

Technische Universiteit Delft  
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica  
Delft Institute of Applied Mathematics

**De stabiliteit van de fiets**  
**Stability of the bicycle**

Verslag ten behoeve van het  
Delft Institute of Applied Mathematics  
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

**BACHELOR OF SCIENCE**  
**in**  
**TECHNISCHE WISKUNDE**

door

**TEUN WEVER**

**Delft, Nederland**  
**Juni 2018**

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Fysisch model van de fiets</b>	<b>4</b>
2.1	Hoeken, punten en afstanden . . . . .	7
2.2	Traagheidsmoment . . . . .	8
2.3	Constante en variabele parameters . . . . .	8
2.4	Linearisatie van $\delta, \alpha$ en $\gamma$ . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Bewegingsvergelijkingen</b>	<b>12</b>
3.1	Energie en momenten in het systeem . . . . .	12
3.1.1	Potentiële energie . . . . .	12
3.1.2	Kinetische energie . . . . .	13
3.1.3	Momenten . . . . .	14
3.2	Euler-Lagrange vergelijking . . . . .	14
3.3	Van Euler-Lagrange naar bewegingsvergelijkingen . . . . .	16
3.3.1	Partiële afgeleiden . . . . .	16
3.3.2	Slipvoorwaarden . . . . .	16
3.3.3	Uitschrijven twee bewegingsvergelijkingen . . . . .	17
3.4	Termen vereenvoudigen . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Stabiliteit</b>	<b>24</b>
4.1	Algemene stabiliteitsvoorwaarden . . . . .	24
4.2	Stabiliteit met de gegeven waarden . . . . .	25
4.3	Numerieke oplossingen met MATLAB . . . . .	25
4.4	Routh stabilty . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Verandering van de parameters</b>	<b>30</b>
5.1	Hoogte van $C_a$ variëren . . . . .	31
5.2	$\alpha$ variëren . . . . .	31
5.3	$b$ variëren . . . . .	33
5.4	$S_x$ variëren . . . . .	33
5.5	$S_x$ ten opzichte van $S_z$ . . . . .	34
5.6	Diameter van de wielen . . . . .	36
5.7	Penny-farthing . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Gyroscopische effecten</b>	<b>42</b>
<b>7</b>	<b>Conclusie en discussie</b>	<b>44</b>
<b>A</b>	<b>Matlab code met variabelen uit [1]</b>	<b>46</b>
<b>B</b>	<b>Variabelen uit het artikel van Herfkens [3]</b>	<b>48</b>
<b>C</b>	<b>MAPLE code</b>	<b>52</b>
<b>D</b>	$r = 0.1 m$	<b>56</b>
<b>E</b>	$r = 0.4 m$	<b>61</b>

<b>F</b>	$r = 0.7 \text{ m}$	<b>66</b>
<b>G</b>	De hoogte van $C_a$ variëren	<b>70</b>
<b>H</b>	De hoek $\alpha$ variëren	<b>73</b>
<b>I</b>	$b$ variëren	<b>77</b>
<b>J</b>	$S_x$ variëren	<b>80</b>
<b>K</b>	$S_x$ ten opzichte van $S_z$ variëren	<b>83</b>
<b>L</b>	Gyroscopsich Effect gelijk aan nul	<b>86</b>
<b>M</b>	Hoeken, punten en afstanden	<b>89</b>
<b>N</b>	Kinetische energie en gyroscopische momenten	<b>90</b>

# 1 Inleiding

In dit onderzoek aan de TU Delft wordt de stabiliteit van een fiets onderzocht. Delft is natuurlijk een grote studentenstad waarin veel wordt gefietst. Zo komt de vraag op: Bij welke snelheden blijft de fiets stabiel als we naar kleine verstoringen kijken in het evenwicht? De berijder houdt normaal de fiets in evenwicht. In dit onderzoek worden de berijder en het frame als star verbonden gezien en kan de berijder niet zelf krachten uitoefenen op de fiets. Dit betekent dus dat de berijder in dit onderzoek alleen massa toevoegt aan het systeem en de locatie van het zwaartepunt bepaalt. We zijn benieuwd bij welke snelheden de fiets en de berijder niet omvallen en stabiel rechttuit zal rijden. Wanneer deze vraag beantwoord is zal gekeken worden naar welke parameters het grootste belang hiervoor hebben. Door middel van variaties hierin kan onderzocht worden welke parameters een grote rol spelen en welke een kleinere rol spelen, om zo te kunnen onderzoeken of de fiets misschien bij een groter domein van snelheden stabiel blijft. Dit gaat aan de hand van een aantal stappen.

Van de fiets zal eerst een model worden opgesteld met alle relevante hoeken, punten en afstanden. Er zijn veel parameters in dit model dus het is belangrijk een goed overzicht te krijgen welke parameters een rol spelen bij het rijden van de fiets.

Vervolgens zullen aan de hand van de energie van het systeem, de fiets met berijder in dit geval, verschillende vergelijkingen worden opgesteld, uitgedrukt in de variabelen die zijn gebruikt voor het model van de fiets. De methode die gebruikt wordt is de methode van Lagrange. Deze methode gebruikt de totale energie van een systeem, waardoor specifieke externe krachten niet bepaald hoeven te worden. Door middel van deze vergelijkingen zullen twee lineaire bewegingsvergelijkingen worden opgesteld uitgedrukt in twee variabelen, de kanteling van de fiets  $\epsilon$ , en de stuurhoek  $\beta$ . De linearisatie is mogelijk doordat er naar kleine verstoringen wordt gekeken in de hoeken. Dat betekent dat enkele hoeken kunnen worden gelineariseerd tot de 1<sup>e</sup> of 2<sup>e</sup> orde. Dit betekent dat termen met een hogere orde wegvallen. Ook zijn de vergelijkingen die ontstaan met de methode van Lagrange lineair in de juiste variabelen. De eerste variabele is zoals gezegd de hoek van de stuuras ten opzichte van het frame,  $\beta$ . De tweede variabele is de hoek die de fiets zelf maakt ten opzichte van de verticaal,  $\epsilon$ . Dit houdt dus in hoe het frame gekanteld is ten opzichte van de verticale stand. Met deze twee hoeken als functie van de tijd  $t$  zal het evenwicht onderzocht worden.

Als de bewegingsvergelijkingen zijn bepaald kunnen deze opgelost worden en dit resulteert in een vierdegraadsvergelijking. De coëfficiënten van deze vergelijkingen zullen afhangen van de snelheid  $V$ . Voor elke snelheid zijn de oplossingen van het vierdegraads polynoom verschillend. Zo kan dus bepaald worden voor welke snelheden deze vergelijking oplossingen heeft waarbij de fiets in zijn stabiele toestand verkeert.

Er is al veel onderzoek [3] gedaan naar deze vraag. Dit onderzoek zal als basis gebruikt worden om vervolgens dieper in te gaan op de parameters om zo te bepalen welke een grote rol spelen, om zo het stabiliteitsgebied al dan niet te vergroten.

In het hoofdstuk 2 wordt eerst het model van de fiets in kaart gebracht met alle relevante hoeken, punten en afstanden. Vervolgens wordt in hoofdstuk 3 de Euler-Lagrange methode toegepast op het systeem. De bewegingsvergelijkingen die hieruit ontstaan worden opgelost in hoofdstuk 4. In hoofdstuk 5 zullen we die parameters van de fiets gaan veranderen, zo kunnen we tot conclusies komen over de relevantie van de parameters voor de stabiliteit van de fiets.

## 2 Fysisch model van de fiets

Een aantal aannames voor ons model zijn van belang om te starten met het onderzoek. De fiets wordt opgedeeld twee componenten. Er wordt aangenomen dat de berijder en het frame star met elkaar verbonden zijn. De berijder zal dus niet zelf ten opzichte van het frame bewegen. Deze combinatie samen met het achterwiel vormt de eerste component. De tweede component is de stuuras en het voorwiel. Deze is vrij om te bewegen door externe krachten, denk hierbij aan kuilen of kleine obstakels op de weg. De berijder heeft in dit onderzoek dus geen invloed op het gedrag van het voorwiel en de stuuras.

De gyroscopische effecten, die het wiel in evenwicht houden als het gaat roteren, zullen als uitwendige krachten worden beschouwd. Het gevolg hiervan is dat de wielen als star verbonden aan het frame beschouwd kunnen worden.

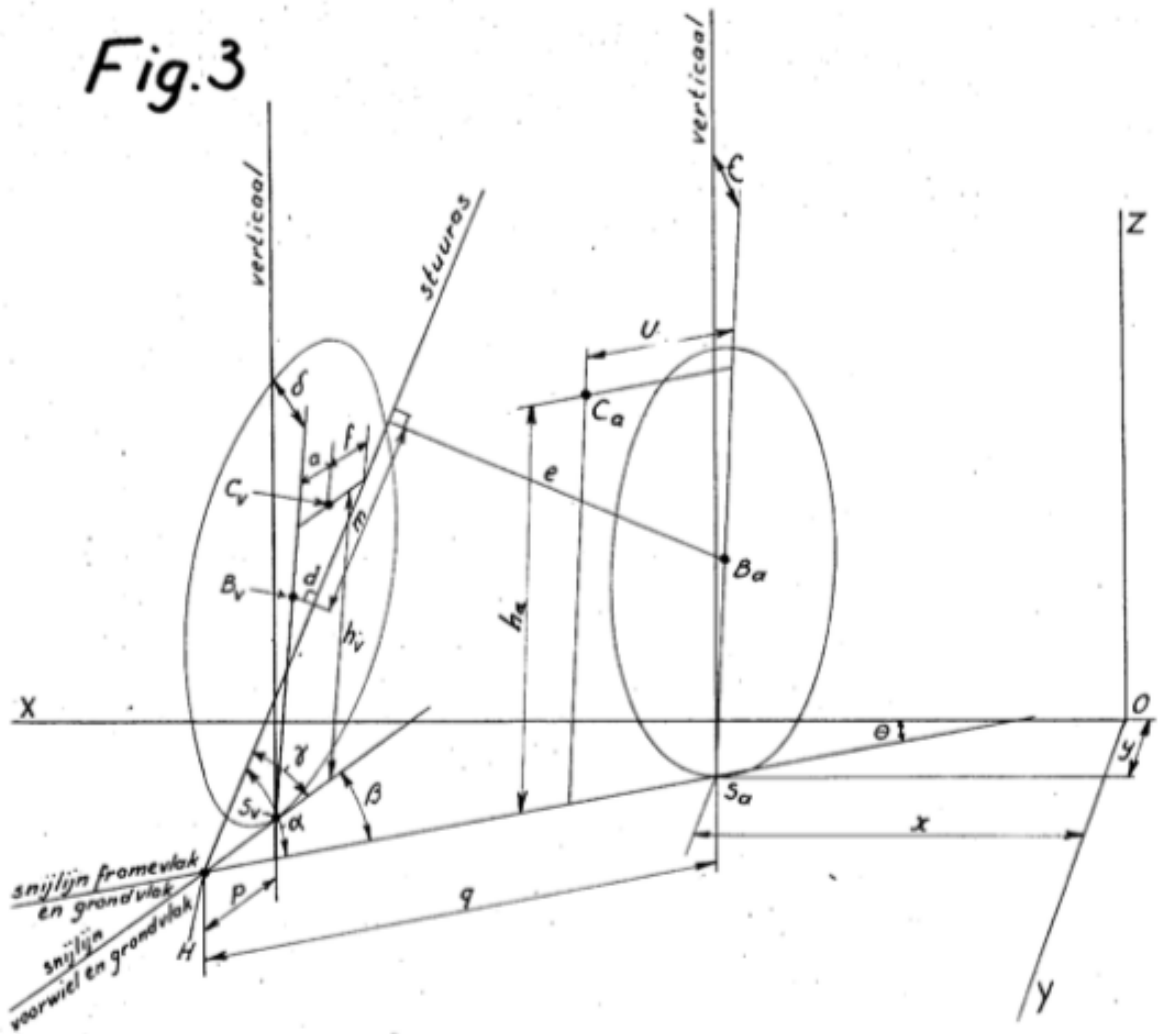
Nu worden de parameters van de fiets vastgesteld. Voordat dit mogelijk is moet er een assenstelsel worden gekozen. In dit onderzoek wordt het assenstelsel als volgt gekozen.

- De  $x$ -as ligt in het grondvlak. Een positieve  $x$ -richting betekent dat de fiets naar voren rijdt.
- De  $y$ -as staat natuurlijk haaks op de  $x$ -as en ligt ook in het grondvlak. Een positieve  $y$ -richting betekent dat de fiets naar links zal bewegen.
- De  $z$ -as wijst recht omhoog. De snijpunten van de wielen met het grondvlak liggen dus op  $z = 0$ . Het stuur, zadel en andere onderdelen van de fiets hebben een waarde  $z > 0$ .

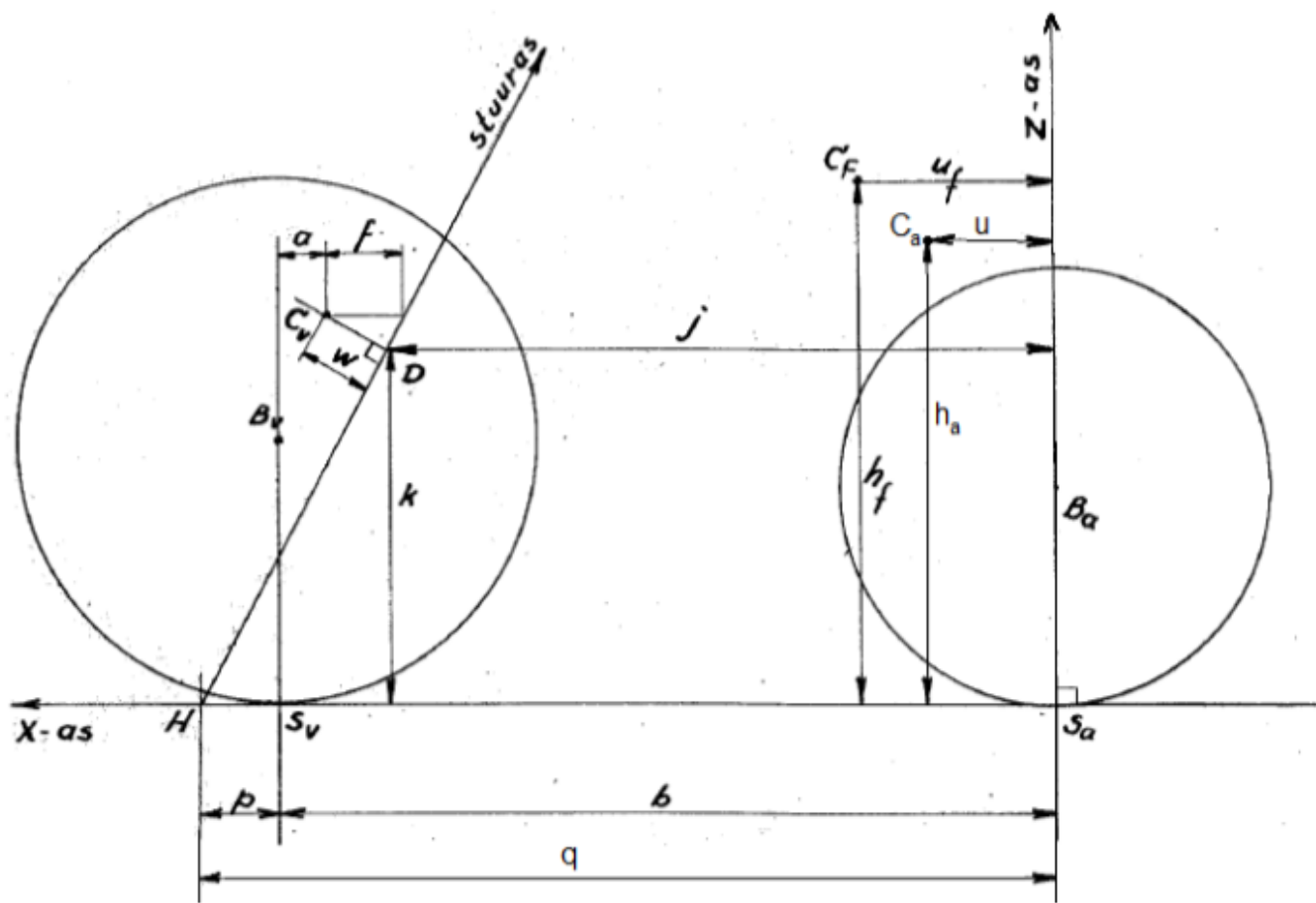
Verder wordt aangenomen dat in de  $x$ -richting slechts erg kleine krachten werken. Dit zijn krachten als de reactiekracht met het grondvlak en de versnelling van de fiets. Deze termen zijn van de  $2^e$  orde [3]. Evenals de rotatiesnelheden om de  $y$ -as.

Figuur 1 bevat een schematische schets van de fiets in 3D uit [3]. Figuur 2 bevat een schematische schets in 2D uit [3]. Nadat alle parameters zijn genoemd zullen er traagheidsmomenten worden toegevoegd. Hierna worden enkele hoeken gelineariseerd.

Fig.3



Figuur 1: Drie-dimensionale schets van de fiets met alle relevante parameters. [3]



Figuur 2: Twee-dimensionale schets van de fiets met alle relevante parameters. [3]

## 2.1 Hoeken, punten en afstanden

Nu zullen eerst alle punten, afstanden en hoeken fysisch worden uitgelegd. Zo wordt een beter beeld verkregen van hoe het model van de fiets in elkaar zit. In appendix M zijn deze parameters in een tabel gezet. Herinner dat de twee hoeken  $\epsilon$ , de kanteling van de fiets, en  $\beta$ , de stuurhoek, uiteindelijk de twee variabelen zijn waar we het evenwicht van de fiets mee bepalen.

### Punten

$S_a$ : het raakpunt van het achterwiel met het grondvlak.

$S_v$ : het raakpunt van het voorwiel met het grondvlak.

$B_a$ : het middelpnt van het achterwiel.

$B_v$ : het middelpunt van het voorwiel.

$H$ : dit is het snijpunt van twee lijnen. De eerste lijn is de snijlijn van het framevlak en het grondvlak. De tweede is de snijlijn tussen de stuuras en het grondvlak.

$C_a$ : het zwaartepunt van het achterste gedeelte van de fiets. Dit is dus het zwaartepunt van de berijder met het frame.

$C_v$ : het zwaartepunt van de stuuras en het voorwiel.

$C_f$ : het Zwaartepunt van de gehele fiets met berijder.

### Afstanden

$x$ : de  $x$ -coördinaat van het raakpunt van het achterwiel op het grondvlak  $S_a$ .

$y$ : de  $y$ -coördinaat van het raakpunt van het achterwiel op het grondvlak  $S_a$ .

$h_a$ : de  $z$ -coördinaat van het zwaartepunt  $C_a$ .

$h_v$ : de  $z$ -coördinaat van het zwaartepunt  $C_v$ .

$h_f$ : de  $z$ -coördinaat van het zwaartepunt  $C_f$ .

$b$ : de afstand tussen de raakpunten van de wielen  $S_a$  en  $S_v$ .

$u$ : de horizontale (liggend in het  $(x, y)$ -vlak) afstand tussen het zwaartepunt  $C_a$  en de loodlijn door het achterwiel.

$p$ : de afstand tussen  $H$  en  $S_v$ .

$q$ : de afstand tussen  $H$  en  $S_a$ . Als de fiets rechtdoor gaat en er dus geen draaiing van het stuur is geldt dan  $b = q - p$ .

$f$ : de horizontale (liggend in het  $(x, y)$ -vlak) afstand tussen  $C_v$  en de stuuras.

$a$ : de afstand tussen de verticaal door het voorwiel en  $C_v$ .

$r_a$ : de straal van het achterwiel.

$r_v$ : de straal van het voorwiel.

### Hoeken

$\epsilon$ : dit is de kanteling van de berijder met het frame. Als de fiets in verticale stand staat, rechtop staat dus, geldt  $\epsilon = 0$ .

$\beta$ : dit is de hoek die de stuuras maakt ten opzichte van het frame. Als de fiets rechtdoor rijdt geldt dus  $\beta = 0$ .

$\alpha$ : de hoek tussen de stuuras en de snijlijn van het achterwiel met het grondvlak.

$\gamma$ : de hoek tussen de stuuras en de snijlijn van het voorwielvlak met het grondvlak.

$\delta$ : de hoek tussen het voorwielvlak en de verticaal.

$\theta$ : de hoek tussen de snijlijn van het framevlak en het grondvlak en de  $x$ -as.



$\psi$ : de verdraaiing om van het stuur om zijn eigen as.

Nu zijn alle parameters benoemd die nodig zijn voor het opstellen van de uiteindelijke bewegingsvergelijkingen. Het doel is om uiteindelijk uit te komen op twee vergelijkingen die alleen bestaan uit  $\beta, \epsilon$  en hun (dubbele) afgeleiden. Om daar te komen wordt eerst het traagheidsmoment toegevoegd aan het model.

## 2.2 Traagheidsmoment

In elk systeem dat roteert om een bepaalde as is er een traagheidsmoment aanwezig. Dit geeft de mate aan waarin het systeem zich verzet tegen de draaiing om die as. Zojuist zijn twee punten gedefinieerd in ons model;  $C_a$  en  $C_v$ .

We kiezen nu twee assenkruizen  $(X, Y, Z)$  met de punten  $C_a$  en  $C_v$  in de oorsprong. De reden hiertoe is dat deze assenkruizen mee zullen bewegen als de fiets beweegt, waardoor de traagheidsmomenten ten opzichte van deze punten constant zijn. De oriëntatie van deze assenkruizen is zo gedefinieerd dat op het moment dat de fiets verticaal staat met stuurhoek  $\beta = 0$ , de  $X$ -as recht naar voren wijst, de  $Y$ -as naar links en de  $Z$ -as recht omhoog. Deze richtingen zijn dus hetzelfde als in ons originele assenstelsel. Met betrekking tot deze coördinatenstelsels kunnen de volgende traagheidsmomenten opgesteld worden, afkomstig uit [3].

Voor de berijder, het frame en het achterwiel ten opzichte van  $C_a$  geldt:

$I_{xa}$ : traagheidsmoment in de  $X$ -richting  
 $I_{za}$ : traagheidsmoment in de  $Z$ -richting  
 $I_{xza}$ : traagheidsproduct

Voor het voorwiel, het stuur en de voorvork ten opzichte van  $C_v$  geldt:

$I_{xv}$  : traagheidsmoment in de  $X$ -richting  
 $I_{zv}$  : traagheidsmoment in de  $Z$ -richting  
 $I_{xzv}$  : traagheidsproduct

Omdat de assenkruizen meebewegen met de desbetreffende gedeelten van de fiets zullen deze traagheidsmomenten constant zijn als de fiets beweegt.

## 2.3 Constante en variabele parameters

$C_a$  en  $C_v$  hangen af van de volgende parameters die te zien zijn in figuur 2.

