes en de generatoren² van E_8 en bestaan er dus 248 deeltjes. Acht van deze wortels worden naar de verzameling van onderling commuterende generatoren van E_8 gestuurd, in de ruimte van het wortelsysteem worden al deze deeltjes naar de nulvector gestuurd. De 240 andere deeltjes (X') worden naar wortels in het wortelsysteem gestuurd. We noteren deze bijectie tussen de 240 deeltjes en de wortels $\varphi : X' \leftrightarrow R_8$. Ook de verzameling van ladingen F heeft binnen Lisi's theorie een plaats in E_8 . Als we behoudswetten dus toepassen op de diagrammen op aan deeltjes gelinkte wortels α, β , dan moet gelden (met $\tilde{\pi} = \pi \circ \varphi^{-1}$):

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \alpha \\ \swarrow \\ \downarrow \\ \searrow \\ \beta \end{array} \rightarrow \alpha + \beta \\
 \tilde{\pi}(\alpha) + \tilde{\pi}(\beta) = \tilde{\pi}(\alpha + \beta)
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} -\beta \\ \swarrow \\ \downarrow \\ \searrow \\ \alpha + \beta \end{array} \\
 \alpha \rightarrow \begin{array}{c} \swarrow \\ \downarrow \\ \searrow \end{array} \\
 \tilde{\pi}(\alpha) = \tilde{\pi}(-\beta) + \tilde{\pi}(\alpha + \beta)
 \end{array}
 \end{array}$$

Voor willekeurig $\alpha \in R_8^+$ geldt dan $\alpha = \sum_{i=1}^n \beta_i$ met $\beta_i \in \Delta$ zodanig dat $\sum_{i=1}^k \beta_i \in R_8^+$ voor alle $k = 1, \dots, n$ volgens lemma 4.2.1. Er geldt dan dus inductief

$$\pi(\alpha) = \tilde{\pi} \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \right) = \tilde{\pi} \left(\beta_n + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i}_{\in R_8 = \varphi(X)} \right) \quad (1.2.3)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \tilde{\pi}(\beta_n) + \tilde{\pi} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \right) = \tilde{\pi}(\beta_n) + \tilde{\pi} \left(\beta_{n-1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-2} \beta_i}_{\in R_8 = \varphi(X)} \right) \quad (1.2.4)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \tilde{\pi}(\beta_n) + \tilde{\pi}(\beta_{n-1}) + \tilde{\pi} \left(\sum_{i=1}^{n-2} \beta_i \right) = \dots \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^n \tilde{\pi}(\beta_i) \quad (1.2.5)$$

Dus $\tilde{F} = \{\tilde{\pi} : \pi \in F\}$ is \mathbf{Z} -lineair op de wortels in R_8^+ . In beide diagrammen geldt ladingsbehoud, en dus volgt

Tabel 1: Lijst van enkele categoriën van deeltjes en hun baryongetal

$$\begin{array}{rcl}
 \tilde{\pi}(\alpha) & = & \tilde{\pi}(-\beta) + \tilde{\pi}(\alpha + \beta) \\
 \tilde{\pi}(\alpha) + \tilde{\pi}(\beta) & = & \tilde{\pi}(\alpha + \beta) - \\
 \hline
 -\tilde{\pi}(\beta) & = & -\tilde{\pi}(-\beta)
 \end{array}$$

We zien dat $\tilde{\pi}(-\beta) = -\tilde{\pi}(\beta)$. We kunnen concluderen dat $\tilde{F} = \{\tilde{\pi} : \pi \in F\}$ \mathbf{Z} -lineair in alle wortels in het wortelsysteem van E_8 .

²Een verzameling generatoren van een Lie-algebra een verzameling die een basis is van de onderliggende vectorruimte.

Er is dus voor elke lading $\pi \in F$ een unieke vector $u \in \mathbf{R}^8$ zodat voor alle $x \in X$ geldt $\pi(x) = (u, \varphi(x))$, waarbij (\cdot, \cdot) het standaard inwendig product op \mathbf{R}^8 is. Daartoe definiëren we de afbeelding $\psi : F \rightarrow \mathbf{R}^8$ door $\psi(\pi) = u$. Merk echter op dat $(\psi(\pi), \varphi(x)) = \pi(x) \in \mathbf{Z}$ voor alle $\pi \in F$ en $x \in X$.

De verzameling *gewichten* van het wortelsysteem van E_8 is de verzameling $\Lambda = \{\lambda \in \mathbf{R}^8 : (\lambda, \alpha) \in \mathbf{Z} \text{ voor alle } \alpha \in \Phi_{E_8}\}$ en vormt een rooster. Omdat elke lading uit het standaardmodel altijd een geheel getal moet opleveren geldt $\psi(\pi) \in \Lambda$ en kunnen we dus ook schrijven $\psi : F \rightarrow \Lambda$.

Om de hoofdvraag te beantwoorden wordt de aanname gedaan dat de gewichten die corresponderen met de ladingen onderling orthogonaal zijn. Deze aanname is gebaseerd op het feit dat de ladingen in het standaardmodel corresponderen met orthogonale operatoren.

Hoofdvraag. *Bestaan er een injectie $\varphi : X \hookrightarrow \mathbf{R}_8$ en afbeelding $\psi : F \rightarrow \Lambda$ zodanig dat*

$$\pi(x) = (\psi(\pi), \varphi(x)), \quad (1.2.6)$$

voor alle $\pi \in F$ en $x \in X$ en de elementen van $\psi(F)$ onderling orthogonaal zijn?

De hoofdvraag komt dan neer op het commuteren van het volgende diagram voor alle $\pi \in F$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & & \\ \uparrow \pi & \swarrow (\psi(\pi), \cdot) & \\ X' & & \mathbf{R}_8 \\ & \searrow \varphi & \end{array}$$

De hoofdvraag kan informeel geformuleerd worden als volgt: *Is het mogelijk elk elementair deeltje te koppelen aan een wortel uit het wortelsysteem van E_8 , en elke lading aan een gewicht van E_8 te koppelen zodanig dat de projectie, het inwendig product, van de wortel met het gewicht de waarde van de lading oplevert en de gewichten onderling orthogonaal zijn?*

De theorie van Lisi omschrijft meer deeltjes dan op het moment bekend zijn uit het standaardmodel, en postuleert dan ook het bestaan hiervan [25].

Op de site

<http://differentialgeometry.org/epe/>, [1]

heeft Lisi zijn model van de deeltjes in E_8 geprogrammeerd. De projectie op het platte vlak laat toe om de meerdere ladingen te zien en de spectra te bepalen.

Het is voorbarig te concluderen dat Lisi's theorie de realiteit volledig beschrijft en daadwerkelijk een theorie van alles is. Door de grote belangstelling en publiciteit van de verschijning van Lisi's artikel zijn er al snel kritische kanttekeningen geplaatst bij deze mogelijk toch wat te rooskleurige elegantie van E_8 binnen deze toepassing. Zo bespreken Distler en Garibaldi [6] in hun artikel *There is no "Theory of Everything" Inside E_8* dat de aangewezen ondergroepen van Lie-groep E_8 voor de fundamentele krachten niet voldoen aan bepaalde eisen op basis van de fysische realiteit.

Een bijzondere opermerking is ook te lezen in het artikel van Distler en Garibaldi:

“ In private communication, Lisi has indicated that he objects to our condition (ToE3), because he no longer wishes to identify all 248 generators of $\text{Lie}(E)$ as particles (either bosons or fermions). In his new and unpublished formulation, only a subset are to be identified as particles. In particular, $V_{2,1}$ is typically a reducible representation of G and, in his new formulation, only a subrepresentation corresponds to particles (fermions). This is not the approach followed in [15], where all 248 generators are identified as particles and where, moreover, 20 odd of these are claimed to be new as yet undiscovered particles a prediction of his theory. As recently as April 2009, Lisi reiterated this prediction in an essay published in the Financial Times,”

Hierin geeft Lisi aan dat hij niet meer veronderstelt dat er een bijectie bestaat tussen alle deeltjes (wat er dus 248 zouden moeten zijn) en de voortbrengers van de Lie-algebra. Desondanks gaan wij uit van zijn oorspronkelijke artikel.

1.3 Bollenstapeling- en Kissing sphere-probleem

Wortelsystemen, en specifiek het wortelsysteem van E_8 komt ook terug in andere problemen. Twee van deze problemen zijn het bollenstapeling- en kissing sphere-probleem.

Het *Sphere-packing*-probleem (bollenstapeling) is al een lang bestaand probleem wat eenvoudig te begrijpen is, maar lastig te beantwoorden [31]. We nemen de euclidische ruimte \mathbf{R}^n ($n \geq 1$) met daarop de norm standaardnorm $\|\cdot\|$ en de Lebesguemaat λ . We schrijven $B_n(x, r) = \{y \in \mathbf{R}^n : \|x - y\| < r\}$.

Zij $X \subset \mathbf{R}^n$ een discrete verzameling met $\|x - y\| \geq 2$ voor alle verschillende $x, y \in X$, dan overlappen bollen met middelpunten in X en straal 1 elkaar niet. De verzameling $\mathcal{P} = \bigcup_{x \in X} B_n(x, 1)$ heet dan een *sphere-packing* (bollenstapeling). Als X een rooster is, dan heet \mathcal{P} ook wel een roosterpakking.

De eindige dichtheid van \mathcal{P} is

$$\Delta_{\mathcal{P}}(r) = \frac{\lambda(\mathcal{P} \cap B_n(0, r))}{\lambda(B_n(0, r))}, \quad r > 0 \quad (1.3.1)$$

De dichtheid van de bollenstapeling is dan $\Delta_{\mathcal{P}} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \Delta_{\mathcal{P}}(r)$. De dichtste bollenstapeling in dimensie $n \geq 1$ is dan gedefinieerd als

$$\Delta_n = \sup_{\substack{\mathcal{P} \subset \mathbf{R}^n \\ \mathcal{P} \text{ bollenstapeling}}} \Delta_{\mathcal{P}} \quad (1.3.2)$$

Er geldt

- $\Delta_1 = 1$, dit is triviaal. Immers is $B_1(x, r) = (x - r, x + r)$ en kan door aaneenschakeling van intervallen $\mathcal{P} = \bigcup_{x \in 1+2\mathbf{Z}} B_1(x, 1) = \bigcup_{x \in 1+2\mathbf{Z}} (x - 1, x + 1) = \mathbf{R} \setminus 2\mathbf{Z}$, de gehele ruimte op een maat-nul verzameling na gevuld worden.
- $\Delta_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.906899682$. Deze dichtheid correspondeert met de hexagonale stapeling van cirkels [8].
- $\Delta_3 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0.74048049$. Lange tijd heeft dit specifieke probleem in 3-dimensies bekend gestaan als *het vermoeden van Kepler*, geformuleerd in 1611 en het optimum wordt aangenomen door de kubisch vlakgecentreerde stapeling [27]. Het is pas relatief recent, in 1998, bewezen door Thomas Hales [11].

Omdat de probleemstelling niet beperkt is tot de ruimten \mathbf{R}, \mathbf{R}^2 en \mathbf{R}^3 kunnen ook hogere dimensies $n > 3$ onderzocht worden, een speciaal geval hierin is voor $n = 8$:

Stelling 1.3.1. Voor $n = 8$ geldt $\Delta_8 = \frac{\pi^4}{384} \approx 0.2546695\dots$ en deze dichtste stapeling wordt aangenomen door

$$\mathcal{P} = \bigcup_{x \in \Lambda_8} B_8(x, 1) \quad \text{met} \quad \Lambda_8 = \{x \in \mathbf{Z}^8 \cup (\mathbf{Z} + \frac{1}{2})^8 : \sum_i x_i \equiv 0 \pmod{2}\}. \quad (1.3.3)$$

Merk op dat geldt $\Phi_{E_8} = \{x \in \Lambda_8 : (x, x) = 2\}$, de doorsnijding van Λ_8 met een zevensfeer met straal $\sqrt{2}$. Dit resultaat is bewezen in 2016 door Maryna Viazovska [24]. Merk op dat de ruimte in dit geval voor iets meer dan een kwart gevuld is en iets minder dan 75% geen deel uitmaakt van de bollenstapeling, dit in tegenstelling tot het geval $n = 3$, waarin

ongeveer driekwart van de ruimte juist wél gevuld is. Ter vergelijking is de dichtheid van een regelmatige stapeling van bollen in hyperkubussen, $X = (2\mathbf{Z})^8 \subset \mathbf{R}^8$, gelijk aan

$$\Delta_{\mathcal{P}} = \frac{\lambda(B_8(0,1))}{\lambda(\{x \in \mathbf{R}^8 : \|x\|_{\infty} \leq 1\})} = \frac{\frac{\pi^{8/2}}{\Gamma(\frac{8}{2}+1)} 1^8}{2^8} = \frac{\pi^4}{4! \cdot 2^8} = \frac{1}{16} \Delta_8 \approx 0.01585434424 \dots \quad (1.3.4)$$

Waar voor $n = 3$ geldt

$$\Delta_{\mathcal{P}} = \frac{\lambda(B_3(0,1))}{\lambda(\{x \in \mathbf{R}^3 : \|x\|_{\infty} \leq 1\})} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{2^3} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta_3 \approx 0.5235987756 \dots \quad (1.3.5)$$

Kort na de verschijning van het artikel van Viazovska werd bewezen door Cohn, Kumar, Miller, Radchenko en Viazovska dat in \mathbf{R}^{24} het *Leechrooster* de dichtste pakking oplevert [5]. Het Leechrooster Λ_{24} is een uniek rooster in \mathbf{R}^{24} en kan geconstrueerd worden uit het rooster van E_8 waarop ook het bewijs berust [28]. Hiervoor geldt $\Delta_{24} = \lambda(B_{24}(0,1)) = \frac{\pi^{12}}{12!} \approx 0.00192957431 \dots$

Een andere (desalniettemin gerelateerde) situatie waarin E_8 te vinden is, is in het zogenaamde *Kissing sphere*-probleem. In dit probleem wordt gekeken naar bollen van een vaste straal in de euclidische ruimte \mathbf{R}^n met $n > 0$. De vraag die ontstaat is hoe groot het maximum aantal bollen van straal r kunnen raken (maar niet overlappen) aan één vaste bol van straal r .

Als we de vaste bol in het punt $0 \in \mathbf{R}^n$ plaatsen, dan willen we $m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ maximaal zodanig dat er $x_1, \dots, x_m \in \mathbf{R}^n$ bestaan met $\|x_i\| = 2r$ voor alle i en $B_n(x_i, r) \cap B_n(x_j, r) = \emptyset$ voor alle $i \neq j$.

Aangezien de straal vast ligt en de middelpunten het probleem vastleggen, kunnen het probleem ook schrijven in termen van ongelijkheden. Immers willen we $m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ maximaal zodanig dat er $x_1, \dots, x_m \in \mathbf{R}^n$ bestaan met $\|x_i\| = 2r$ voor alle i en $\|x_i - x_j\| \geq 2r$ voor alle $i \neq j$. Wegens isometrie kunnen we voor het gemak $r = \frac{1}{2}$ nemen zonder het probleem te veranderen. Laat $k : \mathbf{Z}_{>0} \rightarrow \mathbf{Z}_{\geq 0}$, met $k(n)$ het maximum aantal kissing spheres in \mathbf{R}^n zijn. Bekend is dat de volgende boven- en ondergrenzen bestaan voor $k(n)$ [3].

Tabel 2: Onder- en bovengrenzen voor de *kissing numbers* in verschillende dimensies [3]. Van de bekende kissingnumbers wordt de geometrie van centra van de bollen aangenomen door de (roosters) van wortelsystemen.

| n | Ondergrens voor $k(n)$ | Bovengrens voor $k(n)$ | Rooster (van) | n | Ondergrens voor $k(n)$ | Bovengrens voor $k(n)$ | Rooster (van) |
|-----|------------------------|------------------------|---------------|-----|------------------------|------------------------|----------------|
| 1 | 2 | = 3 | A_1 | 13 | 1154 | 2069 | |
| 2 | 6 | = 6 | A_2 | 14 | 1606 | 3183 | |
| 3 | 12 | = 12 | A_3 | 15 | 2564 | 4866 | |
| 4 | 24 | = 24 | D_4 | 16 | 4320 | 7355 | |
| 5 | 40 | 45 | | 17 | 5346 | 11072 | |
| 6 | 72 | 78 | | 18 | 7398 | 16572 | |
| 7 | 126 | 134 | | 19 | 10668 | 24812 | |
| 8 | 240 | = 240 | E_8 | 20 | 17400 | 36764 | |
| 9 | 306 | 364 | | 20 | 17400 | 36764 | |
| 10 | 500 | 554 | | 22 | 49896 | 82340 | |
| 11 | 582 | 870 | | 23 | 93150 | 124416 | |
| 12 | 840 | 1357 | | 24 | 196560 | = 196560 | Λ_{24} |

Uit tabel 2 blijkt dat in \mathbf{R}^8 een bol door maximaal 240 bollen van gelijke straal geraakt kan worden en dit specifiek in de configuratie van E_8 . Ook voor de dimensies 1, 2, 3 en 4 zijn wortelsystemen de optimale geometrie.

2 Elementaire deeltjes en het standaardmodel

Om te onderzoeken of de theorie van Lisi een nieuw inzicht kan geven of eenvoudig weerlegd kan worden, moeten alle elementaire deeltjes en de ladingen van elementaire deeltjes beschreven worden. De ladingen zijn de behouden grootheden van deze interacties en deze eigenschap moet dus in het model terug komen. In dit hoofdstuk worden ook de toegelaten interacties in termen van Feynmandiagrammen beschreven.

2.1 Elementaire deeltjes

Materie is opgebouwd uit deeltjes die interacties met elkaar kunnen aangaan. Elementaire deeltjes kunnen worden verdeeld in fermionen en bosonen, deeltjes met een halftallige en respectievelijk een heeltallige spin.

Tabel 3: Het standaardmodel bevat fermionen en bosonen. De fermionen zijn verdeeld in generaties en in quarks en leptonen.

| Fermionen | | | Bosonen |
|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------|
| I | II | III | |
| u up | c charm | t top | γ foton |
| d down | s stange | b bottom | g gluon |
| e elektron | μ muon | τ tau | W^\pm W-boson |
| ν_e elektron- neutrino | ν_μ muon- neutrino | ν_τ tau- neutrino | Z Z-boson |
| | | | H Higgsboson |

Zoals te zien in tabel 3 zijn er 3 generaties fermionen, aangegeven met I, II en III. De meeste materie waar we mee bekend zijn is opgebouwd uit de eerste generatie:

Een deeltje dat opgebouwd is uit drie quarks heet een baryon. Het proton is een baryon en is opgebouwd uit twee upquarks en één downquark: uud . Een ander baryon is het neutron, dat bestaat uit één upquark en twee downquarks: udd . Deze deeltjes worden onderling samengehouden door de sterkte kernkracht, waarvan de drager het gluon is. Ook de protonen en neutronen onderling worden samengehouden door sterke kernkracht en vormen op deze manier een atoomkern. Het atoom bestaat uit een atoomkern en elektronen in een baan om de kern in een elektrisch neutrale configuratie, dat betekent dat er evenveel protonen als elektronen aanwezig zijn. Chemische verbindingen tussen atomen zorgen vervolgens voor alle materialen om ons heen.

De elektromagnetische afstoting dan wel aantrekking tussen deeltjes met elektrische lading wordt door fotonen bewerkstelligd. Door het uitwisselen van fotonen wordt impuls uitgewisseld wat deze kracht veroorzaakt.

De zes verschillende quarks (up, down, charm, strange, top en bottom) heten ook wel *smaken*

en zo wordt ook gesproken van zes smaken leptonen (elektron, muon, tau en drie bijbehorende neutrino's). De smaak van een deeltje kan veranderen. Een proton kan in een neutron veranderen en andersom zoals dat gebeurt bij radioactief β -verval. In het eerste geval vervalt in feite een upquark naar een downquark. Daarbij ontstaat een virtueel W^+ -boson, dat vervolgens vervalt naar een positron ($\bar{e} = e^+$) en een elektroneutrino $u \rightarrow d + W^+ \rightarrow d + e^+ + \nu_e$. In het geval een neutron vervalt in een proton ontstaat een W^- -boson dat vervalt in een elektron en een anti-elektronneutron, ofwel $\bar{d} \rightarrow u + W^- \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$. De deeltjes verantwoordelijk voor de zwakke wisselwerking zijn de bosonen W^+ , W^- en Z , waarbij het Z -boson geen elektrische lading heeft.

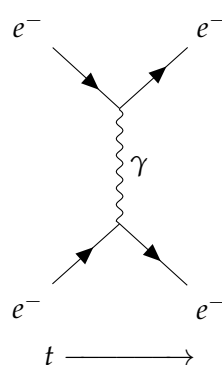
Ook kunnen paren quarks samengestelde deeltjes vormen. Wegens behoud van ladingen moet zo'n paar echter wel bestaan uit een quark en een antiquark, dergelijke deeltjes heten mesonen.

Een eigenschap van deeltjes is *heliciteit*. Deze eigenschap heeft te maken met de spin van een deeltje en de massa. Deeltjes die spin hebben kunnen linkshandig of rechtshandig zijn en dit geeft een grote hoeveelheid nieuwe toestanden. Twee uitzonderingen zijn neutrino's en de Higgsbosonen (voor het Higgsmechanisme). In het geval van neutrino's is alleen het bestaan van linkshandigheid voor (gewone) neutrino's en rechtshandigheid voor antineutrino's aangetoond. Higgsbosonen zijn spin 0 deeltjes en hebben dus niet de eigenschap van links- of rechtshandigheid [9].

Gravitonen zijn deeltjes die de interacties met zwaartekracht opleveren. Het bestaan van gravitonen is nog niet aangetoond en het bestaan wordt door geavanceerdere theorieën ook uitgesloten. Voor dit model zullen we de gravitonen later ook uitsluiten.

2.2 Feynmandiagrammen

Interacties tussen deeltjes worden beschreven met behulp van *Feynmandiagrammen*. In deze diagrammen worden alle deeltjes aan het begin van een interactie links weergegeven en aan het eind rechts. De tijd loopt dan ook van links naar rechts, en alle interacties tussendoor zijn hierdoor zichtbaar. Een eenvoudig Feynmandiagram³ is bijvoorbeeld de Coulombafstoting tussen twee elektronen zoals weergegeven in het volgende diagram



In dit diagram naderen twee elektronen elkaar, wisselen een foton uit en bewegen van elkaar vandaan. De fermionen worden aangegeven met rechte lijnen met pijlen en fotonen met de gegolfde lijnen. Als de pijl in het diagram naar rechts wijst geeft dit aan dat het deeltje een normaal deeltje is, in het geval de pijl naar links wijst in de tijd dan hebben we te maken met een antideeltje.

³Voor het maken van Feynmandiagrammen is gebruik gemaakt van het pakket *TikZ-Feynman* [7].

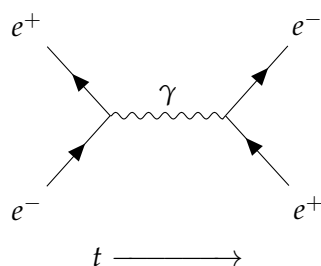
De knopen in een Feynmandiagram heten *primitieve knopen*, deze knopen kunnen aan elkaar worden verbonden om gecompliceerde interacties te beschrijven.

De primitieve knopen afzonderlijk kunnen op zichzelf geen waarneembare interactie beschrijven, we demonstreren dit met een voorbeeld. Stel dat een elektron en positron op een naar elkaar toe bewegen en beide dezelfde snelheid hebben. De totale impuls is dan nul, immers hebben het positron en elektron dezelfde massa. Als er één foton zou ontstaan zou deze een impuls hebben en zou impuls dus een grootheid zijn die niet behouden is. Ook in massa en energie kunnen in zo'n geval niet behouden zijn. Echter geldt Heisenberg's onzekerheidsrelatie voor de energie-operator (de hamiltoniaan H) en tijd (t),

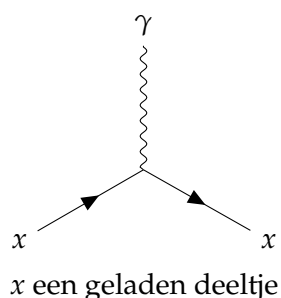
$$\sigma_p \sigma_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{en} \quad \sigma_H \sigma_t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.2.1)$$

En dus is het toegestaan niet te voldoen aan impulsbehoud zolang de afstand onzeker is en ook een korte tijd niet te voldoen aan energiebehoud. Deze interacties heten dan ook wel *virtuele interacties* en kunnen slechts deel zijn van een diagram waarin deze grootheden wel behouden zijn.

Een bijzonder feit is dat de diagrammen ook geroteerd en getransleerd kunnen worden en nog steeds geldig zijn. Wanneer we bovenstaand diagram 90° roteren ontstaat het volgende diagram



In dit diagram is te zien hoe een elektron en een positron (immers wijst een van de pijlen in het begin naar links in de tijd) samenkomen, annihileren tot een foton en het foton later opnieuw een elektron en positron creëert. Alle zogenaamde kwantumelektrodynamische (QED) interacties bestaan uit een aaneenschakeling van de primitieve knoop

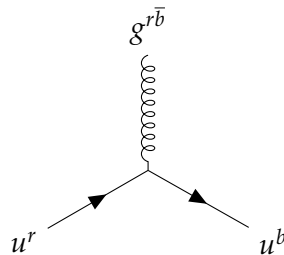


Quarks ondervinden naast elektromagnetische krachten (immers zijn quarks geladen) ook sterke kernkracht. De sterke kernkracht is order van grote sterker dan de elektromagnetische kracht, en een drager van de sterke kernkracht heet een *gluon*. Sterke kernkracht kent echter niet slechts één lading, maar drie ladingen die *rood*, *groen* en *blauw* heten. Deze naamgeving heeft niets met de dagelijkse opvatting van deze kleuren te maken maar is slecht een methode van modelleren.

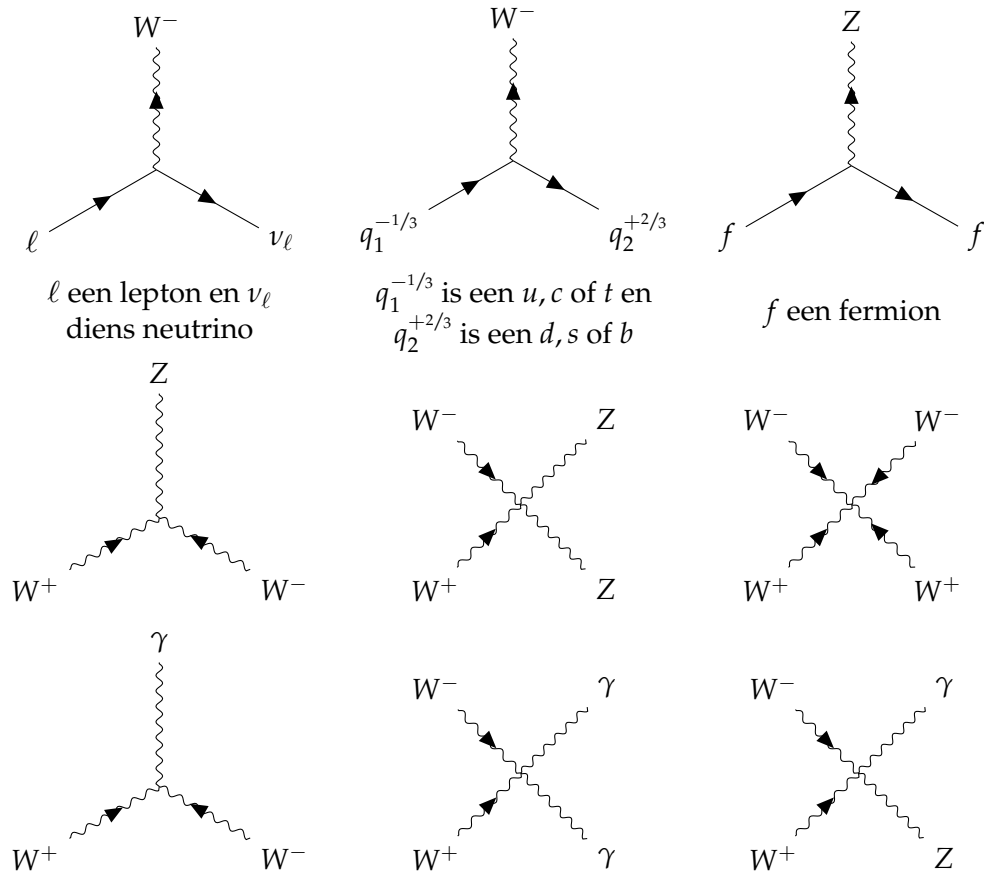
Het blijkt dat er 8 verschillende gluonen zijn en deze worden in Feynmandiagrammen aangegeven met gespiraliseerde lijnen. Uit theorie van kwantumchromodynamica blijkt dat de volgende primitieve knopen kunnen optreden



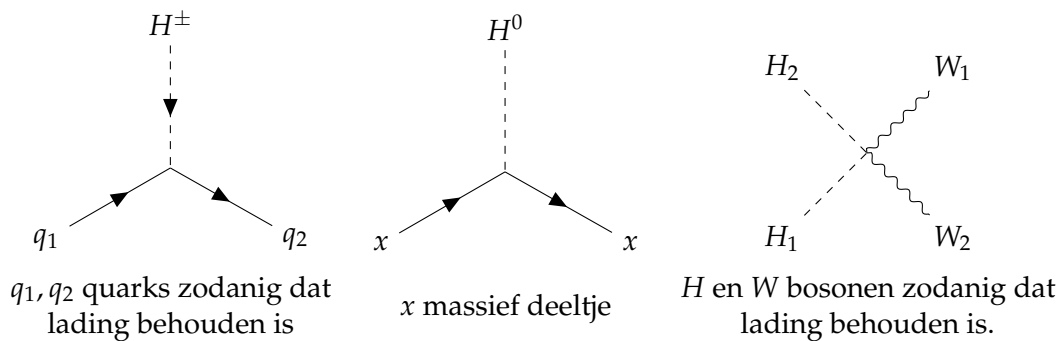
Een voorbeeld van de een interactie met kleurlading is weergegeven in onderstaand diagram waarbij een rode upquark verandert in een blauwe upquark door het ontstaan van een rood-antiblaauw gluon.



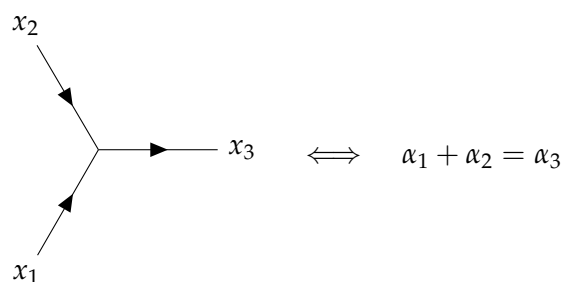
Ook de interacties van de zwakke kernkracht kunnen beschreven worden in termen van Feynmandiagrammen in het zogenaamde *Glashow-Weinberg-Salammodel* (GWS). De dragers van de zwakke kernkracht zijn de twee geladen W -bosonen en het neutrale Z -boson. Ook de paden van deze bosonen worden aangegeven met gegolfde lijnen. De mogelijke primitieve knopen in deze theorie zijn in volgende negen diagrammen weergegeven.



Ook het Higgsboson, gerelateerd aan het Higgsmechanisme dat deeltjes massa geeft, heeft interacties met massieve deeltjes. Het Higgsboson heeft zelf ook massa en dus ook interacties met zichzelf.



Lisi's model veronderstelt een relatie tussen interacties in Feynmandiagrammen (specifieker voor elke knoop) en geassocieerde wortels. Daartoe koppelt Lisi elk elementair deeltje aan een van de generatoren van de Lie-algebra E_8 , door de ontbinding van een Lie-algebra in een wortelsysteem leidt dat er toe dat een deeltje een wortel van het wortelsysteem van E_8 of een nulvector in \mathbf{R}^8 kan zijn en zou de volgende equivalentie opgaan:



Waarbij α_1, α_2 en α_3 respectievelijk de wortels zijn die horen bij de deeltjes x_1, x_2 en x_3 .

2.3 Ladingen

De ladingen die in het model voorkomen, corresponderen met de interne behouden grootheden. Behouden grootheden zijn het gevolg van symmetriën zoals beschreven door de stelling van Noether [21],[9]:

Stelling 2.3.1 (E. Noether). *Elke continue symmetrie van de Lagrangiaan geeft een behouden grootheid.*

Voorbeelden van symmetriën zijn symmetrie in tijd, ruimte, rotatie en elektromagnetische ijk-transformatie die respectievelijk leiden tot behoud van energie, impuls, impulsmoment en elektrische lading. De symmetriën die te maken hebben de ladingen in het model kunnen worden uitgedrukt in termen van Lie-groepen.

Zwakke isospin

De Pauli-matrices zijn het drietal matrices [10]:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.3.1)$$

De verzameling $\mathfrak{su}(2) = \{x_1 i \sigma_x + x_2 i \sigma_y + x_3 i \sigma_z : x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}$ is de Lie-algebra van de Lie-groep $SU(2) = \{U \in \text{Mat}_2(\mathbf{C}) : U^\dagger U = I\}$. Deze groep is de symmetriegroep van zwakke isospin [23].

De zwakke isospin $T = (T_1, T_2, T_3)$ van een deeltje is de lading die de informatie bevat over de zwakke wisselwerking die het deeltje kan aangaan. Door de analogie van het gebruikelijke begrip *spin* van een deeltje en de zwakke wisselwerking is de naam *zwakke isospin* tot stand gekomen. De component T_3 van een deeltje is behouden in een interactie.

Zwakke hyperlading en elektrische lading

De Lie-groep $U(1)$ wordt gegeven door

$$U(1) = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = 1\}, \quad (2.3.2)$$

met als groepsbewerking complexe vermenigvuldiging. Deze groep is de symmetriegroep van de grootheid *zwakke hyperlading*, genoteerd met Y_W [32]. De zwakke hyperlading is samen met de zwakke isospin gerelateerd aan elektrische lading.

Klassiek gezien wordt de elektromagnetische kracht beschreven door de Maxwellvergelijkingen, en was daarmee de eerste vereniging van fundamentele krachten, namelijk de elektrische kracht en magnetische kracht. De mate waarin een deeltje deze krachten ondervindt

wordt aangegeven door de elektrische lading. De positieve geladen quarks hebben lading $+2/3 e$, de negatieve quarks $-1/3 e$. Het elektron, muon en tau hebben lading $-e$ en neutrinos lading 0. De drager van de elektromagnetische kracht is het foton γ .

De elektrische lading Q , heeft ook een plaats binnen het standaardmodel, maar is geen onafhankelijke lading ten opzichte van zwakke hyperlading en zwakke isospin. Er geldt namelijk voor elk deeltje de relatie

$$Q = T_3 + Y_W. \quad (2.3.3)$$

Omdat T_3 en Q behouden ladingen zijn, is Q dat ook.

Kleurlading g^3 en g^8

De Lie-algebra $\mathfrak{su}(3)$ van de Lie-groep $SU(3)$ over het lichaam \mathbf{C} kan worden weergegeven door de spoorloze matrices

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.4)$$

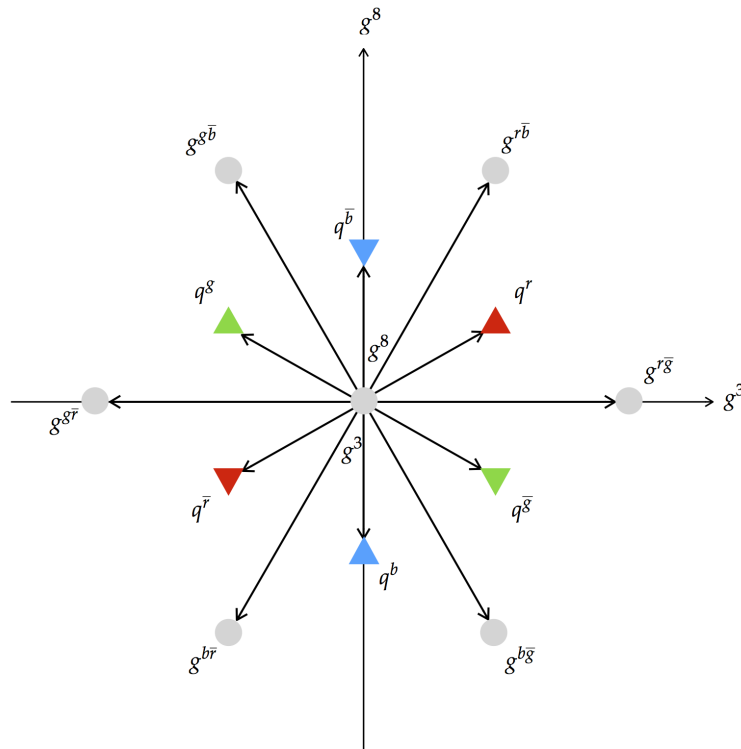
$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

Waarbij $G_i = \frac{\lambda_i}{2}$ de Gell-Mann matrices zijn en $\mathfrak{su}(3) = \text{span}_{\mathbf{R}}\{iG_1, \dots, iG_8\}$, de verzameling van anti-Hermitische matrices met spoor nul. Hiermee volgt direct dat $\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{su}(3) = 8$. Merk op dat

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} \sigma_x & \emptyset \\ \emptyset & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} \sigma_y & \emptyset \\ \emptyset & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} \sigma_z & \emptyset \\ \emptyset & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.6)$$

en $\mathfrak{su}(2)$ dus isomorf is met een deellie-algebra van $\mathfrak{su}(3)$.

De Lie-groep $SU(3) = \{U \in \text{Mat}_3(\mathbf{C}) : U^\dagger U = I \text{ en } \det U = 1\}$ beschrijft de symmetrieën van kleurlading en heeft als Lie-algebra $\mathfrak{su}(3)$. Kleurlading is een eigenschap die alleen voorkomt bij quarks en gluonen. Quarks kunnen de lading rood, groen of blauw hebben (r, g, b) en antiquarks de lading antirood, antigroen of antiblauw ($\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$). In figuur 2 is weergegeven hoe de dragers van de kleurlading, 8 gluonen, interacties kunnen aangaan met de gekleurde quarks.



Figuur 2: De symmetrie van kleurlading kan worden weergegeven zoals in onderstaand diagram. Wanneer twee deeltjes optellen als vectoren dan bestaat de interactie en geeft de som het resulterende deeltje [29]

Uit figuur 2 is bijvoorbeeld af te lezen dat de volgende interacties kunnen optreden

$$q^{\bar{r}} + q^b \rightarrow g^{b\bar{r}}, \quad (2.3.7)$$

$$g^{g\bar{r}} + g^{r\bar{b}} \rightarrow g^{g\bar{b}}, \quad (2.3.8)$$

waarbij q een quark is. Het figuur dat ontstaat is het wortelsysteem van G_2 , wat we later nog zullen tegenkomen. Wanneer men alleen quarks bekijkt in dit figuur is het wortelsysteem van A_2 te zien. Zoals opgemerkt kan worden bestaan er twee onafhankelijke en orthogonale kleurladingen, namelijk g^3 en g^8 .

Voor de kleurladingen gelden de volgende relaties in termen van g^3 en g^8 , zoals ook duidelijk wordt uit figuur 2.

$$\begin{cases} r = \frac{\sqrt{3}}{2}g^3 + \frac{1}{2}g^8, \\ g = -\frac{\sqrt{3}}{2}g^3 + \frac{1}{2}g^8, \\ b = -g^8 \end{cases} \quad (2.3.9)$$

2.4 Het standaardmodel

De elektromagnetische, zwakke en sterke wisselwerking komen samen in het zogenaamde standaardmodel. Dit model beschrijft de krachten weergegeven in tabel 4.

Tabel 4: De ijkbosonen die verbonden zijn aan de krachten uit het standaardmodel zijn samen met hun representerende groep weergegeven.

| Ijkboson | lading (e) | massa (GeV) | groep |
|----------|------------|-------------|---------------------|
| γ | 0 | 0 | $U(1)_Q$ |
| Z | 0 | 91 | $U(1) \times SU(2)$ |
| W^\pm | ± 1 | 80 | $SU(2)$ |
| g | 0 | 0 | $SU(3)$ |

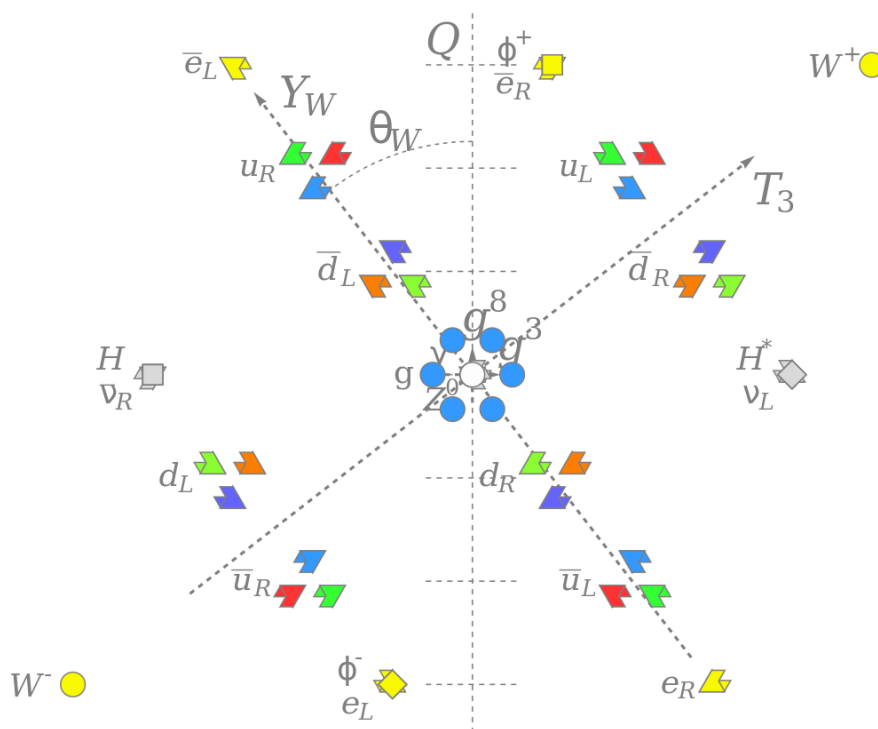
Het standaardmodel geeft een ijktransformatie en is gebaseerd op de symmetriegroep

$$U(1) \times SU(2) \times SU(3) \quad (2.4.1)$$

waarbij het *directe product* tussen groepen een componentsgewijze bewerking is, en dus inderdaad weer opnieuw een groep. De groepen in het directe som horen als volgt bij ladingen [23]:

1. $U(1)$ de zwakke hyperlading, deze grootheid is zoals gezegd *niet* gelijk aan de elektrische lading. Het ijkdeeltje is een massaloos (vector)boson met spin 1 waarvan twee heliceits-toestanden bestaan.
2. $SU(2)$ de zwakke isospin. De ijkdeeltjes van deze transformatie zijn drie vectorbosonen.
3. $SU(3)$ de kleurlading met als ijkdeeltjes acht gluonen.

In figuur 3 worden de deeltjes uit het standaardmodel samen met de ladingen weergegeven.



Figuur 3: In dit figuur worden voor elementaire deeltjes uit het standaardmodel de ladingen zwakke isospin, zwakke hyperlading en de kleurlading weergegeven met behulp van de projecties op de assen. Merk op dat de elektrische lading dus afhankelijk is van de zwakke isospin en zwakke hyperlading. [16]

Baryongetal

Het baryongetal B van een (samengesteld of elementair) deeltje is een derde van het verschil in het aantal quarks, n_q en antiquarks, $n_{\bar{q}}$,

$$B = \frac{1}{3}(n_q - n_{\bar{q}}). \quad (2.4.2)$$

Het is eenvoudig na te gaan dat de volgende tabel opgaat

Tabel 5: Lijst van enkele categoriën van deeltjes en hun baryongetal

| Deeltje | Baryongetal |
|--------------|-------------|
| quarks | +1/3 |
| antiquarks | -1/3 |
| baryonen | +1 |
| antibaryonen | -1 |
| leptonen | 0 |
| mesonen | 0 |
| bosonen | 0 |

Het baryongetal is een behouden grootheid in het standaardmodel. In modellen die de vereniging van elektromagnetisch, zwakke en sterke wisselwerking verklaren hoeft B echter geen behouden grootheid te zijn.

Leptongetal

Het leptongetal L van een willekeurig elementair deeltje is op een zelfde manier als het baryongetal een getalsmatige manier om aan te geven tot welke categorie een deeltje behoort. Daartoe behoort een lepton het getal $L = +1$, een antilepton $L = -1$ en alle deeltjes die geen leptonen zijn $L = 0$.

In een interactie van deeltjes is de som van de leptongetallen een behouden grootheid. Dat betekent dat het verschil tussen het aantal leptonen en antileptonen constant blijft.

In het modellen voor het standaardmodel zijn er drie leptongetallen: L_e , L_μ en L_τ elk voor het deeltje in de subscript en het daarbijbehorende neutrino. De toekenning van de waarden $-1, 0, +1$ geschiedt dan zoals voor het totale leptongetal en er geldt $L = L_e + L_\mu + L_\tau$. Het behoud van deze grootheden berust echter op het massaloos zijn van alle soorten neutrino's. Echter, door waargenomen zogenaamde neutrino-oscillaties blijkt dit niet het geval, en kan het voorkomen dat een of meerdere van de getallen L_e, L_μ, L_τ niet behouden zijn.

In sommige verenigde veldentheoriën waar B en L afzonderlijk niet behouden zijn, is afgeleide grootheid $B - L$ is een mogelijke kandidaat voor een grootheid die wél behouden is en wordt onder andere gebruikt in het *Pati-Salammodel*.

3 Lie-algebra's

Het concept van een wortelsysteem is afkomstig van de theorie van Lie-algebra's: vectorruimten met een extra bewerking, de Lie-haak. In dit hoofdstuk wordt beschreven wat een Lie-algebra is en hoe een wortelsysteem hier uit voortkomt.

Definitie 3.0.1 (Lie-algebra). Een vectorruimte L over een lichaam K , samen met een bewerking $L \times L \rightarrow L$ geschreven als $(x, y) \mapsto [xy]$, die ook wel de Lie-haak of commutator van x en y wordt genoemd, is een **Lie-algebra** over K als aan de volgende axioma's voldaan wordt:

L1) De Lie-haak is bilinear.

L2) $[xx] = 0$ voor alle $x \in L$.

L3) $[x[yz]] + [y[zx]] + [z[xy]] = 0$ voor alle $x, y, z \in L$ (Jacobi-identiteit)

Uit L2) kunnen we eenvoudig afleiden dat voor alle x, y in een Lie-algebra L geldt $[xy] = -[yx]$. Als we immers $z = x + y$ nemen en L2) toepassen zien we dat

$$0 \stackrel{L2)}{=} [zz] = [x + y, x + y] \stackrel{L1)}{=} [x, x + y] + [y, x + y] \quad (3.0.1)$$

$$\stackrel{L1)}{=} [xx] + [xy] + [yx] + [yy] \stackrel{L2)}{=} [xy] + [yx] \quad (3.0.2)$$

dus $[xy] = -[yx]$.

Een eenvoudig voorbeeld van een Lie-algebra is de ruimte \mathbf{R}^3 met als Lie-haak het *uitwendig product* gedefinieerd als

$$[xy] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}. \quad (3.0.3)$$

zoals bijvoorbeeld gebruikt wordt in mechanica (bv. krachtmoment) of elektromagnetisme (bv. Lorentzkracht) [26].

Een grote klasse Lie-algebra's zijn de *lineaire Lie-algebra's*. Voor een vectorruimte V over een lichaam K is de verzameling endomorfismen $\text{End}(V) = \{f : V \rightarrow V : f \text{ is lineair}\}$, ook wel genoteerd als $\mathfrak{gl}(V)$, samen met de gebruikelijke vectorruimtestructuur van optelling en scalaire vermenigvuldiging en de Lie-haak, gedefinieerd als

$$[xy] = xy - yx, \quad x, y \in \mathfrak{gl}(V) \quad (3.0.4)$$

een Lie-algebra. De deelalgebra's van $\mathfrak{gl}(V)$ heten *lineaire Lie-algebra's*.

De dimensie van een Lie-algebra is de dimensie van de vectorruimte en in eindig-dimensionale gevallen kan dan een Lie-algebra volledig beschreven worden door middel van eindig veel getallen uit het onderliggende grondlichaam. Laat L een eindig-dimensionale Lie-algebra over een lichaam K zijn met dimensie $\dim_K L = n$, en zij $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ een basis voor L . Voor alle $x_i, x_j \in B$ geldt dat we de Lie-haak kunnen schrijven als

$$[x_i x_j] = \sum_{k=1}^n f_{i,j}^k x_k, \quad f_{i,j}^k \in K \quad (3.0.5)$$

Omdat de Lie-haak bilineair is, is de uitdrukking 3.0.5 dat ook en ligt de Lie-algebra dus op isomorfie na vast door de elementen $f_{i,j}^k \in K$, $1 \leq i, j, k \leq n$, die ook wel *structuurconstanten* genoemd worden. Door de definitie van de Lie-algebra na te gaan, is te zien dat de structuurconstanten moeten voldoen aan de eisen.

$$\begin{cases} f_{i,i}^k = 0 & \text{voor alle } i, k \\ f_{i,j}^k = -f_{j,i}^k & \text{voor alle } i, j, k \\ \sum_{k=1}^n (f_{i,j}^k f_{k,\ell}^m + f_{j,\ell}^k f_{k,i}^m + f_{\ell,i}^k f_{k,j}^m) = 0 & \text{voor alle } i, j, \ell, m \end{cases} \quad (3.0.6)$$

Het is dus mogelijk een Lie-algebra dus te definiëren met behulp van getallen die voldoen aan 3.0.6.

Lie-algebra's kunnen beschreven worden in termen van wortelsystemen. Om deze verbinding te maken zijn daartoe de volgende definities nodig.

Een *ideaal* van een Lie-algebra L is een deelruimte $K \subset L$ zodanig dat voor alle $x \in L$ en $y \in K$ geldt $[xy] \in K$. Een Lie-algebra heet *simpel* in het geval deze slechts triviale idealen heeft: $\{0\}$ en L en *semi-simpel* als deze de directe som is van simpele Lie-algebras.

Het blijkt dat er van de eindig-dimensionale Lie-algebras slechts enkele families bestaan [12], namelijk

Tabel 6: De klassieke families van Lie-algebras, waarbij K lichaam met $\text{char}K \neq 2$.

| Familie | notatie | naam |
|----------|---------------------------|---------------------------|
| A_ℓ | $\mathfrak{sl}(\ell + 1)$ | speciale lineaire algebra |
| B_ℓ | $\mathfrak{o}(2\ell + 1)$ | orthogonale algebra |
| C_ℓ | $\mathfrak{sp}(2\ell)$ | symplectische algebra |
| D_ℓ | $\mathfrak{o}(2\ell)$ | orthogonale algebra |

Naast deze families bestaan er de zogenaamde *exceptionele, simpele Lie-algebra's*, die niet tot een van deze families toebehoren. Dit zijn de Lie-algebra's E_6 , E_7 , E_8 , F_4 en G_2 . Het bestaan van deze Lie-algebras kan worden gedaan met behulp van een classificatie van irreducibele wortelsystemen, zie paragraaf 4.5.

3.1 Ontbinding van semisimpele Lie-algebra's

De *adjunctie-afbeelding* is voor $x \in L$ gedefinieerd door

$$ad_x : L \rightarrow L \quad (3.1.1)$$

$$y \mapsto [xy] \quad (3.1.2)$$

Dus de notatie is $ad_x(y)$. De *centralisator* van een deelverzameling $X \subset L$ is de verzameling $C_L(X) = \{y \in L : [xy] = 0 \text{ voor alle } x \in X\}$.

Definitie 3.1.1. Een deelalgebra $H \subset L$ heet *torsie*, als H commutatief is en voor alle $h \in H$ is ad_x diagonaliseerbaar in de vectorruimte L .

Voor een maximale torsie deelalgebra H met $\alpha \in H^* = \text{Hom}(H, K)$ noteren we de deelruimten $L_\alpha = \{x \in L : [hx] = \alpha(h)x \text{ voor alle } h \in H\}$.

De verzameling $\Phi = \{\alpha \in H^* : L_\alpha \neq 0\} \setminus \{0\}$ heet de *wortels van L* . Nu geldt de volgende stelling

Stelling 3.1.1. *Zij H een maximale torsie deelalgebra van een semi-simpele Lie-algebra L , dan geldt*

$$L = C_L(H) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha \quad (3.1.3)$$

Merk op dat tevens $C_L(H) = L_0 = H$.

We geven nu een voorbeeld van de ontbinding van een Lie-algebra en bepalen het wortelsysteem.

Voorbeeld 3.1.1. Zij $L = A_1 = \mathfrak{sl}(2) = \{x \in \mathfrak{gl}(2, \mathbf{C}) : \text{Tr}x = 0\}$ de Lie-algebra van spoorloze 2×2 -matrices over \mathbf{C} . Een basis voor L is

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.1.4)$$

waarbij de matrices respectievelijk genoteerd worden als x_1, x_2, x_3 . Er geldt dus $\dim_{\mathbf{C}} L = 3$.

We definiëren het matrix-inproduct door (voor een algemene vectorruimte van matrices over \mathbf{C}) door:

$$(\cdot, \cdot) : L \times L \rightarrow \mathbf{C} \quad (3.1.5)$$

$$(x, y) \mapsto \text{Tr}(x^\dagger y). \quad (3.1.6)$$

De geïnduceerde norm wordt hiermee de *Frobeniusnorm*[13] $\|x\|_F := \sqrt{\text{Tr}(x^\dagger x)}$ voor $x \in L$, ofwel

$$\|x\|_F = \sqrt{\text{Tr}(x^\dagger x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_{i,j}|^2}, \quad x = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} \end{pmatrix} \in L. \quad (3.1.7)$$

Voor alle matrices $x \in B$ geldt $\|x\|_F = 1$.

De verzameling $H = \text{span}\{x_1\}$ is een maximale torsie deelalgebra van L . Voor elke matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in L$ geldt

$$\text{ad}_{x_1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \left[x_1, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ -2c & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.8)$$

De inverteerbare lineaire afbeelding

$$\varphi : L \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^3 \quad (3.1.9)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad (3.1.10)$$

zorgt ervoor dat er een unieke matrix $\widetilde{\text{ad}}_x \in \text{Mat}_3(\mathbf{C})$ afhankelijk van $x \in L$ is zodanig dat het diagram commuteert

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\text{ad}_x} & L \\ \varphi \downarrow & & \uparrow \varphi^{-1} \\ \mathbf{C}^3 & \xrightarrow{\widetilde{\text{ad}}_x} & \mathbf{C}^3 \end{array}$$

We kunnen nu aflezen dat

$$\widetilde{\text{ad}}_{x_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (3.1.11)$$

En dus zijn de eigenvectoren en -waarden bij niet-nul eigenwaarden gelijk aan

$$x_2, \sqrt{2} \quad x_3, -\sqrt{2} \quad (3.1.12)$$

Het wortelsysteem van A_1 bestaat dus uit de twee vectoren $\Phi = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ en er geldt

$$\text{span}\{x_1\} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} (\mathfrak{sl}(2))_\alpha = \text{span}\{x_1\} \oplus \text{span}\{x_2\} \oplus \text{span}\{x_3\} = \text{span}B = \mathfrak{sl}(2). \quad (3.1.13)$$

Een ander voorbeeld van de constructie van een wortelsysteem uit een Lie-algebra is voor $\mathfrak{sl}(3)$.

Voorbeeld 3.1.2. We beginnen met de Lie-algebra $L = A_2 = \mathfrak{sl}(3) = \{x \in \mathfrak{gl}(3, \mathbf{C}) : \text{Tr}x = 0\}$. Merk op dat een basis voor L is

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.1.14)$$

$$\left. \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.1.15)$$

respectievelijk genoteerd met x_1, \dots, x_8 . Hieruit blijkt meteen dat $\dim_{\mathbf{C}} L = 8$. Er geldt $[x_1, x_5] = 0$.

We definiëren het matrix-inproduct door (voor een algemene vectorruimte van matrices over \mathbf{C}) door:

$$(\cdot, \cdot) : L \times L \rightarrow \mathbf{C} \quad (3.1.16)$$

$$(x, y) \mapsto \text{Tr}(x^\dagger y). \quad (3.1.17)$$

Voor alle matrices $x \in B$ geldt $\|x\|_F = 1$.

Er geldt dat $H = \text{span}\{x_1, x_5\}$ een maximale torsie deelalgebra van L is. Voor een willekeurige

matrix $\begin{pmatrix} a+b & c & d \\ e & -a+b & f \\ g & h & -2b \end{pmatrix} \in L$ geldt

$$\left[x_1, \begin{pmatrix} a+b & c & d \\ e & -a+b & f \\ g & h & -2b \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 2c & d \\ -2e & 0 & -f \\ -g & h & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.18)$$

$$\text{en } \left[x_5, \begin{pmatrix} a+b & c & d \\ e & -a+b & f \\ g & h & -2b \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3d \\ 0 & 0 & 3f \\ -3g & -3h & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.19)$$

Als we de inverteerbare lineaire afbeelding $\varphi : L \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^8$, gedefinieerd door

$$\begin{pmatrix} a+b & c & d \\ e & -a+b & f \\ g & h & -2b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ h \end{pmatrix}, \text{ waardoor het volgende diagram commuteert voor alle } x \in$$

L en unieke $\widetilde{\text{ad}}_x \in \text{Mat}_8(\mathbf{C})$ afhankelijk van x :

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\text{ad}_x} & L \\ \varphi \downarrow & & \uparrow \varphi^{-1} \\ \mathbb{C}^8 & \xrightarrow{\widetilde{\text{ad}}_x} & \mathbb{C}^8 \end{array}$$

Dan kunnen we ad_{x_1} respectievelijk ad_{x_5} weergeven met de diagonaalmatrices

$$\widetilde{\text{ad}}_{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -2 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & -1 & & \\ \emptyset & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \widetilde{\text{ad}}_{x_5} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 3 & & \\ \emptyset & & & & & & -3 & \\ & & & & & & & -3 \end{pmatrix}. \tag{3.1.20}$$

De eigenvectoren en -waarden zijn (voor $\widetilde{\text{ad}}_{x_1}$ en $\widetilde{\text{ad}}_{x_5}$ tegelijk) zijn

$$x_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_5, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.21}$$

en voor de niet-nul eigenwaarden vinden we

$$x_2, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_3, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \tag{3.1.22}$$

$$x_4, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_6, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \tag{3.1.23}$$

$$x_7, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad x_8, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \tag{3.1.24}$$

Er geldt dus

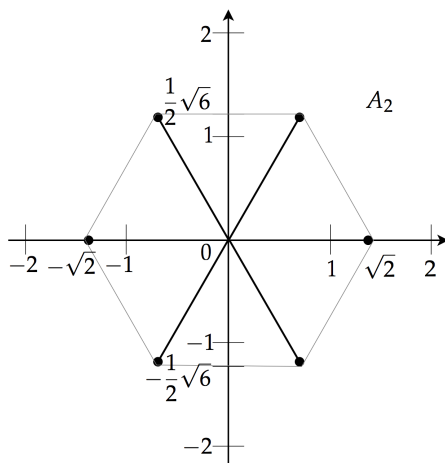
$$\Phi = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}. \tag{3.1.25}$$

en

$$\text{span}\{x_1, x_5\} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} (\mathfrak{sl}(3))_\alpha = \text{span}\{x_1, x_5\} \oplus \text{span}\{x_2\} \oplus \dots \oplus \text{span}\{x_4\} \tag{3.1.26}$$

$$\oplus \text{span}\{x_6\} \oplus \dots \oplus \text{span}\{x_8\} = \text{span}B = \mathfrak{sl}(3). \tag{3.1.27}$$

weergeven in het platte vlak vormen de wortels een regelmatige zeshoek



Wat stelling 3.1.1 voor dit geval bevestigt.

Voor de verzameling Φ gelden de volgende eigenschappen

Stelling 3.1.2. *Zij L, H, Φ en E als eerder, dan is Φ een wortelsysteem zoals in definitie 4.1.*

Er is een correspondentie tussen semi-simpele Lie-algebra's en wortelsystemen⁴, deze correspondentie is een bijectie als gevolg van de stelling van Serre [12], p. 99, en dus karakteriseren wortelsystemen volledig semi-simpele Lie-algebras.