$h_a$  : de hoogte van het punt  $C_a$  ten opzichte van het grondvlak.  
 $u$  : de afstand tussen de verticaal van  $S_a$  en  $C_a$ .  
 $h_v$  : de hoogte van het punt  $C_v$  ten opzichte van het grondvlak.  
 $a$  : de afstand tussen de verticaal van  $S_v$  en  $C_v$ .

Nu wordt gekeken naar de fiets als deze nauwelijks stuuruitslag heeft,  $\beta \approx 0$ . Als dit het geval is betekent dat dat de vier parameters die de twee zwaartepunten definiëren,  $h_a, u, h_v$  en  $a$ , constant zijn als de fiets beweegt. De parameters  $f$  en  $h_f$  zijn nu ook constant. De volgende parameters zullen wel variabel zijn als de fiets beweegt:

Hoeken:  $\theta, \beta, \psi, \alpha, \gamma, \epsilon, \delta$

Afstanden:  $p, q, b, x, y$

We zullen alleen heel kleine veranderingen in de rechtdoorgaande beweging bekijken hier. Dat betekent dat de veranderingen in  $y, \theta, \beta, \psi, \epsilon, \delta$  heel klein worden genomen. Dit resulteert in het feit dat deze parameters van de eerste orde blijven, dit is afkomstig uit [3]. De parameters  $\alpha, \gamma, p, q, b$  zullen van tweede orde zijn. Ook dit is afkomstig uit [3].

Zoals gezegd worden de bewegingsvergelijkingen uitgedrukt in  $\epsilon, \beta$  en hun afgeleiden. Er moeten nog een aantal hoeken gelineariseerd worden.

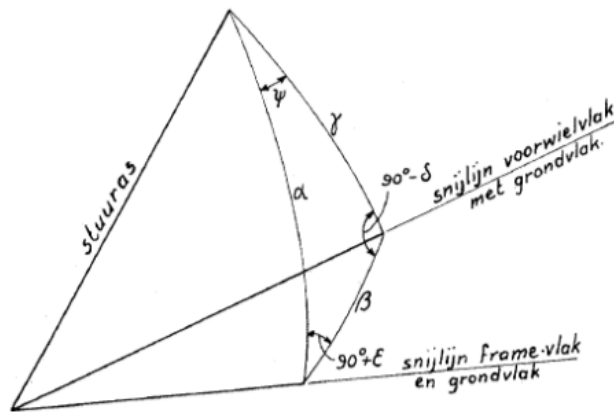
## 2.4 Linearisatie van $\delta, \alpha$ en $\gamma$

Zoals gezegd bekijken we kleine veranderingen in de rechtdoorgaande beweging. We willen twee lineaire bewegingsvergelijkingen krijgen voor  $\epsilon$  en  $\beta$ . Dat betekent dat we linearisatie moeten toepassen.

Met behulp van goniometrische formules van boldriehoeksvorming kunnen de volgende vergelijkingen opgesteld worden uit figuur 3:

$$\tan \delta = \cot \alpha \frac{\sin \beta}{\cos \epsilon} + \cos \beta \tan \epsilon \quad (1)$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \psi} = \frac{\sin \alpha}{\cos \delta} = \frac{\sin \gamma}{\cos \epsilon} \quad (2)$$



Figuur 3: Boldriehoeken afkomstig uit [3].

Zij nu  $\alpha_0$  de waarde van  $\gamma$  en  $\alpha$  voor het geval  $\beta = \psi = 0$ . Voor kleine veranderingen in  $\alpha$  en  $\gamma$ , definieer

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha \quad (3)$$

$$\gamma = \alpha_0 + \Delta\gamma \quad (4)$$

Nu worden deze  $\alpha$  en  $\gamma$  gesubstitueerd in (2). Dit geeft na kruislingse vermenigvuldiging

$$\sin(\alpha_0 + \Delta\alpha) \cos \epsilon = \sin(\alpha_0 + \Delta\gamma) \cos \delta \quad (5)$$

Nu worden de somformules van de sinus toegepast.

$$(\sin(\alpha_0) \cos(\Delta\alpha) + \sin(\Delta\alpha) \cos(\alpha_0)) \cos(\epsilon) = (\sin(\alpha_0) \cos(\Delta\gamma) + \sin(\Delta\gamma) \cos(\alpha_0)) \cos(\delta) \quad (6)$$

Nu wordt de reeksontwikkelingen van de sinus en cosinus gebruikt. Deze zijn:

$$\sin(\Delta\alpha) = \Delta\alpha - \frac{(\Delta\alpha)^3}{3} + \frac{(\Delta\alpha)^5}{5} - \dots \quad (7)$$

$$\cos(\Delta\alpha) = 1 - \frac{(\Delta\alpha)^2}{2} + \frac{(\Delta\alpha)^4}{4} - \dots \quad (8)$$

Termen met een orde hoger dan 2 worden verwaarloosd. (6) wordt dan:

$$\begin{aligned} & (\sin(\alpha_0)(1 - \frac{(\Delta\alpha)^2}{2}) + \Delta\alpha \cos(\alpha_0))(1 - \frac{\epsilon^2}{2}) = \\ & (\sin(\alpha_0)(1 - \frac{(\Delta\gamma)^2}{2}) + \Delta\gamma \cos(\alpha_0))(1 - \frac{\delta^2}{2}) \end{aligned} \quad (9)$$

Nu wordt alles gedeeld door  $\cos(\alpha_0)$ :

$$(\tan(\alpha_0)(1 - \frac{(\Delta\alpha)^2}{2}) + \Delta\alpha)(1 - \frac{\epsilon^2}{2}) = (\tan(\alpha_0)(1 - \frac{(\Delta\gamma)^2}{2}) + \Delta\gamma)(1 - \frac{\delta^2}{2}) \quad (10)$$

Dit wordt uitgeschreven en termen met een orde hoger dan 2 worden weer verwaarloosd.

$$(\tan(\alpha_0) - \tan(\alpha_0) \frac{(\Delta\alpha)^2}{2} + \Delta\alpha)(1 - \frac{\epsilon^2}{2}) = (\tan(\alpha_0) - \tan(\alpha_0) \frac{(\Delta\gamma)^2}{2} + \Delta\gamma)(1 - \frac{\delta^2}{2}) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \tan(\alpha_0) - \tan(\alpha_0) \frac{\epsilon^2}{2} - \tan(\alpha_0) \frac{(\Delta\alpha)^2}{2} + \Delta\alpha - \Delta\alpha \frac{\epsilon^2}{2} = \\ & \tan(\alpha_0) - \tan(\alpha_0) \frac{\delta^2}{2} - \tan(\alpha_0) \frac{(\Delta\gamma)^2}{2} + \Delta\gamma - \Delta\gamma \frac{\epsilon^2}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Delta\alpha - \tan(\alpha_0) \frac{\epsilon^2}{2} = \Delta\gamma - \tan(\alpha_0) \frac{\delta^2}{2} \quad (13)$$

$$\Delta\alpha - \Delta\gamma = \frac{1}{2} \tan(\alpha_0) (\frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\delta^2}{2}) \quad (14)$$

Laat  $H_0$  het snijpunt zijn van de stuuras en het grondvlak. We bekijken nog steeds de situatie als  $\beta \approx 0$ . Als de fiets nu lichtelijk wordt gekanteld,  $\epsilon \neq 0$ , dan zal dit punt boven het grondvlak komen te liggen. Deze afstand kan worden uitgedrukt in  $\Delta\gamma, p, \Delta\alpha$  en  $\Delta\gamma$ . Zo wordt er in [3] gevonden dat

$$p\Delta\gamma = q\Delta\alpha \quad (15)$$

Nu kunnen (13), (14) en (15) gecombineerd worden en dat geeft:

$$\Delta\alpha = -\frac{p}{q-p}\frac{1}{2}\tan\alpha_0(\epsilon^2 - \delta^2) \quad (16)$$

$$\Delta\gamma = -\frac{q}{q-p}\frac{1}{2}\tan\alpha_0(\epsilon^2 - \delta^2) \quad (17)$$

Nu kijken we weer naar (1). We gebruiken nu de reeksontwikkelingen van de sinus, cosinus en de tangens. We hebben gesteld dat dat  $\epsilon, \beta$  en  $\delta$  van orde 1 zijn. Termen met een orde hoger dan 1 worden dus verwaarloosd. Dat geeft

$$\tan(\delta) = \delta$$

$$\sin(\beta) = \beta$$

$$\cos(\epsilon) = 1$$

$$\cos(\beta) = 1$$

$$\tan(\epsilon) = \epsilon$$

(1) wordt nu dus

$$\delta = \beta \cot\alpha + \epsilon \quad (18)$$

Deze vergelijking voor  $\delta$  is relevant voor de potentiële en kinetische energie in hoofdstuk 3. Nu wordt (18) gesubstitueerd in (16) en (17). Verder bekijken we de situatie  $\beta \approx 0$ . Dat betekent dat  $q \approx p - b$ , zoals vermeld in H2.1 Uiteindelijk resulteert dit in

$$\Delta\alpha = \frac{p}{b}(\epsilon\beta + \frac{1}{2}\beta^2 \cot\alpha_0) \quad (19)$$

$$\Delta\gamma = \frac{b+p}{b}(\epsilon\beta + \frac{1}{2}\beta^2 \cot\alpha_0) \quad (20)$$

Herinner dat in bovenstaande vergelijkingen  $\beta \approx 0$ . De fout door deze aanname is van 2<sup>e</sup> orde [3]. Nu zullen de bewegingsvergelijkingen worden opgesteld met behulp van de Lagrangiaan. Voor onze parameters geldt nu:

Constanten:  $r_a, r_v, p, b, \cot\alpha, I_{xa}, I_{za}, I_{xza}, I_{xv}, I_{zv}, I_{xzv}, m_a, m_v$

Variabelen:  $x, y, \theta, \epsilon, \beta$

### 3 Bewegingsvergelijkingen

#### 3.1 Energie en momenten in het systeem

Het model van de fiets is nu goed weergegeven met de juiste parameters. Nu moeten de bewegingsvergelijkingen opgesteld worden. Hiervoor wordt de methode van de Lagrange gebruikt. Deze methode gebruikt de totale energie van een systeem, in ons geval de fiets met berijder. De Lagrangiaan gedefinieerd als het verschil tussen de potentiële energie en de kinetische energie:

$$L = E_{pot} - E_{kin} \quad (21)$$

Daarna wordt de Euler-Lagrange vergelijking opgelost. Deze luidt:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, i \in \mathbb{N} \quad (22)$$

Hierin zijn  $Q_i$  de krachtmomenten. Nu zullen eerst de energieën uitgelicht worden die gebruikt worden. Dit zijn de potentiële energie en de kinetische energie. Daarna worden de momenten bepaald voor de rechterkant van het '='-teken.

##### 3.1.1 Potentiële energie

De potentiële energie wordt ook wel zwaarte-energie genoemd. Dit is de energie die verbonden is aan de zwaartekracht. De algemene formule hiervoor is

$$E_{pot} = mgh \quad (23)$$

Hierin is  $m$  de massa van het systeem,  $g$  de valversnelling en  $h$  de hoogte waarin de massa zich bevindt. We hebben twee zwaartepunten gedefinieerd,  $C_a$  voor het achterste gedeelte van de fiets,  $C_v$  voor het voorste gedeelte van de fiets. Voor beide zwaartepunten worden de potentiële energieën bepaald. Uit [3] kan verkregen worden dat  $C_a$  daalt met:

$$u\Delta\alpha + \frac{1}{2}h_a\epsilon^2 = \frac{pu}{b}(\epsilon\beta + \frac{1}{2}\beta^2 \cot \alpha) + \frac{1}{2}h_a\epsilon^2$$

Uit [3] is ook bepaald dat  $C_v$  daalt met:

$$-\alpha\Delta\gamma + \frac{1}{2}h_v\delta^2 = -\frac{a(b+p)}{b}(\epsilon\beta + \frac{1}{2}\beta^2 \cot \alpha) + \frac{1}{2}h_v(\epsilon + \beta \cot \alpha)^2$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} E_{pot} = & -m_a g \left( \frac{pu}{b}(\epsilon\beta + \frac{1}{2}\beta^2 \cot \alpha) + \frac{1}{2}h_a\epsilon^2 \right) \\ & - m_v g \left( -\frac{a(b+p)}{b}(\epsilon\beta + \frac{1}{2}\beta^2 \cot \alpha) + \frac{1}{2}h_v(\epsilon + \beta \cot \alpha)^2 \right) \end{aligned} \quad (24)$$

Hierin zien we dat in de uitdrukkingen voor  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\gamma$  en  $\delta$  de linearisatie wordt gebruikt uit H2.4. De variabelen in de potentiële energie zijn  $\epsilon$  en  $\beta$ .

### 3.1.2 Kinetische energie

Voor het bepalen van de kinetische energie wordt nu eerst het arbeidsvermogen bepaald in de variabelen die in hoofdstuk 2 zijn genoemd:  $x, y, \theta, \epsilon, \beta$ . We werken nu in de  $z$ -richting zoals beschreven hierboven bij de potentiële energie. De totale kinetische energie van de fiets is de som van enkele componenten.

$$E_{kin} = T_{za} + T_{oa} + T_{zv} + T_{ov} \quad (25)$$

Hierin is:

- $T_{za}$  : de energie van de beweging van het achterste gedeelte van de fiets ten gevolge van de verplaatsing van het zwaartepunt
- $T_{oa}$  : de energie van de beweging van het achterse gedeelte van de fiets ten gevolge van de rotaties om het zwaartepunt van dit gedeelte
- $T_{zv}$  : de energie van de beweging van het voorste gedeelte van de fiets ten gevolge van de verplaatsing van het zwaartepunt
- $T_{ov}$  : de energie van de beweging van het voorste gedeelte van de fiets ten gevolge van de rotaties om het zwaartepunt van dit gedeelte

Herinner dat we twee zwaartepunten hadden gedefinieerd voor de fiets;  $C_a$  en  $C_v$ . Voor deze punten worden de kinetische energie bepaald. In het algemeen geldt dat

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mV^2 \quad (26)$$

Hierin is  $m$  de massa en  $v$  de snelheid van de massa. Uit [3] zijn de volgende componenten overgenomen voor de kinetische energie.  $m_a$  en  $m_v$  zijn respectievelijk de massa's van het voorste gedeelte en het achterste gedeelte van de fiets. Appendix N bevat figuren die deze energieën toelichten.

$$T_{za} = \frac{1}{2}m_a(\dot{y} + h_a\dot{\epsilon} + u\dot{\theta})^2 \quad (27)$$

$$T_{zv} = \frac{1}{2}m_v(\dot{y} + f\dot{\beta} + (b-a)\dot{\theta} + h_v\dot{\epsilon})^2 \quad (28)$$

$$T_{oa} = \frac{1}{2}I_{xa}\dot{\epsilon}^2 + \frac{1}{2}I_{za}\dot{\theta}^2 + I_{xza}\dot{\epsilon}\dot{\theta} \quad (29)$$

$$T_{ov} = \frac{1}{2}I_{xv}(\dot{\beta} \cot \alpha + \dot{\epsilon})^2 + \frac{1}{2}I_{zv}(\dot{\beta} + \dot{\theta})^2 + I_{xzv}(\dot{\beta} \cot \alpha + \dot{\epsilon})(\dot{\beta} + \dot{\theta}) \quad (30)$$

Hierin zijn de variabelen  $y, \beta, \epsilon$  en  $\theta$ . We zien weer dat  $\delta$  niet in deze energieën voorkomt, deze is uitgedrukt in  $\epsilon$  en  $\beta$  zoals in het vorige H2.4 is bepaald. De variabelen  $y$  en  $\theta$  moeten nog geëlimineerd worden. Dit gebeurt in H3.3.2. Deze vier zet ik nog even op een rijtje voor het overzicht:

- $y$ : de horizontale afstand van het raakpunt van het achterwiel tot de  $x$ -as.
- $\beta$ : de stuurhoek ten opzichte van het frame.
- $\epsilon$ : de hoek die de fiets maakt ten opzichte van de verticale stand. Dit is dus de kanteling van het frame.
- $\theta$ : de hoek tussen de snijlijn van het framevlak en het grondvlak en de  $x$ -as.

### 3.1.3 Momenten

Er zijn nu nog zes componenten die meegenomen moeten worden voor de Lagrangiaan. Dit zijn de volgende:

- Er wordt arbeid verricht door de reactiekracht  $P_a$  in het grondvlak die het zijdelings slippen van het achterwiel tegengaat.
- Er wordt arbeid verricht door de reactiekracht  $P_v$  in het grondvlak die het zijdelings slippen van het voorwiel tegengaat.
- De gyroscopische momenten in de  $x$ -richting en  $z$ -richting. We kunnen aannemen dat de hoeksnelheden van de wielen  $\omega_a$  en  $\omega_v$  heel groot zijn ten opzichte van  $\dot{\epsilon}$ ,  $\dot{\beta}$ ,  $\dot{\theta}$  en  $\dot{\delta}$ .

Uit [3] vinden we dat

$$M_{xa} = I_{\omega_a} \omega_a \dot{\theta} \quad (31)$$

$$M_{za} = I_{\omega_a} \omega_a \dot{\epsilon} \quad (32)$$

$$M_{xv} = I_{\omega_v} \omega_v (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \quad (33)$$

$$M_{zv} = I_{\omega_v} \omega_v (\dot{\beta} \cot \alpha + \dot{\epsilon}) \quad (34)$$

In (34) is weer gebruik gemaakt van de linearisatie  $\delta = \beta \cot \alpha + \epsilon$ . Ook figuren voor deze gyroscopische momenten zijn terug te vinden in appendix N. We zullen later op het gyroscopisch effect terugkomen.

## 3.2 Euler-Lagrange vergelijking

Nu is er genoeg informatie om de Euler-Lagrange vergelijkingen op te stellen. De Lagrangiaan is het verschil tussen de kinetische energie en de potentiële energie:

$$L = E_{kin} - E_{pot} \quad (35)$$

De algemene vorm van de Euler-Lagrange vergelijking is:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, i \in \mathbb{N} \quad (36)$$

$Q_i$  zijn hier externe krachten die niet worden meeberekend in energie. Dit zijn de bovengenoemde  $P_a, P_v, M_{xa}, M_{za}, M_{xv}, M_{zv}$ . Merk op dat onze  $q_i$  hier zijn:

$$y, \theta, \epsilon, \beta$$

Nu wordt (35) in (36) gesubstitueerd:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_{pot}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_{kin}}{\partial q_i} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial q_i} = Q_i \quad (37)$$

Dit kan direct al korter worden geschreven, er vallen namelijk een aantal termen weg. Merk op dat voor  $E_{kin}$  in (25) alleen de termen  $\dot{q}_i$  voorkomen en geen termen  $q_i$ . Hieruit volgt dus dat

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial q} = 0$$

voor elke  $q$ . Merk ook op dat in voor  $E_{pot}$  in (24) alleen termen  $q_i$  voorkomen en geen termen  $\dot{q}_i$ . Hieruit volgt dat

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial \dot{q}} = 0$$

voor elke  $\dot{q}$ . Nu kunnen we (37) schrijven als

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i - \frac{\partial E_{pot}}{\partial q_i} \quad (38)$$

Nu worden er dus 4 vergelijkingen verkregen. Deze geven we voor het overzicht de namen  $\alpha_y, \alpha_\theta, \alpha_\epsilon$  en  $\alpha_\beta$ . De momenten aan de rechterkant zijn verkregen uit [2], deze zijn gegeven in (31)-(34).

$$\alpha_y : \frac{d}{dt} \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{y}} = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial y} + P_a + P_v = P_a + P_v \quad (39)$$

$$\alpha_\theta : \frac{d}{dt} \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\theta}} = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial \theta} + bP_v + M_{za} + M_{zv} = bP_v + M_{za} + M_{zv} \quad (40)$$

$$\alpha_\epsilon : \frac{d}{dt} \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\epsilon}} = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial \epsilon} - M_{xa} - M_{xv} \quad (41)$$

$$\alpha_\beta : \frac{d}{dt} \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\beta}} = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial \beta} - pP_v + M_{zv} - M_{xv} \frac{\partial \delta}{\partial \beta} \quad (42)$$



### 3.3 Van Euler-Lagrange naar bewegingsvergelijkingen

Met behulp van deze vier vergelijkingen worden de bewegingsvergelijkingen opgesteld. Zoals eerder aangegeven moeten deze bewegingsvergelijkingen alleen afhangen van  $\beta$  en  $\epsilon$  en hun afgeleiden. In  $\alpha_y$  staat de term  $P_a$  die niet geëlimineerd kan worden, dus deze vergelijking wordt niet gebruikt. In  $\alpha_\theta$  en  $\alpha_\beta$  staat de term  $P_v$ . Door een lineaire combinatie te nemen van  $\alpha_\theta$  en  $\alpha_\beta$  kan deze term geëlimineerd worden. Nu zullen stap voor stap de bewegingsvergelijkingen opgesteld worden. Eerst worden de partiële afgeleiden bepaald en vervolgens worden er slipvoorwaarden toegevoegd om de termen met  $\theta$ ,  $y$  en hun afgeleiden uit de vergelijkingen te krijgen.

#### 3.3.1 Partiële afgeleiden

Nu worden de Lagrange-vergelijkingen uitgewerkt. Eerst worden de partiële afgeleiden van de kinetische energie bepaald.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{y}} = m_a(\ddot{y} + h\ddot{\epsilon} + u\ddot{\theta}) + m_v(\ddot{y} + f\ddot{\beta} + (b-a)\ddot{\theta} + h_v\ddot{\epsilon}) \quad (43)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\theta}} = m_a u(\ddot{y} + h_a\ddot{\epsilon} + u\ddot{\theta}) + m_v(b-a)(\ddot{y} + f\ddot{\beta} + (b-a)\ddot{\theta} + h_v\ddot{\epsilon}) + I_{za}\ddot{\theta} + I_{xza}\ddot{\epsilon} \quad (44)$$

$$+ I_{zv}(\ddot{\beta} + \ddot{\theta}) + I_{xzv}(\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\epsilon}) \quad (45)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\epsilon}} = m_a(\ddot{y} + h_a\ddot{\epsilon} + u\ddot{\theta})h_a + m_v(\ddot{y} + f\ddot{\beta} + (b-a)\ddot{\theta} + h_v\ddot{\epsilon})h_v + I_{xa}\ddot{\epsilon} + I_{xza}\ddot{\theta} \quad (46)$$

$$+ I_{xv}(\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\epsilon}) + I_{xzv}(\ddot{\beta} + \ddot{\theta}) \quad (47)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\beta}} = m_v(\ddot{y} + f\ddot{\beta} + (b-a)\ddot{\theta} + h_v\ddot{\epsilon})f + I_{xv}(\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\epsilon}) \cot \alpha + I_{zv}(\ddot{\beta} + \ddot{\theta}) \quad (48)$$

$$+ I_{xzv}(2\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\epsilon} + \ddot{\theta} \cot \alpha) \quad (49)$$

Nu worden de partiële afgeleiden van de potentiële energie bepaald.

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial y} = 0 \quad (50)$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial \theta} = 0 \quad (51)$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial \epsilon} = m_a g \left( \frac{pu}{b} \beta + h_a \epsilon \right) + m_v g \left( -\frac{a(b+p)}{b} \beta + h_v (\epsilon + \beta \cot \alpha) \right) \quad (52)$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial \beta} = -m_a g \left( \frac{pu}{b} (\epsilon + \beta \cot \alpha) \right) - m_v g \left( -\frac{a(b+p)}{b} (\epsilon + \beta \cot \alpha) + h_v (\epsilon \cot \alpha + \beta \cot^2 \alpha) \right) \quad (53)$$

#### 3.3.2 Slipvoorwaarden

Zoals gezegd moeten nu alle termen met  $\theta$  en  $y$  worden geëlimineerd. Dit gebeurt aan de hand van de slipvoorwaarden uit [2]. Deze slipvoorwaarden zijn een gevolg van het zijwaarts slippen van de banden. De variabelen  $\theta$  en  $y$  kunnen als volgt worden uitgedrukt in  $\beta$ :

$$\ddot{\theta} = \frac{V\dot{\beta} + p\ddot{\beta}}{b} \quad (54)$$

$$\dot{y} = \frac{V}{b}(V\beta + p\dot{\beta}) \quad (55)$$

$V$  is hier de snelheid van de fiets. In de volgende paragraaf zullen deze slipvoorwaarden gesubstitueerd worden in de twee vergelijkingen.

### 3.3.3 Uitschrijven twee bewegingsvergelijkingen

Nu zijn alle termen bepaald die nodig zijn voor de bewegingsvergelijkingen. De volgende twee vergelijkingen worden nu dus uitgewerkt:

$$\alpha_\epsilon : \frac{d}{dt} \frac{\partial E_{kin}}{\partial \dot{\epsilon}} = - \frac{\partial E_{pot}}{\partial \epsilon} - M_{xa} - M_{xv} \quad (56)$$

$$\alpha_\beta + \frac{p}{b} \alpha_\theta \quad (57)$$

Deze laatste is dus een optelsom van twee vergelijkingen (40) en (42).

#### 3.3.3.1 Eerste bewegingsvergelijking

$\alpha_\epsilon$  uitschrijven geeft:

$$\begin{aligned} & m_a(\ddot{y} + h_a\ddot{\epsilon} + u\ddot{\theta})h_a + m_v(\ddot{y} + f\ddot{\beta} + (b-a)\ddot{\theta} + h_v\ddot{\epsilon})h_v + \\ & I_{xa}\ddot{\epsilon} + I_{xza}\ddot{\theta} + I_{xv}(\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\epsilon}) + I_{xzv}(\ddot{\beta} + \ddot{\theta}) \\ & = -m_ag\left(\frac{pu}{b}\beta + h_a\epsilon\right) + m_vg\left(-\frac{a(b+p)}{b}\beta + h_v(\epsilon + \beta \cot \alpha)\right) - I_{\omega a}\omega_a\dot{\theta} - I_{\omega v}\omega_v(\dot{\theta} + \dot{\beta}) \end{aligned} \quad (58)$$

Nu worden de slipvoorwaarden ingevuld:

$$\begin{aligned} & m_a\left(\frac{V}{b}(V\beta + p\dot{\beta}) + h_a\ddot{\epsilon} + u\left(\frac{V\dot{\beta} + p\ddot{\beta}}{b}\right)h_a\right) + \\ & m_v\left(\frac{V}{b}(V\beta + p\dot{\beta}) + f\ddot{\beta} + (b-a)\left(\frac{V\dot{\beta} + p\ddot{\beta}}{b}\right) + h_v\ddot{\epsilon}\right)h_v + \\ & I_{xa}\ddot{\epsilon} + I_{xza}\left(\frac{V\dot{\beta} + p\ddot{\beta}}{b}\right) + I_{xv}(\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\epsilon}) + I_{xzv}\left(\ddot{\beta} + \left(\frac{V\dot{\beta} + p\ddot{\beta}}{b}\right)\right) = \\ & m_ag\left(\frac{pu}{b}\beta + h_a\epsilon\right) + m_vg\left(-\frac{a(b+p)}{b}\beta + h_v(\epsilon + \beta \cot \alpha)\right) - I_{\omega a}\omega_a\left(\frac{V\beta + p\dot{\beta}}{b}\right) - \\ & I_{\omega v}\omega_v\left(\frac{V\beta + p\dot{\beta}}{b} + \dot{\beta}\right) \end{aligned} \quad (59)$$

In termen van  $\epsilon, \beta$  en hun afgeleiden resulteert dit in:

$$\begin{aligned} & \ddot{\epsilon}\{m_a h_a^2 + m_v h_v^2 + I_{xa} + I_{xv}\} - \\ & \epsilon\{m_a h_a g + m_v h_v g\} + \\ & \ddot{\beta}\{I_{xzv} + I_{xv} \cot \alpha + h_v m_v f + \frac{p}{b}(I_{xza} + I_{xzv} + u h_a m_a + (b-a)h_v m_v)\} + \\ & \dot{\beta}\left\{\frac{V}{b}(p(m_a h_a + m_v h_v) + u h_a m_a + (b-a)h_v m_v + I_{xza} + I_{xzv} + I_{\omega a}\omega_a \frac{p}{b} + I_{\omega v}\omega_v \left(\frac{p}{b} + 1\right))\right\} + \\ & \beta\left\{\frac{V^2}{b}(m_a h_a + m_v h_v) - m_ag \frac{pu}{b} - m_vg\left(-\frac{a(b+p)}{b} + h_v \cot \alpha\right) + \frac{V}{b}(I_{\omega a}\omega_a + I_{\omega v}\omega_v)\right\} = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

### 3.3.3.2 Tweede bewegingsvergelijking

Dan nu de tweede bewegingsvergelijking:  $\alpha_\beta + \frac{p}{b}\alpha_\theta$ .

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} + \frac{p}{b} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = -\frac{\partial E_{pot}}{\partial \beta} - pP_v + M_{zv} - M_{xv} \frac{\partial \delta}{\partial \beta} + \frac{p}{b} (bP_v + M_{za} + M_{zv}) \quad (61)$$

Dit uitgeschreven zonder slipvoorwaarden geeft:

$$\begin{aligned} & m_v(\ddot{y} + f\ddot{\beta} + (b-a)\ddot{\theta} + h_v\ddot{\epsilon})f + I_{xv}(\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\epsilon}) \cot \alpha + I_{zv}(\ddot{\beta} + \ddot{\theta}) + I_{xzv}(2\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\epsilon} + \ddot{\theta} \cot \alpha) + \\ & \frac{p}{b}(m_a u(\ddot{y} + h_a \ddot{\epsilon} + u\ddot{\theta}) + m_v(b-a)(\ddot{y} + f\ddot{\beta} + (b-a)\ddot{\theta} + h_v\ddot{\epsilon})) + \\ & I_{za}\ddot{\theta} + I_{xza}\ddot{\epsilon} + I_{zv}(\ddot{\beta} + \ddot{\theta}) + I_{xzv}(\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\epsilon}) = \\ & -m_a g \left( \frac{pu}{b}(\epsilon + \beta \cot \alpha) - m_v g \left( -\frac{a(b+p)}{b}(\epsilon + \beta \cot \alpha) + h_v(\epsilon \cot \alpha + \beta \cot^2 \alpha) \right) \right) + \\ & I_{\omega v} \omega_v (\dot{\beta} \cot \alpha + \dot{\epsilon}) - I_{\omega v} \omega_v (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \cot \alpha + \frac{p}{b} (I_{\omega a} \omega_a \dot{\epsilon} + I_{\omega v} \omega_v (\dot{\beta} \cot \alpha + \dot{\epsilon})) \end{aligned} \quad (62)$$

We zien dat de term  $P_v$  is geëlimineerd. Nu worden de slipvoorwaarden toegevoegd:

$$\begin{aligned} & m_v \left( \frac{V}{b}(V\dot{\beta} + p\dot{\beta}) + f\ddot{\beta} + (b-a) \frac{V\dot{\beta} + p\ddot{\beta}}{b} + h_v\ddot{\epsilon} \right) f + I_{xv}(\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\epsilon}) \cot \alpha + I_{zv} \left( \ddot{\beta} + \frac{V\dot{\beta} + p\ddot{\beta}}{b} \right) + \\ & I_{xzv} \left( 2\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\epsilon} + \frac{V\dot{\beta} + p\ddot{\beta}}{b} \cot \alpha \right) + \frac{p}{b} \left( m_a u \left( \frac{V}{b}(V\dot{\beta} + p\dot{\beta}) + h_a \ddot{\epsilon} + u \frac{V\dot{\beta} + p\ddot{\beta}}{b} \right) + \right. \\ & \left. m_v(b-a) \left( \frac{V}{b}(V\dot{\beta} + p\dot{\beta}) + f\ddot{\beta} + (b-a) \frac{V\dot{\beta} + p\ddot{\beta}}{b} + h_v\ddot{\epsilon} \right) + \right. \\ & \left. I_{za} \frac{V\dot{\beta} + p\ddot{\beta}}{b} + I_{xza}\ddot{\epsilon} + I_{zv} \left( \ddot{\beta} + \frac{V\dot{\beta} + p\ddot{\beta}}{b} \right) + I_{xzv}(\ddot{\beta} \cot \alpha + \ddot{\epsilon}) \right) = \\ & -m_a g \left( \frac{pu}{b}(\epsilon + \beta \cot \alpha) \right) - m_v g \left( -\frac{a(b+p)}{b}(\epsilon + \beta \cot \alpha) + h_v(\epsilon \cot \alpha + \beta \cot^2 \alpha) \right) + \\ & I_{\omega v} \omega_v (\dot{\beta} \cot \alpha + \dot{\epsilon}) - I_{\omega v} \omega_v \left( \frac{V\dot{\beta} + p\dot{\beta}}{b} + \dot{\beta} \right) \cot \alpha + \frac{p}{b} (I_{\omega a} \omega_a \dot{\epsilon} + I_{\omega v} \omega_v (\dot{\beta} \cot \alpha + \dot{\epsilon})) \end{aligned} \quad (63)$$

In termen van  $\epsilon, \beta$  en hun afgeleiden resulteert dit in:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\epsilon}\{m_v h_v f + I_{xv} \cot \alpha + I_{xzv} + \frac{p}{b}(m_a u h_a + h_v m_v (b-a) + I_{xza} + I_{xzv})\} + \\
& \dot{\epsilon}\{-I_{\omega v} \omega_v - \frac{p}{b}(I_{\omega a} \omega_a + I_{\omega v} \omega_v)\} + \\
& \epsilon\{m_a g \frac{pu}{b} + m_v g(-\frac{a(b+p)}{b} + h_v \cot \alpha)\} + \\
& \ddot{\beta}\{m_v f^2 + m_v f(b-a) \frac{p}{b} + I_{xv} \cot^2 \alpha + I_{zv} + I_{zv} \frac{p}{b} + 2I_{xzv} \cot \alpha + I_{xzv} \frac{p}{b} \cot \alpha + \\
& \quad \frac{p}{b}(\frac{p}{b} m_a u^2 + f m_v (b-a) + \frac{p}{b}(b-a)^2 m_v + \frac{p}{b} I_{za} + I_{zv} + \frac{p}{b} I_{zv} + I_{xzv} \cot \alpha)\} + \\
& \dot{\beta}\{m_v f V \frac{p}{b} + m_v f(b-a) \frac{V}{b} + I_{zv} \frac{V}{b} + I_{xzv} \frac{V}{b} \cot \alpha + \frac{p}{b}(m_a u V \frac{p}{b} + m_a u^2 \frac{V}{b} + m_v (b-a) V \frac{p}{b} + \\
& \quad m_v (b-a)^2 \frac{V}{b} + I_{za} \frac{V}{b} + I_{zv} \frac{V}{b}) - I_{\omega v} \omega_v \cot \alpha + I_{\omega v} \omega_v (\frac{p}{b} + 1) \cot \alpha - \frac{p}{b} I_{\omega v} \omega_v \cot \alpha\} + \\
& \beta\{\frac{V}{b} m_v f V + \frac{p}{b}(m_a u V \frac{V}{b} + m_v (b-a) V \frac{V}{b}) + m_a g \frac{pu}{b} \cot \alpha + m_v g(-\frac{a(b+p)}{b} \cot \alpha) + h_v \cot^2 \alpha) \\
& \quad + I_{\omega v} \omega_v \frac{V}{b} \cot \alpha\} = 0
\end{aligned} \tag{64}$$

Dit zijn twee vergelijkingen van de vorm:

$$a_1\ddot{\epsilon} + a_2\dot{\epsilon} + a_3\epsilon + a_4\ddot{\beta} + a_5\dot{\beta} + a_6\beta = 0 \quad (65)$$

$$b_1\ddot{\epsilon} + b_2\dot{\epsilon} + b_3\epsilon + b_4\ddot{\beta} + b_5\dot{\beta} + b_6\beta = 0 \quad (66)$$

Hierbij zijn de coëfficiënten als volgt:

$$a_1 = m_a h_a^2 + m_v h_v^2 + I_{xa} + I_{xv}$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = g(m_a h_a + m_v h_v)$$

$$a_4 = I_{xzv} + I_{xv} \cot \alpha + h_v m_v f + \frac{p}{b}(I_{xza} + I_{xzv} + u h_a m_a + (b-a) h_v m_v)$$

$$a_5 = \frac{V}{b}(p(m_a h_a + m_v h_v) + u h_a m_a + (b-a) h_v m_v +$$

$$I_{xza} + I_{xzv} + I_{\omega\alpha}\omega_\alpha \frac{p}{b} + I_{\omega v}\omega_v (\frac{p}{b} + 1))$$

$$a_6 = \frac{V^2}{b}(m_a h_a + m_v h_v) - \frac{p}{b}(u m_a + (b-a) m_v)g - g f m_v + \frac{V}{b}(I_{\omega v}\omega_v + I_{\omega a}\omega_a)$$

$$b_1 = m_v h_v f + I_{xv} \cot \alpha + I_{xzv} + \frac{p}{b}(m_a u h_a + h_v m_v (b-a) + I_{xza} + I_{xzv})$$

$$b_2 = -I_{\omega v}\omega_v - \frac{p}{b}(I_{\omega a}\omega_a + I_{\omega v}\omega_v)$$

$$b_3 = \frac{p}{b}(u m_a + (b-a) m_v)g + f g m_v$$

$$b_4 = \frac{p^2}{b^2}(u^2 m_a + (b-a)^2 m_v + I_{za} + I_{zv}) + \frac{2p}{b}(I_{zv} + I_{xzv} \cot \alpha + (b-a) f m_v) +$$

$$m_v f^2 + I_{xv} \cot^2 \alpha + 2I_{xzv} \cot \alpha + I_{zv}$$

$$b_5 = \frac{V}{b} \left\{ \frac{p^2}{b^2}(m_a u + m_v (b-a)) + \frac{p}{b}(m_a u^2 + m_v (b-a)^2 + I_{za} + I_{zv}) + \right.$$

$$\left. m_v f p + m_v f (b-a) + I_{zv} + I_{xzv} \cot \alpha \right\}$$

$$b_6 = \left( \frac{V^2}{b} - g \cot \alpha \right) \left( \frac{p u}{b} m_a + \frac{p}{b} (b-a) m_v \right) + I_{\omega v}\omega_v \cot \alpha \frac{V}{b}$$

In de coëfficiënten  $a_6$ ,  $b_3$  en  $b_6$  is de term  $\cot(\alpha)$  nog omgechreven in termen van  $f$  en  $m_v$ . Dit kun je halen uit figuur 4 op bladzijde 22.

### 3.4 Termen vereenvoudigen

Deze vergelijkingen hebben nogal ingewikkelde termen. Er worden een aantal parameters samen genomen om een nieuwe coëfficiënten te creëren. Aan de hand van artikel [3] worden de volgende afleidingen gebruikt:

$$I_{xz} = I_{xza} + I_{xzv} + uh_a m_a + (b - a)h_v m_v \quad (67)$$

$$I_x = I_{xa} + I_{xv} + h_v^2 m_v + h_a^2 m_a \quad (68)$$

$$I_z = I_{za} + I_{zv} + u^2 m_a + (b - a)^2 m_v \quad (69)$$

$$S_x = m_v h_v + m_a h_a \quad (70)$$

$$S_z = m_v (b - a) + m_a u \quad (71)$$

$$\Delta = I_{xzv} + I_{xv} \cot(\alpha) + h_v f m_v = I_{as} \cot(\alpha) + I_{an} + k f m_v \quad (72)$$

$$\Gamma = I_{zv} + I_{xzv} \cot(\alpha) + (b - a) f m_v = I_{as} - I_{an} \cot(\alpha) + j f m_v \quad (73)$$

$$k = h_v - f \cos(\alpha) \sin(\alpha) \quad (74)$$

$$j = b - a - f \sin^2(\alpha) \quad (75)$$

Herinner dat de traagheidsmomenten als volgt gedefinieerd zijn:

Voor de berijder, het frame en het achterwiel ten opzichte van  $C_a$  geldt:

$I_{xa}$ : traagheidsmoment in de  $X$ -richting.

$I_{za}$ : traagheidsmoment in de  $Z$ -richting.

$I_{xza}$ : traagheidsproduct.

Voor het voorwiel, het stuur en de voorvork ten opzichte van  $C_v$  geldt:

$I_{xv}$ : traagheidsmoment in de  $X$ -richting.

$I_{zv}$ : traagheidsmoment in de  $Z$ -richting.

$I_{xzv}$ : traagheidsproduct.

$I_x$  stelt het traagheidsmoment voor van de gehele fiets met berijder om de  $x$ -as, indien  $\beta = 0$ .

$I_z$  stelt het traagheidsmoment voor van de gehele fiets met berijder om de  $z$ -as.

$I_{xz}$  is het traagheidsproduct van de gehele fiets met berijder.

De laatste twee vergelijkingen (74) en (75) voor  $k, j$  volgen uit figuur 4. Bovenstaande vereenvoudigde termen worden gesubstitueerd in de bewegingsvergelijkingen. Dan worden weer twee bewegingsvergelijkingen opgesteld in dezelfde vorm die al bekend waren, maar nu met andere uitdrukkingen voor  $a_1$  t/m  $b_6$ . De bewegingsvergelijkingen zijn als volgt:

$$a_1 \ddot{\epsilon} + a_2 \dot{\epsilon} + a_3 \epsilon + a_4 \ddot{\beta} + a_5 \dot{\beta} + a_6 \beta = 0$$

$$b_1 \ddot{\epsilon} + b_2 \dot{\epsilon} + b_3 \epsilon + b_4 \ddot{\beta} + b_5 \dot{\beta} + b_6 \beta = 0$$



hangen dus af van de snelheid. Dit is essentieel voor het onderzoek naar de stabiliteit van de fiets. Dit zal blijken in hoofdstuk 4.



## 4 Stabiliteit

### 4.1 Algemene stabiliteitsvoorwaarden

Aan de hand van de bewegingsvergelijkingen (60) en (64) kan de stabiliteit van de fiets onderzocht worden. We hebben een tweede orde stelsel differentiaalvergelijkingen verkregen in hoofdstuk 3.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\epsilon} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_5 \\ b_2 & b_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & a_6 \\ b_3 & b_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De algemene oplossing hiervoor is  $\mathbf{q}(t) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{q}_{0i} e^{\lambda_i t}$ , met  $\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \epsilon(t) \\ \beta(t) \end{bmatrix}$ . Als dit wordt gesubstitueerd in het stelsel dan geldt voor iedere onafhankelijke oplossing:

$$\lambda^2 \begin{bmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{bmatrix} \mathbf{q}_0 e^{\lambda t} + \lambda \begin{bmatrix} 0 & a_5 \\ b_2 & b_5 \end{bmatrix} \mathbf{q}_0 e^{\lambda t} + \begin{bmatrix} a_3 & a_6 \\ b_3 & b_6 \end{bmatrix} \mathbf{q}_0 e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nu alles delen door  $e^{\lambda t}$  en in matrix vorm geldt dan:

$$\begin{bmatrix} a_1 \lambda^2 + a_3 & a_4 \lambda^2 + a_5 \lambda + a_6 \\ b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 & b_4 \lambda^2 + b_5 \lambda + b_6 \end{bmatrix} \mathbf{q}_0 = \mathbf{K} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

met

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} a_1 \lambda^2 + a_3 & a_4 \lambda^2 + a_5 \lambda + a_6 \\ b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 & b_4 \lambda^2 + b_5 \lambda + b_6 \end{bmatrix}$$

Als  $\mathbf{K}$  inverteerbaar is geldt

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{q}_0 = \mathbf{K}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dit is de triviale oplossing en die wordt niet gezocht. Er moet dus gelden dat  $\text{Det}(\mathbf{K}) = 0$ , dan is  $\mathbf{K}$  niet inverteerbaar. Dit resulteert in een vierdegraadsvergelijking voor  $\lambda$ .

$$(a_1 \lambda^2 + a_3)(b_4 \lambda^2 + b_5 \lambda + b_6) - (a_4 \lambda^2 + a_5 \lambda + a_6)(b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3) = 0 \quad (76)$$

Dit is gelijk aan de vierdegraadsvergelijking

$$\begin{aligned} & \lambda^4 (a_1 b_4 - a_4 b_1) + \\ & \lambda^3 (a_1 b_5 - a_5 b_1 - a_4 b_2) + \\ & \lambda^2 (a_1 b_6 + a_3 b_4 - a_6 b_1 - a_5 b_2 - a_4 b_3) + \\ & \lambda (a_3 b_5 - a_6 b_2 - a_5 b_3) + \\ & (a_3 b_6 - a_6 b_3) = 0 \end{aligned} \quad (77)$$

We komen dus uiteindelijk uit op een vierdegraads vergelijking van de vorm:

$$\mathbf{a} \lambda^4 + \mathbf{b} \lambda^3 + \mathbf{c} \lambda^2 + \mathbf{d} \lambda + \mathbf{e} = 0$$

Hier zijn de coëfficiënten dikgedrukt omdat in de parameters van de fiets ook al  $a, b, d$  en  $e$  voorkomen. Dit betekent dat er vier eigenwaarden  $\lambda$  zijn. De fiets is stabiel als voor alle eigenwaarden geldt dat het reële deel kleiner dan nul is.

De coëfficiënten  $a_5, a_6, b_2, b_5$  en  $b_6$  bevatten  $V$ , de snelheid van de fiets. Voor elke snelheid zijn er andere oplossingen voor deze vierdegraads vergelijking en dus andere eigenwaarden.