⁴om precies te zijn tussen de equivalentieclassen met als relatie isomorfisme van semi-simpele Lie-algebra respectievelijk isomorfisme van wortelsystemen

4 Wortelsystemen

Om het wortelsysteem van E_8 te begrijpen worden in dit hoofdstuk definities en stellingen behandeld die van pas komen bij het beantwoorden van de hoofdvraag. Onder andere wordt aangetoond welke wortelsystemen bestaan en hoe hun symmetrieën beschreven kunnen worden. Ook worden gewichten van een wortelsysteem behandeld: de vectoren die met de ladingen in Lisi's theorie moeten corresponderen.

4.1 Wortelsystemen in \mathbb{R}^n

*De inhoud van dit hoofdstuk is grotendeels gebaseerd op het boek *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* van James E. Humphreys [12].*

We gaan verder op de definitie van een wortelsysteem zoals beschreven in 4.1, namelijk

Definitie (axioma's van een wortelsysteem). *Een deelverzameling Φ van een euclidische ruimte E heet een wortelsysteem in E als aan de volgende axioma's voldaan is*

- R1) Φ is eindig, spant de ruimte E op en $0 \notin \Phi$;
- R2) Als $\alpha \in \Phi$, dan zijn de enige veelvouden van α in Φ de vectoren $\pm\alpha$;
- R3) Als $\alpha \in \Phi$, dan laat de reflectie σ_α de verzameling Φ invariant;
- R4) Als $\alpha, \beta \in \Phi$, dan geldt $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

Aan een wortelsysteem $\Phi \in E$ koppelen we de *Weylgroep van Φ* gedefinieerd als $\mathcal{W} = \langle \sigma_\alpha : \alpha \in \Phi \rangle \subset \text{GL}(E)$, de groep voortgebracht door alle spiegelingen σ_α met $\alpha \in \Phi$. Het is eenvoudig na te gaan dat de groep \mathcal{W} werkt op E en in het bijzonder op Φ .

Wortelsystemen in lagere dimensies kunnen gemaakt worden uit een wortelsysteem in een hogere dimensie door deze zodanig te doorsnijden met deelruimten onder de voorwaarde dat de doorsnede alsnog de gehele deelruimte opspant. Dit wordt in de volgende stelling duidelijk.

Stelling 4.1.1. *Zij Φ een wortelsysteem in E en $W \subset E$ een deelruimte. Laat $\Omega = \Phi \cap W$, als $\Omega \neq \emptyset$ (en de ruimte W opspant), dan is Ω een wortelsysteem in W .*

Bewijs: We gaan de axioma's na:

- R1) Er geldt $\#\Omega = \#(\Phi \cap W) \leq \#\Phi < \infty$, $\text{span}\Omega = W$ is precies de aanname en ook $0 \notin \Phi$, dus $0 \notin \Omega$.
- R2) Neem $\alpha \in \Omega$ willekeurig, dan geldt dat $\alpha \in \Phi$, dus als $k\alpha \in \Phi$, dan moet $k = \pm 1$. Omdat W een deelruimte van E is volgt dat $-\alpha \in W$, dus $-\alpha \in \Omega$.
- R3) Neem $\alpha \in \Omega$ willekeurig. Er geldt evident dat $\sigma_\alpha(\Omega) = \{\sigma_\alpha(\beta) : \beta \in \Omega\} \subset \Phi$. Neem $\beta \in \Omega$ willekeurig, dan geldt dat $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$, een lineaire combinatie is van vectoren in W , dus $\sigma_\alpha(\beta) \in W$, en dus $\sigma_\alpha(\Omega) \subset \Phi \cap W = \Omega$. Anderzijds, neem $\gamma \in \Omega$ willekeurig, dan geldt dat $\beta = \sigma_\alpha(\gamma) \in \Phi$ en dus $\sigma_\alpha(\beta) = \gamma$ (uit R3). Er volgt dat $\gamma = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$ ofwel $\beta = \gamma + \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$, als lineaire combinatie van vectoren in W , dus $\beta \in W$, dus $\Omega \subset \sigma_\alpha(\Omega)$. Zo zien we dat $\sigma_\alpha(\Omega) = \Omega$.

R4) Triviaal. Voor willekeurige $\alpha, \beta \in \Omega$ geldt $\alpha, \beta \in \Phi$, dus $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbf{Z}$. □

Ook de notie van een isomorfisme bestaat voor wortelsystemen.

Definitie 4.1.1. Twee wortelsystemen (Φ, E) en (Φ', E') zijn *isomorf* als er een isomorfisme tussen de vectorruimten $\phi : E \xrightarrow{\sim} E'$ bestaat zodanig dat

$$\langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle, \quad \alpha, \beta \in \Phi \quad (4.1.1)$$

Het is eenvoudig na te gaan dat voor een dergelijk isomorfisme $\phi : E \xrightarrow{\sim} E'$ voor alle $\alpha, \beta \in \Phi$ geldt dat $\sigma_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)) = \phi(\sigma_\alpha(\beta))$.

Gevolg 4.1.1. Als Φ in E en Φ' in E' isomorf zijn, dan zijn de Weylgroepen respectievelijk \mathcal{W} en \mathcal{W}' isomorf.

Bewijs: Zij $\phi : E \xrightarrow{\sim} E'$ een isomorfisme van wortelsystemen. Definieer de afbeelding $f : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$ door $\sigma \mapsto \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$. f is goed gedefinieerd door de bovenstaande opmerking. Deze afbeelding is een groepsisomorfisme, immers geldt voor willekeurige $\sigma, \tau \in \mathcal{W}$ en $\alpha \in \Phi$

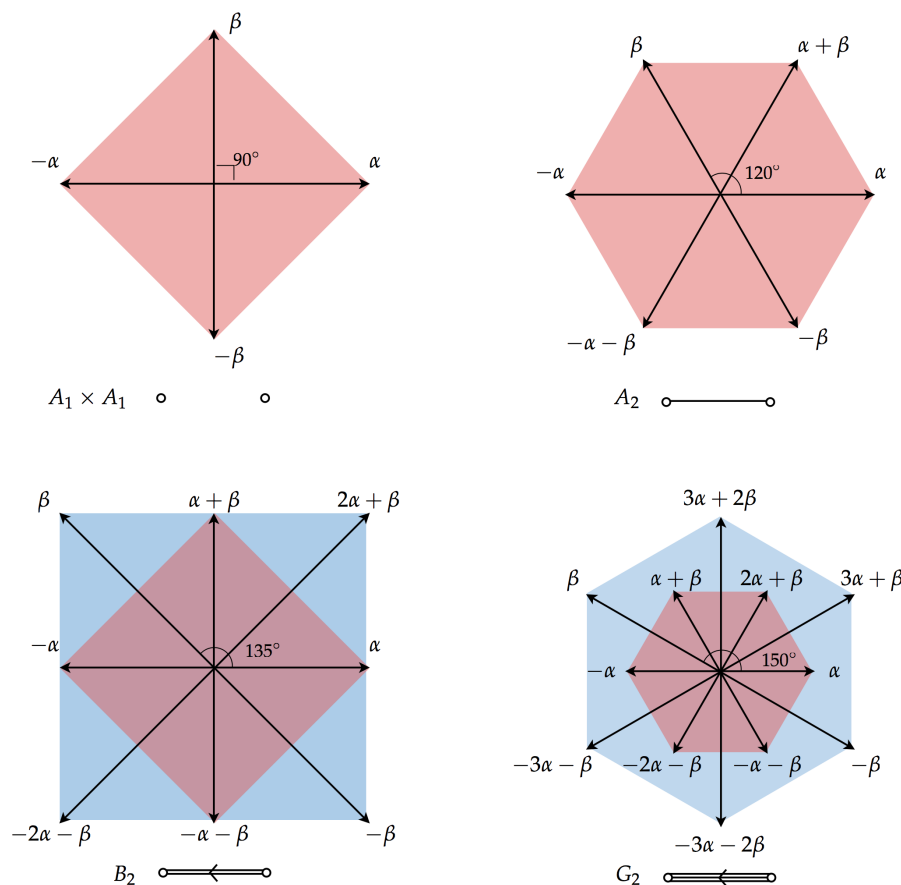
$$\begin{aligned} f(\sigma \circ \tau)(\alpha) &= (\phi \circ \sigma \circ \tau \circ \phi^{-1})(\alpha) = (\phi \circ \sigma \circ \text{id} \circ \tau \circ \phi^{-1})(\alpha) \\ &= (\phi \circ \sigma \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \tau \circ \phi^{-1})(\alpha) = ((\phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \tau \circ \phi^{-1}))(\alpha) \\ &= (f(\sigma) \circ f(\tau))(\alpha) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

dus f is een homomorfisme. Als we definiëren $\tilde{f} : \mathcal{W}' \rightarrow \mathcal{W}$ door $\sigma \mapsto \phi \circ \sigma^{-1} \circ \phi^{-1}$, dan geldt

$$(f \circ \tilde{f})(\sigma) = \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \sigma^{-1} \circ \phi^{-1} = \phi \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \circ \phi^{-1} = \phi \circ \phi^{-1} = \text{id} \quad (4.1.3)$$

Dus $\tilde{f} = f^{-1}$, en dus is f een isomorfisme tussen \mathcal{W} en \mathcal{W}' . □

De *rang* van een wortelsysteem Φ is de dimensie van de bijbehorende vectorruimte. Allereerst kan opgemerkt worden dat een wortelsysteem in Φ uit tenminste 4 vectoren bestaat, immers kan een enkele vector samen met zijn tegengestelde niet slecht een deelruimte van dimensie 1 opspannen. In figuur (4) zijn alle wortelsystemen van rang 2 weergegeven.



Figuur 4: Alle wortelsystemen van rang 2. De vectoren $\{\alpha, \beta\}$ vormen wat later een *basis* zal heten. Het wortelsysteem van $A_1 \times A_1$ is *irreducibel*. De grafen onder de figuren zijn de *Dynkindiagrammen* die bij het wortelsysteem horen.

Stelling 4.1.2. De Weylgroepen van $A_1 \times A_1$, A_2 , B_2 , G_2 zijn *dihedraal* en respectievelijk van orde 4, 6, 8 en 12. Tevens, als Φ een wortelsysteem is van rang 2, dan is de Weylgroep een van deze vier.

Bewijs: We bepalen eerst de Weylgroepen.

- $A_1 \times A_1$: Per definitie $\mathcal{W} = \langle \sigma_\alpha : \alpha \in \Phi_{A_1 \times A_1} \rangle$ en merk op dat $\sigma_\alpha = \sigma_{-\alpha}$ en $\sigma_\beta = \sigma_{-\beta}$, dus $\mathcal{W} = \{\text{id}, \sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\alpha \sigma_\beta\}$. Tevens geldt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\sigma_\alpha \sigma_\beta(x, y) = \sigma_\alpha(x, -y) = (-x, -y) = r_{180}(x, y)$, en dus $\sigma_\beta = \sigma_\alpha r_{180}$, de Weylgroep is nu $\mathcal{W} = \{\text{id}, \sigma_\alpha, r_{180}, \sigma_\alpha r_{180}\} = \mathcal{D}_2$ met orde $\#\mathcal{W} = 4$.
- A_2 : $\mathcal{W} = \langle \sigma_\alpha : \alpha \in \Phi_{A_2} \rangle$ en merk eveneens op dat $\sigma_\alpha = \sigma_{-\alpha}$ voor alle $\alpha \in \Phi$. Het is eenvoudig na te gaan dat $\sigma_\alpha \sigma_\beta = r_{120}$ en dus $\sigma_\beta \sigma_\alpha = r_{240}$, dus $\mathcal{W} = \{\text{id}, \sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\alpha \sigma_\beta, \sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha\} = \{\text{id}, \sigma_\alpha, r_{120}, r_{120}^2, \sigma_\alpha r_{120}, \sigma_\alpha r_{120}^2\} = \mathcal{D}_3$ met orde $\#\mathcal{W} = 6$.
- B_2 : $\mathcal{W} = \langle \sigma_\alpha : \alpha \in \Phi_{B_2} \rangle$ en $\sigma_\alpha \sigma_\beta = r_{90}$, $r_{180} = (r_{90})^2$, $r_{270} = (r_{90})^3$ en $r_{90} \sigma_\alpha$, $r_{180} \sigma_\alpha$ en $r_{270} \sigma_\alpha$ zijn samen met de identiteit alle mogelijke elementen, ofwel $\mathcal{W} = \mathcal{D}_4$ en $\#\mathcal{W} = 8$.
- G_2 : De Weylgroep van het wortelsysteem van G_2 bestaat uit de identiteit, σ_α , $\sigma_\beta \sigma_\alpha = r_{60}$, alle machten daarvan, dat zijn $r_{60}, r_{120}, r_{180}, r_{240}, r_{300}$ en alle vermenigvuldigingen van met links σ_α : $\sigma_\alpha r_{60}, \sigma_\alpha r_{120}, \sigma_\alpha r_{180}, \sigma_\alpha r_{240}, \sigma_\alpha r_{300}$, ofwel $\mathcal{W} = \langle \sigma_\alpha, r_{60} \rangle = \mathcal{D}_6$ en dus $\#\mathcal{W} = 12$.

Zij Φ een wortelsysteem van rang 2. Neem $\alpha, \beta \in \Phi$ zodanig dat $\alpha \neq \pm\beta$ en de hoek θ tussen

α en β maximaal is. Definieer

$$\begin{aligned} \arg : \Phi \times \Phi &\rightarrow [0, \pi] \\ (\alpha_1, \alpha_2) &\mapsto \arccos \left(\frac{(\alpha_1, \alpha_2)}{\|\alpha_1\| \|\alpha_2\|} \right) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

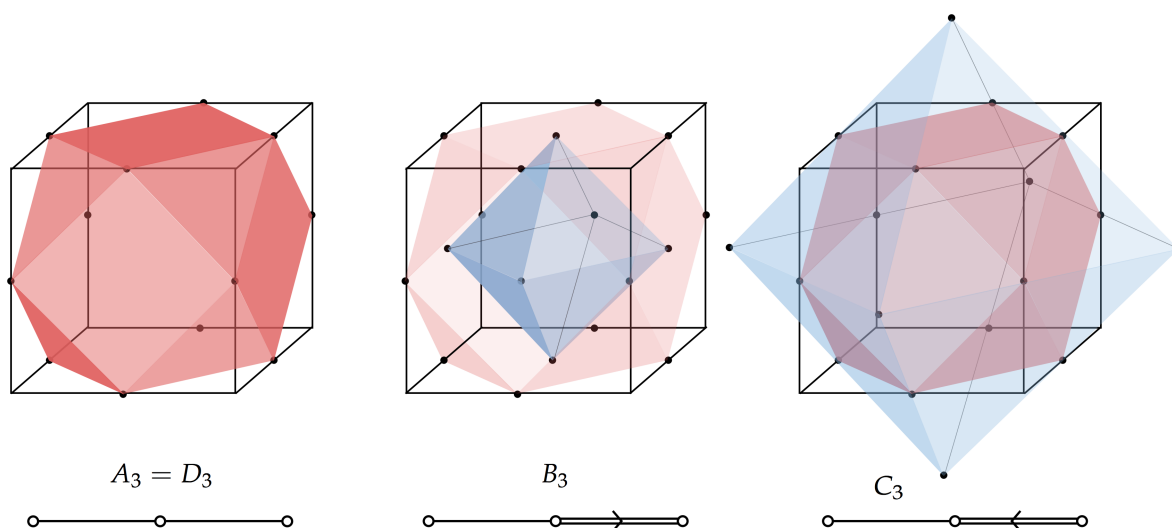
Uit tabel 7 zien we dat er vier mogelijkheden voor de hoeken zijn:

- Als $\theta = \pi/2$, dan moet $\Phi = A_1 \times A_1$. Anders moet wel $A_1 \times A_1 \subsetneq \Phi$ en er is een wortel $\tilde{\alpha} \in \Phi$ zodanig dat $0 < \arg(\tilde{\alpha}, \alpha) < \pi/2$, maar dan geldt $\sigma_\alpha(\tilde{\alpha}) \in \Phi$ en dus $\arg(\sigma_\alpha(\tilde{\alpha}), \alpha) = \pi - \arg(\tilde{\alpha}, \alpha) > \pi - \pi/2 = \pi/2$, wat de maximaliteit van de hoek tussen α en β tegenspreekt.
- Als $\theta = 2\pi/3$, dan moet $\Phi = A_2$. Anders geldt $A_2 \subsetneq \Phi$ en is er een wortel $\tilde{\alpha} \in \Phi$ zodanig dat $0 < \arg(\tilde{\alpha}, \alpha) < \pi/3$, maar dan geldt $\sigma_\alpha(\tilde{\alpha}) \in \Phi$ en $\arg(\sigma_\alpha(\tilde{\alpha}), \alpha) = \pi - \arg(\tilde{\alpha}, \alpha) > \pi - \pi/3 = 2\pi/3$, wat opnieuw de maximaliteit van de hoek tussen α en β tegenspreekt.
- Als $\theta = 3\pi/4$, dan moet $\Phi = B_2$. Anders geldt $B_2 \subsetneq \Phi$ en is er een wortel $\tilde{\alpha} \in \Phi$ zodanig dat $0 < \arg(\tilde{\alpha}, \alpha) < \pi/4$, maar dan geldt $\sigma_\alpha(\tilde{\alpha}) \in \Phi$ en dus $\arg(\sigma_\alpha(\tilde{\alpha}), \alpha) = \pi - \arg(\tilde{\alpha}, \alpha) > \pi - \pi/4 = 3\pi/4$, wat de maximaliteit van de hoek tussen α en β tegenspreekt.
- Als $\theta = 5\pi/6$, dan moet wel $\Phi = G_2$. Zo niet, dan $G_2 \subsetneq \Phi$ en er is een wortel $\tilde{\alpha} \in \Phi$ zodanig dat $0 < \arg(\tilde{\alpha}, \alpha) < \pi/6$, maar dan geldt $\sigma_\alpha(\tilde{\alpha}) \in \Phi$ en dus $\arg(\sigma_\alpha(\tilde{\alpha}), \alpha) = \pi - \arg(\tilde{\alpha}, \alpha) > \pi - \pi/6 = 5\pi/6$, wat wederom de maximaliteit van de hoek tussen α en β tegenspreekt.

Dus Φ kan slechts een van de wortelsystemen isomorf met die van $A_1 \times A_1$, A_2 , B_2 of G_2 zijn. \square

Merk op dat $\mathcal{D}_3 = \mathcal{W}(A_2) \subsetneq \text{Sym}(\Phi_{A_2}) = \mathcal{D}_6$, want de rotatie over 60° komt niet voor in de Weylgroep van A_2 , maar is zichtbaar wel een symmetrie van het wortelsysteem.

In figuur (5) worden wortelsystemen van rang 3 weergegeven (let op: dit zijn niet *alle* wortelsystemen), de benaming van deze wortelsystemen is A_3 , B_3 , C_3 .



Figuur 5: Alle irreducibele wortelsystemen van rang drie zijn weergegeven met zwarte punten, gebaseerd op [30].
 . Onder elk wortelsysteem is het Dynkindiagram weergegeven.

Duidelijk is dat $\Phi_{A_3} \subset \Phi_{B_3}, \Phi_{C_3}$. De convexe omhulsels van Φ_{A_3} en Φ_{B_3} vormen allebei een kuboctaëder en van Φ_{C_3} een octaëder. In Φ_{B_3} is het convexe omhulsel van de punten die niet in A_3 zitten een octaëder.

Uit de *classificatie van irreducibele wortelsystemen*, paragraaf 4.5, zal volgen dat elk wortelsysteem van rang 3 isomorf is met één van de wortelsystemen van $A_1 \times A_1 \times A_1, A_1 \times A_2, A_1 \times B_2, A_1 \times G_2, A_3, B_3$ of C_3 .

Uit een wortelstelsysteem $\Phi \in E$ kan de volgende verzameling geconstrueerd worden

$$\Phi^\vee = \{\alpha^\vee : \alpha \in \Phi\} \subset E \quad (4.1.5)$$

waarbij $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$. Er geldt dat Φ^\vee opnieuw een wortelsysteem is. Immers kunnen we kort de axioma's nalopen. Daartoe merken we eerst op dat de afbeelding $\phi : E \setminus \{0\} \rightarrow E \setminus \{0\}$ gegeven door $x \mapsto \frac{2x}{(x,x)}$ een involutie is, immers geldt voor willekeurige $x \in E \setminus \{0\}$ dat

$$(\phi \circ \phi)(x) = \phi\left(\frac{2x}{(x,x)}\right) = \frac{2\frac{2x}{(x,x)}}{\left(\frac{2x}{(x,x)}, \frac{2x}{(x,x)}\right)} = \frac{4x}{(x,x)} \frac{(x,x)^2}{4(x,x)} = x \quad (4.1.6)$$

dus $\phi \circ \phi = \text{id}_{E \setminus \{0\}}$, dus ϕ is ook bijtief. We controleren nu de axioma's

R1) $\#\Phi^\vee = \#\Phi < \infty$, dus Φ^\vee is eindig. Voor $x \in E$ geldt $x = \sum_{\alpha \in \Phi} b_\alpha \alpha$, ofwel

$$x = \sum_{\alpha \in \Phi} b_\alpha \alpha = \sum_{\alpha \in \Phi} \underbrace{b_\alpha(\alpha, \alpha)}_{b'_\alpha = b_\beta} \underbrace{\left(\frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}\right)}_{\beta} = \sum_{\beta \in \Phi^\vee} b_\beta \beta. \quad (4.1.7)$$

dus $\text{span}\Phi^\vee = E$. Stel dat $0 \in \Phi^\vee$, dan geldt dat er een zekere $\alpha \in \Phi$ is zodat $0 = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$. In dat geval geldt $\alpha = 0$, echter $0 \notin \Phi$, dus $0 \notin \Phi^\vee$;

R2) Neem $\beta \in \Phi^\vee$ willekeurig, dan is er een unieke $\alpha \in \Phi$ zodanig dat $\beta = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$, dan geldt $-\beta \in \Phi^\vee$, immers is $-\beta = \frac{2(-\alpha)}{(-\alpha, -\alpha)}$. Stel dat er een $c \in \mathbf{R} \setminus \{0, \pm 1\}$ is zodanig dat $c\beta \in \Phi^\vee$, dan geldt $c\beta = \frac{2\alpha/c}{(\alpha/c, \alpha/c)}$, echter moet dan $\alpha/c \in \Phi$, wat een tegenspraak is, dus de veelvoud van $\beta \in \Phi^\vee$ zijn slechts $\pm\beta$;

R3) “ \subset ” Neem $\alpha^\vee, \beta^\vee \in \Phi^\vee$ willekeurig, we tonen aan dat $\sigma_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) \in \Phi^\vee$. We werken uit

$$\sigma_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) = \beta^\vee - \langle \beta^\vee, \alpha^\vee \rangle \alpha^\vee = \frac{2\beta}{(\beta, \beta)} - \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)}}{2 \cdot 2 \frac{(\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)(\alpha, \alpha)}} \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)} \quad (4.1.8)$$

$$= \frac{2\beta}{(\beta, \beta)} - \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle \alpha}{(\beta, \beta)} = \frac{2}{(\beta, \beta)} \underbrace{(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha)}_{= \sigma_\alpha(\beta) \in \Phi} \quad (4.1.9)$$

Merk op dat de werking van de Weylgroep het inwendig product behoud, dus $(\beta, \beta) = (\sigma_\alpha(\beta), \sigma_\alpha(\beta))$, zo volgt

$$\sigma_{\alpha^\vee}(\beta^\vee) = \frac{2\sigma_\alpha(\beta)}{(\beta, \beta)} = \frac{2\sigma_\alpha(\beta)}{(\sigma_\alpha(\beta), \sigma_\alpha(\beta))} = (\sigma_\alpha(\beta))^\vee \in \Phi^\vee \quad (4.1.10)$$

“ \supseteq ”, merk op dat $\Phi^\vee = (\sigma_{\alpha^\vee} \circ \sigma_{\alpha^\vee})[\Phi^\vee] \subset \sigma_{\alpha^\vee}[\Phi^\vee]$, omdat σ_{α^\vee} voor alle $\alpha^\vee \in \Phi^\vee$ een involutie is;

R4) Neem $\alpha^\vee, \beta^\vee \in \Phi^\vee$ willekeurig. Nu geldt er dat

$$\langle \alpha^\vee, \beta^\vee \rangle = \frac{2(\alpha^\vee, \beta^\vee)}{(\beta^\vee, \beta^\vee)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)}}{2 \cdot 2 \frac{(\beta, \beta)}{(\beta, \beta)(\beta, \beta)}} = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbf{Z} \quad (4.1.11)$$

□

Het wortelsysteem Φ^\vee heet het *duale wortelsysteem* van Φ . Duidelijk is dat $(\Phi^\vee)^\vee = \Phi$, zoals we verwachten van een duale structuur.

In een willekeurig wortelsysteem zijn de waarden die de hoeken tussen twee vectoren kunnen aannemen beperkt. Immers geldt voor willekeurige vectoren $x, y \in E$ dat $(x, y) = \|x\| \|y\| \cos \theta$, met $\theta \in [0, \pi)$ de hoek tussen de vectoren x en y , we kunnen afleiden dat voor willekeurige vectoren $\alpha, \beta \in \Phi$ geldt

$$\mathbf{Z} \ni \langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \cdot 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 4 \frac{\|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 \cos^2 \theta}{\|\alpha\|^2 \|\beta\|^2} = 4 \cos^2 \theta \in [0, 4] \quad (4.1.12)$$

dus $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$ of $\frac{5\pi}{6}$. Samengevat kunnen we stellen dat zonder verlies van algemeenheid $\alpha \neq \pm\beta$ en $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$ de unieke mogelijkheden zijn weergegeven in tabel (7)

Tabel 7: De mogelijke waarden van de hoeken en de relatieve lengten tussen vectoren in een wortelsysteem.

| $\langle \alpha, \beta \rangle$ | $\langle \beta, \alpha \rangle$ | θ [rad] | $[\circ]$ | $\ \beta\ ^2 / \ \alpha\ ^2$ |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------|-----------|------------------------------|
| 0 | 0 | $\pi/2$ | 90 | onbepaald |
| 1 | 1 | $\pi/3$ | 60 | 1 |
| -1 | -1 | $2\pi/3$ | 120 | 1 |
| 1 | 2 | $\pi/4$ | 45 | 2 |
| -1 | -2 | $3\pi/4$ | 135 | 2 |
| 1 | 3 | $\pi/6$ | 30 | 3 |
| -1 | -3 | $5\pi/6$ | 150 | 3 |

De relatieve lengten kunnen herkend worden in figuur (4). Het volgende lemma volgt uit tabel (7).

Lemma 4.1.1. *Als $\alpha, \beta \in \Phi$ niet-proportioneel zijn (d.w.z. er is geen $x \in \mathbf{R}$ zodat $\alpha = x\beta$), dan geldt als $(\alpha, \beta) > 0$ (de hoek tussen α en β is strikt scherp), dan is $\alpha - \beta$ een wortel in Φ . Als $(\alpha, \beta) < 0$ (de hoek tussen α en β is stomp), dan is $\alpha + \beta$ een wortel in Φ .*

Bewijs: Neem aan dat voor niet-proportionele $\alpha, \beta \in \Phi$ geldt $(\alpha, \beta) > 0$, dan is $\langle \alpha, \beta \rangle$ ook positief. In tabel (7) lezen we af dat $\langle \alpha, \beta \rangle$ of $\langle \beta, \alpha \rangle$ gelijk is aan 1. Stel dat $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$, dan geldt

$$\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \beta \rangle \beta = \alpha - \beta \stackrel{\text{R3}}{\in} \Phi \quad (4.1.13)$$

anderzijds, als $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$, dan geldt $\beta - \alpha \in \Phi$ en dus

$$\Phi \stackrel{\text{R3}}{\ni} \sigma_{\beta-\alpha}(\beta - \alpha) = \beta - \alpha - \langle \beta - \alpha, \beta - \alpha \rangle (\beta - \alpha) = \beta - \alpha - 2(\beta - \alpha) = \alpha - \beta. \quad (4.1.14)$$

Als $(\alpha, \beta) < 0$, dan passen we het eerste geval toe op $-\beta$. □

Lemma 4.1.1 geeft aan welke bewerkingen al dan niet mogelijk zijn in een wortelsysteem, samen met tabel 7 is het eenvoudiger te classificeren welke wortelsystemen kunnen bestaan.

Wortelsystemen kunnen ook gemaakt worden door bestaande wortelsystemen te verkleinen. De volgende stellingen geven dit aan.

Stelling 4.1.3 (Opgave 9.7 uit [12]). *Laat $\alpha, \beta \in \Phi$ een deelruimte E' van E opspannen, dan is $E' \cap \Phi$ een wortelsysteem in E' . Ook is $\Phi \cap (\mathbf{Z}\alpha + \mathbf{Z}\beta)$ een wortelsysteem in E' en stemt in het algemeen **niet** overeen met $E' \cap \Phi$.*

Meer algemeen geldt dat als Φ' een niet-lege deelverzameling van Φ is met de eigenschappen: 1) $\Phi' = -\Phi'$; en 2) als $\alpha, \beta \in \Phi'$ en $\alpha + \beta \in \Phi$ dan geldt $\alpha + \beta \in \Phi'$; dan is Φ' een wortelsysteem in de deelruimte die het opspant.

Bewijs: Noem $\Omega = E' \cap \Phi \subset E$.

R1) $\#\Omega = \#(E' \cap \Phi) \leq \#\Phi < \infty$, omdat $\alpha, \beta \in \Omega$, $\text{span}\Omega = E'$ en $0 \notin \Phi$ dus $0 \notin \Omega$.

R2) Zij $\mu \in \Omega$ willekeurig, dan $\mu \in \Phi$, dus de enige veelvouden van μ zijn $\pm\mu \in \Phi$, ook geldt $\mu \in E'$, dus $\pm\mu \in E'$, dus de enige veelvouden zijn $\pm\mu \in \Omega$.

R3) Zij $\mu \in \Omega$ willekeurig, we bewijzen $\sigma_\mu[\Omega] = \Omega$:

“ \subset ” Zij $\lambda \in \sigma_\mu(\Omega)$, dan is er een $\gamma \in \Omega$ zodanig dat $\lambda = \sigma_\mu(\gamma)$, dus $\lambda = \gamma - \langle \gamma, \mu \rangle \mu \in E'$, eveneens geldt $\gamma, \mu \in \Phi$, dus $\sigma_\mu(\gamma) \in \Phi$, en zo volgt dat $\lambda = \sigma_\mu(\gamma) \in E' \cap \Phi = \Omega$.