## 4.2 Stabiliteit met de gegeven waarden

We hebben twee artikelen [1] en [3] met elk verschillende waarden voor de parameters. We zullen op twee manieren de stabiliteit voor beiden onderzoeken. Eerst wordt met behulp van MATLAB het stabiliteitsgebied numeriek bepaald. Vervolgens wordt gebruik gemaakt van het Routh Criterium. Dit is een wiskundige methode om de nulpunten van polynomen te onderzoeken. Hierbij wordt gebruik gemaakt van het programma MAPLE.

Nadat de stabiliteit is bepaald voor deze waarden zullen we de parameters variëren. Zo kunnen we uitvinden welke parameters belangrijker en welke minder belangrijk zijn voor de stabiliteit.

## 4.3 Numerieke oplossingen met MATLAB

De snelheid van de fiets laten we variëren tussen  $0 \text{ m/s}$  en  $15 \text{ m/s}$ , met een stapgrootte van  $0.1 \text{ m/s}$ .  $15 \text{ m/s}$  komt overeen met  $54 \text{ km/h}$ , dit is een realistische topsnelheid voor een normale fiets. Uit de artikelen [3] en [1] kunnen we al de stabiliteit onderzoeken met de waarden voor de parameters die daarin gegeven worden.

Uit het artikel van Schwab [1] worden de volgende waarden aangenomen om een plot te kunnen creëren voor de stabiliteit. Deze waarden zijn terug te vinden in appendix A. De waarden zijn

$$\begin{array}{ll} a_1 = 81 & b_1 = 2.3 \\ a_2 = 0 & b_2 = -0.9V \\ a_3 = -81g & b_3 = -2.6g \\ a_4 = 2.3 & b_4 = 0.3 \\ a_5 = 34V & b_5 = 1.7V \\ a_6 = -2.6g + 77V^2 & b_6 = -0.8g + 2.7V^2 \end{array}$$

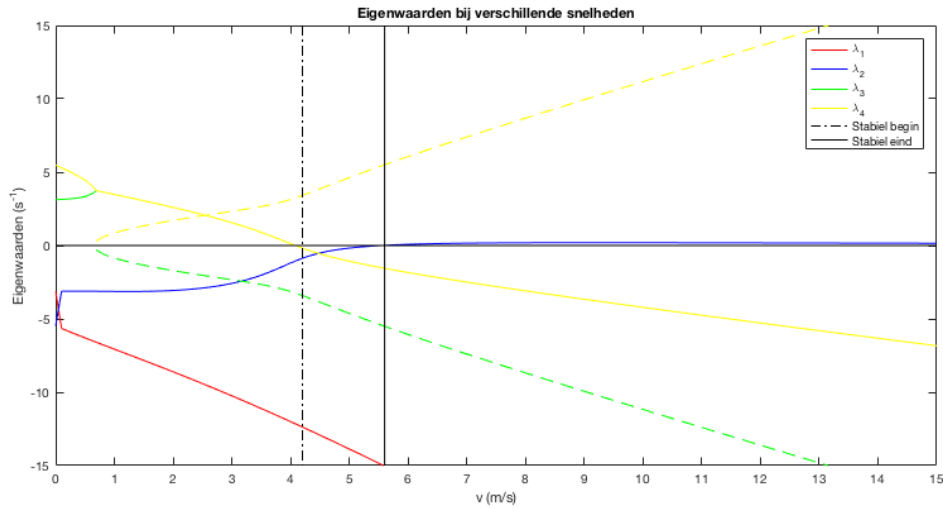
De bijbehorende matrixvergelijking is

$$\begin{bmatrix} 81 & 2.3 \\ 2.3 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\epsilon} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + V \begin{bmatrix} 0 & 34 \\ -0.9 & 1.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + g \left( \begin{bmatrix} -81 & -2.6 \\ -2.6 & -0.8 \end{bmatrix} + V^2 \begin{bmatrix} 0 & 77 \\ 0 & 2.7 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \epsilon \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De eigenwaarden zijn tegen de snelheid geplot in figuur 5.

De gestippelde lijnen zijn de imaginaire delen van de eigenwaarden. Deze zijn voor de stabiliteit niet van belang. Alle reële delen van de eigenwaarden moeten kleiner zijn dan nul. Dit resulteert in stabiliteit van de fiets als geldt

$$4.2 \text{ m/s} \leq V \leq 5.6 \text{ m/s}$$



Figuur 5: Stabiliteitsgebied tussen de twee zwarte verticale lijnen. De doorgetrokken lijnen staan voor de reële delen van de eigenwaarden. De gestippelde lijnen staan voor de imaginaire delen.

In het andere artikel [3] worden andere waarden genomen. Hier worden de volgende waarden gebruikt

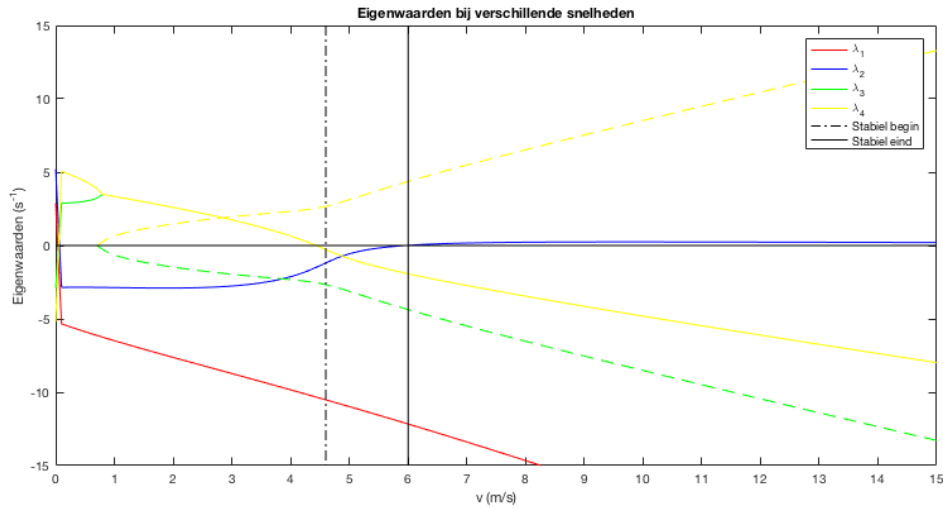
$$\begin{array}{ll}
 a_1 = 98 & b_1 = 1.75 \\
 a_2 = 0 & b_2 = -11.9V \\
 a_3 = -82.5g & b_3 = -2.03g \\
 a_4 = 1.75 & b_4 = 0.36 \\
 a_5 = 26.52V & b_5 = 1.57V \\
 a_6 = 0.18g + 71.7V^2 & b_6 = -0.95g + 2.37V^2
 \end{array}$$

Deze waarden zijn terug te vinden in appendix B. Daaruit komt de plot in figuur 6.

Dit resulteert in een even groot stabiliteitsgebied als hiervoor. De snelheden liggen wel hoger dan voorheen. Nu geldt dat de fiets stabiel is als

$$4.6 \text{ m/s} \leq V \leq 6 \text{ m/s}$$

Het is belangrijk te zien dat in beide gevallen de grootste eigenwaarde heel dicht boven nul ligt. De oplossingen zijn van de vorm  $\epsilon(t) = Ae^{\lambda t}$  en  $\beta(t) = Be^{\lambda t}$ . Als  $\lambda$  dus heel klein is, zal het lang duren voordat instabiliteit optreedt, ookal is de snelheid buiten het stabiliteitsgebied. Wiskundig is het dus wel instabiel, maar fysisch heb je een langere tijd nodig voor instabiliteit. Nu zullen we de oplossingen vinden aan de hand van het Routh Criterium.



Figuur 6: Stabiliteitsgebied tussen de twee zwarte verticale lijnen. De doorgetrokken lijnen staan voor de reële delen van de eigenwaarden. De gestippelde lijnen staan voor de imaginaire delen.

#### 4.4 Routh stabilty

Uit de literatuur hebben we nu twee oplossingen verkregen voor ons probleem, een met de waarden volgens Schwab [1] en de andere met de waarden van Herfkens [3]. Deze oplossingen zijn net numeriek bepaald met MATLAB. Nu wordt de oplossing voor de stailiteit gevonden door middel van het Routh Criterium om vervolgens de resultaten te vergelijken. Eerst wordt dit criterium toegelicht met betrekking op onze vergelijking. We hebben hier te maken met de volgende vergelijking:

$$\mathbf{a}\lambda^4 + \mathbf{b}\lambda^3 + \mathbf{c}\lambda^2 + \mathbf{d}\lambda + \mathbf{e} = 0 \quad (78)$$

met als coëfficiënten:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1b_4 - a_4b_1 \\ \mathbf{b} &= a_1b_5 - a_5b_1 - a_4b_2 \\ \mathbf{c} &= a_1b_6 + a_3b_4 - a_6b_1 - a_5b_2 - a_4b_3 \\ \mathbf{d} &= a_3b_5 - a_6b_2 - a_5b_3 \\ \mathbf{e} &= a_3b_6 - a_6b_3 \end{aligned}$$

Dit is een vierdegraadsvergelijking. Het criterium maakt gebruik van de Routh Table. In het geval van een vierdegraadsvergelijking is dat:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{a} & \mathbf{c} & \mathbf{e} \\ \mathbf{b} & \mathbf{d} & \\ \hline \kappa_1 & \kappa_2 & \\ \kappa_3 & & \\ \kappa_4 & & \end{array}$$

Hierin is:

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \frac{\mathbf{bc} - \mathbf{ad}}{\mathbf{b}} \\ \kappa_2 &= \mathbf{e} \\ \kappa_3 &= \frac{\kappa_1 \mathbf{d} - \kappa_2 \mathbf{b}}{\kappa_1} \\ \kappa_4 &= \kappa_2\end{aligned}$$

Nu luidt het criterium als volgt [2] :

De nulpunten van het polynoom  $\mathbf{a}\lambda^4 + \mathbf{b}\lambda^3 + \mathbf{c}\lambda^2 + \mathbf{d}\lambda + \mathbf{e} = 0$ , met alle coëfficiënten ongelijk aan nul, hebben allemaal een reëel deel kleiner dan nul dan en slechts dan als de Routh Table 5 rijen heeft en alle elementen in de eerste kolom hetzelfde teken hebben, dwz positief of negatief.

Al onze coëfficiënten zijn ongelijk aan nul. Ook heeft de Routh Table 5 rijen, dwz de onderste twee rijen zijn ongelijk aan nul. We hebben 4 eigenwaarden met een negatief reëel deel als geldt dat  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \kappa_1, \kappa_3$  en  $\kappa_4$  hetzelfde teken hebben. We gaan weer voor de verschillende waarden uit de literatuur [3] en [1] deze parameters bepalen.

Voor het artikel van Schwab [1] hebben we de volgende waarden.

$$\begin{aligned}a_1 &= 81 & b_1 &= 2.3 \\ a_2 &= 0 & b_2 &= -0.9V \\ a_3 &= -81g & b_3 &= -2.6g \\ a_4 &= 2.3 & b_4 &= 0.3 \\ a_5 &= 34V & b_5 &= 1.7V \\ a_6 &= -2.6g + 77V^2 & b_6 &= -0.8g + 2.7V^2\end{aligned}$$

Het is duidelijk te zien dat  $\mathbf{a} = a_1 \cdot b_4 - a_4 \cdot b_1 = 81 \cdot 0.3 - 2.3 \cdot 2.3 > 0$ . Nu moet dus gelden dat  $\mathbf{b}, \kappa_1, \kappa_3$  en  $\kappa_4$  ook groter dan nul zijn. Wat deze coëfficiënten precies zijn is niet relevant, het gaat erom dat ze groter zijn dan nul. Ze hangen allemaal van  $V$  af. We hebben dus vijf vergelijkingen vergkregen:

$$\mathbf{a} > 0 \tag{79}$$

$$\mathbf{b}(V) > 0 \tag{80}$$

$$\kappa_1(V) > 0 \tag{81}$$

$$\kappa_3(V) > 0 \tag{82}$$

$$\kappa_4(V) > 0 \tag{83}$$

Met MAPLE is voor  $\mathbf{b}, \kappa_1, \kappa_3$  en  $\kappa_4$  bepaald bij welke snelheden dit groter is dan nul. De code is terug te vinden in de appendix C. Dit resulteert het volgende domeinen van de snelheid:

$$4.1 \text{ m/s} \leq V \leq 5.4 \text{ m/s}$$

Uit het artikel van Herfkens [3] hebben we de andere waarden:

$$\begin{aligned}a_1 &= 98 & b_1 &= 1.75 \\ a_2 &= 0 & b_2 &= -11.9V \\ a_3 &= -82.5g & b_3 &= -2.03g \\ a_4 &= 1.75 & b_4 &= 0.36 \\ a_5 &= 26.5V & b_5 &= 1.57V \\ a_6 &= 0.18g + 71.7V^2 & b_6 &= -0.95g + 2.37V^2\end{aligned}$$

Weer is gemakkelijk te zien dat  $\mathbf{a} = a_4 \cdot b_4 - a_4 \cdot b_1 > 0$ . Met behulp van MAPLE bepalen we op dezelfde manier het stabiliteitsgebied. Dit resulteert het volgende snelheidsdomein:

$$4.43 \text{ m/s} \leq V \leq 5.96 \text{ m/s}$$

	MATLAB	Routh Stability
Schwab [1]	4.2 - 5.6 (m/s)	4.1-5.4 (m/s)
Herfkens [3]	4.6 - 6 (m/s)	4.43 - 5.96 (m/s)

Tabel 1: Resultaten met verschillende methoden opgelost

In tabel 1 staan de resultaten van beide methoden. Als we deze resultaten met elkaar vergelijken zien we een afwijking van maximaal  $0.2 \text{ m/s}$ . Alle coëfficiënten zijn hetzelfde ingevoerd. Dit verschil is te verklaren door het feit dat in MATLAB de snelheid  $V$  met stappen van  $0.1 \text{ m/s}$  oploopt, terwijl in MAPLE vijf vergelijkingen met als variabele  $V \in \mathbb{R}$  zijn opgelost. De resultaten liggen dicht genoeg bij elkaar om beide methoden te kiezen. Dit onderzoek gaan immers om te bekijken welke parameters verantwoordelijk zijn voor grotere of kleinere stabiliteitsgebieden. De exacte waarde van de snelheid is niet het einddoel. In hoofdstuk 5 gebruiken we de numerieke methode van MATLAB.

## 5 Verandering van de parameters

Nu kunnen we bekijken wat er gebeurt als we parameters gaan variëren. Voor het overzicht zet ik de coëfficiënten van de twee bewegingsvergelijkingen nog even op een rij.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= I_x \\
 a_2 &= 0 \\
 a_3 &= -gS_x \\
 a_4 &= \frac{p}{b}I_{xz} + \Delta \\
 a_5 &= \frac{V}{b} \left( I_{xz} + pS_x + \frac{b+p}{b}I_{\omega v} \frac{b}{r_v} + \frac{p}{b}I_{\omega a} \frac{b}{r_a} \right) \\
 a_6 &= \frac{V^2}{b} \left( S_x + \frac{I_{\omega v}}{r_v} + \frac{I_{\omega a}}{r_a} \right) - g \left( \frac{p}{b}S_z + fm_v \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{p}{b}I_{xz} + \Delta \\
 b_2 &= -V \left( \frac{b+p}{b} \frac{I_{\omega v}}{r_v} + \frac{p}{b} \frac{I_{\omega a}}{r_a} \right) \\
 b_3 &= -g \left( \frac{p}{b}S_z + fm_v \right) \\
 b_4 &= \frac{I_{as}}{\sin^2(\alpha)} + \frac{p^2}{b^2}I_z + \frac{2p}{b}\Gamma \\
 b_5 &= \frac{V}{b} \left( \frac{p}{b}I_z + p \left( \frac{p}{b}S_z + fm_v \right) + \Gamma \right) \\
 b_6 &= \frac{V^2}{b} \left( \frac{p}{b}S_z + fm_v + \frac{I_{\omega v}}{r_v} \cot(\alpha) \right) - g \left( \frac{p}{b}S_z + fm_v \right) \cot(\alpha)
 \end{aligned}$$

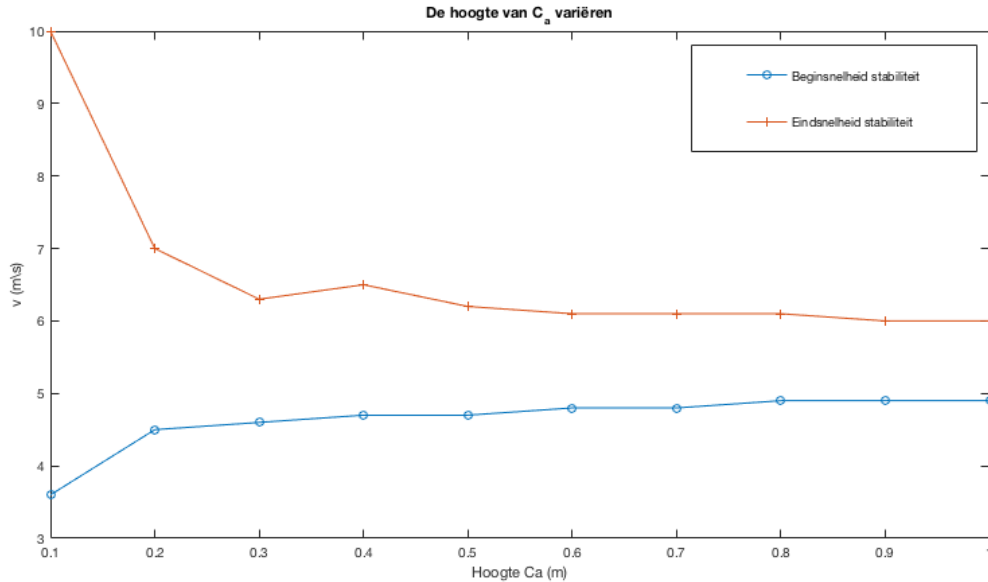
Met uitdrukkingen voor  $\Delta$  en  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= I_{xzv} + I_{xv} \cot(\alpha) + h_v fm_v = I_{as} \cot(\alpha) + I_{an} + k fm_v \\
 \Gamma &= I_{zv} + I_{xzv} \cot(\alpha) + (b-a) fm_v = I_{as} - I_{an} \cot(\alpha) + j fm_v
 \end{aligned}$$

We zullen de maten van die fiets variëren zoals de hoek van de stuuras, de lengte van de fiets en de grootte van de wielen. Dit zijn veranderingen die fysisch nog makkelijk te begrijpen zijn. Ook zullen we andere parameters aanpassen, dit kunnen we altijd weer terug koppelen naar de fysica. Merk op dat vrijwel alle parameters van elkaar afhangen. Fysisch is het natuurlijk niet mogelijk zo maar een parameter aan te passen zonder dat de rest verandert. Wij doen dit hier wel om een duidelijk beeld te krijgen welke parameters wiskundig verantwoordelijk zijn voor de stabiliteit. Bij de vergroting van de wielen nemen we wel de verandering van parameters mee.

## 5.1 Hoogte van $C_a$ variëren

Laten we beginnen met het achterste gedeelte van de fiets. We kijken wat er gebeurt als we de hoogte van  $C_a$  aanpassen. Met behulp van MATLAB zijn voor 10 verschillende hoogten van dit zwaartepunt het stabiliteitsgebied bepaald. De code is terug te vinden in appendix G. De resultaten staan in figuur 7.



Figuur 7: Begin- en eindsnelheden van het stabiliteitsgebied voor verschillende hoogten van  $C_a$ .

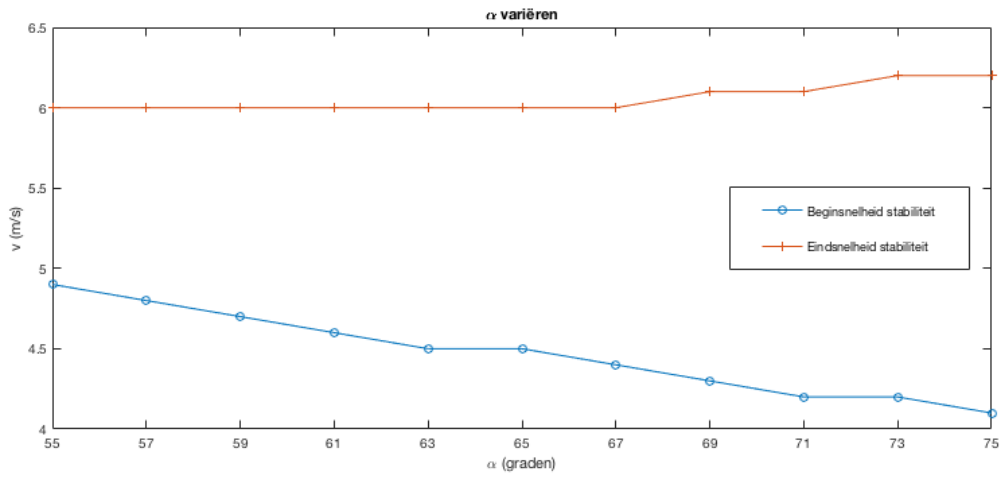
Het is duidelijk dat de hoogte van  $C_a$  een belangrijke rol speelt voor de stabiliteit, zeker in het begin. Hoe lager het zwaartepunt, hoe groter het stabiliteitsgebied is. Dit is fysisch natuurlijk goed te begrijpen. Als het zwaartepunt lager ligt zal deze door kleine verstoringen in de kanteling  $\epsilon$  minder ver verschuiven vanaf de evenwichtsstand. Hierdoor blijft de fiets meer in evenwicht. Het zwaartepunt  $C_a$  wordt bepaald door de berijder, het frame en het achterwiel. De fysische betekenis van de verlaging van het zwaartepunt  $C_a$  houdt in dat de berijder lager op de fiets zit, of een dusdanige hoeveelheid minder massa heeft waardoor de massa van het frame en het achterwiel een grotere rol gaan spelen.

## 5.2 $\alpha$ variëren

Laten we kijken of de stand van de stuuras een grote invloed heeft op het stabiliteitsgebied. Tot nu toe werd gesteld dat  $\alpha = 65^\circ$ . Nu laten we  $\alpha$  variëren tussen  $55^\circ$  en  $75^\circ$ , met stappen van  $2^\circ$ . Dit zijn realistische waarden voor de hoek  $\alpha$ . De resultaten staan in figuur 8. De code is terug te vinden in appendix H.