“ \supseteq ” We hebben $\sigma_\mu(\Omega) \subset \Omega$, en dus ook $\Omega = \sigma_\mu(\sigma_\mu(\Omega)) \subset \sigma_\mu(\Omega)$, omdat σ_μ een involutie is.

Conclusie: $\sigma_\mu(\Omega) = \Omega$.

R4) Triviaal. Als $\mu, \lambda \in \Omega$, dan $\mu, \lambda \in \Phi$ dus $\langle \lambda, \mu \rangle \in \mathbf{Z}$.

Evenzo, noem $\Omega = E' \cap (\mathbf{Z}\alpha + \mathbf{Z}\beta)$.

R1) $\#\Omega = \#(E' \cap \Phi) \leq \#\Phi < \infty$, omdat $\alpha, \beta \in \Omega$, $\text{span}\Omega = E'$ en $0 \notin \Phi$ dus $0 \notin \Omega$.

R2) Zij $\mu \in \Omega$, dan $\mu \in \Phi$, dus de enige veelvouden van μ zijn $\pm\mu \in \Phi$, ook geldt $\mu \in \mathbf{Z}\alpha + \mathbf{Z}\beta$, dus voor zekere $x, y \in \mathbf{Z}$ geldt $\mu = x\alpha + y\beta$ en dus $-\mu = -(x\alpha + y\beta) = (-x)\alpha + (-y)\beta \in \mathbf{Z}\alpha + \mathbf{Z}\beta$, dus de enige veelvouden zijn $\pm\mu \in \Omega$.

R4) Triviaal. Als $\mu, \lambda \in \Omega$, dan $\mu, \lambda \in \Phi$ dus $\langle \lambda, \mu \rangle \in \mathbf{Z}$.

R3) Laat $\mu \in \Omega$, we bewijzen $\sigma_\mu(\Omega) = \Omega$:

“ \subset ” Zij $\lambda \in \sigma_\mu(\Omega)$, dan is er een $\gamma \in \Omega$ zodanig dat $\lambda = \sigma_\mu(\gamma)$. Schrijf $\mu = a\alpha + b\beta$, $\gamma = x\alpha + y\beta$ en $\langle \gamma, \mu \rangle = k \in \mathbf{Z}$, dan $\lambda = \gamma - \langle \gamma, \mu \rangle \mu = x\alpha + y\beta - k(a\alpha + b\beta) = (x - ka)\alpha + (y - kb)\beta \in \mathbf{Z}\alpha + \mathbf{Z}\beta$, en dus $\gamma, \mu \in \Phi$, zo volgt $\sigma_\mu(\gamma) \in \Phi$, dus $\lambda = \sigma_\mu(\gamma) \in \Phi \cap (\mathbf{Z}\alpha + \mathbf{Z}\beta) = \Omega$.

“ \supseteq ” Er geldt $\sigma_\mu(\Omega) \subset \Omega$, maar dan geldt $\Omega = \sigma_\mu(\sigma_\mu(\Omega)) \subset \sigma_\mu(\Omega)$, omdat σ_μ een involutie is.

Dus $\sigma_\mu(\Omega) = \Omega$.

In het algemeen,

R1) $\#\Phi' \leq \#\Phi < \infty$. Eveneens $\text{span}\Phi' = E'$ per definitie en $0 \notin \Phi$, dus $0 \notin \Phi'$.

R2) Neem $\alpha \in \Phi'$, dan $-\alpha \in -\Phi' = \Phi'$, en omdat alleen $\pm\alpha \in \Phi$, kan er alleen gelden dat $\pm\alpha \in \Phi'$.

R3) Zij $\alpha \in \Phi'$, we bewijzen dat $\sigma_\alpha(\Phi') = \Phi'$.

“ \subset ” Neem $\beta \in \Phi'$ willekeurig, dan geldt $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$. Tabel 7 geef nu dat slechts kan gelden $\langle \beta, \alpha \rangle \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$. En we moeten deze gevallen afzonderlijk uitwerken

1. Stel $\langle \beta, \alpha \rangle = 0$, dan geldt $\sigma_\alpha(\beta) = \beta \in \Phi'$;
2. Stel $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$, dan geldt $\Phi \ni \sigma_\alpha(\beta) = \beta + (-\alpha)$, en $-\alpha, \beta \in \Phi'$, dus $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi'$;
3. Stel $\langle \beta, \alpha \rangle = -1$, dan geldt $\Phi \ni \sigma_\alpha(\beta) = \beta + \alpha$, en $\alpha, \beta \in \Phi'$, dus $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi'$;
4. Stel $\langle \beta, \alpha \rangle = 2$, dan geldt, omdat $(\beta, \alpha) > 0$, geldt volgens lemma 4.1.1 dat $\beta - \alpha \in \Phi$, dus $\beta + (-\alpha) \in \Phi'$. Omdat $\Phi \ni \sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\alpha = (\beta - \alpha) + (-\alpha)$ de som is van elementen in Φ' geldt $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi'$;
5. Stel $\langle \beta, \alpha \rangle = -2$, dan geldt, omdat $(\beta, \alpha) < 0$, geldt volgens lemma 4.1.1 dat $\beta + \alpha \in \Phi$, dus $\beta + \alpha \in \Phi'$. Omdat $\Phi \ni \sigma_\alpha(\beta) = \beta + 2\alpha = (\beta + \alpha) + \alpha$ de som is van elementen in Φ' geldt $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi'$;
6. Stel $\langle \beta, \alpha \rangle = 3$, dan geldt, omdat $(\beta, \alpha) > 0$, geldt volgens lemma 4.1.1 dat $\beta - \alpha \in \Phi$, dus $\beta + (-\alpha) \in \Phi'$. Tevens geldt

$$\frac{2(\beta - \alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} - \frac{2(\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 3 - 2 = 1 > 0 \quad (4.1.15)$$

dus $(\beta - \alpha, \alpha) > 0$, en dus moet volgens lemma 4.1.1 gelden dat $\beta - \alpha - \alpha = \beta - 2\alpha \in \Phi$, ook hier geldt dus $\beta - 2\alpha \in \Phi'$, omdat nu $\Phi \ni \sigma_\alpha(\beta) = \beta - 3\alpha = (\beta - 2\alpha) + (-\alpha)$ wederom de som is van elementen in Φ' geldt $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi'$;

7. Stel $\langle \beta, \alpha \rangle = -3$, dan geldt, omdat $(\beta, \alpha) < 0$, geldt volgens lemma 4.1.1 dat $\beta + \alpha \in \Phi$, dus $\beta + \alpha \in \Phi'$. Tevens geldt

$$\frac{2(\beta + \alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} + \frac{2(\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = -3 + 2 = -1 < 0 \quad (4.1.16)$$

dus $(\beta + \alpha, \alpha) < 0$, en dus moet volgens lemma 4.1.1 gelden dat $\beta + \alpha + \alpha = \beta + 2\alpha \in \Phi$, ook hier geldt dus $\beta + 2\alpha \in \Phi'$, omdat nu $\Phi \ni \sigma_\alpha(\beta) = \beta + 3\alpha = (\beta + 2\alpha) + \alpha$ wederom de som is van elementen in Φ' geldt $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi'$;

In alle gevallen geldt $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi'$, dus $\sigma_\alpha(\Phi') \subset \Phi'$.

“ \supseteq ” Er geldt $\sigma_\mu(\Phi') \subset \Phi'$, dus $\Phi' = \sigma_\mu(\sigma_\mu(\Phi')) \subset \sigma_\mu(\Phi')$, wederom omdat σ_μ een involutie is.

R4) Triviaal. Als $\alpha, \beta \in \Phi'$, dan geldt $\alpha, \beta \in \Phi$, dus $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbf{Z}$. □

Stelling 4.1.4. Zij Φ een wortelsysteem en $\{v_i \in E\}_{i \in I}$ is een verzameling punten en $\{k_i \in \mathbf{Z}\}_{i \in I}$ gehele getallen, I een eindige indexverzameling. Dan is de verzameling $\{\alpha \in \Phi : (\alpha, v_i) \in k_i \mathbf{Z}, i \in I\}$ leeg of een wortelsysteem in de deelruimte die hij opspant.

Ook de volgende stelling geeft een methode om wortelsystemen te maken. **Bewijs:** Noem $\Omega = \{\alpha \in \Phi : (\alpha, v_i) \in k_i \mathbf{Z}, i \in I\}$. We gaan de axioma's na:

- R1) $\Omega \subset \Phi$, dus $\#\Omega \leq \#\Phi < \infty$. Dat Ω een zijn deelruimte opspant is triviaal. $0 \notin \Phi$, dus $0 \notin \Omega$.
- R2) Voor $\alpha \in \Omega$ geldt dat er getallen $x_i \in \mathbf{Z}_{i \in I}$ zijn zodanig dat voor alle $i \in I$ geldt $(\alpha, v_i) = k_i x_i$. Zo volgt ook dat $(-\alpha, v_i) = -(\alpha, v_i) = -k_i x_i \in k_i \mathbf{Z}$, ofwel $-\alpha \in \Omega$. Ω bevat alleen de veelvouden $\pm\alpha$, want $\Omega \subset \Phi$.
- R3) Laat $\alpha, \beta \in \Omega$, we tonen aan dat $\sigma_\alpha(\beta) \in \Omega$. Zij $\{x_i \in \mathbf{Z}\}_{i \in I}$ zodanig dat voor alle $i \in I$ geldt $(\alpha, v_i) = k_i x_i$ en $\{y_i \in \mathbf{Z}\}_{i \in I}$ respectievelijk voor β . Dan volgt voor $i \in I$ willekeurig dat

$$(\sigma_\alpha(\beta), v_i) = (\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha, v_i) = (\beta, v_i) - \langle \beta, \alpha \rangle (\alpha, v_i) \quad (4.1.17)$$

$$= k_i y_i - \langle \beta, \alpha \rangle k_i x_i = k_i (y_i - \langle \beta, \alpha \rangle x_i) \in k_i \mathbf{Z} \quad (4.1.18)$$

immers is $\langle \beta, \alpha \rangle$ geheeltallig en \mathbf{Z} een ring, dus $\sigma_\alpha(\beta) \in \Omega$. $\sigma_\alpha : \Omega \rightarrow \Omega$ is een involutie, dus een bijectie en laat Ω dus invariant.

R4) Laat $\alpha, \beta \in \Omega$, dan geldt $\alpha, \beta \in \Phi$ dus $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbf{Z}$.

Dus $\Omega \subset \Phi$ is een wortelsysteem. □

4.2 Simpele wortels en de Weylgroep

Om een wortelsysteem te beschrijven hoeven we niet perse alle wortels te kennen. Het lemma uit de vorige paragraaf geeft immers aan wanneer sommen of verschillen van wortels wederom wortels zijn. Een voldoende verzameling wortels voor het vastleggen van een wortelsysteem is een basis.

Definitie 4.2.1 (basis van een wortelsysteem). *Een deelverzameling $\Delta \subset \Phi$ heet een **basis** als*

B1) Δ is een basis voor E ;

B2) elke wortel $\beta \in \Phi$ kan worden geschreven als $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$ met $k_\alpha \in \mathbf{Z}$ óf allemaal ≥ 0 óf allemaal ≤ 0 .

De wortels in Δ heten *simpele* wortels. Omdat Δ een basis is van E geldt $\#\Delta = \dim_K E = \ell$. Ook vertelt B1) dat de uitdrukking in B2) dus uniek moet zijn. Merk op dat in alle gepresenteerde wortelsystemen in figuur (4) de verzameling $\Delta = \{\alpha, \beta\}$ een basis is.

Door de uniciteit van de uitdrukking van wortels als geheeltallige combinatie van simpele wortels kunnen we een afbeelding definiëren

$$\begin{aligned} \text{ht} : \Phi &\rightarrow \mathbf{Z} \\ \beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha &\mapsto \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

die de *hoogte* ten opzichte van een basis Δ aangeeft. We kunnen een partiële ordening op een wortelsysteem definiëren door $\beta \in \Phi$ *positief* te noemen als alle $k_\alpha \geq 0$ zijn en *negatief* als alle $k_\alpha \leq 0$ zijn en schrijven $\beta \succ 0$ respectievelijk $\beta \prec 0$. We kunnen zo definiëren $\Phi^+ = \{\beta \in \Phi : \beta \succ 0\}$ en $\Phi^- = \{\beta \in \Phi : \beta \prec 0\}$. Duidelijk is dat als $\alpha, \beta \in \Phi^+$ en $\alpha + \beta \in \Phi$, dan geldt dat $\alpha + \beta \in \Phi^+$. Als we definiëren dat $\alpha \prec \beta$ dan en slechts dan als $\beta - \alpha \in \Phi^+$ of $\alpha = \beta$, dan is (Φ, \succ) een partieel geordende verzameling (afhankelijk van een basis). Voor een basis $\Delta \subset \Phi$ moet het volgende lemma gelden, wat een direct gevolg is van definitie 4.2.1.

Lemma 4.2.1. *Als $\Delta \subset \Phi$ een basis is dan geldt voor alle willekeurige, verschillende $\alpha, \beta \in \Delta$ dat $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ en $\alpha - \beta \notin \Phi$. □*

Het is in eerste instantie nog niet duidelijk dat ieder wortelsysteem daadwerkelijk een basis heeft, dit is echter wel het geval:

Stelling 4.2.1. *Ieder wortelsysteem heeft een basis.*

Om deze stelling te bewijzen introduceren we eerst verschillende definities. Voor een vector $\gamma \in E$ schrijven we $\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi : (\gamma, \alpha) > 0\}$, de verzameling van wortels die aan dezelfde kant van elk hypervlak liggen als γ . Allereerst hebben we de volgende stelling nodig:

Stelling 4.2.2. *De vereniging van eindig veel hypervlakken in een vectorruimte E over een lichaam K met karakteristiek $\text{char}K = 0$, is ongelijk aan E .*

Bewijs: Laat $P_{\alpha_1}, \dots, P_{\alpha_m} \subset E$ ($\dim E = n$) eindig veel willekeurige hypervlakken zijn, vastgelegd door de corresponderende orthogonale vectoren $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in E \setminus \{0\}$. Een vector $x \in \bigcup_{k=1}^m P_{\alpha_k}$ voldoet aan $(x, \alpha_k) = 0$ voor zekere $k = 1, \dots, m$, ofwel

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_k)_i x_i = 0 \text{ voor zekere } k = 1, \dots, m \quad (4.2.2)$$

Merk op dat $z = (1, t, t^2, \dots, t^{n-1})^\top \in E$, voor $t \in K$, een polynoom geeft voor alle $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_k)_i t^{i-1} = (\alpha_k)_1 + (\alpha_k)_2 t + (\alpha_k)_3 t^2 + \dots + (\alpha_k)_n t^{n-1} \in K[t]. \quad (4.2.3)$$

Omdat een polynoom over een lichaam (en dus een domein) slechts eindig veel nulpunten kan hebben [19],[14] namelijk ten hoogste de graad van het polynoom, is er een zekere $s \in F$ zodanig dat voor alle $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_k)_i s^{i-1} = (\alpha_k)_1 + (\alpha_k)_2 s + (\alpha_k)_3 s^2 + \dots + (\alpha_k)_n s^{n-1} \neq 0 \quad (4.2.4)$$

en dus geldt dat $(1, s, s^2, \dots, s^{n-1})^\top \in E$, maar $(1, s, s^2, \dots, s^{n-1})^\top \notin \bigcup_{i=1}^m P_{\alpha_i}$. We concluderen dat $\bigcup_{i=1}^m P_{\alpha_i} \subsetneq E$. \square

De eis dat $\text{char}K = 0$ kan niet weg gelaten worden, zo is bijvoorbeeld de vectorruimte \mathbb{F}_2^2 gelijk aan de vereniging van deelruimten $\text{span}\{(1, 0)\} \cup \text{span}\{(0, 1)\} \cup \text{span}\{(1, 1)\}$.

Een $\gamma \in E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$ ($\neq \emptyset$, door de stelling 4.2.2) heet *regulier* en als $\gamma \in \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$ dan *singulier*. Als γ regulier is, dan is $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$.

Tevens noemen we $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ *ontbindbaar* als er $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$ bestaan zodat $\alpha = \beta_1 + \beta_2$, en *onontbindbaar* anderszids.

Stelling 4.2.3. *Zij $\gamma \in E$ regulier. Dan is de verzameling $\Delta(\gamma)$ van alle onontbindbare wortels in $\Phi^+(\gamma)$ een basis van Φ , en iedere basis wordt op deze manier verkregen.*

Voor het bewijs van deze stelling verwijzen we naar [12]. Stelling 4.2.3 geeft aan dat ieder wortelsysteem een basis heeft.

Het volgende lemma en gevolg maken gebruik van het bestaan van een basis.

Lemma 4.2.2. *Als α positief maar niet simpel, dan is $\alpha - \beta \in \Phi^+$ voor zekere $\beta \in \Delta$.*

Het bewijs van dit lemma wordt gegeven in [12]. Het volgende handige bewijs maakt gebruik van lemma 4.2.2.

Gevolg 4.2.1. *Elke $\alpha \in \Phi^+$ kan geschreven worden als $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$ met $\beta_i \in \Delta$ voor $i = 1, \dots, n$ zodat $\beta_1 + \dots + \beta_i \in \Phi^+$.*

Bewijs: We gebruiken inductie naar de waarde van de functie ht .

Zij $\alpha \in \Phi^+$ zodanig dat $ht(\alpha) = 1$, dan geldt dus $\alpha \in \Delta$ en voldoet dus aan de stelling.

Stel dat voor alle $\alpha \in \Phi^+$ met $ht(\alpha) = k$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ de stelling opgaat. Zij $\gamma \in \Phi^+$ zodanig dat $ht(\gamma) = k + 1 > 1$. Dan geldt $\gamma \in \Phi^+ \setminus \Delta$ dus is er een $\beta' \in \Delta$ zodat $\gamma - \beta' \in \Phi^+$. Er geldt

$$ht(\gamma - \beta') = ht(\gamma) - ht(\beta') = k + 1 - 1 = k \quad (4.2.5)$$

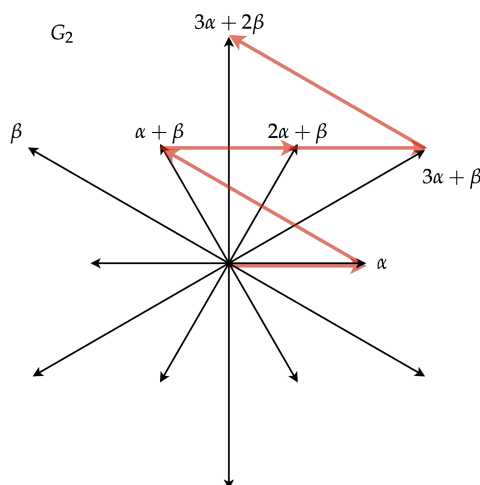
dus voor $\gamma - \beta'$ gaat de stelling op, we kunnen nu schrijven

$$\gamma - \beta' = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k \quad (4.2.6)$$

zodat voor $i = 1, \dots, n$ geldt $\beta_1 + \dots + \beta_i \in \Phi^+$. Ofwel de stelling gaat op voor $\gamma = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_k + \beta'$. Het principe van volledige inductie geeft nu dat elke wortel op de

voorgestelde manier te schrijven is. □

In figuur 6 is te zien hoe het mogelijk is elke wortel te bereiken met simpele wortels waarbij elke tussenstap wederom een wortel is.



Figuur 6: Het wortelsysteem van G_2 met een pad om de wortel $3\alpha + 2\beta$ te bereiken.

4.3 De Weylgroep

De Weylgroep van een wortelsysteem beschrijft symmetriën van de verzameling. In de context van een basis van het wortelsysteem gaat de volgende stelling op.

Stelling 4.3.1. *Zij Δ een basis van Φ , dan geldt*

- Als $\gamma \in E$ regulier, dan is er een $\sigma \in \mathcal{W}$ zodanig dat $(\sigma(\gamma), \alpha) > 0$ voor alle $\alpha \in \Delta$ (\mathcal{W} werkt transitief op de Weylkamers).
- Als Δ' een andere basis is van Φ , dan is er een $\sigma \in \mathcal{W}$ zodat $\sigma(\Delta') = \Delta$ (\mathcal{W} werkt transitief op basissen).
- Als $\alpha \in \Phi$, dan is er een $\sigma \in \mathcal{W}$ zodat $\sigma(\alpha) \in \Delta$.
- \mathcal{W} wordt voortgebracht door σ_α met $\alpha \in \Delta$.
- Als $\sigma(\Delta) = \Delta$ met $\sigma \in \mathcal{W}$ dan geldt $\sigma = id_\Phi$ (\mathcal{W} werkt simpel transitief op basissen.)

Voor het bewijs verwijzen we naar het boek van Humphreys [12].

We kunnen dus elke $\sigma \in \mathcal{W}$ schrijven als samenstelling van spiegelingen door simpele wortels, zeg $\sigma = \sigma_{\alpha_m} \cdots \sigma_{\alpha_1}$. De lengte van σ ten opzichte van de basis Δ is

$$\ell(\sigma) = \begin{cases} m & \text{als } \sigma = \sigma_{\alpha_m} \cdots \sigma_{\alpha_1} \text{ met } m \text{ minimaal} \\ 0 & \text{als } \sigma = id_E \end{cases} \quad (4.3.1)$$

dan geldt het volgende lemma

Lemma 4.3.1. *Voor alle $\sigma \in \mathcal{W}$ is $\ell(\sigma)$ gelijk aan het aantal positieve wortels waarvoor $\sigma(\alpha) \prec 0$.*

Merk op dat de lengte van een element uit de weylgroep altijd kleiner of gelijk is aan de helft van de grootte van het wortelsysteem.

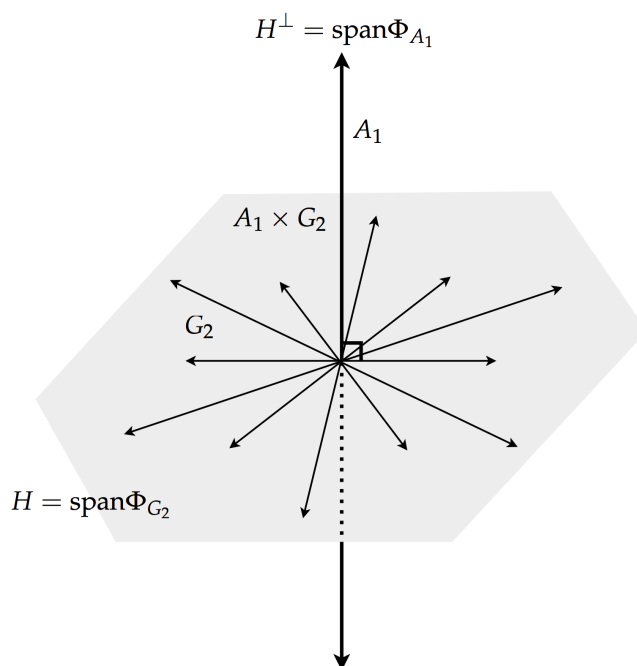
4.4 Irreducibele wortelsystemen

Sommige wortelsystemen kunnen worden opgebouwd uit meerdere wortelsystemen van een kleinere rang en heet dan *reducibel*. Om precies te zijn is de definitie als volgt.

Definitie 4.4.1. Een wortelsysteem Φ in een vectorruimte E heet *reducibel* als er een echte deelruimte $H \subsetneq E$ bestaat, zodanig dat $\Phi \subset H \cup H^\perp$.

Merk op dat hier de vereniging en *niet* de directe som van deelruimten bedoeld wordt, immers geldt $H \oplus H^\perp = E$.

Wanneer een wortelsysteem niet reducibel is, heet het *irreducibel*. Een irreducibel wortelsysteem kan dus niet in twee onderling orthogonale deelverzamelingen gepartitioneerd worden.



Figuur 7: Het wortelsysteem van $\Phi_{A_1 \times G_2}$ is reducibel, de wortels in het vlak en in lijn daar loodrecht op vormen samen het hele wortelsysteem.

De wortelsystemen A_2 , B_2 en G_2 van rang twee zijn irreducibel (dit valt voor deze kleine wortelsystemen aan te tonen door alle mogelijkheden na te gaan) maar $A_1 \times A_1$ is reducibel, immers is $\Phi = \{\alpha, -\alpha\} \cup \{\beta, -\beta\}$ een partitie in orthogonale deelverzameling. In het algemeen zijn er $2^{\#\Phi} - 1$ mogelijke verschillende niet-triviale partities van Φ in twee deelverzamelingen mogelijk, en dit aantal zal erg groot worden voor wortelsystemen met grote rang. De volgende stelling geeft aan dat irreducibiliteit voldoende al bepaald kan worden door de simpele wortels.

Stelling 4.4.1. Zij Δ een basis van een wortelsysteem Φ , dan geldt Φ is irreducibel dan en slechts dan als Δ niet te schrijven als een partitie van twee echte orthogonale deelverzamelingen.

Bewijs: “ \Leftarrow ” Zij Φ reducibel, zeg $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ met $(\Phi_1, \Phi_2) = \{0\}$ (Φ_1, Φ_2 niet leeg). Zij Δ een basis van Φ en schrijf $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ met $\Delta_1 = \Delta \cap \Phi_1$ en $\Delta_2 = \Delta \cap \Phi_2$, dan geldt $(\Delta_1, \Delta_2) = \{0\}$. Als $\Delta_1 \neq \emptyset$ en $\Delta_2 \neq \emptyset$, dan Δ reducibel.

Anderzijds, laat zonder verlies van algemeenheid $\Delta_1 = \emptyset$. Dan geldt $(\Delta_2, \Phi_1) = \{0\}$, oftewel $(E, \Phi_1) = \{0\}$ want Δ spant E op, echter geldt $\Phi_1 \neq \{0\}$, dus ontstaat een tegenspraak, Δ

is dan dus ook reducibel.

" \implies " Neem aan dat Φ irreducibel is maar $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ een niet-triviale partitie met $(\Delta_1, \Delta_2) = \{0\}$. Iedere wortel kan worden afgebeeld naar een element in de basis door een afbeelding uit de Weylgroep. Laat nu $\Phi_i = \{\alpha \in \Phi : \text{er is een } \sigma \in \mathcal{W} \text{ zodanig dat } \sigma(\alpha) \in \Delta_i\}$, dan geldt $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$.

Omdat $\mathcal{W} = \langle \sigma_\alpha : \alpha \in \Delta \rangle$ geldt voor $\alpha \in \Phi_i$ dat $\sigma_{x_1} \sigma_{x_2} \cdots \sigma_{x_t}(\alpha) = \beta \in \Delta_i$ voor zekere $x_1, x_2, \dots, x_t, \beta \in \Delta_i$, ofwel

$$\alpha = \underbrace{\sigma_{x_t} \cdots \sigma_{x_2} \sigma_{x_1}}_{\in \text{span}_{\mathbf{Z}} \Delta_i} \left(\underbrace{\beta}_{\in \Delta_i} \right) \quad (4.4.1)$$

immers geldt $\sigma_{x_i}(y_i) = y_i - \langle y_i, x_i \rangle x_i$, wat een \mathbf{Z} -lineaire combinatie is van elementen uit $\text{span}_{\mathbf{Z}} \Delta_i$ en dus $\sigma_{x_i}(y_i) \in \text{span}_{\mathbf{Z}} \Delta_i$. Dus $\Phi_i \subset \text{span}_{\mathbf{Z}} \Delta_i \subset E_i = \text{span}_{\mathbf{R}} \Delta_i$, en ook $(\Phi_1, \Phi_2) = \{0\}$, echter moet dan $\Phi_1 = \emptyset$ of $\Phi_2 = \emptyset$. Oftewel $\Delta_1 = \emptyset$ of $\Delta_2 = \emptyset$. \square

4.5 Classificatie van irreducibele wortelsystemen

Zoals we zagen zijn er slechts drie wortelsystemen van rang 2 die irreducibel zijn. Ook voor wortelsystemen van hogere rang kan deze classificatie gemaakt worden voor irreducibele wortelsystemen. Ook kunnen hieruit eenvoudig de reducibele wortelsystemen gemaakt worden als vereniging van irreducibele wortelsystemen.

Zij Φ een wortelsysteem van rang ℓ in euclidische ruimte E met basis Δ . Zij $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ een ordening van simpele wortels. De vierkante matrix $C \in \text{Mat}_\ell(\mathbf{Z})$ met elementen

$$(C)_{i,j} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \in \mathbf{Z}, \quad 1 \leq i, j \leq \ell \quad (4.5.1)$$

heet de *Cartanmatrix* van Φ .

Merk op dat de diagonaalelementen van de Cartanmatrix van een wortelsysteem altijd 2 zijn. Triviaal geldt dat ook dat de cartanmatrix van A_1 gelijk is aan $C = (2)$. Voor de Cartanmatrices van rang 2 uit figuur 4 geldt (met ordening (α, β))

$$A_1 \times A_1 : \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B_2 : \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, G_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.5.2)$$

en voor de gepresenteerde wortelsystemen van rang 3

$$A_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C_2 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.5.3)$$

De ordening op de simpele wortels bepaalt de invulling van de matrix, maar is wel onafhankelijk van de basis van het wortelsysteem omdat de Weylgroep transitief werkt op de simpele wortel. De Cartanmatrix legt wel het volledige wortelsysteem op isomorfisme na vast. Dit wordt gerepresenteerd in de volgende stelling.

Stelling 4.5.1. Zij $\Phi' \subset E'$ wortelsysteem van rang ℓ en een basis $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_\ell\}$. Als

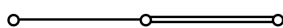
$$(C_\Phi)_{i,j} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha'_i, \alpha'_j \rangle = (C_{\Phi'})_{i,j} \quad \text{voor alle } 1 \leq i, j \leq \ell \quad (4.5.4)$$

dan breidt de bijectie $\phi : \alpha_i \mapsto \alpha'_i$ uit tot een isomorfisme $\hat{\phi} : E \rightarrow E'$ van wortelsystemen, het diagram

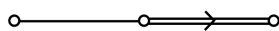
$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\phi} & E' \\
 \sigma_\alpha \downarrow & & \downarrow \sigma_{\phi(\alpha)} \\
 E & \xrightarrow{\phi} & E'
 \end{array}$$

commuteert en de Cartanmatrix van Φ is bepaald op isomorfisme na.