Het is duidelijk te zien dat deze parameter nauwelijks invloed heeft op het stabiliteitsgebied van de fiets. Dit is niet opmerkelijk. Verandering van  $\alpha$  heeft direct gevolg op de parameter  $f$ , de horizontale afstand van het zwaartepunt  $C_v$  tot de stuuras. Deze zal maar enkele



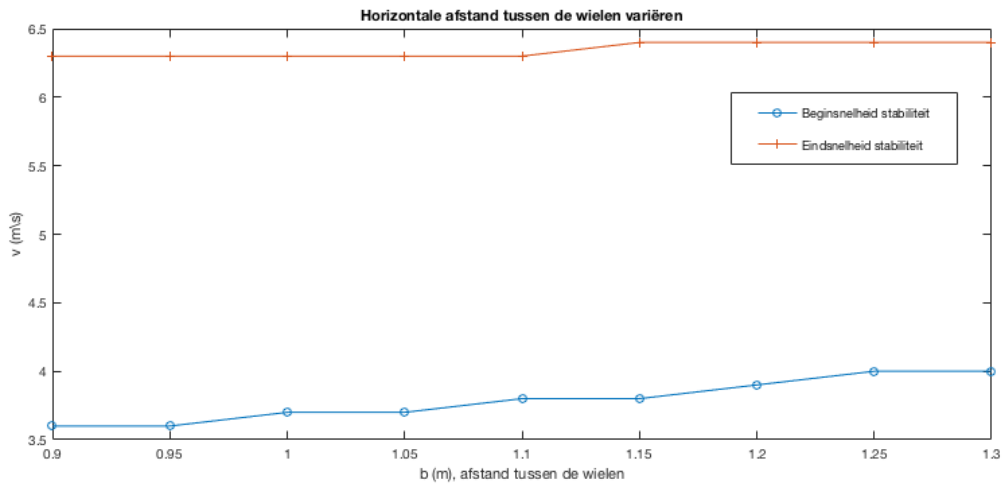


Figuur 8: Begin- en eindsnelheden van het stabiliteitsgebied voor verschillende waarden van  $\alpha$ .

milimeters verschuiven. Het grootste deel van de massa in het systeem (fiets+berijder) zit in het achterste gedeelte. Dit heeft dus veel meer invloed. We kunnen concluderen dat verandering van  $\alpha$  nauwelijks invloed heeft. Het zwaartepunt  $C_v$  komt verder naar voren te liggen naarmate  $\alpha$  toeneemt. Dit geeft toch enigszins een groter stabiliteitsgebied.

### 5.3 $b$ variëren

Nu bekijken we wat er gebeurt als we de lengte van de fiets verkleinen. De afstand  $b$  tussen de middelpunten van de wielen  $S_v$  en  $S_a$  laten we variëren tussen  $0.9\text{ m}$  en  $1.3\text{ m}$ , met een stapgrootte van  $0.05\text{ m}$ . De code staat in appendix I. Wederom gebruiken we realistische waarden voor de lengte van de fiets. De locatie van de zwaartepunten houden we constant bij elke waarde van  $b$ . De resultaten staan in figuur 9.



Figuur 9: Begin- en eindsnelheden van het stabiliteitsgebied voor verschillende waarden van  $b$ .

We zien een kleine daling in het stabiliteitsgebied naarmate de lengte van de fiets toeneemt, maar deze is erg klein. het stabiliteitsgebied blijft ongeveer tussen de  $4\text{ m/s}$  en  $6\text{ m/s}$ .

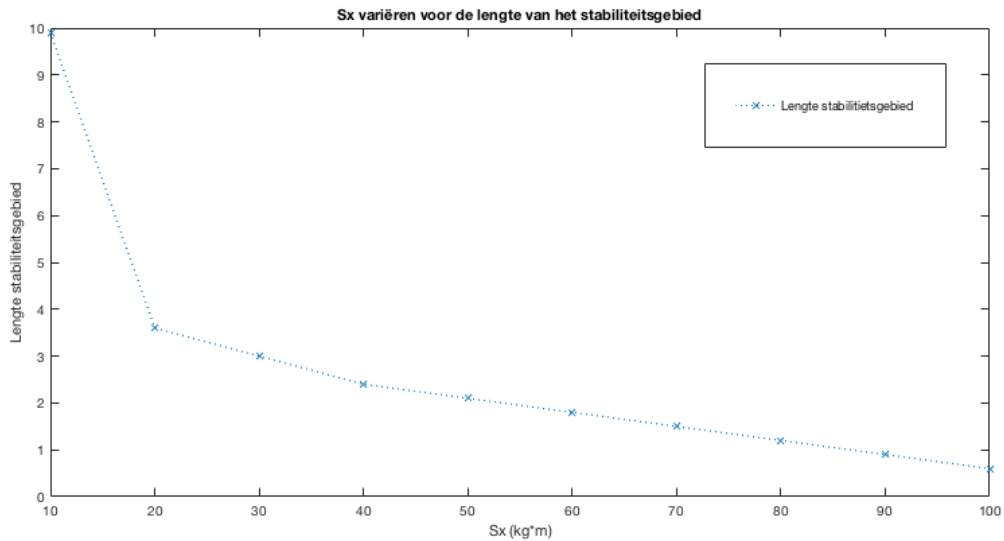
### 5.4 $S_x$ variëren

Nu kijken we wat er gebeurt als we  $S_x$  variëren. De resultaten zijn zichtbaar in figuur 10. Er was gegeven dat

$$S_x = mh_f$$

We laten dus het product van de massa van het totale systeem en de hoogte van  $h_f$  oplopen. Dit hangt natuurlijk samen. Als de massa groter is zal dat voornamelijk door de berijder komen. Een zwaardere berijder zal ook het zwaartepunt van het gehele systeem omhoog tillen.

Het beginpunt van het stabiliteitsgebied loopt op van  $2.7\text{ m/s}$  tot  $5.4\text{ m/s}$ . Hoe groter  $S_x$ , hoe hogere beginsnelheid nodig is om stabiel te worden. De code is terug te vinden in appendix J.



Figuur 10: Afname van het stabiliteitsgebied naarmate  $S_x$  groter wordt.

### 5.5 $S_x$ ten opzichte van $S_z$

Nu bekijken we de verhouding  $\frac{S_x}{S_z}$ . Deze termen waren als volgt:

$$\begin{aligned} S_x &= m_v h_v + m_a h_a \\ S_z &= m_v (b - a) + m_a u \end{aligned}$$

De term  $S_x$  zou je kunnen zien als de potentiële energie, gedeeld door de zwaartekrachtsconstante  $g$ . In  $a_6$  zit grof gezegd de term  $S_x - S_z$ , constanten weggelaten. Deze termen hebben te maken met de locatie van de zwaartepunten  $C_a$  en  $C_v$ . We laten  $S_z$  aflopen van gelijk aan  $S_x$  tot  $\frac{1}{4}S_x$ . Fysisch houdt dit in dat de zwaartepunten van het voorste- en achterste gedeelte van de fiets respectievelijk verder naar voren en naar achteren worden geplaatst.  $(b - a)$  is namelijk de horizontale afstand tot het zwaartepunt  $C_a$ , gemeten vanaf het contactpunt van het achterwiel met de grond.  $u$  is dezelfde afstand maar dan voor  $C_a$ . De resultaten zijn te zien in figuur 11. We zien dat naarmate de zwaartepunten verder uit elkaar geplaatst worden, de fiets snel instabiel wordt. Als  $S_z = \frac{1}{5}S_x$  is stabiliteit volledig verdwenen. Dit is fysisch goed te begrijpen. Het zwaartepunt  $C_v$  wordt naar achteren geplaatst. Dit kun je zien alsof je meer achterop je fiets gaat zitten. Dat betekent dat er minder massa op het voorwiel drukt. Een verstoring in de stuurhoek heeft dan een grotere invloed.

Aan de linker kant van de grafiek zien we dat als  $S_x = S_z$ , de fiets stabiel is van  $2.7 \text{ m/s}$  tot  $15 \text{ m/s}$ . Dit komt overeen met  $9.7 \text{ km/h}$  tot en met  $54 \text{ km/h}$ . Dit is een groot domein voor de stabiliteit. Wiskundig moet dan gelden dat

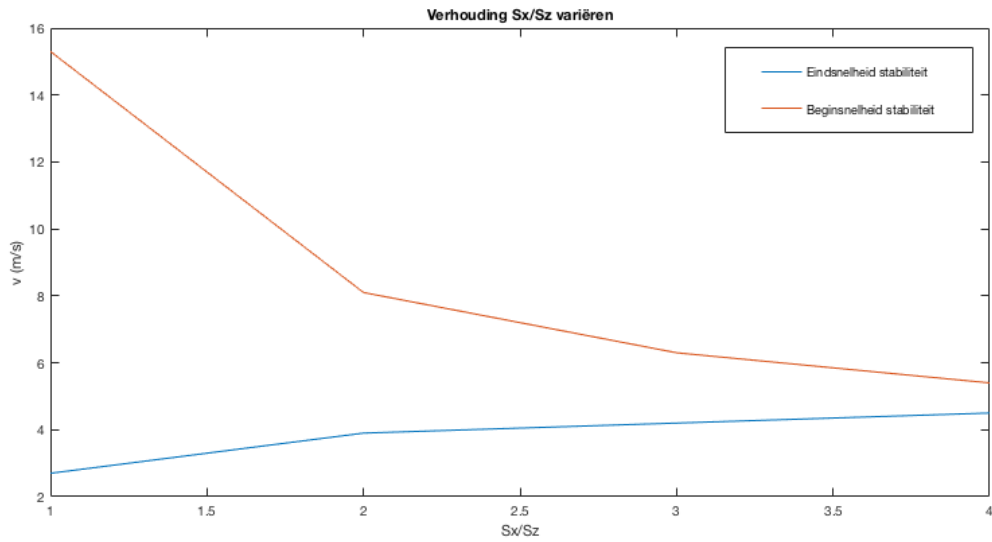
$$m_v h_v + m_a h_a = m_v (b - a) + m_a u$$

Een van de oplossingen hiervoor is bijvoorbeeld

$$h_v = b - a$$

$$h_a = u$$

Dit betekent dat vanaf het snijpunt van het achterwiel met het grondvlak, de horizontale afstand en verticale afstand tot een zwaartepunt even groot moet zijn. Dit geldt voor zowel  $C_a$  als  $C_v$ .

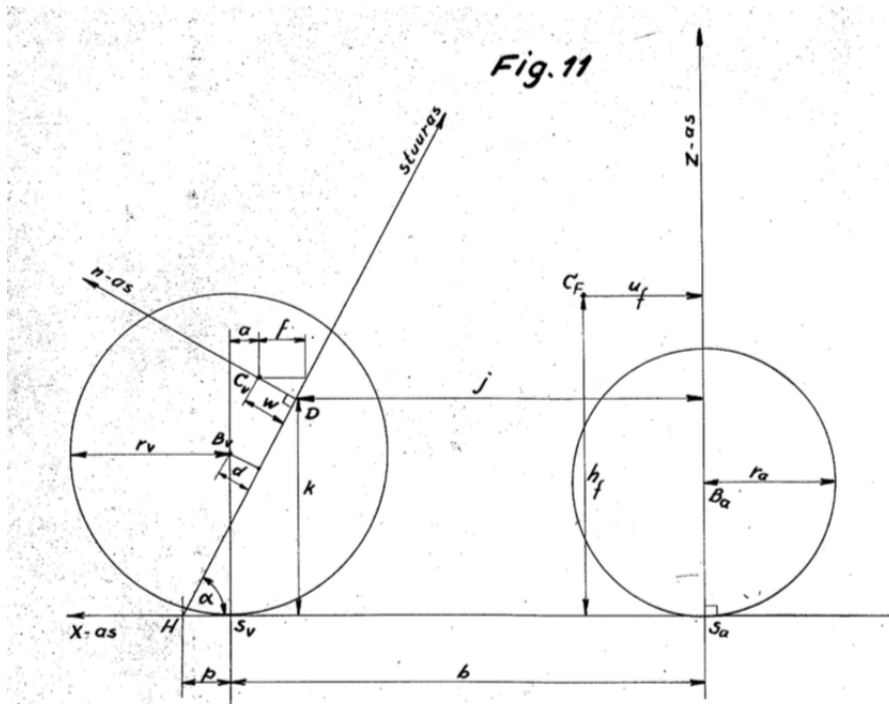


Figuur 11: Begin- en eindsnelheden voor verschillende verhoudingen  $\frac{S_x}{S_z}$

## 5.6 Diameter van de wielen

Dan gaan we de wielgrootte van de fiets variëren. We kunnen de diameters van de wielen vergroten en verkleinen. Nu nemen we wel de verandering van andere parameters mee. Als het goed is zou een kleinere diameter van het wiel minder stabiliteit moeten geven, zeker bij lage snelheden. Uit de literatuur [3] volgt dat  $r_a = r_v = 0.35 \text{ m}$ . We bekijken wat er gebeurt als we de straal van de wielen laten variëren tussen  $0.1 \text{ m}$ ,  $0.4 \text{ m}$  en  $0.7 \text{ m}$ . Dit betekent dat de massa's van de wielen ook vergroot of verkleind worden. We nemen aan dat de wielen van hetzelfde materiaal blijven als voorheen. De coördinaten van de zwaartepunten  $C_a$  en  $C_v$  veranderen hierdoor mee. De massaverhouding bij het achterste gedeelte van de fiets is  $\pm 2 \text{ kg}$  tegenover de massa van het frame en de berijder die samen  $\pm 80 \text{ kg}$  wegen. De verandering van positie van het zwaartepunt  $C_a$  is dus te verwaarlozen. De coördinaten van  $C_v$  zullen wel aanzienlijk veranderen. Door de verandering van deze coördinaten veranderen  $a$ ,  $f$  en  $w$  ook. We houden nu de hoek  $\alpha$ , de hoek tussen de stuuras en het grondvlak, constant. De afstand tussen de wielen  $b$  blijft ook constant. Als we aannemen dat de stuuras hetzelfde verbonden blijft als bij elke grootte van de wielen, geldt dat de verhouding  $\frac{d}{r}$  constant is. Enkele traagheidsmomenten veranderen mee doordat  $a$ ,  $w$ ,  $f$  en  $h_v$  veranderen.

Laten we eerst kijken naar  $C_v$ .  $C_v$  is een combinatie van het zwaartepunt van het wiel en de stuuras. Het zwaartepunt van het wiel ligt altijd in het midden in het punt  $B_v$ .



Figuur 12: Twee-dimensionale schets van de fiets.

We gaan kijken wat er gebeurt met de coördinaten van  $C_v$ . Er geldt voor de  $x$ - en  $z$ -coördinaat:

$$(b - a) = C_{v_x} = \frac{m_{vw}B_{v_x} + m_{sa}SA_x}{m_{vw} + m_{sa}} \quad (84)$$

$$h_v = C_{vz} = \frac{m_{vw}B_{vz} + m_{sa}SA_z}{m_{vw} + m_{sa}} \quad (85)$$

Hierin is

- $m_{vw}$ : massa voorwiel
- $m_{sa}$ : massa stuuras + stuur
- $SA$ : massamiddelpunt van de stuuras met stuur.

$SA_x$  en  $SA_z$  zijn onbekend. Deze kunnen bepaald worden door de rest in te vullen met de waarden uit [2]. Dan volgt:

$$SA_x = 0.94 \text{ m}$$

$$SA_z = 0.70 \text{ m}$$

Dan zijn de nieuwe massa's nodig van de wielen. Herfkens [2] gebruikt voor de straal van de wielen  $r_v = r_a = 0.35 \text{ m}$  en voor de massa van de wielen  $m_{vw} = m_{aw} = 2.65 \text{ kg}$ . Wij onderzoeken de wielen met  $r_1 = 0.1 \text{ m}$ ,  $r_2 = 0.4 \text{ m}$ ,  $r_3 = 0.7 \text{ m}$ . Voor  $r_3$  nemen we een hogere topsnelheid voor de fiets, omdat blijkt dat stabiliteit nog optreedt buiten  $15 \text{ m/s}$ . Verder nemen we aan dat de massa in het wiel in de rand zit, en dus verdeeld wordt over de omtrek van de fiets. De massa van de spaken en het middelpunt verwaarlozen we nu. Aan de omtrek zit ook de breedte van de band verwerkt wat zeker een grote invloed heeft op de massa. Dan geldt:

$$2\pi r \sim m_{vw}$$

Dan geldt dus:

$$2\pi r_1 = 2\pi \left( \frac{0.1}{0.35} r \right) \sim \left( \frac{0.1}{0.35} \right) m_{vw} \quad (86)$$

$$2\pi r_2 = 2\pi \left( \frac{0.4}{0.35} r \right) \sim \left( \frac{0.4}{0.35} \right) m_{vw} \quad (87)$$

$$2\pi r_3 = 2\pi \left( \frac{0.7}{0.35} r \right) \sim \left( \frac{0.7}{0.35} \right) m_{vw} \quad (88)$$

Nu kunnen de nieuwe waarden voor  $a$  en  $h_v$  worden bepaald. Nu moet de nieuwe waarde voor  $f$  nog bepaald worden. Hiervoor gebruiken we dat de verhouding  $\frac{d}{r}$  constant is dwz, de stuuras wordt gemonteerd aan het wiel op dezelfde afstand van het middelpunt van het wiel voor elke diameter. Op die manier kan door gelijkvormigheid van driehoeken de nieuwe trail  $p$  bepaald worden. Hiermee kan een lijnvergelijking opgesteld worden voor de stuuras en vervolgens kunnen we de kortste afstand van  $C_v$  naar deze lijn bepalen. Dan is  $w$  bepaald.

Met de waarden die al bekend zijn uit [2] bepalen we :  $\frac{d_0}{r_0} = \frac{0.08}{0.35}$ . Zo volgt voor  $r_1, r_2, r_3$

$$d_1 = \frac{d_0}{r_0} r_1 \quad (89)$$

$$d_2 = \frac{d_0}{r_0} r_2 \quad (90)$$

$$d_3 = \frac{d_0}{r_0} r_3 \quad (91)$$

Laat  $H'$  het punt zijn op de stuuras gesneden met de horizontaal door  $B_v$ , en  $p'$  de afstand tussen  $B_v$  en  $H'$ . Dan geldt

$$p' = \frac{d}{\sin(\alpha)} = \frac{0.08}{0.9063} \quad (92)$$

Door gelijkvormigheid van driehoeken geldt dat  $\frac{p'}{p}$  constant is,  $p = 0.08$  uit [2]. Zo volgt dat

$$\frac{p'}{p} = \frac{0.08}{\sin(\alpha) \cdot 0.08} = \frac{1}{\sin(\alpha)} \Rightarrow p = \sin(\alpha)p'$$

Nu kunnen we de nieuwe trail  $p$  bepalen voor de drie verschillende grootte voor de wielen.

$$p_1 = \sin(\alpha)p'_1 = \sin(\alpha)\frac{d_1}{\sin \alpha} = d_1 \quad (93)$$

$$p_2 = \sin(\alpha)p'_2 = \sin(\alpha)\frac{d_2}{\sin \alpha} = d_2 \quad (94)$$

$$p_3 = \sin(\alpha)p'_3 = \sin(\alpha)\frac{d_3}{\sin \alpha} = d_3 \quad (95)$$

Laat nu  $(X, Z)$  een assenstelsel zijn met de oorsprong in het punt  $S_a$ , zie figuur 6. De positieve  $x$ -as loopt naar links en de positieve  $z$ -as is naar boven gericht. De snijpunten van de lijn met de stuuras en het grondvlak zijn nu voor  $r_1, r_2$  en  $r_3$  respectievelijk  $H_1 = p_1 + b, H_2 = p_2 + b$  en  $H_3 = p_3 + b$ . De lijnvergelijkingen voor de stuuras zijn dan:

$$r_1 : z(x) = -\tan(\alpha)x + H_1 \tan(\alpha) \quad (96)$$

$$r_2 : z(x) = -\tan(\alpha)x + H_2 \tan(\alpha) \quad (97)$$

$$r_3 : z(x) = -\tan(\alpha)x + H_3 \tan(\alpha) \quad (98)$$

De afstand  $w$  is nu gelijk aan de kortste afstand tot deze lijn vanaf het punt  $C_v$ . Herinner dat

$$C_{v_i} = \left( \frac{m_{vw_i}B_{v_x} + m_{sa}SA_x}{m_{vw_i} + m_{sa}}, \frac{m_{vw_i}B_{v_z} + m_{sa}SA_z}{m_{vw_i} + m_{sa}} \right)$$

Dit resulteert in

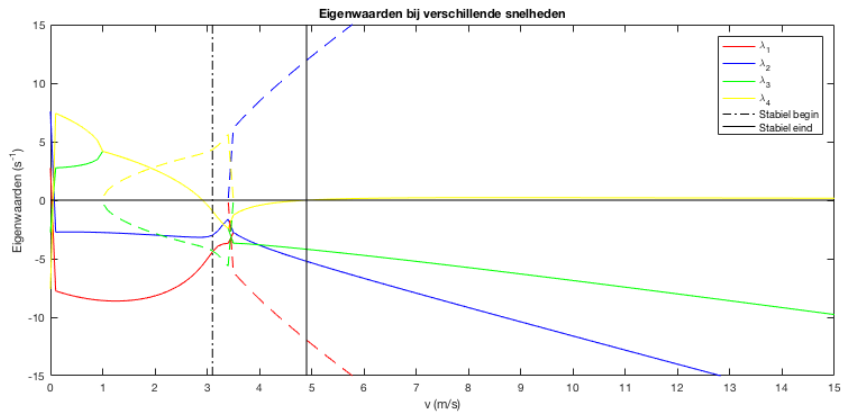
$$C_{v_1} = (0.90; 0.72) \rightarrow w_1 = 0.61 \quad (99)$$

$$C_{v_2} = (1.10; 0.34) \rightarrow w_2 = 0.60 \quad (100)$$

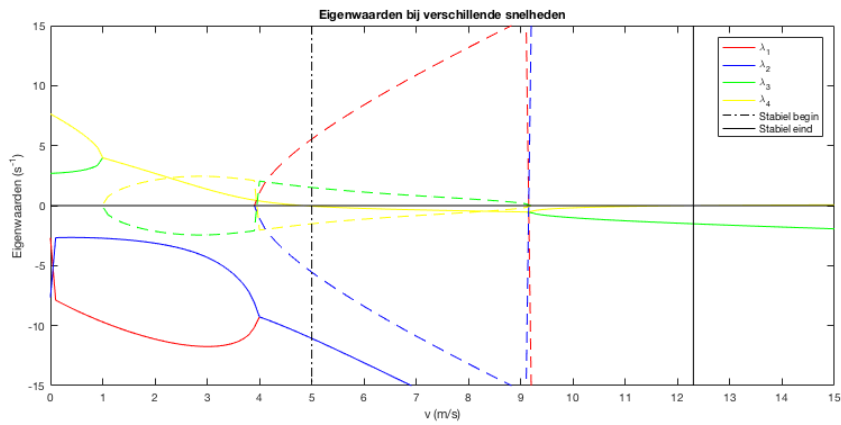
$$C_{v_3} = (1.14; 0.26) \rightarrow w_3 = 0.70 \quad (101)$$

Figuur 13 bevat drie subplots, elk voor een andere straal van de wielen een plot voor de stabiliteit. De codes hiervoor zijn te vinden in appendix D,E en F. Twee dingen vallen gelijk op als de drie figuren vergeleken worden. Het eerste is het feit dat de beginsnelheid voor het stabiliteitsgebied toeneemt naarmate de straal  $r_v$  van de wielen toeneemt. Dit is te verklaren door de massa van de wielen. Een groter wiel betekent meer massa. Hoe groter de massa van een object, hoe groter de zwaartekracht is. Als er een kleine verstoring is in de stuurhoek  $\beta$  of in de kantelingshoek  $\epsilon$ , wordt het zwaartepunt dus verplaatst vanuit het evenwichtspunt. Bij lage snelheden zal een kanteling eerder van toepassing zijn. Dan zorgt een grotere zwaartekracht dus al snel voor instabiliteit en zal de fiets omvallen.