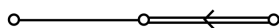
Gegeven een wortelsysteem $\Phi \subset E$ geldt voor ieder tweetal verschillende simpele wortels α_i, α_j dat het getal $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ gelijk is aan 0, 1, 2 of 3. De Coxetergraaf is de graaf bestaande uit $\ell = \text{rang}\Phi$ knopen, waarvan de i -de knoop met de j -de knoop verbonden zijn door $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ kanten voor $1 \leq i, j \leq \ell, i \neq j$. Een voorbeeld is van de Coxetergraaf van B_3 :



Merk op dat de Coxetergraaf van C_3 gelijk is aan die van B_3 (dit kan worden afgelezen uit afbeelding 5), terwijl de wortelsystemen van B_3 en C_3 wel verschillend. In het algemeen kan daartoe kan tussen de knopen met meerdere kanten (in het geval $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle > 1$) een pijl worden toegevoegd die vanaf die lange wortel naar de korte wijst, hierdoor ontstaat het zogenaamde Dynkindiagram, voor B_3 ziet deze er dus uit als



en voor C_3



Op basis van het Dynkindiagram kunnen deelwortelsystemen herkend worden zoals blijkt uit de volgende stelling.

Stelling 4.5.2. *Laat E een deelruimte zijn van de eindig dimensionale vectorruimte V en laat $\Omega \subset E$ en $\Phi \subset V$ wortelsystemen zijn met Dynkindiagrammen $\Gamma_\Omega \subset \Gamma_\Phi$. Dan geldt $\Omega \subset \Phi$.*

Bewijs: Neem aan zonder verlies van algemeenheid dat Φ irreducibel is. Omdat $\Gamma_\Omega \subset \Gamma_\Phi$ als deelgraaf geldt dat dus de verzameling van de knopen in Γ_Ω een deelverzameling is van de knopen in Γ_Φ , en aangezien knopen gekoppeld zijn aan simpele wortels geldt $\Delta_\Omega \subset \Delta_\Phi$. Door Cartanmatrices C_Ω en C_Φ zodanig te ordenen dat C_Ω een deelmatrix is van C_Φ , kan de methode uit [12], p. 56 worden toegepast en blijkt $\Omega \subset \Phi$. \square waaruit het onderscheid wel duidelijk is.

4.6 Irreducibele wortelsystemen en Dynkindiagrammen

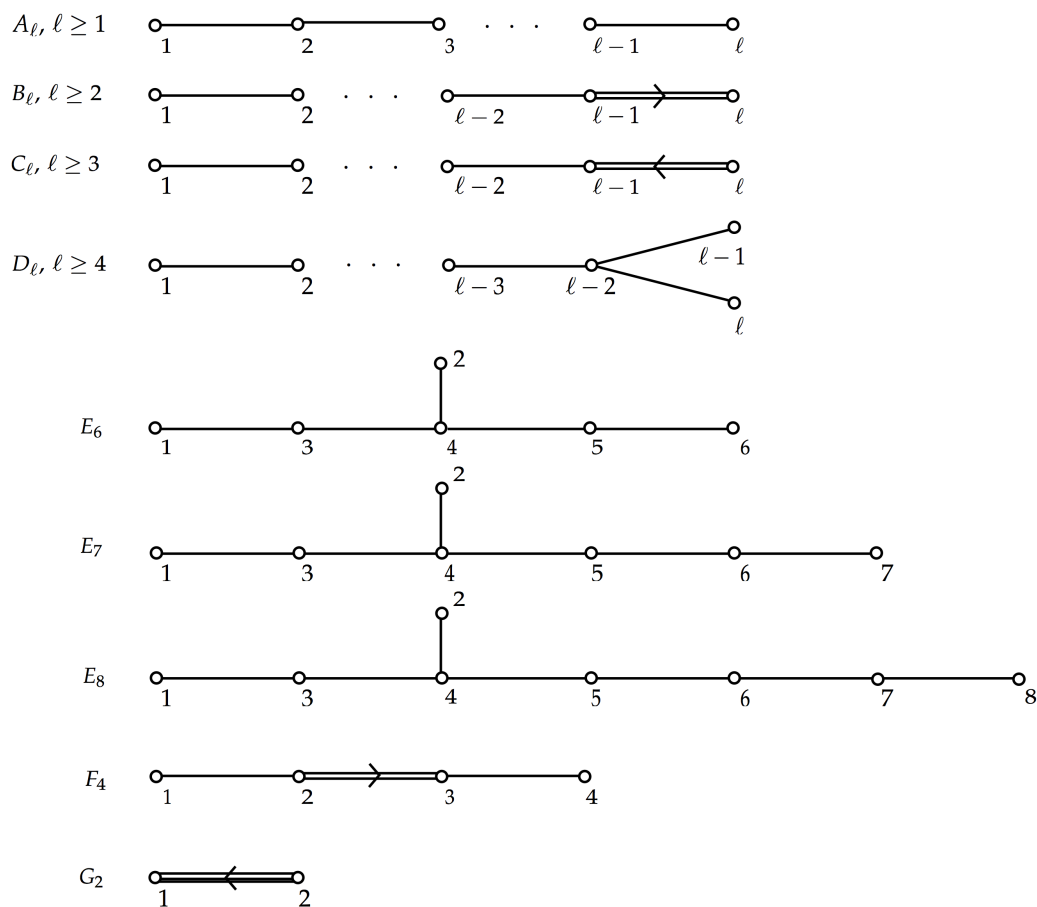
Het sterke verband tussen reducibele en irreducibele wortelsystemen wordt duidelijk uit de volgende stellingen.

Stelling 4.6.1. *Een wortelsysteem is irreducibel dan en slechts dan als de Coxetergraaf/het Dynkindiagram samenhangend is.* \square

Stelling 4.6.2. *Een wortelsysteem Φ ontbindt uniek in $\Phi = \bigcup_{i=1}^t \Phi_i$ met Φ_i een wortelsysteem in een deelruimte E_i van E zodanig dat $E = \bigoplus_{i=1}^t E_i$.*

Het is dus voldoende irreducibele wortelsystemen te classificeren. Deze classificatie is te zien in de volgende stelling.

Stelling 4.6.3 (Classificatie van irreducibele wortelsystemen). *Zij Φ een irreducibel wortelsysteem van rang ℓ , dan is het Dynkindiagram een van de volgende (ℓ knopen in elk geval) en de bijbehorende Cartanmatrices zijn gegeven in appendix (9.1).*



Bewijs: Zij E een euclidische ruimte van willekeurige dimensie. Een eindige verzameling $\mathfrak{U} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} \subset E$ heet *toelaatbaar* als

1. \mathfrak{U} is een verzameling van lineair onafhankelijke vectoren;
2. $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq 0$ voor $i \neq j$;
3. $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ voor $i \neq j$.

Aan een toelaatbare verzameling koppelen we een graaf Γ , bestaande uit n knopen waarvan knoop i (genoteerd met ε_i) verbonden is met knoop j door $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2$ aantal kanten.

Claim (1) *Een deelverzameling van een toelaatbare verzameling is nog steeds toelaatbaar en diens graaf bestaat uit de oorspronkelijke graaf Γ met de betreffende punten en verbonden kanten verwijderd.*

Het bewijs is triviaal.

Claim (2) *Het aantal verbonden knopen (met tenminste één kant) is strikt kleiner dan n .*

Laat $\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$, omdat \mathfrak{U} een lineair onafhankelijke verzameling vormt is $\varepsilon \neq 0$, dus

$$0 < (\varepsilon, \varepsilon) = \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i, \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sum_{i=1}^n \underbrace{(\varepsilon_i, \varepsilon_i)}_{=1} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \underbrace{(\varepsilon_i, \varepsilon_j)}_{=(\varepsilon_j, \varepsilon_i)} = n + 2 \sum_{i < j} (\varepsilon_i, \varepsilon_j) \tag{4.6.1}$$

Voor een paar i, j van verbonden knopen geldt dat $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2 \in \{1, 2, 3\}$, in het bijzonder geldt altijd $2(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \leq -1$. Zij m het aantal paren dat tenminste met 1 kant verbonden is. Dit geeft

$$0 < n + 2 \sum_{i < j} (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = n + \sum_{\substack{i < j \\ 4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2 \neq 0}} \underbrace{2(\varepsilon_i, \varepsilon_j)}_{\leq 1} \leq n - m \tag{4.6.2}$$

Ofwel $m < n$.

Claim (3) De graaf Γ bevat geen cyclen.

Stel dat de graaf Γ van \mathcal{U} een cykel bevat, dan kunnen we $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ zodanig kiezen dat Γ' (behorende bij \mathcal{U}') slechts de cykel bevat. Volgens Cl. 1) is \mathcal{U}' ook toelaatbaar, echter is het aantal kanten gelijk aan ten minste $\#\mathcal{U}'$, en dit is in tegenspraak met Cl. 2).

Claim (4) Er kunnen niet meer dan drie kanten voortkomen uit een knoop in Γ .

Neem $\varepsilon \in \mathcal{U}$ willekeurig, en laat $\eta_1, \dots, \eta_k \in \mathcal{U}$ de vectoren verbonden met ε zijn. Dan geldt $(\varepsilon, \eta_i) < 0$ voor alle i . Uit Cl. 3) volgt dat $(\eta_i, \eta_j) = 0$ voor alle $i \neq j$. Omdat \mathcal{U} linear onafhankelijk is, is er een eenheidsvector $\eta_0 \in \text{span}\{\varepsilon, \eta_1, \dots, \eta_k\}$ zodanig dat η_0 orthogonaal is met alle η_1, \dots, η_k . Nu geldt $\varepsilon = \sum_{i=0}^k (\varepsilon, \eta_i) \eta_i$, ofwel

$$1 = (\varepsilon, \varepsilon) = \left(\sum_{i=0}^k (\varepsilon, \eta_i) \eta_i, \sum_{i=0}^k (\varepsilon, \eta_i) \eta_i \right) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k (\varepsilon, \eta_i) (\varepsilon, \eta_j) \underbrace{(\eta_i, \eta_j)}_{\delta_{ij}} \tag{4.6.3}$$

$$= \sum_{i=0}^k (\varepsilon, \eta_i)^2 = \underbrace{(\varepsilon, \eta_0)^2}_{>0} + \sum_{i=1}^k (\varepsilon, \eta_i)^2. \tag{4.6.4}$$

Dus $\sum_{i=1}^k (\varepsilon, \eta_i)^2 < 1$, ofwel $\sum_{i=1}^k 4(\varepsilon, \eta_i)^2 < 4$, merk op dat $4(\varepsilon, \eta_i)^2$ het aantal kanten tussen ε en η_i is.

Claim (5) De enige samenhangende graaf van een toelaatbare verzameling \mathcal{U} die een driedubbele kant bevat is $\circ \equiv \circ$ corresponderend met de Coxetergraaf G_2 .

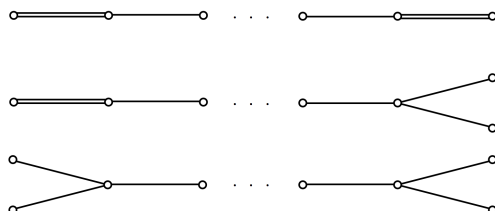
Triviaal gevolg van Cl. 4)

Claim (6) Laat $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\} \subset \mathcal{U}$ een deelgraaf $\circ - \circ \dots - \circ$ (een simpele keten) in Γ . Als $\mathcal{U}' = (\mathcal{U} \setminus \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}) \cup \{\varepsilon\}$, met $\varepsilon = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i$, dan is \mathcal{U}' toelaatbaar.

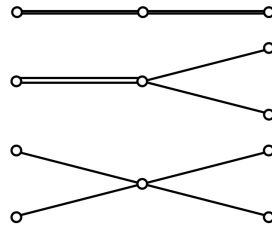
$$(\varepsilon, \varepsilon) = k + 2 \sum_{i < j} (\varepsilon_i, \varepsilon_j) = k - (k - 1) = 1. \tag{4.6.5}$$

Dus ε is een eenheidsvector. Een vector $\eta \in \mathcal{U} \setminus \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ kan middels Cl. 3 met maximaal één van de vectoren $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ verbonden zijn. Dus er zijn twee gevallen: $(\eta, \varepsilon) = 0$ of $(\eta, \varepsilon) = (\eta, \varepsilon_i)$ voor $1 \leq i \leq k$. In ieder geval geldt $4(\eta, \varepsilon)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$.

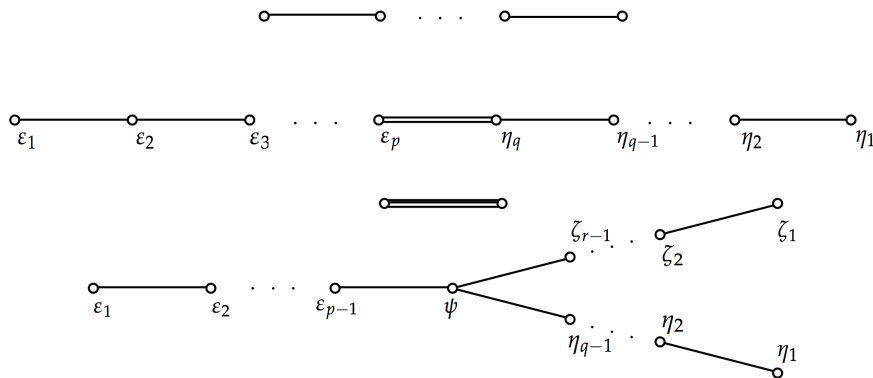
Claim (7) Γ bevat geen deelgraaf van de vorm



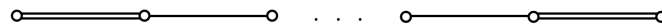
Immers, stel dat een van deze deelgrafen wel voorkomt. Dan kan volgens Claim 6) de keten in het midden verkort worden tot een enkel punt en nog steeds een toegelaten verzameling opleveren. Echter zijn de grafen dan van de vorm



en heeft in alle gevallen het middelste punt graad 4, en is dus niet toegelaten wegens Claim 4).
Claim (8) *Iedere samenhangende graaf Γ van een toelaatbare verzameling heeft een van de volgende vormen:*

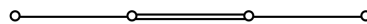


Merk op dat Cl. 5) inderdaad geeft dat alleen de Coxetergraaf $\circ \equiv \circ$ van G_2 een drievoudige kant heeft. Een graaf met meer dan één dubbele verbinding heeft een deelgraaf



en dit is uitgesloten wegens Cl. 7). Zo ook kan de graaf niet zowel een dubbele kant als een vertakking hebben, dus voor een samenhangende graaf van \mathcal{U} met een dubbele kant kan alleen de tweede vorm voorkomen. In het geval Γ alleen enkelvoudige kanten heeft, kan er hoogstens één vertakking voorkomen (wegens Cl. 7)), zo niet dan moet Γ een simpele keten zijn.

Claim (9) *De enige samenhangende graaf Γ van het tweede type in Cl. 8) is de Coxetergraaf F_4*



of de Coxetergraaf $B_n (= C_n)$.



Laat

$$\epsilon = \sum_{k=1}^p k\epsilon_k, \text{ en } \eta = \sum_{k=1}^q k\eta_k, \tag{4.6.6}$$

Per hypothese stellen we dat $2(\epsilon_i, \epsilon_{i+1}) = -1 = 2(\eta_i, \eta_{i+1})$, voor alle paren aansluitende kno-

pen, immers kunnen we de knopen altijd hernummeren. Er geldt

$$(\varepsilon, \varepsilon) = \left(\sum_{k=1}^p k\varepsilon_k, \sum_{k=1}^p k\varepsilon_k \right) = \sum_{k=1}^p \sum_{n=1}^p kn(\varepsilon_k, \varepsilon_n) = \sum_{k=1}^p k^2 + \sum_{k=1}^{p-1} 2 \cdot \frac{1}{2}k(k+1) \quad (4.6.7)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^p k^2}_{p^2} - \sum_{k=1}^{p-1} k^2 - \sum_{k=1}^{p-1} k = p^2 - \frac{p(p-1)}{2} = \frac{p(p+1)}{2} \quad (4.6.8)$$

Zo ook geldt $(\eta, \eta) = q(q+1)/2$. We weten dat $4(\varepsilon_p, \eta_q)^2 = 2$, dus

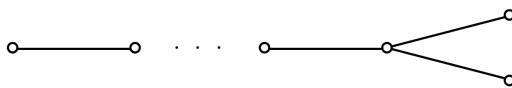
$$(\varepsilon, \eta)^2 = \left(\sum_{k=1}^p k\varepsilon_k, \sum_{k=1}^q k\eta_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^p \sum_{n=1}^q kn(\varepsilon_k, \varepsilon_n) \right)^2 = (pq(\varepsilon_p, \eta_q))^2 = \frac{p^2q^2}{2} \quad (4.6.9)$$

Merk op dat uit de definitie volgt dat ε en η onafhankelijk zijn, de Cauchy-Schwartz-ongelijkheid geeft nu

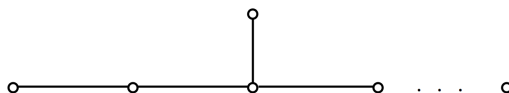
$$(\varepsilon, \eta)^2 < (\varepsilon, \varepsilon)(\eta, \eta) \implies \frac{p^2q^2}{2} < \frac{p(p+1)}{2} \frac{q(q+1)}{2}, \quad (4.6.10)$$

waaruit volgt dat $(p-1)(q-1) < 2$. Merk op dat $p, q \in \mathbf{Z}_{>2}$ niet toegestaan zijn. In het geval $p = q = 2$, dan ontstaat het de Coxetergraaf van F_4 , in het geval $p = 1$ en q willekeurig (of equivalent $q = 1$ en p willekeurig) ontstaat de Coxetergraaf van B_{q+1} ($= C_{q+1}$).

Claim (10) De enige samenhangende graaf Γ van het vierde type in Cl. 8) is de Coxetergraaf D_n ($n \geq 4$)



of de Coxeter graaf E_n ($n \in \{6, 7, 8\}$).



Laat

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{p-1} k\varepsilon_k, \quad \eta = \sum_{k=1}^{q-1} k\eta_k \quad \text{en} \quad \zeta = \sum_{k=1}^{r-1} k\zeta_k, \quad (4.6.11)$$

Deze vectoren zijn onderling orthogonaal (vanwege de vorm van Γ) én lineair onafhankelijk. Tevens geldt $\psi \notin \text{span}\{\varepsilon, \eta, \zeta\}$. Op een gelijksoortige constructie zoals in Cl. 4) verkrijgen we

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 < 1, \quad (4.6.12)$$

met $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ de hoek tussen respectievelijk ε, η, ζ . Gelijksoortig als in Cl. 9) geldt

$$(\varepsilon, \varepsilon) = \frac{p(p-1)}{2}, \quad (\eta, \eta) = \frac{q(q-1)}{2}, \quad (\zeta, \zeta) = \frac{r(r-1)}{2}, \quad (4.6.13)$$

dus geldt

$$\cos^2 \theta_1 = \frac{(\varepsilon, \psi)^2}{(\varepsilon, \varepsilon)(\psi, \psi)} = \frac{(p-1)^2(\varepsilon_{p-1}, \psi)}{(\varepsilon, \varepsilon)} = \frac{1}{4} \frac{2(p-1)^2}{p(p-1)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \quad (4.6.14)$$

en zo geldt ook

$$\cos^2 \theta_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \quad \text{en} \quad \cos^2 \theta_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \quad (4.6.15)$$

Dus $(p, q, r) \in \mathbf{Z}_{>1}$ moeten voldoen aan

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}\right) < 1 \quad (4.6.16)$$

Dit leidt tot de volgende ongelijkheid:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1 \quad (4.6.17)$$

We kunnen de takken altijd zodanig ordenen dat $1/p \leq 1/q \leq 1/r$. Tevens moet gelden dat $1/r \leq 1/2$, zo niet dan geldt $1/r = 1$, dus $r = 1$, en dan zijn we terug in het geval van de simpele keten corresponderend met A_n . Er volgt dat

$$\frac{3}{2} \geq \frac{3}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1 \quad (4.6.18)$$

dus concluderen we dat $r = 2$. Vergelijking (4.6.17) is nu te schrijven als

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}, \quad (4.6.19)$$

hieruit volgt dat

$$\frac{2}{q} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \quad (4.6.20)$$

dus $2 \leq q < 4$. Als $q = 2$, dan volgt $1/p + 1/2 > 1/2$, ofwel $1/p > 0$ en dan voldoet elke $p \geq 2$. Als $q = 3$, dan volgt $1/p + 1/3 > 1/2$, ofwel $1/p > 1/6$, dus $p < 6$. We zien nu (met voorkomen van dubbele gevallen) de correspondenties

$$\begin{aligned} (p, q, r) &= (p, 2, 2) \rightsquigarrow D_{p+2} \\ &= (3, 3, 2) \rightsquigarrow E_6 \\ &= (4, 3, 2) \rightsquigarrow E_7 \\ &= (5, 3, 2) \rightsquigarrow E_8 \end{aligned} \quad (4.6.21)$$

Alle mogelijke Coxetergrafen liggen nu vast, door het toevoegen van de pijlen die aangeven welke van de vectoren (in het geval van meervoudige verbindingen) de grootste is ontstaat een extra opdeling tussen B_ℓ en C_ℓ . Merk op dat een irreducibel wortelsysteem in het bijzonder een toelaatbare verzameling is, en diens Dynkindiagram dus een van de voorgestelde gevallen moet zijn. \square

Opmerking 1. De classificatie van irreducibele wortelsystemen (en daaruit volgend simpele Lie-algebras) kan worden vergeleken met de classificatie van eindige, simpele groepen. In deze classificatie is iedere eindige simpele groep (een groep die slechts de triviale normaaldeleers heeft: 1 en de hele groep) op isomorfie na gelijk aan een cyclische groep van priemorde, een alternerende groep van orde groter dan 60, een groep van het Lie-type, de Tits-groep of een van de 26 sporadische groepen [2]. Het bewijs is nog maar recent volledig gemaakt en bestaat uit honderden artikelen gepubliceert door vele auteurs.

In deze context kunnen de families van simpele Lie-algebra's A_ℓ, \dots, D_ℓ vergeleken worden met de familie cyclische, alternerende, en type Lie groepen en de exceptionele Lie-algebra's E_6, E_7, E_8, F_4 en G_2 met de sporadische groepen en Titsgroep.

4.7 Constructie van wortelsystemen.

Om aan te tonen dat andersom ieder getoond Dynkindiagram in de stelling die wortelsystemen classificeert ook daadwerkelijk met een wortelsysteem correspondeert is het voldoende een constructie van een wortelsysteem te geven die het bijbehorende Dynkindiagram heeft. Hiertoe werken we in de ruimte \mathbf{R}^n met de standaard orthonormale basis, genoteerd met $B = \{e_1, \dots, e_n\} = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$. Ook noteren we

$$I = \text{span}_{\mathbf{Z}} B = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i e_i : x_i \in \mathbf{Z} \text{ voor alle } i \right\} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{Z}^n \subset \mathbf{R}^n \quad (4.7.1)$$

In de constructies zal $E = \mathbf{R}^n$ of een deelruimte daarvan met het geërfde inwendige product.

Merk op dat I discreet is in \mathbf{R}^n en dat een begrensde deelverzameling Φ van I compact is (gesloten en begrensd vanwege de stelling van Heine-Borel), en dus eindig. Met de keus dat Φ niet 0 bevat en de ruimte E opspant is voldaan aan R1).

Constructie van type A_ℓ ($\ell \geq 1$)

De wortels van A_ℓ kunnen worden gerepresenteerd als wortels in een ℓ -dimensionale deelruimte van $\mathbf{R}^{\ell+1}$. Daartoe nemen we $E = (\text{span}_{\mathbf{R}}\{e_1 + e_2 + \dots + e_{\ell+1}\})^\perp$, alle vectoren orthogonaal op de vector $e_1 + e_2 + \dots + e_{\ell+1}$, en dus geldt $\dim_{\mathbf{R}} E = \ell$. Laat $I' = I \cap E$ en dan geldt de gelijkheid

$$\Phi = \{\alpha \in I : (\alpha, \alpha) = 2\} = \{e_i - e_j : 1 \leq i \leq \ell + 1, i \neq j\}. \quad (4.7.2)$$

en Φ is het wortelsysteem van A_ℓ . Kortweg geschreven

$$\Phi_{A_\ell} = \text{span}\{e_1 + \dots + e_{\ell+1}\}^\perp \cap \mathbf{Z}^{\ell+1} \cap \mathbf{S}^\ell \subset \mathbf{R}^{\ell+1} \quad (4.7.3)$$

Als we een element $\beta = e_i - e_j \in \Phi$, ($i \neq j$) nemen, dan geldt dat er $\ell + 1$ keuzes voor i zijn en vervolgens nog ℓ keuzes voor j , het aantal wortels in Φ is dus $\#\Phi = (\ell + 1)\ell$. Een basis is $\Delta = \{e_i - e_{i+1} : 1 \leq i \leq \ell\}$, immers geldt

$$e_i - e_j = (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \dots + (e_{j-1} - e_j) = \sum_{k=i}^{j-1} (e_k - e_{k+1}), \quad i < j. \quad (4.7.4)$$

Als we noemen $\alpha_i = e_i - e_{i+1} \in \Delta$ voor $1 \leq i \leq \ell$, dan geldt voor de Cartanelementen:

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = (e_i - e_{i+1}, e_j - e_{j+1}) = (e_i, e_j) - (e_i, e_{j+1}) - (e_{i+1}, e_j) + (e_{i+1}, e_{j+1}) \quad (4.7.5)$$

$$= \delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i+1,j} - \underbrace{\delta_{i+1,j+1}}_{=\delta_{i,j}} = \begin{cases} 2 & \text{als } i = j \\ -1 & \text{als } i = j \pm 1 \end{cases}. \quad (4.7.6)$$

Een reflectie in $\alpha_i \in \Delta$ op een wortel $\beta \in \Phi$, permuteert de index i en $i + 1$ en laat de andere indices gelijk. Aangezien $\mathcal{S}_{\ell+1}$ voortgebracht wordt door permutaties $(i \ i + 1)$ voor $1 \leq i \leq \ell$, en dus is er een isomorfisme tussen \mathcal{W} en $\mathcal{S}_{\ell+1}$.

Constructie van type B_ℓ ($\ell \geq 2$) en C_ℓ ($\ell \geq 3$)

Voor de constructie van B_ℓ werken we in de ruimte $E = \mathbf{R}^\ell$. Definieer $\Phi = \{\alpha \in I : (\alpha, \alpha) \in \{1, 2\}\}$, en er geldt

$$\Phi = \{\pm e_i : 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i, j \leq \ell, i < j\} \quad (4.7.7)$$

waarbij de ‘ \pm ’ in de tweede verzameling verschillend is per term. Φ bestaat dus uit $2\ell + 2\ell(\ell - 1) = 2\ell^2$ wortels. Een basis voor Φ is $\Delta = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{\ell-1} - e_\ell, e_\ell\}$. Een korte wortel e_i kan geschreven worden als

$$e_i = (e_i - e_{i+1}) + (e_{i+1} - e_{i+2}) + \dots + (e_{\ell-1} - e_\ell) + e_\ell = e_\ell + \sum_{k=i}^{\ell-1} (e_k - e_{k+1}) \quad (4.7.8)$$

en een lange wortel van de vorm $\pm(e_i \pm e_j)$ kan gevormd worden uit een constructie zoals in het geval van A_ℓ . De Weylgroep van B_ℓ is isomorf met het semidirecte product van $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\ell$ en \mathcal{S}_ℓ [12].

De constructie van C_ℓ loopt analoog aan die van B_ℓ , immers is het wortelsysteem van C_ℓ de duale van B_ℓ . Er geldt dus

$$\Phi = \{\pm 2e_i : 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i, j \leq \ell, i < j\} \quad (4.7.9)$$

en een basis is $\Delta = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{\ell-1} - e_\ell, 2e_\ell\}$. En ook hier is de Weylgroep isomorf aan het semidirecte product van $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\ell$ en \mathcal{S}_ℓ .

Constructie van type D_ℓ ($\ell \geq 4$)

We construeren het wortelsysteem D_ℓ in de ruimte \mathbf{R}^ℓ , het wortelsysteem is $\Phi = \{\alpha \in I : (\alpha, \alpha) = 2\}$. Deze verzameling is gelijk aan $\Phi = \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i, j \leq \ell, i < j\}$, en een basis hiervoor is $\Delta = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{\ell-1} - e_\ell, e_{\ell-1} + e_\ell\}$. In dit geval is de Weylgroep isomorf met $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\ell-1} \times \mathcal{S}_\ell$ [12].

Constructie van types E_6, E_7 en E_8

We construeren eerste E_8 en zullen dan de wortelsystemen E_6 en E_7 bepalen, immers zijn E_6 en E_7 deelwortelsystemen van E_8 in deelruimten van \mathbf{R}^8 en kunnen deze uit het Dynkindiagram gemaakt worden.

We beginnen in de ruimte $E = \mathbf{R}^8$, en definiëren

$$I' = I + \left(\frac{e_1 + \dots + e_8}{2} \right) \mathbf{Z} \quad (4.7.10)$$

$$I'' = \left\{ \sum c_i e_i + \frac{c'}{2} (e_1 + \dots + e_8) \in I' : c' \in \mathbf{Z}, \sum c_i \text{ is even} \right\} \underset{\subset}{\text{ondergroep}} I' \quad (4.7.11)$$

Nu definiëren we $\Phi = \{\alpha \in I'' : (\alpha, \alpha) = 2\}$, en dit is het wortelsysteem van E_8 . Er geldt

$$\Phi = \{\pm(e_i \pm e_j) : 1 \leq i, j \leq \ell, i \neq j\} \cup \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^i (-1)^{k(i)} e_i : k(i) \in \{0, 1\}, \sum_{i=1}^8 k(i) \equiv 0 \pmod{2} \right\}$$

Alle inwendige producten tussen elementen in Φ zijn geheeltallig, wat een vereiste is omdat $I' \supseteq I$. Een basis voor Φ is

$$\Delta = \left\{ \frac{1}{2}(e_1 + e_8 - (e_2 + \dots + e_7)), e_1 + e_2, e_2 - e_1, e_3 - e_2, e_4 - e_3, e_5 - e_4, e_6 - e_5, e_7 - e_6 \right\}.$$

Door ordening van deze basis kan de cartanmatrix van E_8 verkregen worden. De orde van de Weylgroep is $2^{14}3^55^27$.

Constructie van types F_4 en G_2

We construeren eerst het wortelsysteem van F_4 , daartoe nemen we $E = \mathbf{R}^4$ en $I' = I + \left(\frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}{2}\right)\mathbf{Z}$, dan is $\Phi = \{\alpha \in I' : (\alpha, \alpha) = 2\}$, equivalent geldt

$$\Phi = \{\pm e_i : 1 \leq i \leq 4\} \cup \{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i, j \leq 4, i < j\} \cup \left\{\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\right\}. \quad (4.7.12)$$

Er geldt dus $\Phi = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 2^4 = 48$, door uitputting van na te gaan dat Φ inderdaad een wortelsysteem is. Een basis voor het wortelsysteem van F_4 is $\{e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4, \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)\}$. De Weylgroep heeft orde 1152.

Het wortelsysteem G_2 is geconstrueerd in 1.1 met als basis $\{(1, 0), (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})\}$. De constructie kan ook gedaan worden in de ruimte \mathbf{R}^3 door te nemen $E = (\text{span}\{e_1 + e_2 + e_3\})^\perp$, en $I' = I \cap E$. Het wortelsysteem kunnen we nu definiëren door $\Phi = \{\alpha \in I' : (\alpha, \alpha) \in \{2, 6\}\}$, ofwel $\Phi = \pm\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_1 - e_3, 2e_1 - e_2 - e_3, 2e_2 - e_1 - e_3, 2e_3 - e_1 - e_2\}$, dus $\#\Phi = 12$. Als basis nemen we $\{e_1 - e_2, -2e_1 + e_2 + e_3\}$, zoals aangetoond is de Weylgroep isomorf met de dihedrale groep \mathcal{D}_6 en is dus van orde 12.

De volgende stelling is nu aan de orde.

Stelling 4.7.1. *Voor elk Dynkindiagram (of Cartanmatrix) van type A-G is er een corresponderend irreducibel wortelsysteem.* \square

Een overzicht van alle irreducibele wortelsystemen wordt gegeven in tabel 8.

Tabel 8: Irreducibele wortelsystemen van rang ℓ met de bijbehorende Weylgroep. Wortelsysteem waarbij de structuur '(*)' aangegeven staat zijn niet eenvoudig uit te drukken in termen van bekende groepen.

| Type | Aantal wortels | Structuur van \mathcal{W} | Orde van \mathcal{W} | |
|------------------|--------------------|--|------------------------|--------------------------------------|
| A_ℓ | $\ell^2 + \ell$ | $\mathcal{S}_{\ell+1}$ | $(\ell + 1)!$ | |
| B_ℓ, C_ℓ | $2\ell^2$ | $\mathcal{C}_2^\ell \times \mathcal{S}_\ell$ | $2^\ell \ell!$ | |
| D_ℓ | $2(\ell^2 - \ell)$ | $\mathcal{C}_2^{\ell-1} \times \mathcal{S}_\ell$ | $2^{\ell-1} \ell!$ | |
| E_6 | 72 | (*) | $2^7 3^4 5$ | = 51840 |
| E_7 | 126 | (*) | $2^{10} 3^4 5 \cdot 7$ | = 2903040 |
| E_8 | 240 | (*) | $2^{14} 3^5 5^2 7$ | = 696729600 = $4! \cdot 6! \cdot 8!$ |
| F_4 | 48 | (*) | $2^7 3^2$ | = 1152 |
| G_2 | 12 | \mathcal{D}_6 | $2^2 3$ | = 12 |

4.8 Gewichten in een wortelsysteem

Definitie 4.8.1. *Zij $\Phi \subset E$ een wortelsysteem, dan is de verzameling*

$$\Lambda = \{\lambda \in E : \langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbf{Z} \text{ voor alle } \alpha \in \Phi\}. \quad (4.8.1)$$

Dan heten de vectoren in Λ gewichten.

De verzameling gewichten Λ samen met optelling is een ondergroep van $(E, +)$, immers is $\langle \lambda, \alpha \rangle = 2(\lambda, \alpha) / (\alpha, \alpha)$ lineair in de eerste component.

Het wortelrooster is de verzameling $\Lambda_r = \langle \Phi \rangle (= \langle \Delta \rangle)$, het rooster voortgebracht door het wortelsysteem, Λ_r is een ondergroep van de verzameling gewichten. Voor een vaste basis $\Delta \subset \Phi$ heet een gewicht $\lambda \in \Lambda$ *dominant* als $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ voor alle $\alpha \in \Delta$ en *sterk dominant* als

$\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbf{Z}_{>0}$ en de verzameling van dominante gewichten wordt genoteerd met Λ^+ . We kunnen de verzameling dominante gewichten ook uitdrukken als $\Lambda \cap \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$, omdat de Weylkamer van een basis alle reguliere vectoren die een strikt positief inwendig product met de vectoren in de basis hebben bevat, en door het nemen van de afsluiting is ook een inwendig product gelijk aan nul toegelaten. Het is duidelijk dat de verzameling *sterk* dominante gewichten dus gelijk is aan $\Lambda \cap \mathfrak{C}(\Delta)$.

De basis $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ van een wortelsysteem spant de ruimte E op. Gelijksort spant $\Delta^\vee = \{\frac{2\alpha_1}{(\alpha_1, \alpha_1)}, \dots, \frac{2\alpha_n}{(\alpha_n, \alpha_n)}\}$ eveneens E op. We definiëren de *duale basis* van E ten opzicht van Δ door de verzameling $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ waarbij $\langle \lambda_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ met δ_{ij} de Kronecker-delta⁵ en noemen de duale basis in deze context ook wel de *dominante fundamentele gewichten* relatief aan Δ .

Voor het berekenen van fundamentele gewichten presenteren we een algemene methode die ook toe te passen is in wanneer de basis van een wortelsysteem van rang n gegeven wordt in een ruimte met een dimensie groter dan n .

Zij Φ een wortelsysteem in E met $\dim E = n$ en $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset E'$ met $m = \dim E' \geq n$. We gebruiken de (vectorruimte)basis $\Delta^\vee = \{\frac{2\alpha_1}{(\alpha_1, \alpha_1)}, \dots, \frac{2\alpha_n}{(\alpha_n, \alpha_n)}\} = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$. En plaatsen deze in een $m \times n$ -matrix $A = (\alpha_1^\vee \cdots \alpha_n^\vee)$. Tevens plaatsen we de te berekenen fundamentele dominante gewichten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in E'$ in een $m \times n$ -matrix $W = (\lambda_1 \cdots \lambda_n)$. Nu geldt $\langle \lambda_i, \alpha_j \rangle = (\lambda_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$, wat geschreven kan worden als $W^\top A = I_n$, ofwel

$$\begin{pmatrix} (\lambda_1)_1 & (\lambda_1)_2 & \dots & (\lambda_1)_m \\ (\lambda_2)_1 & (\lambda_2)_2 & \dots & (\lambda_2)_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda_n)_1 & (\lambda_n)_2 & \dots & (\lambda_n)_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha_1)_1 & (\alpha_2)_1 & \dots & (\alpha_n)_1 \\ (\alpha_1)_2 & (\alpha_2)_2 & \dots & (\alpha_n)_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_1)_m & (\alpha_2)_m & \dots & (\alpha_n)_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (4.8.2)$$

Een oplossing van dit stelsel is $W = A(A^\top A)^{-1}$, immers geldt dan $W^\top A = (A(A^\top A)^{-1})^\top A = ((A^\top A)^{-1})^\top A^\top A = (A^\top A)^{-1}(A^\top A) = I_n$. Als $n = m$ dan volgt eenvoudigweg $W = (A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.

De groep $\Lambda/\Lambda_r = \{\lambda + \Lambda_r : \lambda \in \Lambda\} = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$ is eindig en heet de *fundamentele groep* van Φ . Als we schrijven $\Delta \ni \alpha_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} \lambda_j$ met $m_{ij} \in \mathbf{Z}$, dan is

$$(C)_{i,k} = \langle \alpha_i, \alpha_k \rangle = \sum_{j=1}^n m_{ij} \langle \lambda_j, \alpha_k \rangle = \sum_{j=1}^n m_{ij} \delta_{jk} = m_{ik} \quad (4.8.3)$$

met andere woorden geldt het stelsel $A = C\Lambda$, dus $\Lambda = C^{-1}A$, natuurlijk is het wel van belang dat de Cartanmatrix inverteerbaar is, dus $\det C \neq 0$.

In z'n algemeenheid gelden de volgende determinanten voor irreducibele wortelsystemen (Zie appendix 9.2 voor de berekening)

⁵De Kronecker-delta is gedefinieerd als $\delta_{ij} = 1$ als $i = j$ en $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$.

Tabel 9: Determinanten van Cartanmatrices van irreducibele wortelsystemen

| Irreducibel wortelsysteem | Determinant Cartanmatrix $\det C_\Phi$ |
|---------------------------|--|
| $A_\ell (\ell \geq 1)$ | $\ell + 1$ |
| $B_\ell (\ell \geq 1)$ | 2 |
| $C_\ell (\ell \geq 1)$ | 2 |
| $D_\ell (\ell \geq 1)$ | 4 |
| E_6 | 3 |
| E_7 | 2 |
| E_8 | 1 |
| F_4 | 1 |
| G_2 | 1 |

Voor elk irreducibel wortelsysteem geldt dat de determinant ongelijk aan nul is, dus is de cartanmatrix inverteerbaar en bestaat een fundamentele verzameling gewichten.

Voor een reducibel wortelsysteem $\Phi = \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_n \subset E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ met $\Phi_i \subset E_i$ irreducibele wortelsystemen geldt dat de Cartanmatrix door orthogonaliteit de volgende vorm moet hebben (waarbij de wortels opeenvolgend per wortelsysteem worden toegevoegd)

$$C_\Phi = \begin{pmatrix} C_{\Phi_1} & O & \dots & O \\ O & C_{\Phi_2} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & C_{\Phi_n} \end{pmatrix} \quad (4.8.4)$$

Met O de nulmatrix van passende afmeting. Nu geldt dat

$$\det C_\Phi = \prod_{i=1}^n \det C_{\Phi_i} \quad (4.8.5)$$

en omdat voor elk irreducibel wortelsysteem geldt $\det C_{\Phi_i} \neq 0$ geldt ook $\det C_\Phi \neq 0$.

We kunnen dus voor elk wortelsysteem (reducibel én irreducibel) de basis van het rooster van gewichten uitdrukken als lineaire combinatie van de simpele wortels. In het geval het wortelsysteem Φ irreducibel is biedt [12], p.69, een overzicht van de basisvectoren van Λ . In het geval Φ reducibel is, kunnen we de volgende stelling toepassen.

Stelling 4.8.1 (Opgave 13.1 uit [12]). *Zij $\Phi = \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_t$ de ontbinding van Φ in irreducibele wortelsystemen, met $\Delta = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_t$. Dan ontbindt Λ in de directe som $\Lambda_1 \oplus \dots \oplus \Lambda_t$, tevens geldt en $\Lambda^+ = \Lambda^+ \oplus \dots \oplus \Lambda_t^+$.*

Bewijs: “ \subset ” Neem $\lambda \in \Lambda$, $1 \leq i \leq t$ en $\tilde{\alpha} \in \Delta_i$ willekeurig. Er geldt dat

$$\alpha = \left(\underbrace{0}_{\in E_1}, \dots, \underbrace{0}_{\in E_{i-1}}, \tilde{\alpha}, \underbrace{0}_{\in E_{i+1}}, \dots, \underbrace{0}_{\in E_t} \right) \in \Delta \quad (4.8.6)$$

Er geldt $\lambda \in \Lambda \subset \bigoplus_{k=1}^t E_k$, schrijven we

$$\lambda = \left(\underbrace{\lambda_1}_{\in E_1}, \underbrace{\lambda_2}_{\in E_2}, \dots, \underbrace{\lambda_t}_{\in E_t} \right) \quad (4.8.7)$$

En dus geldt

$$\mathbf{Z} \ni \langle \lambda, \alpha \rangle = \frac{2((\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_t), (0, \dots, 0, \tilde{\alpha}, 0, \dots, 0))}{((0, \dots, 0, \tilde{\alpha}, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0, \tilde{\alpha}, 0, \dots, 0))} = \frac{2(\lambda_i, \tilde{\alpha})}{(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha})} \quad (4.8.8)$$

dus $\lambda_i \in \Lambda_i$. Omdat i en $\tilde{\alpha} \in \Delta_i$ willekeurig waren geldt $\Lambda \subset \bigoplus_{k=1}^t \Lambda_k$.

“ \supseteq ” Neem $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t) \in \bigoplus_{k=1}^t \Lambda_k$ en $\alpha \in \Delta$ willekeurig, dan kunnen we schrijven $\alpha = (\underbrace{0}_{\in E_1}, \dots, \underbrace{0}_{\in E_{i-1}}, \tilde{\alpha}, \underbrace{0}_{\in E_{i+1}}, \dots, \underbrace{0}_{\in E_t})$ voor zekere $\tilde{\alpha} \in \Delta_i$ voor zekere $1 \leq i \leq t$, nu volgt dat

$$\langle \lambda, \alpha \rangle = \frac{2((\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_t), (0, \dots, 0, \tilde{\alpha}, 0, \dots, 0))}{((0, \dots, 0, \tilde{\alpha}, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0, \tilde{\alpha}, 0, \dots, 0))} = \frac{2(\lambda_i, \tilde{\alpha})}{(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha})} \in \mathbf{Z} \quad (4.8.9)$$

dus $\lambda \in \Lambda$, ofwel $\bigoplus_{k=1}^t \Lambda_k \subset \Lambda$.

We concluderen dat $\Lambda = \bigoplus_{k=1}^t \Lambda_k$.

Wanneer men bovenstaand bewijs toepast op Λ^+ in plaats van Λ en $\Lambda_1^+ \oplus \dots \oplus \Lambda_t^+$ en opmerkt dat de geheeltallige uitdrukkingen nu slecht groter of gelijk nul zijn, dan gaat het bewijs alsnog op en zo volgt ook dat $\Lambda^+ = \bigoplus_{k=1}^t \Lambda_k^+$. \square

Stelling 4.8.2. Zij Φ een wortelsysteem en $\{v_i \in E\}_{i \in I}$ is een verzameling punten en $\{k_i \in \mathbf{Z}\}_{i \in I}$ gehele getallen, I een eindige indexverzameling. Dan is de verzameling $\{\alpha \in \Phi : (\alpha, v_i) \in k_i \mathbf{Z}, i \in I\}$ leeg of een wortelsysteem in de deelruimte die hij opspant.

Bewijs: Noem $\Omega = \{\alpha \in \Phi : (\alpha, v_i) \in k_i \mathbf{Z}, i \in I\}$. We gaan de axioma's na:

- R1) $\Omega \subset \Phi$, dus $\#\Omega \leq \#\Phi < \infty$. Dat Ω een zijn deelruimte opspant is triviaal. $0 \notin \Phi$, dus $0 \notin \Omega$.
- R2) Voor $\alpha \in \Omega$ geldt dat er getallen $x_i \in \mathbf{Z}_{i \in I}$ zijn zodanig dat voor alle $i \in I$ geldt $(\alpha, v_i) = k_i x_i$. Zo volgt ook dat $(-\alpha, v_i) = -(\alpha, v_i) = -k_i x_i \in k_i \mathbf{Z}$, ofwel $-\alpha \in \Omega$. Ω bevat alleen de veelvouden $\pm \alpha$, want $\Omega \subset \Phi$.
- R3) Laat $\alpha, \beta \in \Omega$, we tonen aan dat $\sigma_\alpha(\beta) \in \Omega$. Zij $\{x_i \in \mathbf{Z}\}_{i \in I}$ zodanig dat voor alle $i \in I$ geldt $(\alpha, v_i) = k_i x_i$ en $\{y_i \in \mathbf{Z}\}_{i \in I}$ respectievelijk voor β . Dan volgt voor $i \in I$ willekeurig dat

$$(\sigma_\alpha(\beta), v_i) = (\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha, v_i) = (\beta, v_i) - \langle \beta, \alpha \rangle (\alpha, v_i) \quad (4.8.10)$$

$$= k_i y_i - \langle \beta, \alpha \rangle k_i x_i = k_i (y_i - \langle \beta, \alpha \rangle x_i) \in k_i \mathbf{Z} \quad (4.8.11)$$

immers is $\langle \beta, \alpha \rangle$ geheeltallig en \mathbf{Z} een ring, dus $\sigma_\alpha(\beta) \in \Omega$. $\sigma_\alpha : \Omega \rightarrow \Omega$ is een involutie, dus een bijectie en laat Ω dus invariant.

- R4) Laat $\alpha, \beta \in \Omega$, dan geldt $\alpha, \beta \in \Phi$ dus $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbf{Z}$.

Dus $\Omega \subset \Phi$ is een wortelsysteem. \square

4.9 Dominante gewichten

De Weylgroep van een wortelsysteem kan werken op de wortels en algemener op de ruimte $E \supset \Phi$. Daarnaast kan de Weylgroep ook werken op de verzameling gewichten. Daartoe moeten we eerst weten dat werking inderdaad gewichten naar gewichten stuurt. Neem daarvoor $\lambda \in \Lambda$ willekeurig. We kunnen schrijven $\lambda = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \lambda_\alpha$ met $c_\alpha \in \mathbf{Z}$. De Weylgroep wordt voortgebracht door spiegelingen door simpele wortels, dus is het voldoende de geslotenheid daarvoor te controleren. Neem $\beta \in \Delta$ en $\gamma \in \Phi$ willekeurig, dan geldt

$$\langle \sigma_\beta(\lambda), \gamma \rangle = \langle \lambda, \gamma \rangle - \langle \lambda, \beta \rangle \langle \beta, \gamma \rangle. \quad (4.9.1)$$

Merk op dat alle termen en factoren in de ring \mathbf{Z} zitten, dus $\sigma_{\beta}(\lambda) \in \Lambda$.

Er bestaat een nauwe relatie tussen de verzameling van alle gewichten en de verzameling van dominante gewichten. Allereerst geldt dat inwendige producten behouden zijn onder de Weylgroep \mathscr{W} , omdat een wortelsysteem invariant is onder \mathscr{W} volgt direct dat de verzameling van gewichten ook invariant is onder \mathscr{W} . De baan van een gewicht $\lambda \in \Lambda$, genoteerd door $\mathscr{W}\lambda = \{\sigma(\lambda) : \sigma \in \mathscr{W}\}$ heeft de volgende bijzondere eigenschap.

Stelling 4.9.1. *Ieder gewicht in Λ ligt in de baan van één uniek dominant gewicht.*

Het bewijs wordt gegeven in [12]. Merk op dat dus volgt $\Lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda^+} \mathscr{W}\lambda$.

5 Lisi's model: deeltjes als wortels van E_8

Om de hoofdvraag te beantwoorden komen de theorie van elementaire deeltjes en wortelsystemen samen. Ook wordt beschreven hoe het probleem valt te programmeren door gebruik te maken van de stellingen uit hoofdstuk 2 en 4.

Zij Φ een wortelsysteem in een euclidische ruimte E met rang ℓ , Weylgroep \mathscr{W} en basis Δ .

Het spectrum van een gewicht $\lambda \in \Lambda$ met betrekking tot het wortelsysteem Φ is de verzameling

$$\text{spec}(\lambda) = \{\langle \lambda, \alpha \rangle : \alpha \in \Phi\} \subset \mathbf{Z} \quad (5.0.1)$$

Merk op dat voor alle vectoren $\alpha \in \Phi_{E_8}$ geldt $(\alpha, \alpha) = \|\alpha\|^2 = 2$, dus $\langle x, \alpha \rangle = \frac{2(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = (x, \alpha)$ met $x \in E$. Vanaf hier is het wortelsysteem dat we gebruiken het wortelsysteem van E_8 en wordt dus ook wel $\text{spec}(\lambda) = \{(\lambda, \alpha) : \alpha \in \Phi\}$ geschreven.

Wegens stelling 4.9.1 is het voldoende de dominante gewichten van Λ te bekijken. Laat $\lambda \in \Lambda$ willekeurig, dan is er een $\hat{\lambda} \in \Lambda^+$ er een $\sigma \in \mathscr{W}$ is met $\sigma(\lambda) = \hat{\lambda}$. Nu geldt dus

$$\text{spec}(\lambda) = \{(\lambda, \alpha) : \alpha \in \Phi\} = \{(\sigma(\lambda), \sigma(\alpha)) : \alpha \in \Phi\} \quad (5.0.2)$$

$$= \{(\hat{\lambda}, \beta) : \beta \in \Phi\} = \text{spec}(\hat{\lambda}) \quad (5.0.3)$$

Om alle mogelijke spectra voor een lading te bepalen is het dus voldoende alle spectra van dominante gewichten te bekijken.

Een gewicht $\lambda \in \Lambda^+$ kunnen we schrijven als $\lambda = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \lambda_i$ met $c_i \geq 0$ en λ_i fundamenteel voor alle $i = 1, \dots, \ell$. Merk de volgende fundamentele eigenschappen op.

Zij $\alpha \in \Phi$ en een wortel en $\lambda = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \lambda_i$ een dominant gewicht, dan geldt

1. voor alle $i = 1, \dots, \ell$ dat $(\lambda_i, \alpha) \geq 0$ óf $(\lambda_i, \alpha) \leq 0$.
2. Als $(\lambda, \alpha) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i (\lambda_i, \alpha) = 0$, dan geldt voor alle $i = 1, \dots, \ell$ $c_i = 0$ of $(\lambda_i, \alpha) = 0$.
3. Als $(\lambda, \alpha) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i (\lambda_i, \alpha) = \pm 1$, dan geldt voor één $k \in \{1, \dots, \ell\}$, $c_k = 1$ en $(\lambda_k, \alpha) = \pm 1$ en voor alle $i = 1, \dots, \ell$ met $i \neq k$ dat $c_i = 0$ of $(\lambda_i, \alpha) = 0$.

Deze regels zullen in het programma wat de hoofdvraag beantwoord gebruikt worden om de dominante gewichten iteratief te kunnen aanpassen.

De werking van \mathscr{W} op E door het toepassen van een afbeelding uit \mathscr{W} op elementen uit E leidt tot het begrip van stabilisatorondergroep. Zij $x \in E$ een vector, dan is de stabilisatorondergroep van \mathscr{W} in x

$$\mathscr{W}_x = \{\sigma \in \mathscr{W} : \sigma(x) = x\} \subset \mathscr{W} \quad (5.0.4)$$

Met betrekking tot de stabilisator geldt de volgende belangrijke stelling.

Stelling 5.0.1. Voor de stabilisator van de Weylgroep \mathcal{W} onder $\lambda \in \Lambda$ geldt

$$\mathcal{W}_\lambda = \langle \sigma_\alpha : \alpha \in \Phi, (\alpha, \lambda) = 0 \rangle. \quad (5.0.5)$$

In het bijzonder, als $\lambda \in \Lambda^+$ dan geldt

$$\mathcal{W}_\lambda = \langle \sigma_\alpha : \alpha \in \Delta, (\alpha, \lambda) = 0 \rangle. \quad (5.0.6)$$

Voor het bewijs van deze stelling verwijzen we naar [18].

De baan van de Weylgroep voor een element $x \in E$ is de verzameling $\mathcal{W}x = \{\sigma(x) : \sigma \in \mathcal{W}\}$.

Omdat geldt voor $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ voor de Weylgroepen van wortelsystemen horende bij een semi-simpele Lie-algebra $L_1 \times \cdots \times L_n$ geldt

$$\#\mathcal{W}(L_1 \times \cdots \times L_n) = \#\mathcal{W}(L_1) \cdot \dots \cdot \#\mathcal{W}(L_n) \quad (5.0.7)$$

volgt dus middels de baan-stabilisatorstelling [20]

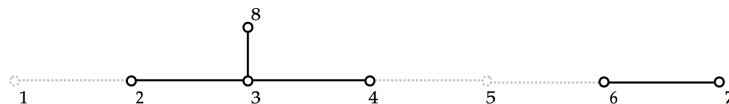
$$\#\mathcal{W}\lambda \cdot \#\mathcal{W}_\lambda = \#\mathcal{W} \quad (5.0.8)$$

dat de lengte van de baan gelijk is aan

$$\#\mathcal{W}\lambda = \frac{\#\mathcal{W}}{\#\mathcal{W}(L_1) \cdot \dots \cdot \#\mathcal{W}(L_n)} \quad (5.0.9)$$

waar $\Phi_{L_1 \times \cdots \times L_n}$ het wortelsysteem met diens Weylgroep isomorf aan de stabilisator \mathcal{W}_λ . Aangezien de Weylgroepen van simpele Lie-algebra's bekend zijn, kan op deze manier voor een gegeven gewicht de lengte van de baan worden berekend.

Voorbeeld 5.0.1. Laat $\lambda = \lambda_1 + \lambda_5$, dan geldt dus dat het wortelsysteem dat hoort bij de stabilisator \mathcal{W}_λ het volgende Dynkindiagram heeft



Dit wortelsysteem is dus isomorf met het wortelsysteem van $D_4 \times A_2$. Er geldt dus

$$\#\mathcal{W}_\lambda = \#\mathcal{W}(D_4) \cdot \#\mathcal{W}(A_2) = 2^3 \cdot 4! \cdot 3! = 1152. \quad (5.0.10)$$

en dus geeft de baan-stabilisatorstelling de lengte van de baan

$$\#\mathcal{W}\lambda = \frac{\#\mathcal{W}}{\#\mathcal{W}_\lambda} = \frac{696729600}{1152} = 604800 \quad (5.0.11)$$

5.1 Lisi's model: elementaire deeltjes in E_8

We nemen X de lijst deeltjes uit tabel 11 samen met de bijbehorende ladingen. Op de vraag of er injecties $\varphi : X \hookrightarrow R_8$ en $\psi : F \hookrightarrow \Lambda$ zodanig dat $\pi(x) = (\psi(\pi), \varphi(x))$ voor alle $\pi \in F$ en $x \in X$ bestaan en $\psi(F)$ onderling orthogonaal zijn, is het antwoord *nee*.

Bewijs: Merk op dat uit tabel 11 volgt dat de verzameling deeltjes met alle ladingen gelijk aan 0,

$$X_0 = \bigcap_{\pi \in F} \ker \pi = \{Z_L, Z_R, g_L^3, g_R^3, g_L^8, g_R^8, \gamma_L, \gamma_R, G_L, G_R\} \subset X, \quad (5.1.1)$$

De verzameling X_0 bestaat uit twee vectorbosonen, vier gluonen, twee fotonen en 2 gravitonen en bestaat dus in totaal uit tien deeltjes.

Omdat het model zes onafhankelijke ladingen heeft zullen er zes onafhankelijke gewichten ontstaan. De deeltjes uit X_0 moeten dus loodrecht op al deze zes vectoren staan en liggen daardoor in een $8 - 6 = 2$ dimensionale deelruimte van \mathbf{R}^8 , specifiek in een wortelsysteem van rang ten hoogste 2. Als $\text{rang}\Omega = 1$, dan geldt $\Omega \cong \Phi_{A_1}$ en $\#\Phi_{A_1} = 2 < 10$ en kan er dus geen injectie bestaan, een tegenspraak.

Als $\text{rang}\Omega = 2$, dan is Ω isomorf met één van de wortelsystemen van $A_1 \times A_1$, A_2 , B_2 of G_2 4.1.2. Echter bevatten de wortelsystemen van B_2 en G_2 wortels van verschillende lengten en kunnen dus nooit deelverzamelingen van E_8 zijn en er geldt $\#\Phi_{A_1 \times A_1} = 4 < 10$, $\#\Phi_{A_2} = 6 < 10$ en is het dus niet mogelijk een injectie op X_0 te maken. \square

Het standaardmodel heeft acht van deze neutrale deeltjes en als gravitonen bestaan zelfs tien, het is dus in beide gevallen niet mogelijk.

Als we de verzameling X_0 buiten beschouwing laten en $X' := X \setminus X_0$, kunnen we de hoofdvraag toepassen op X' . In het geval dit niet werkt kunnen we vaststellen dat er ook geen model zal zijn voor de verzameling X_0 .

Lisi stuurt deze neutrale deeltjes naar de voortbrengers van een maximale torsie deelalgebra van E_8 , deze verzameling komt in de ruimte van het wortelsysteem overeen met de nulvector.

5.2 Programmeren van gewichten

Om de hoofdvraag te beantwoorden wordt gebruik gemaakt van het programma MATLAB[®][17]. De code is terug te vinden in appendix 9.5 en 9.6.

Het gehele programma is onderverdeeld twee programma's, genaamd programma I en programma II.

- I In programma I maakt voor elke lading een verzameling dominante gewichten aan zodanig dat er voldoende beelden van elementaire deeltjes voor elke projectie ontstaan. Dat wil zeggen dat er een injectie $\varphi : X' \hookrightarrow R_8$ bestaat die de gewenste eigenschap heeft voor deze lading.
- II In programma II wordt een lading gekozen en een dominant gewicht uit de verzameling gemaakt door programma I van deze lading, zeg λ_1 .

Een tweede lading en een gewicht daarvan wordt gekozen, zeg λ_2 . De baan $\mathscr{W}\lambda_2$ wordt bepaald. De elementen in de baan die voldoen aan de volgende eigenschappen.

- (a) Het element $\sigma\lambda_2 \in \mathscr{W}\lambda_2$, moet in het fundamenteelgebied van de gewichten liggen, van het wortelsysteem van de stabilisator $\mathscr{W}\lambda_1$. Omdat geldt

$$\mathscr{W}\lambda_1 = \langle \sigma_\alpha : \alpha \in \Delta, (\lambda_1, \alpha) = 0 \rangle. \quad (5.2.1)$$

is het voldoende als $(\lambda_1, \alpha) = 0$ ($\alpha \in \Delta$), dan $(\sigma\lambda_2, \alpha) \geq 0$.

- (b) Vanwege de aanname van orthogonaliteit moet voor $\sigma\lambda_2 \in \mathscr{W}\lambda_2$ gelden dat $(\lambda_1, \sigma\lambda_2) = 0$.

Voor de gewichten in $\mathscr{W}\lambda_2$ die hier aan voldoen wordt gecontroleerd of er voldoende wortels zijn om de projecties van λ_1 én λ_2 op R_8 te koppelen aan verschillende deeltjes

in X' .

In geval dat lukt wordt er een derde lading en gevonden dominant gewicht genomen, zeg λ_3 en ook hiervan wordt de baan $\mathcal{W}\lambda_3$ bepaald en de twee eisen (a) en (b) gecontroleerd, maar nu voor zowel λ_1 als λ_2 . Er wordt gekeken of dit de juiste projecties oplevert en in het geval van wel wordt een vierde lading en gewicht gekozen en het proces herhaald.

Als aan het einde er een tupel ter grote van het aantal ladingen over is dat een injectie $\varphi : X' \hookrightarrow R_8$ oplevert zodat de projecties kloppen dan kan men concluderen dat Lisi's model werkt met orthogonaliteit van gewichten.