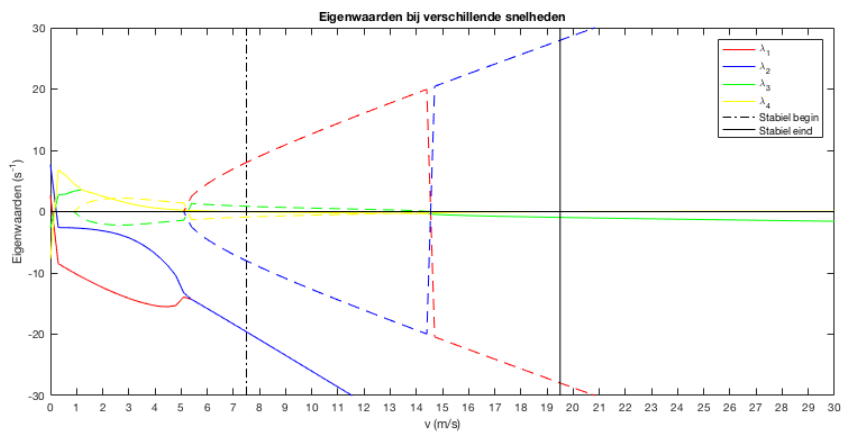
Het tweede wat opvalt is dat het stabiliteitsgebied vergroot wordt naarmate  $r$  toeneemt. Ook dit is een gevolg van de massavergroting. Een groter wiel op snelheid heeft een grotere externe kracht nodig om het uit balans te krijgen. De gyroscopische effecten zijn groter



(a)  $r = 0.1 \text{ m}$ : Stabiteit als  $3.1 \text{ m/s} \leq V \leq 4.9 \text{ m/s}$



(b)  $r = 0.4 \text{ m}$ : Stabiteit als  $5 \text{ m/s} \leq V \leq 12.3 \text{ m/s}$



(c)  $r = 0.7 \text{ m}$ : Stabiteit als  $7.5 \text{ m/s} \leq V \leq 19.5 \text{ m/s}$

Figuur 13: Variërende straal van de wielen.



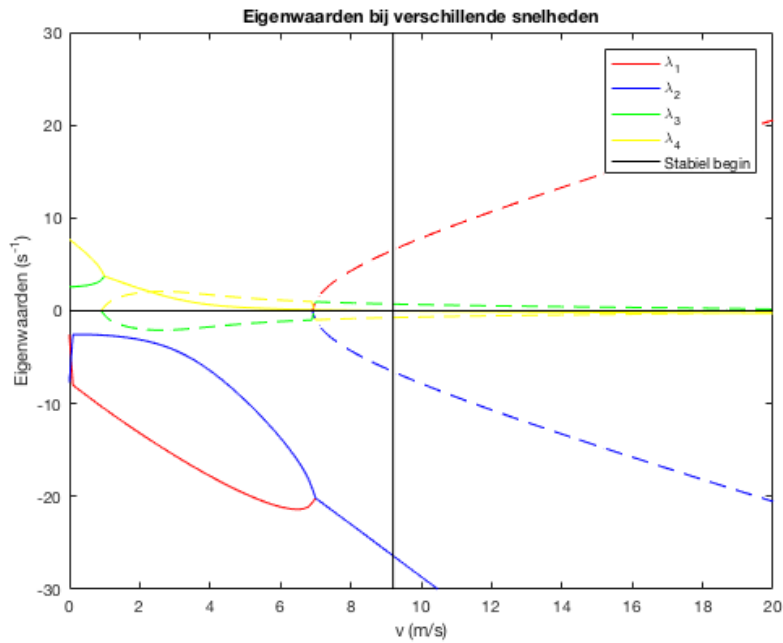
bij grotere wielen. Er ontstaat een moment in de voorwaartse richting van de fiets in de  $x$ -richting. In hoofdstuk 6 komen we hier nog op terug. Als de wielen groter zijn is dit moment ook groter.

We moeten weer opmerken dat de grootste eigenwaarde dicht boven nul ligt, net als in H4. Instabiliteit treedt dus pas na langere tijd op.

We kunnen concluderen dat de grootte van het wiel aanzienlijk invloed heeft op de stabiliteit van de fiets. Wat opgemerkt moet worden is dat weer de grootste eigenwaarden heel dicht boven nul licht. Het zal dus lang duren voordat de instabiliteit optreedt buiten het stabiliteitsgebied.

## 5.7 Penny-farthing

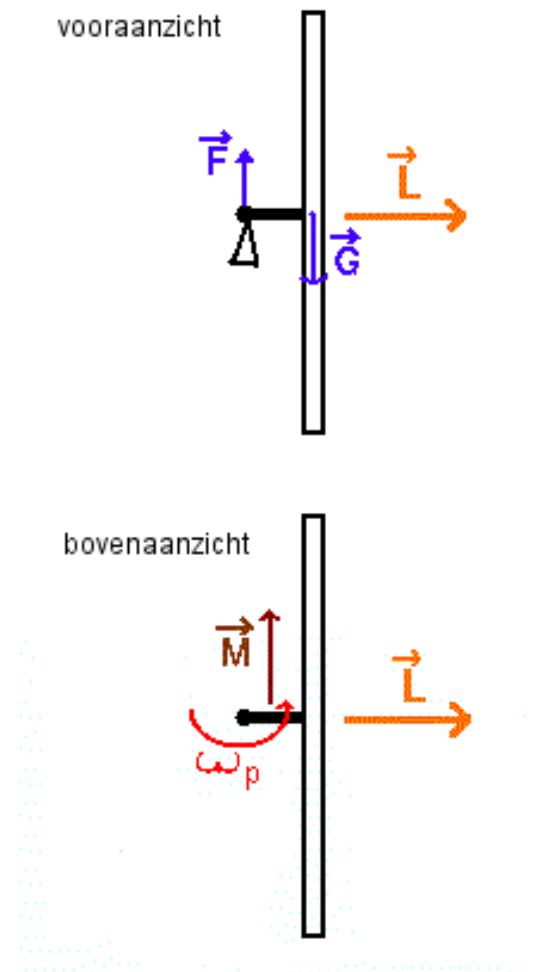
De fiets is door de jaren heen sterk ontwikkeld om het rijwiel steeds veiliger en gebruiksvriendelijker te maken. Aan het eind van de 19de eeuw maakten mensen gebruik van de vélocipede. Dit was een fiets met een relatief groot voorwiel. We bekijken hier de stabiliteit ervan. Het voorwiel heeft nu  $r_v = 1\text{ m}$ , het achterwiel blijft hetzelfde:  $r_a = 0.35\text{ m}$ . De parameters veranderen weer mee zoals in H5.6. Wat we zien is erg opmerkelijk. Als we de fiets tot wel  $20\text{ m/s}$ , wat gelijk is aan  $72\text{ km/h}$ , laten oplopen blijft hij stabiel. Zo is te zien in figuur 14. Wel is de beginsnelheid van het stabiliteitsgebied  $33\text{ km/h}$ . Je moet dus hard fietsen om in het stabiliteitsgebied te komen.



Figuur 14: Stabiliteit van de penny-farthing.

## 6 Gyroscopische effecten

We hebben nu een aantal resultaten voor de stabiliteit van de fiets bij verschillende domeinen van snelheid. Maar wat houdt de fiets nu eigenlijk stabiel als er beweging komt in de hoek  $\epsilon$  en  $\beta$ ? Dat wordt veroorzaakt door het gyroscopisch effect. Je kunt het beschrijven als het feit dat, als men een kracht uitoefent op de as van een snel draaiend voorwerp, de as niet zal draaien in de richting van de kracht maar in een richting loodrecht erop, namelijk in de richting van het moment van de kracht. In ons geval is dat dus de voorwaartse beweging. [4]



Figuur 15: Gyroscopisch effect  $G$  van een draaiend wiel. [4]

In H3.1.3 zijn de volgende gyroscopische momenten gegeven in de  $x$ -richting en  $z$ -richting voor het achterste gedeelte en voorste gedeelte van de fiets:

$$M_{xa} = I_{\omega a} \omega_a \dot{\theta} \quad (102)$$

$$M_{za} = I_{\omega a} \omega_a \dot{\epsilon} \quad (103)$$

$$M_{xv} = I_{\omega v} \omega_v (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \quad (104)$$

$$M_{zv} = I_{\omega v} \omega_v (\dot{\beta} \cot \alpha + \dot{\epsilon}) \quad (105)$$

De verwachting is dat fietsen niet stabiel zijn als er geen gyroscopisch effect werkt. Dit gaan we hier na. De termen  $I_{\omega a}$  en  $I_{\omega v}$  komen alleen voor in deze gyroscopische momenten. Als we deze momenten dus gelijk aan nul willen, zonder dat de rest van het model verandert, kunnen we stellen  $I_{\omega a} = I_{\omega v} = 0$ . We gebruiken weer het Routh Criterium om te controleren of er stabiliteit optreedt voor bepaalde snelheden. Met MAPLE is het resultaat berekend met de waarden die zijn gebruikt uit [3], met  $I_{\omega a} = I_{\omega v} = 0$ . De code staat in appendix L. Het resultaat is zoals verwacht. Er bestaat geen  $V \in \mathbb{R}$  zodat alle eigenwaarden negatief zijn. Het gyroscopisch effect is dus van belang voor de stabiliteit van de fiets.

## 7 Conclusie en discussie

In dit project is onderzoek gedaan naar de stabiliteit van het rijwiel. Hiervoor is gebruik gemaakt van het fysische model van een fiets van Herfkens [3]. Die deelde de fiets op in twee componenten: De eerste component was de stuurvork, het voorwiel en het stuur. De tweede component was de berijder, het frame en het achterwiel. Zo konden we met twee zwaartekrachtspunten werken,  $C_a$  en  $C_v$ . We hebben naar kleine verstoringen gekeken in de stabiliteit. Zo konden we met de methode van Euler-Lagrange twee lineaire beweging-vergelijkingen opstellen. Dit waren twee differentiaalvergelijkingen voor de stuurhoek  $\beta$  en de kanteling  $\epsilon$ . Door niet de triviale oplossing te bekijken ontstond er een vierdegraadsvergelijking, elk met andere oplossingen voor variërende snelheden. Uit het standaard model bleek de fiets stabiel te zijn tussen ongeveer tussen 4  $m/s$  en 6  $m/s$ . Daarna zijn de parameters aangepast.

Zo blijkt dat de hoogte van het zwaartepunt van het achterste gedeelte veel invloed had bij lage snelheden. Hier wordt het stabiliteitsgebied vergroot. Naarmate de snelheid toeneemt wordt dit steeds minder. De variaties in  $\alpha$ , de hoek tussen het grondvlak en de stuuras, blijken minder relevant. Dit is te wijten aan een kleine verplaatsing van het zwaartepunt. De lengte van de fiets  $b$  heeft ook weinig invloed, hier zijn de zwaartepunten op dezelfde plek gebleven. Zo blijkt ook dat als we de potentiële energie, gedeeld door de constante  $g$ , laten toenemen, het stabiliteitsgebied zeer verkleind werd. Dit is het gevolg van de verhoging van het zwaartepunt van het totale systeem. De verschillende maten van de wielen, en hierdoor aanpassingen van het zwaartepunt hebben wel een grote invloed. Naarmate de wielen groter werden ligt de beginsnelheid steeds lager, maar de lengte van het stabiliteitsgebied blijft toenemen. Dit is te wijten aan de grotere massa en het gyroscopisch effect dat groter wordt bij grotere wielen. We zien ook dat als we de horizontale en verticale afstand van een zwaartepunt gelijk houden, gemeten vanaf het contactpunt van het achterwiel met de grond, de fiets van 9.7  $km/h$  tot 54  $km/h$  stabiel is. Deze voorwaarde levert het grootste domein aan snelheden op voor de stabiliteit van de fiets. De stabiliteit wordt elke keer veroorzaakt door het gyroscopisch effect. Dit houdt in dat wanneer er een kracht komt op de as van een draaiend voorwerp, er een moment ontstaat loodrecht op deze kracht. Dit houdt de wielen in evenwicht.

Voor vervolg onderzoek zijn een aantal punten die nog verbeterd kunnen worden. Als de fiets instabiel werd, bleef de grootste eigenwaarde dicht boven nul liggen. Dit betekent dat instabiliteit pas na lange tijd optreedt bij die snelheden. Het tweede waar beter onderzoek naar gedaan kan worden is het feit dat elke parameter invloed heeft op andere parameters. Je kunt fysisch niet een parameter aanpassen zonder dat alles verandert. In dit onderzoek is dat wel gedaan om wiskundig te kijken welke parameters de grootste invloed hadden op het stabiliteitsgebied.

## Referenties

- [1] A.L. Schwab en J.P. Meijaard. De stabiele fiets. *Nederlands tijdschrift voor Natuurkunde*, 74:24–28, 2008.
- [2] Geert Jan Olsder en J.W. Van der Woude. *Mathematical systems theory*. VSSD Delft, 2005.
- [3] B.D. Herfkens. Stabiliteit van het rijwiel. *Instituut voor rijwielontwikkeling*, 1949, vertaling 2006 door Kooijman.
- [4] <https://nl.wikibooks.org/wiki/KlassiekeMechanica/VoorwerpendynamicaGyroscopischeffect>, December 2015.

## A Matlab code met variabelen uit [1]

Met de waarden uit het artikel van Schwab wordt met deze code de stabiliteitsplot gemaakt te zien in figuur 3 van H5.3

```
clear all
close all
clc

%Hier begint de code voor de stabiliteit

h = 0.05;
v = [0:h:10];
n = length(v);
syms w %variable w creeren, dit is lambda
A = [81 2.3;2.3 0.3]; %Matrix met dubbele afgeleiden
B = [0 34; -0.9 1.7]; %Matrix met enkele afgeleiden
C = g*[-81 -2.6;-2.6 -0.8]; %Matrix zonder afgeleiden
D = [0 77; 0 2.7]; %Matrix zonder afgeleiden
R = zeros(4,n); %Matrix voor reele eigenwaarden
I = zeros(4,n); %Matrix voor complexe eigenwaarden
reopl = zeros(4,1); %vector met re(lambda)
imopl = zeros(4,1); %Vector met im(lambda)
stabvec = zeros(1,n) %Stabiliteitsvector

for i = 1:n
    E = w.^2*A + w.*B*v(i) + C + D*v(i).^2;
    determinant = det(E); %Hier ontstaat 4e graads polynoom
    eqn = determinant == 0;
    res = solve(eqn); %Det = 0 oplossen
    for j = 1:4 %kolom maken van oplossingen
        reopl(j,1) = real(res(j)); %reele oplossingen in kolomvector
        imopl(j,1) = imag(res(j)); %imaginaire oplossingen in kolomvector
    end
    if reopl(1,1)<0 & reopl(2,1)<0 & reopl(3,1)<0 & reopl(4,1)<0 %Alle re(lambda)<0
        stabvec(i) = 1;
    else
        stabvec(i) = 0;
    end
    R(:,i) = reopl; %Matrix maken van reele oplossingen
    I(:,i) = imopl; %Matrix maken van complexe oplossingen
end

stabvalue = find(stabvec == 1); %Zoeken waar alle re(lambda) < 0
stabval = h*stabvalue; %In verhouding maken emt de stapgrootte

y = zeros(1,n); %Nullijn maken
k = R(1,:); %vector maken van Re(lambda_1)
```

```

l = R(2,:); %vector maken van Re(lambda_2)
m = R(3,:); %vector maken van Re(lambda_3)
p = R(4,:); %vector maken van Re(lambda_4)

a = I(1,:); %vector maken van Im(lambda_1)
b = I(2,:); %vector maken van Im(lambda_2)
c = I(3,:); %vector maken van Im(lambda_3)
d = I(4,:); %vector maken van Im(lambda_4)

figure
%Reele oplossingen plotten
plot(v,k,'r')
hold on
plot(v,l,'b')
hold on
plot(v,m,'g')
hold on
plot(v,p,'y')
hold on
%Complexe oplossingen plotten
plot(v,a,'--r')
hold on
plot(v,b,'--b')
hold on
plot(v,c,'--g')
hold on
plot(v,d,'--y')
hold on
plot(v, y,'black')
hold on

yL = get(gca,'YLim'); %Verticale lijnen plotten voor stabiliteitsgebied
line([stabval(1) stabval(1)],yL,'Color','black');
line([stabval(end) stabval(end)],yL,'Color','black');

legend('Re(\lambda_1)', 'Re(\lambda_2)', 'Re(\lambda_3)', 'Re(\lambda_4)', 'Im(\lambda_1)', 'Im(\lambda_2)', 'Im(\lambda_3)', 'Im(\lambda_4)', 'Stabiel begin', 'Stabiel eind', 'Location', 'northeast')
xlabel('v (m/s)')
ylabel('Waarden eigenwaarden')
title('Eigenwaarden bij verschillende snelheden')
xlim([0 10]);
ylim([-10 10]);

```



## B Variabelen uit het artikel van Herfkens [3]

Hieronder volgt de code voor de bepaling van de stabiliteit aan de hand van de parameters uit [3].

```
clear all
close all
clc

%Hier begint de code voor de stabiliteit

h = 0.1;
v = [0:h:15];
n = length(v);
g = 9.81;
R = zeros(4,n);           %Matrix voor reele eigenwaarden
I = zeros(4,n);           %Matrix voor complexe eigenwaarden
reopl = zeros(4,1);       %vector met re(lambda)
imopl = zeros(4,1);       %Vector met im(lambda)
stabvec = zeros(1,n);     %Stabiliteitsvector

%-----
rv = 0.35; %Radius voorwiel
ra = 0.35; %Radius achterwiel
b = 1.17; %aftand tussen Sv en Sa, raakpunten van de wielen op de grond
%H = snijpunt stuuras met snijlijn framevlak en grondvlak
p = 0.08; %trail, afstand tussen H en Sv
a = 0.12; %Horizontale afstand tussen Cv en de verticaal door Sv
uf = 0.33; %Afstand tussen Ca en de verticaal op de lijn door Sa en Sb
hf = 1; %Afstand van Ca naar het grondvlak (X-as)
j = 1; %Afstand van D naar de Z-as
k = 0.52; %Afstand van D naar het grondvlak (X-as)
d = 0.08; %Afstand van Bv naar de stuuras
w = 0.03; %Afstand van Cv naar de stuuras = CvD
alfa = 65*(pi/180); %Hoek tussen stuuras en grondvlak
f = w/sin(alfa); % aftstand van Cv naar de stuuras, horizontaal gemeten
g = 9.81; %Zwaartekrachtsconstante
M = 82.5; %Massa van fiets + berijder
Mv = 5.55; %Massa stuurgedeelte
Mwa = 2.65; %Massa achterwiel
Mwv = 2.65; %Massa voorwiel
Iwa = 0.245; %Traagheidsmoment van achterwiel om zijn as
Iwv = 0.245; %Traagheidsmoment van voorwiel om zijn as
Ix = 98; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder om de x-as
Iz = 14.7; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder om de z-as
Ixz = 23.5; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder om de x-as
Ias = 0.195;
Ian = -0.04;
Sx = 82.5;
```

```
Sz = 27.2;
Ss = 0.005;
```

```
DEL = Ias*cot(alfa)+Ian+k*f*Mv;
GAM = Ias-Ian*cot(alfa)+j*f*Mv;
```

```
%-----
```

```
for i = 1:n
    syms V
    a1 = Ix;
    a2 = 0;
    a3 = -g*Sx;
    a4 = (p/b)*Ixz + DEL;
    a5 = (v(i)/b)*(Ixz+p*Sx+(b+p)/b*Iwv*(b/rv)+(p/b)*Iwa*(b/ra));
    a6 = (v(i).^2/b)*(Sx+(Iwv/rv)+(Iwa/ra))-g*((p/b)*Sz+f*Mv);

    b1 = (p/b)*Ixz + DEL;
    b2 = -v(i)*(((b+p)/b)*(Iwv/rv)+(p/b)*(Iwa/ra));
    b3 = -g*((p/b)*Sz+f*Mv);
    b4 = Ias/(sin(alfa)^2)+(p/b)^2*Iz+(2*p/b)*GAM;
    b5 = (v(i)/b)*((p/b)*Iz+p*(p/b * Sz+f*Mv)+GAM);
    b6 = (p/b *Sz+f*Mv+(Iwv/rv)*cot(alfa))*(v(i).^2/b)-g*(p/b *Sz+f*Mv)*cot(alfa);

    A = [a1 a4;b1 b4];      %Matrix met dubbele afgeleiden
    B = [a2 a5; b2 b5];    %Matrix met enkele afgeleiden
    C = [a3 a6; b3 b6];    %Matrix zonder afgeleiden

    E = V.^2*A +V.*B + C ;
    determinant = det(E);      %Hier ontstaat 4e graads polynoom
    eqn = determinant == 0;
    res = solve(eqn,V);        %Det = 0 oplossen
    for j = 1:4                %kolom maken van oplossingen
        reopl(j,1) = real(res(j)); %reele oplossingen in kolomvector
        imopl(j,1) = imag(res(j)); %imaginaire oplossingen in kolomvector
    end
    if reopl(1,1)<0 & reopl(2,1)<0 & reopl(3,1)<0 & reopl(4,1)<0      %Alle re(lambda)<0
        stabvec(i) = 1;
    else
        stabvec(i) = 0;
    end
    R(:,i) = reopl;          %Matrix maken van reele oplossingen
    I(:,i) = imopl;         %Matrix maken van complexe oplossingen
end
```

```

stabvalue = find(stabvec == 1);           %Zoeken waar alle re(lambda) < 0
stabval = h*stabvalue;                   %In verhouding maken emt de stapgrootte

y = zeros(1,n);                          %Nullijn maken
k = R(1,:);                              %vector maken van Re(lambda_1)
l = R(2,:);                              %vector maken van Re(lambda_2)
m = R(3,:);                              %vector maken van Re(lambda_3)
p = R(4,:);                              %vector maken van Re(lambda_4)

a = I(1,:);                              %vector maken van Im(lambda_1)
b = I(2,:);                              %vector maken van Im(lambda_2)
c = I(3,:);                              %vector maken van Im(lambda_3)
d = I(4,:);                              %vector maken van Im(lambda_4)

figure
%Reele oplossingen plotten
p1 = plot(v,k,'r')
hold on
p2 = plot(v,l,'b')
hold on
p3 = plot(v,m,'g')
hold on
p4 = plot(v,p,'y')
hold on
%Complexe oplossingen plotten
plot(v,a,'--r')
hold on
plot(v,b,'--b')
hold on
plot(v,c,'--g')
hold on
plot(v,d,'--y')
hold on
plot(v, y,'black')
hold on

yL = get(gca,'YLim');                    %Verticale lijnen plotten voor stabiliteitsgebied
p5 = line([stabval(1) stabval(1)],yL,'Color','black');
p6 = line([stabval(end) stabval(end)],yL,'Color','black');

legend([p1 p2 p3 p4 p5 p6],{'\lambda_1','\lambda_2','\lambda_3','\lambda_4',
'Stabil begin','Stabil eind'},'Location','northeast')
xlabel('v (m/s)')
ylabel('Eigenwaarden')
title('Eigenwaarden bij verschillende snelheden')
xlim([0,15]);
ylim([-15,15]);

```

```
stabval(1)  
stabval(end)
```

## C MAPLE code

Onderstaande code is gebruikt voor de bepaling van het stabiliteitsgebied door middel van het Routh Criterium. Dit is terug te vinden in H4.4.