In het geval er onvoldoende wortels per projectie zijn wordt een nieuwe gewicht voor de laatste lading uit diens lijst gekozen en geprobeerd. In het geval er geen van deze ladingen blijkt te werken kan men concluderen dat er geen model met orthogonale gewichten bestaat.

We gaan nu in op de programmeertechnische kant van beide programma's.

Voor programma I wordt eerst ten opzichte van een gekozen basis de gelijkmachtige verzameling van fundamentele gewichten $\Lambda_f = \{\lambda_1, \dots, \lambda_8\}$ bepaald door gebruik te maken van de methode beschreven in paragraaf 4.8.

Elk gewicht $\lambda \in \Lambda^+$ kan geschreven worden als $\lambda = \sum_{i=1}^8 c_i \lambda_i$ met $c_i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$. Omdat Λ_f vast is, is het voldoende de coëfficiënten c_{λ_i} te onthouden en mee te rekenen.

Om rekenwerk te besparen worden niet alle 8-tupels (c_1, \dots, c_8) willekeurig geprobeerd maar wordt begonnen met $(0, 0, \dots, 0)$ en alle mogelijke nullen veranderd in énen. Dit levert $2^8 = 256$ nieuwe tupels.

Het controleren van een gegeven gewicht $\lambda \in \Lambda^+$ gebeurt door de inwendige producten met alle wortels van E_8 na te gaan. Zij $\alpha_a \in R_8$, als een een deeltje $x_1 \in X'$ is zodanig dat $\pi(x_1) = (\lambda, \alpha_1)$, dan het deeltje verwijdert uit X' . Voor een volgende wortel $\alpha_2 \in R_8 \setminus \{\alpha_1\}$ wordt gekeken over er een deeltje x_2 in de verzameling overgebleven deeltjes bestaat zodat $\pi(x_2) = (\lambda, \alpha_2)$. Dit proces van wortels afgaan en deeltjes verwijderen kan worden voortgezet. Als er uiteindelijk geen deeltjes in de lijst meer over zijn dan past het gewicht dus en is er een injectie $\varphi : X' \hookrightarrow R_8$ gevonden. Indien er deeltjes over zijn dan past het gewicht niet.

Voor het controleren van de projecties berekenen we in dat geval niet $(\pi(x), \lambda)$ maar $(\hat{\pi}_1(x), \lambda)$, met

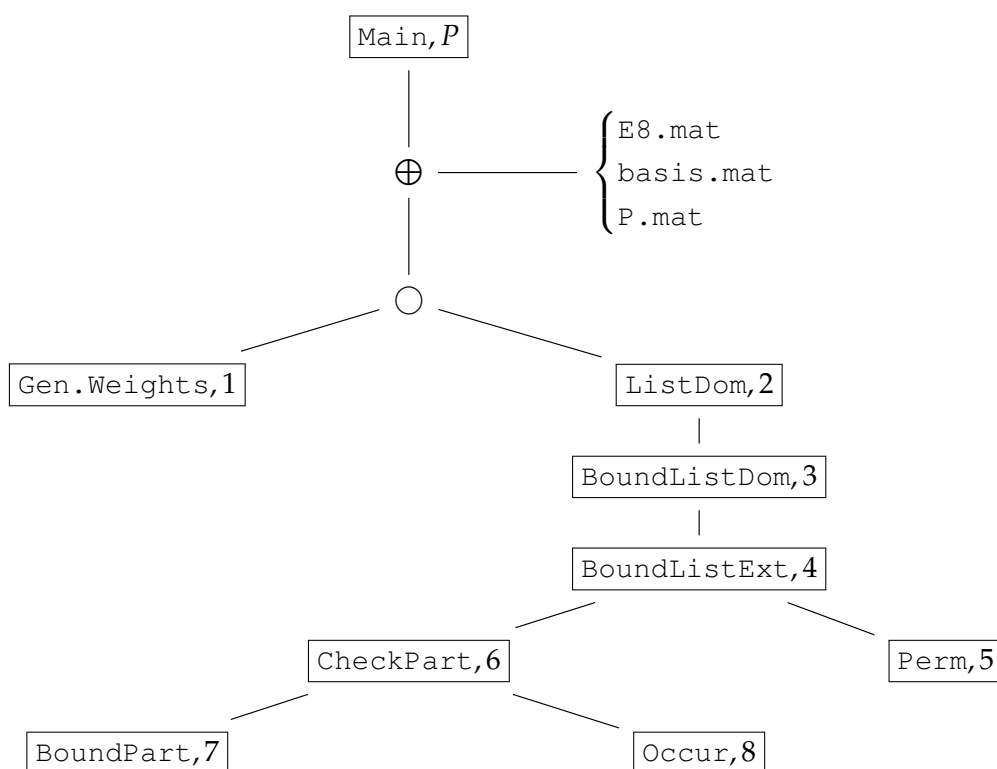
$$\hat{\pi}_i(x) = \max\{-i, \min\{i, \pi(x)\}\} = \begin{cases} \pi(x) & \text{als } -i \leq \pi(x) \leq i \\ i & \text{als } \pi(x) > i \\ -i & \text{als } \pi(x) < -i \end{cases}, i \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \quad (5.2.2)$$

zo wordt voldoende plaats voorzien voor deeltjes met een hogere lading.

Voor alle 8-tupels die werken in deze stap wordt nu de worden nu alle waarden 1 veranderd naar 2 of gelijk gelaten. Voor deze nieuwe tupels wordt het bepaald of de projecties $(\hat{\pi}_2(x), \lambda)$ voor alle deeltjes voldoende kan worden gevonden in het wortelsysteem.

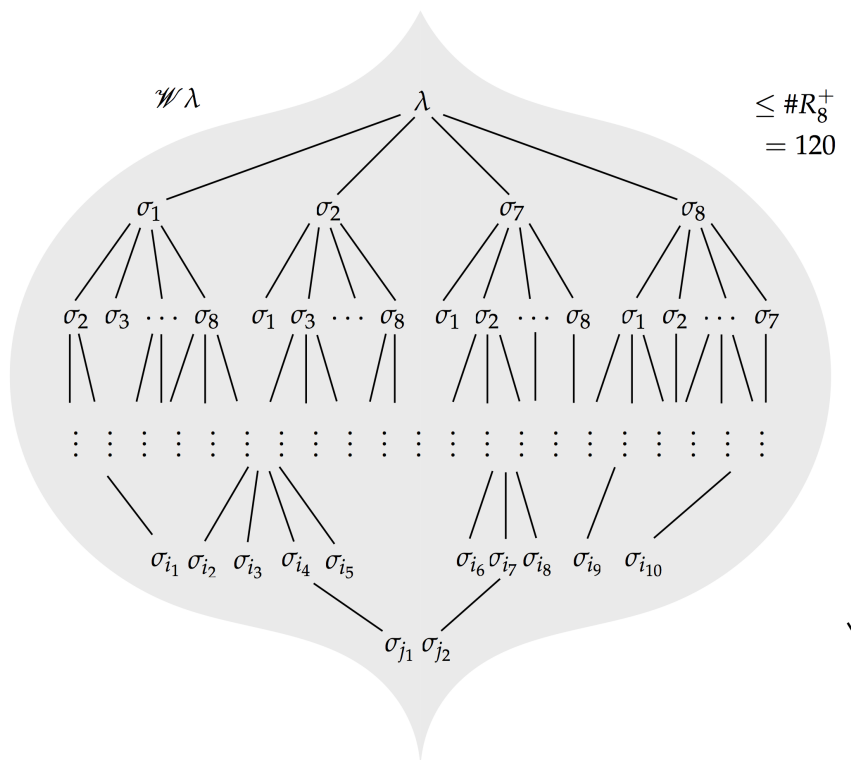
Schematisch kan het programma worden weergegeven zoals in onderstaand diagram. Hierin wordt van boven naar onder aangegeven welke functies gebruik maken van elkaar. Tijdens

het uitvoeren van het programma `main` worden ook de wortels en basis van E_8 en de lijst van elementaire deeltjes met ladingen geladen.



De lijsten met dominante gewichten die werken voor de afzonderlijke ladingen worden bewaard in `L1.mat, ..., L6.mat`. Programma II laad deze lijsten in, samen met wederom een basis en de wortels van E_8 en de ladingen. Het maken van de baan van de Weylgroep $\mathscr{W}\lambda$ van een gewicht $\lambda \in \Lambda$ gebeurt door gebruik te maken van de stelling die aangeeft dat de Weylgroep voortgebracht wordt door de simpele wortels 4.3.1.

De methode bestaat uit het maken van lagen opeenvolgend toegepaste spiegelingen door simpele wortels. Dit proces is weergegeven in figuur 8. Deze methode eindigt aangezien $\#\mathscr{W}\lambda$ een deler is van $\#\mathscr{W} = 696.729.600 < \infty$. In het bijzonder geeft 4.3.1 aan dat er $\ell(\sigma) \leq \#R_8^+ = \frac{1}{2} \cdot 240 = 120$ en er dus maximaal 120 lagen ontstaan.



Figuur 8: Voor $\lambda \in \Lambda$ (dus in het bijzonder $\lambda \in \Lambda^+$) kan de baan van de Weylgroep \mathcal{W}/λ gevormd worden door opeenvolgend spiegelingen door simpele wortels toe te passen gewichten die vaker voorkomende verwijderen.

Na het maken van een laag worden de volgende checks uitgevoerd.

1. Als meerdere elementen uit de baan vaker voorkomen in dezelfde laag worden elementen zodanig verwijderd dat een element slechts een maal voorkomt.
2. Er wordt gecontroleerd of een element uit de nieuwe laag in de voorgaande laag voorkomt. Indien dit het geval is wordt dit element ook verwijderd.
3. Er wordt gecontroleerd of een element uit de nieuwe laag in de voor-voorgaande laag voorkomt, ook hier wordt het element verwijderd als dit het geval is.

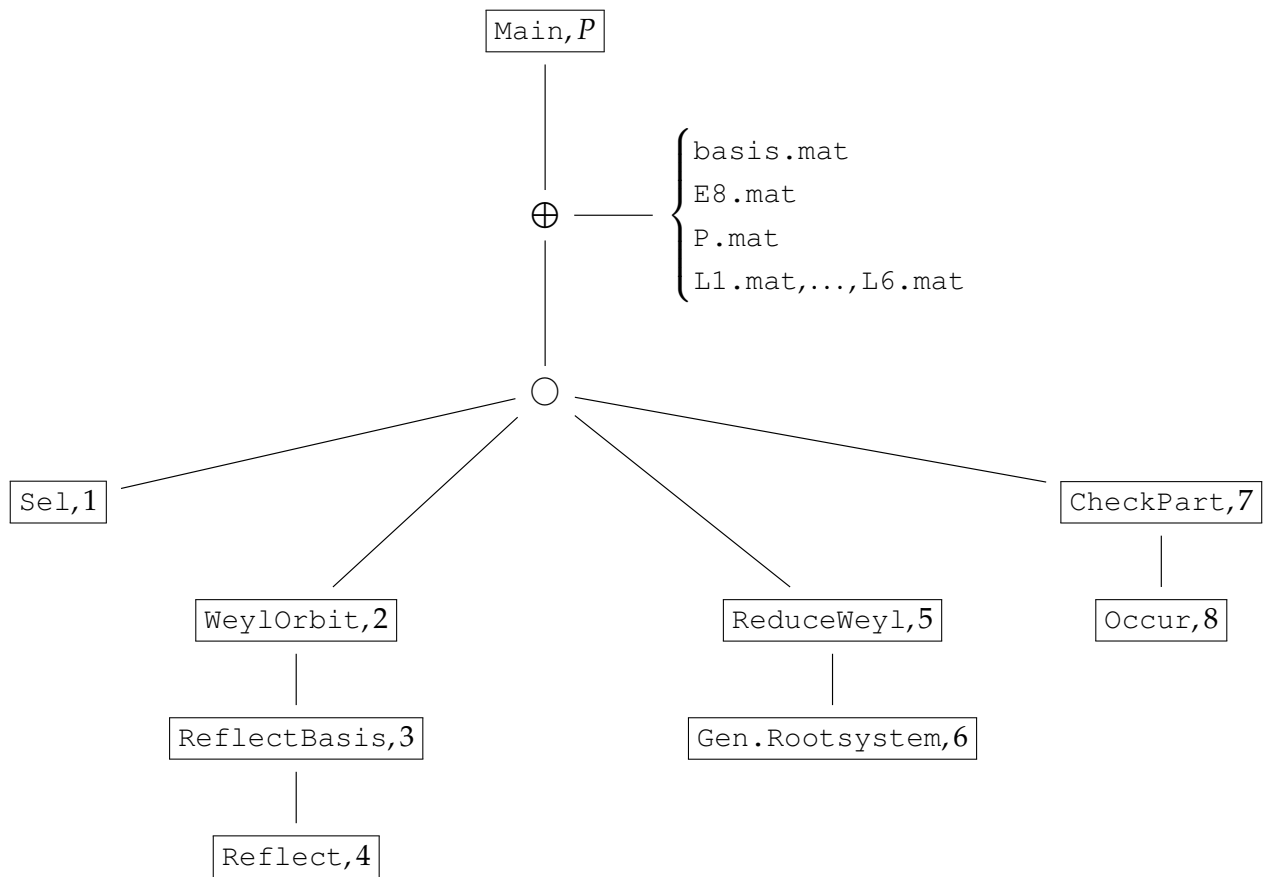
Deze twee controles zijn voldoende om dubbele gewichten uit te sluiten. Stel dat twee elementen in de voor-voor-voorgaande, zeg λ_1 , en huidige laag, zeg λ_2 , gelijk zijn. Dan zijn er spiegelingen door simpele wortels $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \sigma_{i_3}$ zodat $\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\sigma_{i_3}(\lambda_1) = \lambda_2 = \lambda_1$. Ofwel $\sigma_{i_2}\sigma_{i_3}(\lambda_1) = \sigma_{i_1}(\lambda_1)$. Als $\sigma_{i_1}(\lambda_1)$ al eerder is verwijderd kan $\sigma_{i_2}\sigma_{i_3}(\lambda_1)$ niet voorkomen en in het andere geval zouden twee elementen in de voor-voorgaande en voorgaande laag gelijk zijn, dit is echter door de controles al uitgesloten en kan dus ook niet voorkomen, het is dus voldoende de huidige laag en twee voorgaande lagen te controleren.

In het geval deze controles niet worden uitgevoerd en achteraf wordt gecontroleerd welke elementen vaker voorkomen ontstaat aan het einde van de methode een verzameling van $\sum_{i=0}^{120} 8^k \approx 2.684 \cdot 10^{108}$ gewichten, wat in de praktijk onhandelbaar is.

Daarna worden de twee eigenschappen (a) en (b) gecontroleerd voor alle elementen uit de baan en wordt op eenzelfde manier als in programma I gecontroleerd of de projecties voldoende voorkomen. De resultaten worden tussendoor opgeslagen en een nieuwe lading wordt

gekozen om het proces te herhalen.

Van programma II worden in onderstaand diagram de verbanden tussen de subroutines weergegeven.



6 Resultaten

In dit hoofdstuk worden de resultaten van beide programma's besproken. Doordat het programma niet alleen aangeeft wat het antwoord op de hoofdvraag is, wordt ook gekeken welke combinaties van ladingen wel in het model passen.

6.1 Resultaten van programma I

Als basis voor het wortelsysteem van E_8 nemen we de vectoren

$$\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\} \quad (6.1.1)$$

$$= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}. \quad (6.1.2)$$

Hieruit volgt een verzameling van fundamentele gewichten

$$\Lambda_f = \left\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 5/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (6.1.3)$$

$$= \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8\}. \quad (6.1.4)$$

Voor de afzonderlijke ladingen zijn eerst dominante gewichten gezocht die de juiste projectie geven met de wortels. Het aantal gevonden dominante gewichten is te zien in tabel 10 waar tevens is weergegeven wat de lijst van dominante gewichten is voor de lading $3(B - L)$

Tabel 10: Aantal mogelijke dominante gewichten voor alle individuele ladingen

| N ^o | Lading | Aantal gewichten in Λ^+ |
|----------------|---------|---------------------------------|
| 1 | T_3 | 6 |
| 2 | Y_W | 85 |
| 3 | g^3 | 6 |
| 4 | g^8 | 25 |
| 5 | B | 9 |
| 6 | L | 1 |
| 7 | $B - L$ | 7 |

De dominante gewichten die werken voor ladingen T_3 en g^3 zijn hetzelfde, namelijk een van de gewichten in

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (6.1.5)$$

$$= \{\lambda_1, \lambda_6, \lambda_1 + \lambda_7, \lambda_1 + 2\lambda_7, \lambda_6 + \lambda_7, \lambda_8\} \quad (6.1.6)$$

Dominante gewichten die passen bij het baryongetal B zijn

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_1 + \lambda_6, \lambda_7, \lambda_1 + \lambda_7, \lambda_8, \lambda_7 + \lambda_8 \quad (6.1.7)$$

Het enige gevonden dominante gewicht dat past voor het leptongetal L is λ_7 .

Dominante gewichten die passen bij het verschil tussen het baryongetal en leptongetal $B - L$ zijn

$$\lambda_2, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_1 + \lambda_6, \lambda_1 + \lambda_7, \lambda_2 + \lambda_7, \lambda_7 + \lambda_8 \quad (6.1.8)$$

De 85 en 25 dominante gewichten die werken voor de ladingen Y_W respectievelijk g^8 zijn vermeld in appendix 9.4.

6.2 Resultaten van programma II

Door deze lijsten in programma II in te laden kan gezocht worden naar tupels werkende gewichten voor meerdere ladingen. Omdat de volgorde van het kiezen van ladingen vrij is, kan het voordelig zijn de ladingen in een volgorde van minste gewichten te doorzoeken. Voor het zestal ladingen T_3, Y_W, g^3, g^8, B, L is dat

| | | | | | | | | | | | |
|------------------------|-----|---------------|-------|---------------|-------|---------------|-----|---------------|-------|---------------|-------|
| volgorde: | L | \rightarrow | T_3 | \rightarrow | g^3 | \rightarrow | B | \rightarrow | g^8 | \rightarrow | Y_W |
| aantal dom. gewichten: | 1 | | 6 | | 6 | | 9 | | 25 | | 85 |

Door het programma uit te voeren blijkt dat het in deze volgorde niet mogelijk is na het gewicht dat hoort bij het leptongetal (namelijk λ_7) nog een gewicht te vinden.

We kunnen dus concluderen dat het model sowieso niet gaat werken als de eigenschap leptongetal betrokken is.

Om te kijken hoe het model werkt in het geval we deze lading niet bekijken houden we hetzelfde model aan maar veranderen we de volgorde naar $T_3 \rightarrow g^3 \rightarrow g^8 \rightarrow B - L \rightarrow Y_W$.

Er volgt dat voor het paar ladingen (T_3, g^3) de volgende vier mogelijkheden ontstaan.

$$\{(\lambda_1, -2\lambda_1 + \lambda_4), (\lambda_6, \lambda_1 + \lambda_5 - 2\lambda_6), \quad (6.2.1)$$

$$(\lambda_1, -2\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_7), (\lambda_6, \lambda_1 + \lambda_5 - 3\lambda_6 + 2\lambda_7)\}. \quad (6.2.2)$$

En voor het drietal ladingen (T_3, g^3, g^8) zijn mogelijk

$$\{(\lambda_1, -2\lambda_1 + \lambda_4, -2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 + 2\lambda_6 + 2\lambda_8), \quad (6.2.3)$$

$$(\lambda_1, -2\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_7, -2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_5 + 2\lambda_6 - \lambda_7)\}. \quad (6.2.4)$$

We verwachten dat het wortelsysteem waarin kleurlading gerepresenteerd wordt G_2 is, zoals te zien in 2. Echter is het wortelsysteem van G_2 *geen* deelwortelsysteem van het wortelsysteem van E_8 . Echter is de Lie-groep G_2 *wel* een ondergroep van de Lie-groep E_8 en zou het verband hier verklaard kunnen worden.

Voor het viertal ladingen $(T_3, g^3, g^8, B - L)$ bestaat echter geen 4-tupel van gewichten zodat het model past.

Ook de ladingen (T_3, g^3, g^8, Y_W) zijn interessant om te onderzoeken. Door het grote aantal dominante gewichten voor de lading Y_W en de kleine stabilisatoren (dus lange banen) die dit oplevert is het niet mogelijk dit viertal door het programma te laten controleren binnen de duur van dit onderzoek.

7 Conclusie en discussie

Zoals blijkt uit de resultaten *past* de lijst van elementaire deeltje *niet* in het wortelsysteem van E_8 . Dit is het geval voor zowel het model door de ladingen B en L , als het model met de lading $B - L$. Wel passen sowieso alle afzonderlijke ladingen en ook verschillende combinaties van ladingen zoals (T_3, g^3) en (T_3, g^3, g^8) in de gewichten van het wortelsysteem van E_8 in het model.

Deze uitkomst weerlegt de theorie van Lisi [15] en bevestigt dus de uitkomst van het artikel van Distler en Garibaldi [6].

In een vervolgonderzoek kan gekeken worden of het viertal ladingen T_3, Y_W, g^3 en g^8 samen in het model passen. Ook kan onderzocht worden of het model met alle ladingen wel past in het geval geen orthogonaliteit van de gewichten wordt geëist. In het programma is dit een relatief strenge eis en voor bijvoorbeeld de ladingen leptongetal en baryongetal is deze aanname ook moeilijker te verantwoorden dan voor de andere ladingen.

Een andere aanpak om Lisi's model te weerleggen is door te kijken of de wortelsystemen van de Lie-algebra's van de symmetriegroepen van de ladingen afzonderlijk te vinden zijn als deelwortelsysteem van E_8 en samen ook kunnen voldoen aan de behoudswetten. Deze aanpak zal echter een bredere kennis van het standaardmodel en de betrokken groepen vereisen dan gepresenteerd in dit verslag.

8 Referenties

Referenties

- [1] G. Little A.G. Lisi, T. Gardner. Elementary particle explorer. 2007.
- [2] Michael Aschbacher. The status of the classification of the finite simple groups. *Notices of the AMS*, 51(7):736–740, 2004.
- [3] P. Boyvalenkov, S. Dodunekov, and O. R. Musin. A survey on the kissing numbers. *ArXiv e-prints*, July 2015.
- [4] ATLAS; CMS. Combined measurement of the higgs boson mass in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 tev with atlas and cms experiments. *ArXiv e-prints*, March 2015.
- [5] H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller, D. Radchenko, and M. Viazovska. The sphere packing problem in dimension 24. *ArXiv e-prints*, March 2016.
- [6] Jacques Distler and Skip Garibaldi. There is no “theory of everything” inside e_8 . *Communications in Mathematical Physics*, 298(2):419–436, 2010.
- [7] Joshua Ellis. TikZ-Feynman: Feynman diagrams with TikZ. 2016.
- [8] L. Fejes Toth. Über die dichteste kugellagerung. *Math. Z.*, 48:676–684, 1943.
- [9] D.J. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Physics textbook. Wiley, 2008.
- [10] D.J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2016.
- [11] T.C. Hales. A proof of the kepler conjecture. *Annals of Math.*, 162(3):1065–1185, 2005.
- [12] J. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.
- [13] S. Lang. *Linear Algebra*. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology. Springer, 1987.
- [14] S. Lang. *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2005.
- [15] A. Garrett Lisi. An Exceptionally Simple Theory of Everything. 2007.
- [16] A.G. Lisi. File:standard model charges.svg. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standard_Model_charges.svg, May 2017.
- [17] The Mathworks, Inc., Natick, Massachusetts. *MATLAB version 9.2.0.556344 (R2017a)*, 2017.
- [18] R. Steinberg. Differential equations invariant under finite reflection groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 112 (1964), 392-400.
- [19] P. Stevenhagen. *Algebra II*. Universiteit Leiden, 2011.
- [20] P. Stevenhagen. *Algebra I*. Universiteit Leiden, 2016.
- [21] J. Thijssen. *Lecture Notes on Classical Mechanics*. TU Delft University of Technology, 2014.

- [22] M. Thomson. *Modern Particle Physics*. Modern Particle Physics. Cambridge University Press, 2013.
- [23] W.D. Van Suijlekom. *Symmetrie in de deeltjesfysica*. Epsilon Uitgaven, 1 edition, 2016.
- [24] M. Viazovska. The sphere packing problem in dimension 8. *ArXiv e-prints*, March 2016.
- [25] Wikipedia. Antony Garrett Lisi — Wikipedia, the free encyclopedia. <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Antony%20Garrett%20Lisi&oldid=774230438>, 2017. [Online; accessed 03-May-2017].
- [26] Wikipedia. Cross product — Wikipedia, the free encyclopedia. <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Cross%20product&oldid=763336589>, 2017. [Online; verkregen op 4 februari 2017].
- [27] Wikipedia. Kepler conjecture — Wikipedia, the free encyclopedia. <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kepler%20conjecture&oldid=763918517>, 2017. [Online; accessed 21-February-2017].
- [28] Wikipedia. Leech lattice — Wikipedia, the free encyclopedia. <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Leech%20lattice&oldid=775339707>, 2017. [Online; accessed 14-June-2017].
- [29] Wikipedia. Quark — Wikipedia, the free encyclopedia. <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quark&oldid=785636006>, 2017. [Online; accessed 27-June-2017].
- [30] Wikipedia. Root system — Wikipedia, the free encyclopedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Root_system#/media/File:Root_vectors_b3_c3-d3.png, 2017. [Online; accessed 15-March-2017].
- [31] Wikipedia. Sphere packing — Wikipedia, the free encyclopedia. <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Sphere%20packing&oldid=767059681>, 2017. [Online; accessed 13-April-2017].
- [32] Wikipedia. Symmetry (physics) — Wikipedia, the free encyclopedia. [http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Symmetry%20\(physics\)&oldid=785366945](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Symmetry%20(physics)&oldid=785366945), 2017. [Online; accessed 27-June-2017].
- [33] Wolfram-Research. Wolframalpha. <http://http://www.wolframalpha.com>, 2017.
-

9 Appendices

9.1 Cartanmatrices A_ℓ, \dots, G_2

$$\begin{aligned}
 A_\ell : & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}, & B_\ell : & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 C_\ell : & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 2 \end{pmatrix}, & D_\ell : & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 E_6 : & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, & E_7 : & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 E_8 : & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, & F_4 : & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 & & G_2 : & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

9.2 Determinanten van Cartanmatrices

Stelling 9.2.1. *Er geldt voor $\ell \geq 1$ dat $\det C_{A_\ell} = \ell + 1$.*

Bewijs: Voor $\ell = 1$ geldt $\det C_{A_1} = \det(2) = 2 = 1 + 1$. En voor $\ell = 2$ geldt

$$\det C_{A_2} = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3 = 2 + 1 \quad (9.2.1)$$

dus ook hier klopt de stelling. Stel nu dat voor zeker $k \in \mathbf{Z}_{>0}$ voor alle $n \leq k$ de stelling opgaat. Dan geldt gebruikmakende van ontwikkeling naar rij/kolom

$$\begin{aligned}
 \det C_{A_{k+1}} &= \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \det C_{A_k} - \underbrace{-1}_{k \times k} \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= 2(k+1) - 1 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2k + 2 - \det C_{A_{k-1}} \\
 &= 2k + 2 - (k - 1 + 1) = k + 2 = (k + 1) + 1
 \end{aligned} \tag{9.2.2}$$

dus ook voor $k + 1$ gaat de stelling op. Volledige inductie geeft nu dat de stelling opgaat voor alle $\ell \geq 1$. \square

Stelling 9.2.2. Er geldt voor $\ell \geq 2$ dat $\det C_{B_\ell} = 2$ en voor $\ell \geq 3$ geldt $\det C_{C_\ell} = 2$.

Bewijs: Neem $\ell \in \mathbf{Z}_{\geq 2}$ willekeurig, dan geldt

$$\begin{aligned}
 \det C_{B_\ell} &= \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= -2 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \det C_{A_{\ell-1}} + 2 \cdot \underbrace{-1}_{(\ell-2) \times (\ell-2)} \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= 2 \det C_{A_{\ell-1}} - 2 \det C_{A_{\ell-2}} = 2(\ell - 1 + 1) - 2(\ell - 2 + 1) = 2
 \end{aligned} \tag{9.2.3}$$

Voor C_ℓ geldt $C_{C_\ell} = C_{B_\ell}^\top$, dus $\det C_{C_\ell} = \det C_{B_\ell}^\top = \det C_{B_\ell} = 2$. \square

Stelling 9.2.3. Er geldt voor $\ell \geq 4$ dat $\det C_{D_\ell} = 4$.

Bewijs: Merk op dat voor $\ell = 4$ en $\ell = 5$ geldt

$$\det C_{D_4} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \text{ en } \det C_{D_5} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4. \quad (9.2.4)$$

Stel dat voor zekere $k \in \mathbf{Z}_{\geq 5}$ voor alle $4 \leq n \leq k$ als inductiehypothese de stelling opgaat, we bekijken het geval $k+1$:

$$\det C_{D_{k+1}} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (9.2.5)$$

$$- -1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (9.2.6)$$

$$= 2 \det C_{D_k} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (9.2.7)$$

$$= 2 \det C_{D_k} - \det C_{D_{k-1}} = 2 \cdot 4 - 4 = 4. \quad (9.2.8)$$

Middels volledige inductie weten we nu dat de stelling voor alle $\ell \geq 4$ geldt. \square

Er geldt $\det C_{E_6} = 3$, $\det C_{E_7} = 2$, $\det C_{E_8} = 1$, $\det C_{F_4} = 1$ en $\det C_{G_2} = 1$. Dit kan eenvoudig gecontroleerd worden in bijvoorbeeld Wolfram Alpha [33].

9.3 Elementaire deeltjes en hun ladingen

Tabel 11 bevat een overzicht van 120 bekende elementaire deeltjes met de heliceit en de ladingen zwakke isospin (T_3), zwakke hyperlading (Y_W), kleurladingen (g^3, g^8) en baryon- en leptongetal (B, L) en de daarvan afhankelijke grootheden $B - L$, elektrische lading (Q) en rode (g^r), groene (g^g) en blauwe (g^b) kleurlading.

De tabel is samengesteld met behulp van bronnen [9], [22] en [16].

| N ^o | deeltje | heliceit | T_3 | Y_W | g^3 | g^8 | B | L | $B - L$ | Q | g^r | g^g | g^b |
|----------------|----------------|----------|-------|-------|----------------------|-------|-----|-----|---------|-----|-------|-------|-------|
| factor→ | | | 2 | 6 | $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | ν_{e^-} | L | -1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | ν_{e^+} | R | 1 | -3 | 0 | 0 | 0 | -1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | ν_{μ^-} | L | -1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | ν_{μ^+} | R | 1 | -3 | 0 | 0 | 0 | -1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | ν_{τ^-} | L | -1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | ν_{τ^+} | R | 1 | -3 | 0 | 0 | 0 | -1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | e^+ | L | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | -1 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | e^+ | R | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | -1 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | e^- | L | -1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 1 | -3 | -3 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | e^- | R | 0 | -6 | 0 | 0 | 0 | 1 | -3 | -3 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | μ^+ | L | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | -1 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | μ^+ | R | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | -1 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | μ^- | L | -1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 1 | -3 | -3 | 0 | 0 | 0 |
| 14 | μ^- | R | 0 | -6 | 0 | 0 | 0 | 1 | -3 | -3 | 0 | 0 | 0 |
| 15 | τ^+ | L | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | -1 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| 16 | τ^+ | R | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 | -1 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | τ^- | L | -1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 1 | -3 | -3 | 0 | 0 | 0 |
| 18 | τ^- | R | 0 | -6 | 0 | 0 | 0 | 1 | -3 | -3 | 0 | 0 | 0 |
| 19 | u_r | L | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | -1 | -1 |
| 20 | u_r | R | 0 | 4 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | -1 | -1 |
| 21 | u_g | L | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | -1 | 2 | -1 |
| 22 | u_g | R | 0 | 4 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | -1 | 2 | -1 |
| 23 | u_b | L | 1 | 1 | 0 | -2 | 1 | 0 | 1 | 2 | -1 | -1 | 2 |
| 24 | u_b | R | 0 | 4 | 0 | -2 | 1 | 0 | 1 | 2 | -1 | -1 | 2 |
| 25 | $u_{\bar{r}}$ | L | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | -2 | -2 | 1 | 1 |
| 26 | $u_{\bar{r}}$ | R | 0 | -4 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | -2 | -2 | 1 | 1 |
| 27 | $u_{\bar{g}}$ | L | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 0 | -1 | -2 | 1 | -2 | 1 |
| 28 | $u_{\bar{g}}$ | R | 0 | -4 | 1 | -1 | -1 | 0 | -1 | -2 | 1 | -2 | 1 |
| 29 | $u_{\bar{b}}$ | L | -1 | -1 | 0 | 2 | -1 | 0 | -1 | -2 | 1 | 1 | -2 |
| 30 | $u_{\bar{b}}$ | R | 0 | -4 | 0 | 2 | -1 | 0 | -1 | -2 | 1 | 1 | -2 |
| 31 | d_r | L | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | 2 | -1 | -1 |
| 32 | d_r | R | 0 | -2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | 2 | -1 | -1 |
| 33 | d_g | L | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 2 | -1 |
| 34 | d_g | R | 0 | -2 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 2 | -1 |
| 35 | d_b | L | -1 | 1 | 0 | -2 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | -1 | 2 |
| 36 | d_b | R | 0 | -2 | 0 | -2 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | -1 | 2 |
| 37 | $d_{\bar{r}}$ | L | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 1 | -2 | 1 | 1 |
| 38 | $d_{\bar{r}}$ | R | 0 | 2 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 1 | -2 | 1 | 1 |
| 39 | $d_{\bar{g}}$ | L | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | -2 | 1 |
| 40 | $d_{\bar{g}}$ | R | 0 | 2 | 1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | -2 | 1 |
| 41 | $d_{\bar{b}}$ | L | 1 | -1 | 0 | 2 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 1 | -2 |
| 42 | $d_{\bar{b}}$ | R | 0 | 2 | 0 | 2 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 1 | -2 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|----|---------------|---|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|
| 43 | c_r | L | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | -1 | -1 |
| 44 | c_r | R | 0 | 4 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | -1 | -1 |
| 45 | c_g | L | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | -1 | 2 | -1 |
| 46 | c_g | R | 0 | 4 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | -1 | 2 | -1 |
| 47 | c_b | L | 1 | 1 | 0 | -2 | 1 | 0 | 1 | 2 | -1 | -1 | 2 |
| 48 | c_b | R | 0 | 4 | 0 | -2 | 1 | 0 | 1 | 2 | -1 | -1 | 2 |
| 49 | $c_{\bar{r}}$ | L | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | -2 | -2 | 1 | 1 |
| 50 | $c_{\bar{r}}$ | R | 0 | -4 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | -2 | -2 | 1 | 1 |
| 51 | $c_{\bar{g}}$ | L | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 0 | -1 | -2 | 1 | -2 | 1 |
| 52 | $c_{\bar{g}}$ | R | 0 | -4 | 1 | -1 | -1 | 0 | -1 | -2 | 1 | -2 | 1 |
| 53 | $c_{\bar{b}}$ | L | -1 | -1 | 0 | 2 | -1 | 0 | -1 | -2 | 1 | 1 | -2 |
| 54 | $c_{\bar{b}}$ | R | 0 | -4 | 0 | 2 | -1 | 0 | -1 | -2 | 1 | 1 | -2 |
| 55 | s_r | L | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | 2 | -1 | -1 |
| 56 | s_r | R | 0 | -2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | 2 | -1 | -1 |
| 57 | s_g | L | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 2 | -1 |
| 58 | s_g | R | 0 | -2 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 2 | -1 |
| 59 | s_b | L | -1 | 1 | 0 | -2 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | -1 | 2 |
| 60 | s_b | R | 0 | -2 | 0 | -2 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | -1 | 2 |
| 61 | $s_{\bar{r}}$ | L | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 1 | -2 | 1 | 1 |
| 62 | $s_{\bar{r}}$ | R | 0 | 2 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 1 | -2 | 1 | 1 |
| 63 | $s_{\bar{g}}$ | L | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | -2 | 1 |
| 64 | $s_{\bar{g}}$ | R | 0 | 2 | 1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | -2 | 1 |
| 65 | $s_{\bar{b}}$ | L | 1 | -1 | 0 | 2 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 1 | -2 |
| 66 | $s_{\bar{b}}$ | R | 0 | 2 | 0 | 2 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 1 | -2 |
| 67 | t_r | L | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | -1 | -1 |
| 68 | t_r | R | 0 | 4 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | -1 | -1 |
| 69 | t_g | L | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | -1 | 2 | -1 |
| 70 | t_g | R | 0 | 4 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | -1 | 2 | -1 |
| 71 | t_b | L | 1 | 1 | 0 | -2 | 1 | 0 | 1 | 2 | -1 | -1 | 2 |
| 72 | t_b | R | 0 | 4 | 0 | -2 | 1 | 0 | 1 | 2 | -1 | -1 | 2 |
| 73 | $t_{\bar{r}}$ | L | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | -2 | -2 | 1 | 1 |
| 74 | $t_{\bar{r}}$ | R | 0 | -4 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | -2 | -2 | 1 | 1 |
| 75 | $t_{\bar{g}}$ | L | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 0 | -1 | -2 | 1 | -2 | 1 |
| 76 | $t_{\bar{g}}$ | R | 0 | -4 | 1 | -1 | -1 | 0 | -1 | -2 | 1 | -2 | 1 |
| 77 | $t_{\bar{b}}$ | L | -1 | -1 | 0 | 2 | -1 | 0 | -1 | -2 | 1 | 1 | -2 |
| 78 | $t_{\bar{b}}$ | R | 0 | -4 | 0 | 2 | -1 | 0 | -1 | -2 | 1 | 1 | -2 |
| 79 | b_r | L | -1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | 2 | -1 | -1 |
| 80 | b_r | R | 0 | -2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | 2 | -1 | -1 |
| 81 | b_g | L | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 2 | -1 |
| 82 | b_g | R | 0 | -2 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 2 | -1 |
| 83 | b_b | L | -1 | 1 | 0 | -2 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | -1 | 2 |
| 84 | b_b | R | 0 | -2 | 0 | -2 | 1 | 0 | 1 | -1 | -1 | -1 | 2 |
| 85 | $b_{\bar{r}}$ | L | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 1 | -2 | 1 | 1 |
| 86 | $b_{\bar{r}}$ | R | 0 | 2 | -1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 1 | -2 | 1 | 1 |
| 87 | $b_{\bar{g}}$ | L | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | -2 | 1 |
| 88 | $b_{\bar{g}}$ | R | 0 | 2 | 1 | -1 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | -2 | 1 |
| 89 | $b_{\bar{b}}$ | L | 1 | -1 | 0 | 2 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 1 | -2 |
| 90 | $b_{\bar{b}}$ | R | 0 | 2 | 0 | 2 | -1 | 0 | -1 | 1 | 1 | 1 | -2 |
| 91 | H | - | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| 92 | H | - | 1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 93 | H | - | -1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3 | 0 | 0 | 0 |
| 94 | H | - | -1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---------|----------------|---|----|---|----|----|---|---|---|----|----|----|----|
| 95 | W^+ | L | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| 96 | W^+ | R | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| 97 | W^- | L | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3 | 0 | 0 | 0 |
| 98 | W^- | R | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3 | 0 | 0 | 0 |
| (*) 99 | Z | L | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (*) 100 | Z | R | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 101 | $g_{r\bar{b}}$ | L | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | -3 |
| 102 | $g_{r\bar{b}}$ | R | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | -3 |
| 103 | $g_{r\bar{g}}$ | L | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | -3 | 0 |
| 104 | $g_{r\bar{g}}$ | R | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | -3 | 0 |
| 105 | $g_{b\bar{g}}$ | L | 0 | 0 | 1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3 | 3 |
| 106 | $g_{b\bar{g}}$ | R | 0 | 0 | 1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3 | 3 |
| 107 | $g_{b\bar{r}}$ | L | 0 | 0 | -1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3 | 0 | 3 |
| 108 | $g_{b\bar{r}}$ | R | 0 | 0 | -1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3 | 0 | 3 |
| 109 | $g_{g\bar{r}}$ | L | 0 | 0 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3 | 3 | 0 |
| 110 | $g_{g\bar{r}}$ | R | 0 | 0 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -3 | 3 | 0 |
| 111 | $g_{g\bar{b}}$ | L | 0 | 0 | -1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | -3 |
| 112 | $g_{g\bar{b}}$ | R | 0 | 0 | -1 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | -3 |
| (*) 113 | g^3 | L | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (*) 114 | g^3 | R | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (*) 115 | g^8 | L | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (*) 116 | g^8 | R | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (*) 117 | γ | L | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (*) 118 | γ | R | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (*) 119 | G | L | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (*) 120 | G | R | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Tabel 11: Tabel van elementaire deeltjes en hun heliceit en de ladingen zwakke isospin (T_3), zwakke hyperlading (Y_W), kleurladingen (g^3, g^8) en baryon- en leptongetal (B, L).

9.4 Dominante gewichten voor de ladingen Y_W en g^8

Het uitvoeren van programma I levert voor de lading $6Y_W$ de volgende mogelijke dominante gewichten op

| | | | | |
|---------------------------------------|--|--|---|---|
| $\lambda_3,$ | $\lambda_1 + \lambda_3,$ | $2\lambda_1 + \lambda_3,$ | $\lambda_1 + \lambda_4,$ | $2\lambda_1 + \lambda_4$ |
| $\lambda_2 + \lambda_4,$ | $\lambda_1 + \lambda_5,$ | $2\lambda_1 + \lambda_5,$ | $\lambda_2 + \lambda_5,$ | $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5$ |
| $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5,$ | $\lambda_3 + \lambda_5,$ | $2\lambda_1 + \lambda_6,$ | $\lambda_2 + \lambda_6,$ | $\lambda_2 + 2\lambda_6$ |
| $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_6,$ | $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_6,$ | $\lambda_3 + \lambda_6,$ | $\lambda_3 + 2\lambda_6,$ | $\lambda_3 + 3\lambda_6$ |
| $\lambda_4 + \lambda_6,$ | $\lambda_4 + 2\lambda_6,$ | $\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_6,$ | $\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_6,$ | $\lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_6$ |
| $\lambda_2 + 2\lambda_7,$ | $\lambda_2 + 3\lambda_7,$ | $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_7,$ | $\lambda_3 + \lambda_7,$ | $\lambda_3 + 2\lambda_7$ |
| $\lambda_3 + 3\lambda_7,$ | $\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_7,$ | $2\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_7,$ | $\lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_7,$ | $\lambda_1 + \lambda_3 + 3\lambda_7$ |
| $\lambda_1 + \lambda_3 + 4\lambda_7,$ | $\lambda_4 + \lambda_7,$ | $\lambda_4 + 2\lambda_7,$ | $\lambda_4 + 3\lambda_7,$ | $\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_7$ |
| $2\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_7,$ | $\lambda_1 + \lambda_4 + 2\lambda_7,$ | $\lambda_1 + \lambda_4 + 3\lambda_7,$ | $2\lambda_1 + \lambda_4 + 2\lambda_7,$ | $\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_7$ |
| $2\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_7,$ | $3\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_7,$ | $\lambda_1 + \lambda_5 + 2\lambda_7,$ | $\lambda_1 + \lambda_5 + 3\lambda_7,$ | $\lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_7$ |
| $\lambda_2 + \lambda_5 + 2\lambda_7,$ | $\lambda_2 + \lambda_5 + 3\lambda_7,$ | $\lambda_1 + \lambda_6 + 2\lambda_7,$ | $\lambda_2 + \lambda_6 + \lambda_7,$ | $\lambda_2 + 2\lambda_6 + \lambda_7$ |
| $\lambda_2 + \lambda_6 + 2\lambda_7,$ | $\lambda_2 + 2\lambda_6 + 2\lambda_7,$ | $\lambda_2 + 2\lambda_6 + 3\lambda_7,$ | $\lambda_2 + 2\lambda_6 + 4\lambda_7,$ | $\lambda_4 + \lambda_6 + \lambda_7$ |
| $\lambda_4 + \lambda_6 + 2\lambda_7,$ | $\lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7,$ | $\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7,$ | $\lambda_2 + \lambda_8,$ | $\lambda_4 + \lambda_8$ |
| $\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_8,$ | $\lambda_5 + \lambda_8,$ | $\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_8,$ | $2\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_8,$ | $2\lambda_6 + \lambda_8$ |
| $\lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_8,$ | $2\lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_8,$ | $\lambda_2 + \lambda_6 + \lambda_8,$ | $\lambda_1 + \lambda_7 + \lambda_8,$ | $\lambda_1 + 2\lambda_7 + \lambda_8$ |
| $\lambda_2 + \lambda_7 + \lambda_8,$ | $\lambda_4 + \lambda_7 + \lambda_8,$ | $\lambda_5 + \lambda_7 + \lambda_8,$ | $\lambda_5 + 2\lambda_7 + \lambda_8,$ | $\lambda_5 + 3\lambda_7 + \lambda_8$ |
| $\lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8,$ | $\lambda_6 + 2\lambda_7 + \lambda_8,$ | $\lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8,$ | $\lambda_1 + \lambda_6 + 2\lambda_7 + \lambda_8,$ | $\lambda_1 + \lambda_6 + 3\lambda_7 + \lambda_8.$ |

En voor $2g^8$ geeft het programma de werkende dominante gewichten:

| | | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| $\lambda_2,$ | $\lambda_4,$ | $\lambda_5,$ | $\lambda_1 + \lambda_5,$ | $\lambda_1 + \lambda_6$ |
| $\lambda_1 + \lambda_7,$ | $\lambda_1 + 2\lambda_7,$ | $\lambda_2 + \lambda_7,$ | $\lambda_2 + 2\lambda_7,$ | $\lambda_2 + 3\lambda_7$ |
| $\lambda_5 + \lambda_7,$ | $\lambda_5 + 2\lambda_7,$ | $\lambda_6 + \lambda_7,$ | $\lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_7,$ | $\lambda_1 + \lambda_6 + 2\lambda_7$ |
| $\lambda_8,$ | $\lambda_1 + \lambda_8,$ | $\lambda_6 + \lambda_8,$ | $\lambda_7 + \lambda_8,$ | $2\lambda_7 + \lambda_8$ |
| $\lambda_1 + \lambda_7 + \lambda_8,$ | $\lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8,$ | $\lambda_6 + 2\lambda_7 + \lambda_8,$ | $\lambda_6 + 3\lambda_7 + \lambda_8,$ | $\lambda_6 + 4\lambda_7 + \lambda_8.$ |

9.5 MATLAB®-code voor het aanmaken van dominante gewichten, programma I

P. Hoofdprogramma, Main.m

```

clear all; close all; clc;
%----- main script -----
%----- R. van Houte -----
%----- 18 mei 2017 -----

load('Basis.mat')           % Laad een basis van E8
load('E8.mat')              % Laad de vectoren uit E8
load('P.mat')               % Laad de elementaire deeltjes met eigenschappen
                             % YW, T3, g3, g8, B, L

Lamf = GenerateWeights(B); % Maak fundamentele gewichten aan van E8 (t.o.v.)

% Maak lijsten met dominante gewichten aan die voor de lading werken
L1 = ListDom(1,Lamf,R,P); save('L1.mat','L1');
L2 = ListDom(2,Lamf,R,P); save('L2.mat','L2');
L3 = ListDom(3,Lamf,R,P); save('L3.mat','L3');
L4 = ListDom(4,Lamf,R,P); save('L4.mat','L4');
L5 = ListDom(5,Lamf,R,P); save('L5.mat','L5');
L6 = ListDom(6,Lamf,R,P); save('L6.mat','L6');

% Maak een lijst met dominante gewichten aan waarvoor B-L behouden is
Lb1 = ListDom(7,Lamf,R,P); save('Lb1.mat','Lb1');

% De lijsten L1,...,L6 bevatten alle mogelijke dominante gewichten die voor
% de enkele lading werken, deze lijsten worden opgeslagen.

%----- ~~~~~ -----

```

1. GenerateWeights.m

```

function W = GenerateWeights(B)
% input:   B, basis van het wortelsysteem
% output:  W, fundamentele gewichten
[~,n]=size(B);
A=zeros(size(B));
for i=1:n
    A(:,i)=2/(norm(B(:,i))^2).*B(:,i); % Schaal alle wortels
end
W = A*inv(A'*A); % Bereken de gewichten
end

```

2. ListDom.m

```

function L = ListDom(prop,Lamf,R,P) %Routine 4
%input:   prop, het nummer van de te controleren lading
%         Lamf, de fundamentele gewichten ten opzichte van basis B
%         R, lijst van alle wortels van E8
%         P, lijst alle ladingen van alle deeltjes
%Output:  L, lijst met alle dominante gewichten die voldoen

```

```

[~,r]=size(Lamf);           % rang van E8
C= zeros(r,1);             % Eerste gewicht om te proberen, (0,0,...,0)
specmax = max(P(prop,:));  % Grootste waarde in het spectrum van de lading

for i=0:specmax            % Loop over de waarden van het spectrum
    C = BoundListDom(C,prop,i,Lamf,R,P);
end                        % Sla alle gewichten op die tussentijds werken

if ~isempty(C)
    L=Lamf*C;              % Geef de lijst werkende dominante gewichten terug
else
    L=[];                  % Geef een lege lijst terug
end
end

```

3. BoundListDom.m

```

function L = BoundListDom(C,prop,i,Lamf,R,P)    %Routine 5
%input:    C, lijst met gewichten die werken
%          prop, het nummer van de te controleren lading
%          i, parameter voor het begrensde spectrum
%          Lamf, verz. van fundamentele gewichten;
%          R, lijst van alle wortels van E8
%          P, lijst alle ladingen van alle deeltjes
%output:   L, lijst van gewichten zodat het begrensde spectrum werkt
L=[];
[~,n]=size(C);
for p=1:n    %Loop over alle vectoren in de lijst
    v=C(:,p); %Neem de vector uit de lijst en zoek naar uitbreidingen
    L = [L BoundListExt(prop,v,i,Lamf,R,P)]; % t.o.v. deze vector
end
end

```

4. BoundListExt.m

```

function L = BoundListExt(prop,v,i,Lamf,R,P)
%input:    prop, het nummer van de te controleren lading
%          v, vector met coëfficiënten die werken;
%          i, parameter voor het begrensde spectrum
%          Lamf, verz. van fundamentele gewichten;
%          R, lijst van alle wortels van E8
%          P, lijst alle ladingen van alle deeltjes
%output:   L, lijst van gewichten zodat het begrensde spectrum werkt
L=[];
permlist = Perm(v,i);      % creëer een lijst met verhoogde coëfficiënten
[~,n]=size(permlist);     % aantal nieuwe mogelijkheden
Bool = zeros(n,1);

for q = 1:n                % Controleer de mogelijkheden
    w = permlist(:,q);     % Kies coëfficiënten uit de lijst
    lam = Lamf*w;         % Maak het gewicht aan
    Bool(q) = CheckPart(P,R,lam,prop,i+1); % checkt of het gewicht werkt
end

L = permlist(:,Bool==true); % Plaatst de werkende gewichten in een lijst
end

```

5. Perm.m


```

function y = Perm(x,i)
%Input:      x, vector in  $Z^n$  met waarden  $\leq i$ 
%           i, waarde waarop verhoogd moet worden
%Output:    lijst van vectoren x waarbij de waarden i omhoog dan/wel gelijk
%           worden gelaten

index = find(x==i);           % Indices gelijk aan i
n = length(index);          % Aantal indices gelijk aan i

y = x*ones(1,2^n);
a = de2bi(0:(2^n-1))';      % Alle aanpassingen i of i+1
t = zeros(length(x),2^n); t(index,:)=a; % Op juiste plaats zetten

y = y+t;                    %Toevoegen van permutaties

end

```

6. CheckPart.m

```

function Bool = CheckPart(P,R,lam,prop,i)
%input: P, lijst met ladingen van alle deeltjes
%       R, wortelsysteem
%       lam, gewicht
%       prop, het nummer van de te controleren lading
%       i, te controleren spectrumwaarde
%output boolean: [werkt het nieuwe gewicht?]
List = BoundPart(P(prop,:),i); % Begin met alle deeltjes met een begrensd inproduct

[~,n]=size(R);
for r=1:n
    proj = BoundPart(lam'*R(:,r),i); % Bereken het inproduct
    [s,index] = Occur(proj,List); % De indices waarvoor er een deeltje
                                % voorkomt met de voorgestelde waarde
    if s==true % Als er zo'n deeltje
        List(:,index)=[]; % dan uit de lijst
    end
end
end
[~,l]=size(List);
Bool = (l==0); %Als de lijst leeg is dan is het werkt het gewicht
end

```

7. BoundPart.m

```

function P = BoundPart(P,i)
% input: P, lijst met ladingen
%       i, waarde waar toe te begrenzen
% output: L, ladingen uit P begrensd door i
for k=1:length(P)
    P(k)=max([-i;min([i;P(k)])]);
    % als P(k)>i, dan wordt P(k)=i
    % als -i<=P(k)<=i, dan P(k)=P(k)
    % als P(k)<-i, dan P(k)=-i
end
end

```

8. Occur.m

```

function [y,index] = Occur(v,P)

```

```
%input:      v, projectie (in Z) van een gewicht op een wortel
%            P, lijst met deeltjes
%output: geheel getal y: Komt een deeltje voor met deze eigenschappen voor?
[y,index]=ismember(round(v'),round(P),'rows');
                % y, het deeltje komt wel/niet voor
                % index, van de kolom voor het eerst voor
end
```

9.6 MATLAB®-code voor het zoeken naar gecombineerde gewichten, programma II

P. Hoofdprogramma, Main.m

```

clear all; close all; clc;
%----- main script -----
%----- R. van Houte -----
%----- 18 mei 2017 -----

load('E8.mat')           % Laad de vectoren uit E8
load('P.mat')           % Laad de elementaire deeltjes met eigenschappen
                        % YW, T3, g3, g8, B, L
load('Basis.mat')       % Laad een basis van E8

load('L1.mat'); load('L2.mat'); load('L3.mat');
load('L4.mat'); load('L5.mat'); load('L6.mat');

pOrd = [1 3 4 2 5 6]; props = [pOrd(1)];
Lcom=[Sel(L1,L2,L3,L4,L5,L6,pOrd(1))] % Mogelijkheden voor 1 gewicht

prop=pOrd(2);           % selecteer de tweede lading
L = Sel(L1,L2,L3,L4,L5,L6,prop); [~,k]=size(L);
Ln = [];               % Nieuwe lege lijst
props = [props prop]; % gecombineerde ladingen
s=size(Lcom); r=s(end); c=0;

for i=1:k
    tic
    L(:,i)
    W = WeylOrbit(L(:,i),B); % baan van gewicht L(:,i)
    for j=1:r
        redW = ReduceWeyl(W,Lcom(:,j),B); % pas checks toe zodat de
        [~,OrdredW]=size(redW); % lijst korter is
        for m = 1:OrdredW
            if CheckPart(P,R,[Lcom(:,j) redW(:,m)],props) == true
                c =c+1; % controleer de gewichten
                Ln(:, :,c) = [Lcom(:,j) redW(:,m)]; % en voeg toe
            end
        end
    end
end
toc
end
Lcom = Ln; % Mogelijkheden voor twee gewichten
save('Lisi2gewichten.mat','Lcom'); Lcom

for prop = pOrd(3:6)
    while ~isempty(Lcom) % Als de vraag nog niet negatief is, ga door
        L = Sel(L1,L2,L3,L4,L5,L6,prop); [~,k]=size(L); % nieuwe lading
        Ln = []; % Maak de tijdelijke lijst leeg
        props = [props prop]; % combineer de ladingen
        s=size(Lcom); r=s(end); c=0;

        for i=1:k
            tic
            L(:,i)
            W = WeylOrbit(L(:,i),B); % baan van gewicht L(:,i)
            for j=1:r

```



```

Ln = [round(2.*lam)]; % Nieuwe lijst
N=1;
while N~=0 % Zolang er nieuwe gewichten zijn
    [~,k]=size(Ln);
    for i=1:k
        Lnn = [Lnn ReflectBasis(Ln(:,i),nB)]; % Nieuw-nieuwe lijst
    end
    Lnn = round(unique(Lnn,'rows')); % Verwijder dubbele uit de
    % nieuwe gewichten

    [~,K1]=size(Ln);
    for i=1:K1
        [~,I]=ismember(Ln(:,i)',Lnn,'rows');
        if I~=0 % Verwijder gewichten die ook in
            Lnn(:,I)=[]; % de vorige laag Ln voorkwamen
        end
    end

    [~,K2]=size(Lm);
    for i=1:K2
        [~,I]=ismember(Lm(:,i)',Lnn,'rows');
        if I~=0 % Verwijder gewichten die ook in
            Lnn(:,I)=[]; % de voor-vorige laag Lm voorkwamen
        end
    end

    Lm=Ln;
    Ln=Lnn; % Schuif de lijsten door
    Lnn = [];
    [~,N]=size(Ln); % Aantal nieuwe gewichten in de baan
    L = [L Ln]; % Voeg toe aan de baan;
end
L=L./2; %Maak gewichten terug
end

```

3. ReflectBasis.m

```

function L = ReflectBasis(lam,B)
% input: lam, gewicht van E8 waarvan de baan bepaald wordt
%        B, basis van E8,
% output: L, Lijst van gespiegelde vectoren door de simpele wortels
L = zeros(8,8);
for i=1:8
    L(:,i)=Reflect(B(:,i),lam);
end
end

```

4. Reflect.m

```

function y = Reflect(a,b)
% input: a, is de vector waarover het hypervlak P_a gespiegeld wordt
%        b, is de vector onder de afbeelding sigma_a
% output: gespiegelde vector van b over het hypervlak P_a
if norm(a)==0 || length(a)~=length(b)
    error('Wrong input, check size and zero')
else
    y = b - 2*dot(b,a)/dot(a,a).*a;
end

```

5. ReduceWeyl.m

```
function RedW = ReduceWeyl(W,lams,B)
% input:      W, de baan Wlam
%            lams: het nieuwe gewicht
%            B: basis van E8
% output:    Baan van lam onder E8 met potentiële gewichten
RedW=[];      % lege lijst
[~,OrdW]=size(W); % lengte van de baan
[~,nC] = size(lams);
for j=1:OrdW
    stabW = GenerateRootsystem(lams,B); % Maak de stabilisator
    [~,OrdStabW]=size(stabW);

    k =1; % Is het gewicht in het fundamenteelgebied van W_lams?
    while (k<=OrdStabW && round(W(:,j) '*stabW(:,k))>=0)
        k=k+1;
    end

    l =1; % Zijn alle inproducten nul tussen de gewichten?
    while (l<=nC && round(W(:,j) '*lams(:,l))>=0)
        l=l+1;
    end

    if l==nC+1 && k==OrdStabW+1 % Als de checks ok zijn voeg dan toe
        RedW = [RedW W(:,j)]; % voor het checken van deeltjes
    end
end
end
```

6. GenerateRootsystem.m

```
function B = GenerateRootsystem(lams,B) %Routine 1
%Input wortelsysteembasis B en gewicht lam van B
%Verwijder het gewicht lam
[~,m]=size(lams);
for i=1:m
    lam=lams(:,m); % De stabilisator heeft alle inpro-
    [~,n]=size(B); % ducten nul met de gevonden gewichten
    index=(round(B'*lam)==zeros(n,1));
    B = B(:,find(index==1)); % neem deze wortels
end
end
```

7. CheckPart.m

```
function Bool = CheckPart(P,R,lams,props)
%Input:      P,R; eig. van deeltjes, resp. wortels van E8
%            checkedlam; reeds gevonden gewichten
%            lam; nieuw te controleren gewicht
%            checkedprop; reeds gecontroleerde ladingen
%            prop; nieuw te controleren lading
%Output:     Boolean; is het mogelijk het nieuwe gewicht te plaatsen in E8?
List = P(props,:);
[~,n]=size(R); % Aantal wortels in E8
for i=1:n % ga alle wortels na
    proj = lams'*R(:,i); % Vector die alle inproducten bevat
    [B,index] = Occur(proj,List); % aantal deeltjes waarbij de projectie voorkomt
```

```
    if B==true                % als er een deeltje is
        List(:,index)=[]; % verwijder deze dan uit de lijst
    end
    [~,N]=size(List);
end
[~,l]=size(List);
Bool = (l==0);
end
```

8. Occur.m

```
function [y,index] = Occur(v,P)
%input:    v, projectie (in Z) van een gewicht op een wortel
%         P, lijst met deeltjes
%output: geheel getal y: Komt een deeltje voor met deze eigenschappen voor?
[y,index]=ismember(round(v'),round(P'),'rows');
% y, het deeltje komt wel/niet voor
% index, van de kolom voor het eerst voor
end
```