*%Variabelen uit artikel van Schwab :*  
*%kappa's zijn bepaald aan de hand van de Routh Table*

$g := 9.81 :$   
 $a1 := 81 :$   
 $a2 := 0 :$   
 $a3 := -81 * g :$   
 $a4 := 2.3 :$   
 $a5 := 34 * V :$   
 $a6 := -2.6 * g + 77 * V^2 :$

$b1 := 2.3 :$   
 $b2 := -0.9 * V :$   
 $b3 := -2.6 * g :$   
 $b4 := 0.3 :$   
 $b5 := 1.7 * V :$   
 $b6 := -0.8 * g + 2.7 * V^2 :$

$A1 := a1 * b4 - a4 * b1 :$   
 $A2 := a1 * b5 - a5 * b1 - a4 * b2 :$   
 $A3 := a1 * b6 + a3 * b4 - a6 * b1 - a5 * b2 - a4 * b3 :$   
 $A4 := a3 * b5 - a6 * b2 - a5 * b3 :$   
 $A5 := a3 * b6 - a6 * b3 :$

$kappa1 := (A2 * A3 - A1 * A4) / A2 :$   
 $kappa2 := A5 :$   
 $kappa3 := (kappa1 * A4 - kappa2 * A2) / kappa1 :$   
 $kappa4 := kappa2 :$

$solve(\{A1 > 0, A2 > 0, kappa1 > 0, kappa3 > 0, kappa4 > 0\}, V)$   
 $\{4.078280944 < V, V < 5.547691996\}$

**(1)**

*%Herfkens variabelen voor de routh table :*  
*%Kappa's zijn voor de routh table :*

$g := 9.81 :$   
 $rv := 0.35 :$   
 $ra := 0.35 :$   
 $b := 1.17 :$   
 $p := 0.08 :$   
 $a := 0.12 :$   
 $ua := 0.33 :$   
 $hf := 1 :$   
 $j := 1 :$   
 $k := 0.52 :$   
 $d := 0.08 :$   
 $w := 0.03 :$   
 $alfa := 65 * (2 * Pi / 360) :$   
 $f := w / \sin(alfa) :$   
 $g := 9.81 :$   
 $M := 82.5 :$   
 $Mv := 5.55 :$   
 $Ma := M - Mv :$   
 $Mwa := 2.65 :$   
 $Mwv := 2.65 :$   
 $Iwa := 0.245 :$   
 $Iwv := 0.245 :$   
 $Ix := 98 :$   
 $Iz := 14.7 :$   
 $Ixz := 23.5 :$   
 $Ias := 0.195 :$   
 $Ian := -0.04 :$   
 $Sx := M * hf :$   
 $Sz := 27.2 :$   
 $Ss := 0.005 :$

$DEL := Ias * \cot(alfa) + Ian + k * f * Mv :$   
 $GAM := Ias - Ian * \cot(alfa) + j * f * Mv :$

$a1 := Ix :$   
 $a2 := 0 :$   
 $a3 := -g * Sx :$   
 $a4 := (p/b) * Ixz + DEL :$   
 $a5 := (V/b) * (Ixz + p * Sx + (b+p)/b * Iwv * (b/rv) + (p/b) * Iwa * (b/ra)) :$   
 $a6 := (V^2/b) * (Sx + (Iwv/rv) + (Iwa/ra)) - g * ((p/b) * Sz + f * Mv) :$   
 $b1 := (p/b) * Ixz + DEL :$   
 $b2 := -V * (((b+p)/b) * (Iwv/rv) + (p/b) * (Iwa/ra)) :$   
 $b3 := -g * ((p/b) * Sz + f * Mv) :$   
 $b4 := Ias / (\sin(alfa)^2) + (p/b)^2 * Iz + (2 * p/b) * GAM :$   
 $b5 := (V/b) * ((p/b) * Iz + p * (p/b * Sz + f * Mv) + GAM) :$

$$b6 := (V^2/b) * (p/b * Sz + f * Mv + (I_{wv}/rv) * \cot(\alpha)) - g * (p/b * Sz + f * Mv) * \cot(\alpha) :$$

$$A1 := \text{evalf}(a1 * b4 - a4 * b1) :$$

$$A2 := \text{evalf}(a1 * b5 - a5 * b1 - a4 * b2) :$$

$$A3 := \text{evalf}(a1 * b6 + a3 * b4 - a6 * b1 - a5 * b2 - a4 * b3) :$$

$$A4 := \text{evalf}(a3 * b5 - a6 * b2 - a5 * b3) :$$

$$A5 := \text{evalf}(a3 * b6 - a6 * b3) :$$

$$kappa1 := (A2 * A3 - A1 * A4) / A2 :$$

$$kappa2 := A5 :$$

$$kappa3 := (kappa1 * A4 - kappa2 * A2) / kappa1 :$$

$$kappa4 := kappa2 :$$

$$\text{solve}(\{A1 > 0, A2 > 0, kappa1 > 0, kappa3 > 0, kappa4 > 0\}, V)$$

$$\{4.430863070 < V, V < 5.958090891\}$$

**(1)**



D  $r = 0.1 \text{ m}$

De straal van de wielen is verkleind naar  $r = 0.1 \text{ m}$ . In H5.6 staan de resultaten.

```
clc
clear all
close all

h = 0.1;
v = [0:h:15];
n = length(v);
g = 9.81;
R = zeros(4,n);           %Matrix voor reele eigenwaarden
I = zeros(4,n);           %Matrix voor complexe eigenwaarden
reopl = zeros(4,1);       %vector met re(lambda)
imopl = zeros(4,1);       %Vector met im(lambda)
stabvec = zeros(1,n);     %Stabiliteitsvector

rv = 0.35; %Radius voorwiel
ra = 0.35; %Radius achterwiel
b = 1.17; %aftand tussen Sv en Sa, raakpunten van de wielen op de grond
a = 0.12;
hCv = 0.5327;
%Coordinaten Ca:
ua = 0.2777;             %x coördinaat Ca
hCa = 1;                 %z coördinaat Ca
%Deze massa's zijn gekozen

%Massa's

M = 82.5; %Massa van fiets + berijder

Mv = 5.55; %Massa voorste gedeelte
Ma = M - Mv; %Massa achterste gedeelte

Maw = 2.65; %Massa achterwiel
Mvw = 2.65; %Massa voorwiel

Msa = 2.85; %Massa stuuras
Mazw = Ma - Maw; %Massa achterste gedeelte zonder wiel

Mvw1 = (0.1/rv)*Mvw;
Mvw2 = (0.4/rv)*Mvw;
Mvw3 = (0.7/rv)*Mvw;

%Stuuras coördinaten bepalen
SAx = ((b-a)*(Mvw+Msa)-Mvw*b)/Msa;
```

```

SAz = (hCv*(Mvw+Msa)-Mvw*rv)/Msa;

%Zwaartepunt coördinaten bepalen
CVx1 = (Mvw1*b+Msa*SAz)/(Mvw1+Msa); %r = 0.1
CVz1 = (Mvw1*rv+Msa*SAz)/(Mvw1+Msa);

CVx2 = (Mvw2*b+Msa*SAz)/(Mvw2+Msa); %r = 0.4
CVz2 = (Mvw2*rv+Msa*SAz)/(Mvw2+Msa);

CVx3 = (Mvw3*b+Msa*SAz)/(Mvw3+Msa); %r = 0.7
CVz3 = (Mvw3*rv+Msa*SAz)/(Mvw3+Msa);

H1 = 0.08/0.35*0.1+b;
H2 = 0.08/0.35*0.4+b;
H3 = 0.08/0.35*1+0.7*b;

p = 0.08; %trail, afstand tussen H en Sv
a = b-CVx1; %Horizontale afstand tussen Cv en de verticaal door Sv
alfa = 65*(pi/180); %Hoek tussen stuuras en grondvlak
w = 0.6995;
f = w/sin(alfa); % afstand van Cv naar de stuuras, horizontaal gemeten
g = 9.81; %Zwaartekrachtsconstante
j = b-a-f*(sin(alfa))^2; %x coördinaat van D
k = CVz1 - f*cos(alfa)*sin(alfa) ;%Afstand van D naar het grondvlak (X-as)

%Deze traagheidsmomenten zijn gekozen
Iwa = 0.245; %Traagheidsmoment van achterwiel om zijn as
Iwv = 0.245; %Traagheidsmoment van voorwiel om zijn as

IxaPLUSIxv = 19.4752;
IzaPLUSIzv = 2.6469;

% Nu nieuwe massa's toevoegen
% Nieuwe radii toevoegen

Mv = Mvw1 + Msa;
Ma = Mvw1 + Mazw;
ra = 0.1;
rv = 0.1;

%Traagheidsmoment geheel fiets + berijder:
Ix = IxaPLUSIxv + CVz1^2*Mv + hCa^2*Ma; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder
Iz = IzaPLUSIzv + (b-a)^2*Mv + ua^2*Ma; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder
IzzaPLUSIxzv = -1.4692;

```

```

Ixz = IxzaPLUSIxzv + ua*hCa* Ma + (b-a)*CVz1; %Traagheidsproduct van de complete fiets + be

Ias = 0.195;
Ian = -0.04;
Sx = Mv*CVz1+Ma*hCa ;
Sz = Mv*(b-a)+ua*Ma ;

DEL = Ias*cot(alfa)+Ian+k*f*Mv;
GAM = Ias-Ian*cot(alfa)+j*f*Mv;

for i = 1:n
    syms V
    a1 = Ix;
    a2 = 0;
    a3 = -g*Sx;
    a4 = (p/b)*Ixz + DEL;
    a5 = (v(i)/b)*(Ixz+p*Sx+(b+p)/b*Iwv*(b/rv)+(p/b)*Iwa*(b/ra));
    a6 = (v(i).^2/b)*(Sx+(Iwv/rv)+(Iwa/ra))-g*((p/b)*Sz+f*Mv);

    b1 = (p/b)*Ixz + DEL;
    b2 = -v(i)*(((b+p)/b)*(Iwv/rv)+(p/b)*(Iwa/ra));
    b3 = -g*((p/b)*Sz+f*Mv);
    b4 = Ias/(sin(alfa)^2)+(p/b)^2*Iz+(2*p/b)*GAM;
    b5 = (v(i)/b)*((p/b)*Iz+p*(p/b * Sz+f*Mv)+GAM);
    b6 = (p/b *Sz+f*Mv+(Iwv/rv)*cot(alfa))*(v(i).^2/b)-g*(p/b *Sz+f*Mv)*cot(alfa);

    A = [a1 a4;b1 b4];          %Matrix met dubbele afgeleiden
    B = [a2 a5; b2 b5];        %Matrix met enkele afgeleiden
    C = [a3 a6; b3 b6];        %Matrix zonder afgeleiden

    E = V.^2*A +V.*B + C ;
    determinant = det(E);      %Hier ontstaat 4e graads polynoom
    eqn = determinant == 0;
    res = solve(eqn,V);        %Det = 0 oplossen
    for j = 1:4                %kolom maken van oplossingen
        reopl(j,1) = real(res(j)); %reele oplossingen in kolomvector
        imopl(j,1) = imag(res(j)); %imaginaire oplossingen in kolomvector
    end
    if reopl(1,1)<0 & reopl(2,1)<0 & reopl(3,1)<0 & reopl(4,1)<0      %Alle re(1a
        stabvec(i) = 1;
    else
        stabvec(i) = 0;
    end
    R(:,i) = reopl;           %Matrix maken van reele oplossingen
    I(:,i) = imopl;          %Matrix maken van complexe oplossingen
end

```

```

stabvalue = find(stabvec == 1);           %Zoeken waar alle re(lambda) < 0
stabval = h*stabvalue;                   %In verhouding maken emt de stapgrootte

y = zeros(1,n);                          %Nullijn maken
k = R(1,:);                               %vector maken van Re(lambda_1)
l = R(2,:);                               %vector maken van Re(lambda_2)
m = R(3,:);                               %vector maken van Re(lambda_3)
p = R(4,:);                               %vector maken van Re(lambda_4)

a = I(1,:);                              %vector maken van Im(lambda_1)
b = I(2,:);                              %vector maken van Im(lambda_2)
c = I(3,:);                              %vector maken van Im(lambda_3)
d = I(4,:);                              %vector maken van Im(lambda_4)

figure
%Reele oplossingen plotten
p1 = plot(v,k,'r')
hold on
p2 = plot(v,l,'b')
hold on
p3 = plot(v,m,'g')
hold on
p4 = plot(v,p,'y')
hold on
%Complexe oplossingen plotten
plot(v,a,'--r')
hold on
plot(v,b,'--b')
hold on
plot(v,c,'--g')
hold on
plot(v,d,'--y')
hold on
plot(v, y,'black')
hold on

yL = get(gca,'YLim');                     %Verticale lijnen plotten voor stabiliteitsgebied
p5 = line([stabval(1) stabval(1)],yL,'Color','black');
p6 = line([stabval(end) stabval(end)],yL,'Color','black');

legend([p1 p2 p3 p4 p5 p6],{'\lambda_1','\lambda_2','\lambda_3','\lambda_4','Stabiel be
xlabel('v (m/s)')
ylabel('Eigenwaarden')
title('Eigenwaarden bij verschillende snelheden')
xlim([0,15]);
ylim([-15,15]);

```

```
stabval(1)  
stabval(end)
```

**E**  $r = 0.4 \text{ m}$

De straal van de wielen is verkleind naar  $r = 0.4 \text{ m}$ . In H5.6 staan de resultaten.

```
clc
clear all
close all

h = 0.1;
v = [0:h:15];
n = length(v);
g = 9.81;
R = zeros(4,n);           %Matrix voor reele eigenwaarden
I = zeros(4,n);           %Matrix voor complexe eigenwaarden
reopl = zeros(4,1);       %vector met re(lambda)
imopl = zeros(4,1);       %Vector met im(lambda)
stabvec = zeros(1,n);     %Stabiliteitsvector

rv = 0.35; %Radius voorwiel
ra = 0.35; %Radius achterwiel
b = 1.17; %aftand tussen Sv en Sa, raakpunten van de wielen op de grond
a = 0.12;
hCv = 0.5327;
%Coordinaten Ca:
ua = 0.2777;             %x coördinaat Ca
hCa = 1;                 %z coördinaat Ca
%Deze massa's zijn gekozen

%Massa's

M = 82.5; %Massa van fiets + berijder

Mv = 5.55; %Massa voorste gedeelte
Ma = M - Mv; %Massa achterste gedeelte

Maw = 2.65; %Massa achterwiel
Mvw = 2.65; %Massa voorwiel

Msa = 2.85; %Massa stuuras
Mazw = Ma - Maw; %Massa achterste gedeelte zonder wiel

Mvw1 = (0.1/rv)*Mvw;
Mvw2 = (0.4/rv)*Mvw;
Mvw3 = (0.7/rv)*Mvw;

%Stuuras coördinaten bepalen
SAx = ((b-a)*(Mvw+Msa)-Mvw*b)/Msa;
```

```
SAz = (hCv*(Mvw+Msa)-Mvw*rv)/Msa;
```

```
%Zwaartepunt coördinaten bepalen
```

```
CVx1 = (Mvw1*b+Msa*SAz)/(Mvw1+Msa); %r = 0.1
```

```
CVz1 = (Mvw1*rv+Msa*SAz)/(Mvw1+Msa);
```

```
CVx2 = (Mvw2*b+Msa*SAz)/(Mvw2+Msa); %r = 0.4
```

```
CVz2 = (Mvw2*rv+Msa*SAz)/(Mvw2+Msa);
```

```
CVx3 = (Mvw3*b+Msa*SAz)/(Mvw3+Msa); %r = 0.7
```

```
CVz3 = (Mvw3*rv+Msa*SAz)/(Mvw3+Msa);
```

```
H1 = 0.08/0.35*0.1+b;
```

```
H2 = 0.08/0.35*0.4+b;
```

```
H3 = 0.08/0.35*1+0.7*b;
```

```
p = 0.08; %trail, afstand tussen H en Sv
```

```
a = b-CVx2; %Horizontale afstand tussen Cv en de verticaal door Sv
```

```
alfa = 65*(pi/180); %Hoek tussen stuuras en grondvlak
```

```
w = 0.6995;
```

```
f = w/sin(alfa); % afstand van Cv naar de stuuras, horizontaal gemeten
```

```
g = 9.81; %Zwaartekrachtsconstante
```

```
j = b-a-f*(sin(alfa))^2; %x coördinaat van D
```

```
k = CVz2 - f*cos(alfa)*sin(alfa) ;%Afstand van D naar het grondvlak (X-as)
```

```
%Deze traagheidsmomenten zijn gekozen
```

```
Iwa = 0.245; %Traagheidsmoment van achterwiel om zijn as
```

```
Iwv = 0.245; %Traagheidsmoment van voorwiel om zijn as
```

```
IxaPLUSIxv = 19.4752;
```

```
IzaPLUSIzv = 2.6469;
```

```
% Nu nieuwe massa's toevoegen
```

```
% Nieuwe radii toevoegen
```

```
Mv = Mvw2 + Msa;
```

```
Ma = Mvw2 + Mazw;
```

```
ra = 0.4;
```

```
rv = 0.4;
```

```
%Traagheidsmoment geheel fiets + berijder:
```

```
Ix = IxaPLUSIxv + CVz2^2*Mv + hCa^2*Ma; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder
```

```
Iz = IzaPLUSIzv + (b-a)^2*Mv + ua^2*Ma; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder
```

```
IzzaPLUSIxzv = -1.4692;
```

```

Ixz = IxzaPLUSIxzv + ua*hCa* Ma + (b-a)*CVz2; %Traagheidsproduct van de complete fiets + be

Ias = 0.195;
Ian = -0.04;
Sx = Mv*CVz2+Ma*hCa ;
Sz = Mv*(b-a)+ua*Ma ;

DEL = Ias*cot(alfa)+Ian+k*f*Mv;
GAM = Ias-Ian*cot(alfa)+j*f*Mv;

for i = 1:n
    syms V
    a1 = Ix;
    a2 = 0;
    a3 = -g*Sx;
    a4 = (p/b)*Ixz + DEL;
    a5 = (v(i)/b)*(Ixz+p*Sx+(b+p)/b*Iwv*(b/rv)+(p/b)*Iwa*(b/ra));
    a6 = (v(i).^2/b)*(Sx+(Iwv/rv)+(Iwa/ra))-g*((p/b)*Sz+f*Mv);

    b1 = (p/b)*Ixz + DEL;
    b2 = -v(i)*(((b+p)/b)*(Iwv/rv)+(p/b)*(Iwa/ra));
    b3 = -g*((p/b)*Sz+f*Mv);
    b4 = Ias/(sin(alfa)^2)+(p/b)^2*Iz+(2*p/b)*GAM;
    b5 = (v(i)/b)*((p/b)*Iz+p*(p/b * Sz+f*Mv)+GAM);
    b6 = (p/b *Sz+f*Mv+(Iwv/rv)*cot(alfa))*(v(i).^2/b)-g*(p/b *Sz+f*Mv)*cot(alfa);

    A = [a1 a4;b1 b4];          %Matrix met dubbele afgeleiden
    B = [a2 a5; b2 b5];        %Matrix met enkele afgeleiden
    C = [a3 a6; b3 b6];        %Matrix zonder afgeleiden

    E = V.^2*A +V.*B + C ;
    determinant = det(E);      %Hier ontstaat 4e graads polynoom
    eqn = determinant == 0;
    res = solve(eqn,V);        %Det = 0 oplossen
    for j = 1:4                %kolom maken van oplossingen
        reopl(j,1) = real(res(j)); %reele oplossingen in kolomvector
        imopl(j,1) = imag(res(j)); %imaginaire oplossingen in kolomvector
    end
    if reopl(1,1)<0 & reopl(2,1)<0 & reopl(3,1)<0 & reopl(4,1)<0      %Alle re(1a
        stabvec(i) = 1;
    else
        stabvec(i) = 0;
    end
    R(:,i) = reopl;           %Matrix maken van reele oplossingen
    I(:,i) = imopl;          %Matrix maken van complexe oplossingen
end

```



```

stabvalue = find(stabvec == 1);           %Zoeken waar alle re(lambda) < 0
stabval = h*stabvalue;                   %In verhouding maken emt de stapgrootte

y = zeros(1,n);                          %Nullijn maken
k = R(1,:);                               %vector maken van Re(lambda_1)
l = R(2,:);                               %vector maken van Re(lambda_2)
m = R(3,:);                               %vector maken van Re(lambda_3)
p = R(4,:);                               %vector maken van Re(lambda_4)

a = I(1,:);                              %vector maken van Im(lambda_1)
b = I(2,:);                              %vector maken van Im(lambda_2)
c = I(3,:);                              %vector maken van Im(lambda_3)
d = I(4,:);                              %vector maken van Im(lambda_4)

figure
%Reele oplossingen plotten
p1 = plot(v,k,'r')
hold on
p2 = plot(v,l,'b')
hold on
p3 = plot(v,m,'g')
hold on
p4 = plot(v,p,'y')
hold on
%Complexe oplossingen plotten
plot(v,a,'--r')
hold on
plot(v,b,'--b')
hold on
plot(v,c,'--g')
hold on
plot(v,d,'--y')
hold on
plot(v, y,'black')
hold on

yL = get(gca,'YLim');                     %Verticale lijnen plotten voor stabiliteitsgebied
p5 = line([stabval(1) stabval(1)],yL,'Color','black');
p6 = line([stabval(end) stabval(end)],yL,'Color','black');

legend([p1 p2 p3 p4 p5 p6],{'\lambda_1','\lambda_2','\lambda_3','\lambda_4','Stabiel be
xlabel('v (m/s)')
ylabel('Eigenwaarden')
title('Eigenwaarden bij verschillende snelheden')
xlim([0,15]);
ylim([-15,15]);

```

```
stabval(1)  
stabval(end)
```

**F**  $r = 0.7 \text{ m}$

De straal van de wielen is verkleind naar  $r = 0.7 \text{ m}$ . In H5.6 staan de resultaten.

```
clc
clear all
close all

h = 0.1;
v = [0:h:15];
n = length(v);
g = 9.81;
R = zeros(4,n);           %Matrix voor reele eigenwaarden
I = zeros(4,n);           %Matrix voor complexe eigenwaarden
reopl = zeros(4,1);       %vector met re(lambda)
imopl = zeros(4,1);       %Vector met im(lambda)
stabvec = zeros(1,n);     %Stabiliteitsvector

rv = 0.35; %Radius voorwiel
ra = 0.35; %Radius achterwiel
b = 1.17; %aftand tussen Sv en Sa, raakpunten van de wielen op de grond
a = 0.12;
hCv = 0.5327;
%Coordinaten Ca:
ua = 0.2777;              %x coördinaat Ca
hCa = 1;                  %z coördinaat Ca
%Deze massa's zijn gekozen

%Massa's

M = 82.5; %Massa van fiets + berijder

Mv = 5.55; %Massa voorste gedeelte
Ma = M - Mv; %Massa achterste gedeelte

Maw = 2.65; %Massa achterwiel
Mvw = 2.65; %Massa voorwiel

Msa = 2.85; %Massa stuuras
Mazw = Ma - Maw; %Massa achterste gedeelte zonder wiel

Mvw1 = (0.1/rv)*Mvw;
Mvw2 = (0.4/rv)*Mvw;
Mvw3 = (0.7/rv)*Mvw;

%Stuuras coördinaten bepalen
SAx = ((b-a)*(Mvw+Msa)-Mvw*b)/Msa;
```

```

SAz = (hCv*(Mvw+Msa)-Mvw*rv)/Msa;

%Zwaartepunt coördinaten bepalen
CVx1 = (Mvw1*b+Msa*SAz)/(Mvw1+Msa); %r = 0.1
CVz1 = (Mvw1*rv+Msa*SAz)/(Mvw1+Msa);

CVx2 = (Mvw2*b+Msa*SAz)/(Mvw2+Msa); %r = 0.4
CVz2 = (Mvw2*rv+Msa*SAz)/(Mvw2+Msa);

CVx3 = (Mvw3*b+Msa*SAz)/(Mvw3+Msa); %r = 0.7
CVz3 = (Mvw3*rv+Msa*SAz)/(Mvw3+Msa);

H1 = 0.08/0.35*0.1+b;
H2 = 0.08/0.35*0.4+b;
H3 = 0.08/0.35*1+0.7*b;

p = 0.08; %trail, afstand tussen H en Sv
a = b-CVx3; %Horizontale afstand tussen Cv en de verticaal door Sv
alfa = 65*(pi/180); %Hoek tussen stuuras en grondvlak
w = 0.6995;
f = w/sin(alfa); % afstand van Cv naar de stuuras, horizontaal gemeten
g = 9.81; %Zwaartekrachtsconstante
j = b-a-f*(sin(alfa))^2; %x coördinaat van D
k = CVz3 - f*cos(alfa)*sin(alfa) ;%Afstand van D naar het grondvlak (X-as)

%Deze traagheidsmomenten zijn gekozen
Iwa = 0.245; %Traagheidsmoment van achterwiel om zijn as
Iwv = 0.245; %Traagheidsmoment van voorwiel om zijn as

IxaPLUSIxv = 19.4752;
IzaPLUSIzv = 2.6469;

% Nu nieuwe massa's toevoegen
% Nieuwe radii toevoegen

Mv = Mvw3 + Msa;
Ma = Mvw3 + Mazw;
ra = 0.7;
rv = 0.7;

%Traagheidsmoment geheel fiets + berijder:
Ix = IxaPLUSIxv + CVz3^2*Mv + hCa^2*Ma; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder
Iz = IzaPLUSIzv + (b-a)^2*Mv + ua^2*Ma; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder
IzzaPLUSIxzv = -1.4692;

```

```

Ixz = IxzaPLUSIxzv + ua*hCa* Ma + (b-a)*CVz3; %Traagheidsproduct van de complete fiets + be

Ias = 0.195;
Ian = -0.04;
Sx = Mv*CVz3+Ma*hCa ;
Sz = Mv*(b-a)+ua*Ma ;

DEL = Ias*cot(alfa)+Ian+k*f*Mv;
GAM = Ias-Ian*cot(alfa)+j*f*Mv;

for i = 1:n
    syms V
    a1 = Ix;
    a2 = 0;
    a3 = -g*Sx;
    a4 = (p/b)*Ixz + DEL;
    a5 = (v(i)/b)*(Ixz+p*Sx+(b+p)/b*Iwv*(b/rv)+(p/b)*Iwa*(b/ra));
    a6 = (v(i).^2/b)*(Sx+(Iwv/rv)+(Iwa/ra))-g*((p/b)*Sz+f*Mv);

    b1 = (p/b)*Ixz + DEL;
    b2 = -v(i)*(((b+p)/b)*(Iwv/rv)+(p/b)*(Iwa/ra));
    b3 = -g*((p/b)*Sz+f*Mv);
    b4 = Ias/(sin(alfa)^2)+(p/b)^2*Iz+(2*p/b)*GAM;
    b5 = (v(i)/b)*((p/b)*Iz+p*(p/b * Sz+f*Mv)+GAM);
    b6 = (p/b *Sz+f*Mv+(Iwv/rv)*cot(alfa))*(v(i).^2/b)-g*(p/b *Sz+f*Mv)*cot(alfa);

    A = [a1 a4;b1 b4];          %Matrix met dubbele afgeleiden
    B = [a2 a5; b2 b5];        %Matrix met enkele afgeleiden
    C = [a3 a6; b3 b6];        %Matrix zonder afgeleiden

    E = V.^2*A +V.*B + C ;
    determinant = det(E);      %Hier ontstaat 4e graads polynoom
    eqn = determinant == 0;
    res = solve(eqn,V);        %Det = 0 oplossen
    for j = 1:4                %kolom maken van oplossingen
        reopl(j,1) = real(res(j)); %reele oplossingen in kolomvector
        imopl(j,1) = imag(res(j)); %imaginaire oplossingen in kolomvector
    end
    if reopl(1,1)<0 & reopl(2,1)<0 & reopl(3,1)<0 & reopl(4,1)<0      %Alle re(1a
        stabvec(i) = 1;
    else
        stabvec(i) = 0;
    end
    R(:,i) = reopl;           %Matrix maken van reele oplossingen
    I(:,i) = imopl;          %Matrix maken van complexe oplossingen
end

```

```

stabvalue = find(stabvec == 1);           %Zoeken waar alle re(lambda) < 0
stabval = h*stabvalue;                   %In verhouding maken emt de stapgrootte

y = zeros(1,n);                          %Nullijn maken
k = R(1,:);                              %vector maken van Re(lambda_1)
l = R(2,:);                              %vector maken van Re(lambda_2)
m = R(3,:);                              %vector maken van Re(lambda_3)
p = R(4,:);                              %vector maken van Re(lambda_4)

a = I(1,:);                              %vector maken van Im(lambda_1)
b = I(2,:);                              %vector maken van Im(lambda_2)
c = I(3,:);                              %vector maken van Im(lambda_3)
d = I(4,:);                              %vector maken van Im(lambda_4)

figure
%Reele oplossingen plotten
p1 = plot(v,k,'r')
hold on
p2 = plot(v,l,'b')
hold on
p3 = plot(v,m,'g')
hold on
p4 = plot(v,p,'y')
hold on
%Complexe oplossingen plotten
plot(v,a,'--r')
hold on
plot(v,b,'--b')
hold on
plot(v,c,'--g')
hold on
plot(v,d,'--y')
hold on
plot(v, y,'black')
hold on

yL = get(gca,'YLim');                     %Verticale lijnen plotten voor stabiliteitsgebied
p5 = line([stabval(1) stabval(1)],yL,'Color','black');
p6 = line([stabval(end) stabval(end)],yL,'Color','black');

legend([p1 p2 p3 p4 p5 p6],{'\lambda_1','\lambda_2','\lambda_3','\lambda_4','Stabiel be
xlabel('v (m/s)')
ylabel('Eigenwaarden')
title('Eigenwaarden bij verschillende snelheden')
xlim([0,15]);
ylim([-15,15]);

```

```

stabval(1)
stabval(end)

```

## G De hoogte van $C_a$ variëren

H5.1 bevat de resultaten voor het variëren van  $C_a$ . Dit is de bijbehorende code.

```

clc
clear all
close all

%De goede variabelen het meest uitgeschreven

h = 0.1;
v = [0:h:15];
n = length(v);
g = 9.81;
R = zeros(4,n);           %Matrix voor reele eigenwaarden
I = zeros(4,n);           %Matrix voor complexe eigenwaarden
reopl = zeros(4,1);       %vector met re(lambda)
imopl = zeros(4,1);       %Vector met im(lambda)
stabvec = zeros(1,n);     %Stabiliteitsvector

rv = 0.35; %Radius voorwiel
ra = 0.35; %Radius achterwiel
b = 1.17; %aftand tussen Sv en Sa, raakpunten van de wielen op de grond
p = 0.08; %trail, afstand tussen H en Sv
a = 0.12; %Horizontale afstand tussen Cv en de verticaal door Sv
alfa = 65*(pi/180); %Hoek tussen stuuras en grondvlak

%Coördinaten Ca:
ua = 0.2777;           %x coördinaat Ca
%Coördinaten Cv
uv = b-a;             %x coördinaat Cv
hCv = 0.5327; %z-coördinaat zwaartepunt Cv
%Coördinaten Cf
uf = 0.33; %x coördinaat zwaartepunt gehele fiets

%-----

%De volgende waarden zijn berekend met de waarden die gegeven zijn
%hierboven

d = 0.08; %Afstand van Bv naar de stuuras
w = 0.03; %Afstand van Cv naar de stuuras = CvD

```

```

f = w/sin(alfa); % afstand van Cv naar de stuuras, horizontaal gemeten
g = 9.81; %Zwaartekrachtsconstante
j = b-a-f*(sin(alfa))^2; %x coördinaat van D
k = hCv - f*cos(alfa)*sin(alfa) ;%Afstand van D naar het grondvlak (X-as)

```

```

%Deze massa's zijn gekozen

```

```

M = 82.5; %Massa van fiets + berijder
Mv = 5.55; %Massa stuurgedeelte
Ma = M-Mv; %Massa achterste gedeelte
Mwa = 2.65; %Massa achterwiel
Mwv = 2.65; %Massa voorwiel

```

```

%Deze traagheidsmomenten zijn gekozen

```

```

Iwa = 0.245; %Traagheidsmoment van achterwiel om zijn as
Iwv = 0.245; %Traagheidsmoment van voorwiel om zijn as

```

```

IxaPLUSIxv = 19.4752;
IzaPLUSIzv = 2.6469;
IxzaPLUSIxzv = -1.4692;

```

```

%Hoogte van Ca variëren:

```

```

for t = 1:10

```

```

    hCa = 0.1*t;

```

```

    %Traagheidsmoment geheel fiets + berijder:

```

```

    Ix = IxaPLUSIxv + hCv^2*Mv + hCa^2*Ma; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder

```

```

    Iz = IzaPLUSIzv + uv^2*Mv + ua^2*Ma; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder

```

```

    Ixz = IxzaPLUSIxzv +ua*hCa*Ma + uv*hCv*Mv; %Traagheidsproduct van de complete fiets + berijder

```

```

    Ias = 0.195;

```

```

    Ian = -0.04;

```

```

    Sx = Mv*hCv+Ma*hCa ;

```

```

    Sz = Mv*uv+ua*Ma ;

```

```

    DEL = Ias*cot(alfa)+Ian+k*f*Mv;

```

```

    GAM = Ias-Ian*cot(alfa)+j*f*Mv;

```

```

for i = 1:n

```

```

    syms V

```

```

    a1 = Ix;

```

```

    a2 = 0;

```

```

    a3 = -g*Sx;

```

```

    a4 = (p/b)*Ixz + DEL;

```

```

    a5 = (v(i)/b)*(Ixz+p*Sx+(b+p)/b*Iwv*(b/rv)+(p/b)*Iwa*(b/ra));

```

```

    a6 = (v(i).^2/b)*(Sx+(Iwv/rv)+(Iwa/ra))-g*((p/b)*Sz+f*Mv);

```



```

b1 = (p/b)*Ixz + DEL;
b2 = -v(i)*(((b+p)/b)*(Iwv/rv)+(p/b)*(Iwa/ra));
b3 = -g*((p/b)*Sz+f*Mv);
b4 = Ias/(sin(alfa)^2)+(p/b)^2*Iz+(2*p/b)*GAM;
b5 = (v(i)/b)*((p/b)*Iz+p*(p/b * Sz+f*Mv)+GAM);
b6 = (p/b *Sz+f*Mv+(Iwv/rv)*cot(alfa))*(v(i).^2/b)-g*(p/b *Sz+f*Mv)*cot(alfa);

A = [a1 a4;b1 b4];           %Matrix met dubbele afgeleiden
B = [a2 a5; b2 b5];         %Matrix met enkele afgeleiden
C = [a3 a6; b3 b6];         %Matrix zonder afgeleiden

E = V.^2*A +V.*B + C ;
determinant = det(E);       %Hier ontstaat 4e graads polynoom
eqn = determinant == 0;
res = solve(eqn,V);         %Det = 0 oplossen
for j = 1:4                 %kolom maken van oplossingen
    reopl(j,1) = real(res(j)); %reele oplossingen in kolomvector
    imopl(j,1) = imag(res(j)); %imaginaire oplossingen in kolomvector
end
if reopl(1,1)<0 & reopl(2,1)<0 & reopl(3,1)<0 & reopl(4,1)<0 %Alle re(la
    stabvec(i) = 1;
else
    stabvec(i) = 0;
end
R(:,i) = reopl;            %Matrix maken van reele oplossingen
I(:,i) = imopl;           %Matrix maken van complexe oplossingen
end

stabvalue = find(stabvec == 1); %Zoeken waar alle re(lambda) < 0
stabval = h*stabvalue; %In verhouding maken emt de stapgrootte

stabgebied = [stabval(1) stabval(end)]
end

%Resultaten van Ca variëren
a = [0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1];
b = [3.6 4.5 4.6 4.7 4.7 4.8 4.8 4.9 4.9 4.9];
c = [10 7 6.3 6.5 6.2 6.1 6.1 6.1 6 6];

plot(a,b)
hold on
plot(a,c)
xlabel('Hoogte Ca (m)')
ylabel('v (m\s)')

```

## H De hoek $\alpha$ variëren

De resultaten van deze code staan in H5.2.

```
clc
clear all
close all

%De goede variabelen het meest uitgeschreven

h = 0.1;
v = [0:h:15];
n = length(v);
g = 9.81;
R = zeros(4,n);           %Matrix voor reele eigenwaarden
I = zeros(4,n);           %Matrix voor complexe eigenwaarden
reopl = zeros(4,1);       %vector met re(lambda)
imopl = zeros(4,1);       %Vector met im(lambda)
stabvec = zeros(1,n);     %Stabiliteitsvector

rv = 0.35; %Radius voorwiel
ra = 0.35; %Radius achterwiel
b = 1.17; %aftand tussen Sv en Sa, raakpunten van de wielen op de grond
p = 0.08; %trail, afstand tussen H en Sv
a = 0.12; %Horizontale afstand tussen Cv en de verticaal door Sv
alfa = 65*(pi/180); %Hoek tussen stuuras en grondvlak

%Coördinaten Ca:
ua = 0.2777;           %x coördinaat Ca
hCa = 1;               %z coördinaat Ca
%Coördianten Cv
uv = b-a;              %x coördinaat Cv
hCv = 0.5327; %z-coördinaat zwaartepunt Cv
%Coördinaten Cf
uf = 0.33; %x coördinaat zwaartepunt gehele fiets

%-----

%De volgende waarden zijn berekend met de waarden die gegeven zijn
%hierboven

d = 0.08; %Afstand van Bv naar de stuuras
w = 0.03; %Afstand van Cv naar de stuuras = CvD

for alfa2 = 55:75
```

```

alfa = alfa2*(pi/180);
f = w/sin(alfa); % afstand van Cv naar de stuuras, horizontaal gemeten
g = 9.81; %Zwaartekrachtsconstante
j = b-a-f*(sin(alfa))^2; %x coördinaat van D
k = hCv - f*cos(alfa)*sin(alfa) ;%Afstand van D naar het grondvlak (X-as)

%Deze massa's zijn gekozen

M = 82.5; %Massa van fiets + berijder
Mv = 5.55; %Massa stuurgedeelte
Ma = M-Mv; %Massa achterste gedeelte
Mwa = 2.65; %Massa achterwiel
Mwv = 2.65; %Massa voorwiel

%Deze traagheidsmomenten zijn gekozen
Iwa = 0.245; %Traagheidsmoment van achterwiel om zijn as
Iwv = 0.245; %Traagheidsmoment van voorwiel om zijn as

IxaPLUSIxv = 19.4752;
IzaPLUSIzv = 2.6469;
IxaPLUSIxv = -1.4692;

%Traagheidsmoment geheel fiets + berijder:
Ix = IxaPLUSIxv + hCv^2*Mv + hCa^2*Ma; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder
Iz = IzaPLUSIzv + uv^2*Mv + ua^2*Ma; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder
Ixz = IxaPLUSIxv*ua*hCa*Ma + uv*hCv*Mv; %Traagheidsproduct van de complete fiets + berijder

Ias = 0.195;
Ian = -0.04;
Sx = Mv*hCv+Ma*hCa ;
Sz = Mv*uv+ua*Ma ;

DEL = Ias*cot(alfa)+Ian+k*f*Mv;
GAM = Ias-Ian*cot(alfa)+j*f*Mv;

for i = 1:n
    syms V
    a1 = Ix;
    a2 = 0;
    a3 = -g*Sx;
    a4 = (p/b)*Ixv + DEL;
    a5 = (v(i)/b)*(Ixv+p*Sx+(b+p)/b*Iwv*(b/rv)+(p/b)*Iwa*(b/ra));
    a6 = (v(i).^2/b)*(Sx+(Iwv/rv)+(Iwa/ra))-g*((p/b)*Sz+f*Mv);

```

```

b1 = (p/b)*Ixz + DEL;
b2 = -v(i)*(((b+p)/b)*(Iwv/rv)+(p/b)*(Iwa/ra));
b3 = -g*((p/b)*Sz+f*Mv);
b4 = Ias/(sin(alfa)^2)+(p/b)^2*Iz+(2*p/b)*GAM;
b5 = (v(i)/b)*((p/b)*Iz+p*(p/b * Sz+f*Mv)+GAM);
b6 = (p/b *Sz+f*Mv+(Iwv/rv)*cot(alfa))*(v(i).^2/b)-g*(p/b *Sz+f*Mv)*cot(alfa);

A = [a1 a4;b1 b4];           %Matrix met dubbele afgeleiden
B = [a2 a5; b2 b5];         %Matrix met enkele afgeleiden
C = [a3 a6; b3 b6];         %Matrix zonder afgeleiden

E = V.^2*A +V.*B + C ;
determinant = det(E);       %Hier ontstaat 4e graads polynoom
eqn = determinant == 0;
res = solve(eqn,V);         %Det = 0 oplossen
for j = 1:4                 %kolom maken van oplossingen
    reopl(j,1) = real(res(j)); %reele oplossingen in kolomvector
    imopl(j,1) = imag(res(j)); %imaginaire oplossingen in kolomvector
end
if reopl(1,1)<0 & reopl(2,1)<0 & reopl(3,1)<0 & reopl(4,1)<0 %Alle re(la
    stabvec(i) = 1;
else
    stabvec(i) = 0;
end
R(:,i) = reopl;            %Matrix maken van reele oplossingen
I(:,i) = imopl;           %Matrix maken van complexe oplossingen
end

stabvalue = find(stabvec == 1); %Zoeken waar alle re(lambda) < 0
stabval = h*stabvalue;        %In verhouding maken emt de stapgrootte

s = [stabval(1) stabval(end)]

end

%Resultaten van alfa variëren

d = [55 57 59 61 63 65 67 69 71 73 75];
e = [4.9 4.8 4.7 4.6 4.5 4.5 4.4 4.3 4.2 4.2 4.1];
f = [6 6 6 6 6 6 6 6.1 6.1 6.2 6.2];

plot(d,e)
hold on

```

```
plot(d,f)
xlabel('\alpha (graden)')
ylabel('v (m/s)')
```

## I $b$ variëren

In H5.3 wordt de lengte van de fiets  $b$  gevarieerd. Dit is de bijbehorende code.

```
clc
clear all
close all

%De goede variabelen het meest uitgeschreven

h = 0.5;
v = [0:h:15];
n = length(v);
g = 9.81;
R = zeros(4,n);           %Matrix voor reele eigenwaarden
I = zeros(4,n);           %Matrix voor complexe eigenwaarden
reopl = zeros(4,1);       %vector met re(lambda)
imopl = zeros(4,1);       %Vector met im(lambda)
stabvec = zeros(1,n);     %Stabiliteitsvector

rv = 0.35; %Radius voorwiel
ra = 0.35; %Radius achterwiel
for b = 0.90:0.05:1.3 %aftand tussen Sv en Sa, raakpunten van de wielen op de grond
    p = 0.08; %trail, afstand tussen H en Sv
    a = 0.12; %Horizontale afstand tussen Cv en de verticaal door Sv
    alfa = 80*(pi/180); %Hoek tussen stuuras en grondvlak

    %Coördinaten Ca:
    ua = 0.2777;           %x coördinaat Ca
    hCa = 1;               %z coördinaat Ca
    %Coördianten Cv
    uv = b-a;              %x coördinaat Cv
    hCv = 0.5327; %z-coördinaat zwaartepunt Cv
    %Coördinaten Cf
    uf = 0.33; %x coördinaat zwaartepunt gehele fiets

    %-----

    %De volgende waarden zijn berekend met de waarden die gegeven zijn
    %hierboven

    d = 0.08; %Afstand van Bv naar de stuuras
    w = 0.03; %Afstand van Cv naar de stuuras = CvD

    f = w/sin(alfa); % afstand van Cv naar de stuuras, horizontaal gemeten
    g = 9.81; %Zwaartekrachtsconstante
```

```

j = b-a-f*(sin(alfa))^2; %x coördinaat van D
k = hCv - f*cos(alfa)*sin(alfa) ;%Afstand van D naar het grondvlak (X-as)

```

```

%Deze massa's zijn gekozen

```

```

M = 82.5; %Massa van fiets + berijder
Mv = 5.55; %Massa stuurgedeelte
Ma = M-Mv; %Massa achterste gedeelte
Mwa = 2.65; %Massa achterwiel
Mwv = 2.65; %Massa voorwiel

```

```

%Deze traagheidsmomenten zijn gekozen

```

```

Iwa = 0.245; %Traagheidsmoment van achterwiel om zijn as
Iwv = 0.245; %Traagheidsmoment van voorwiel om zijn as

```

```

IxaPLUSIxv = 19.4752;
IzaPLUSIzv = 2.6469;
IxzaPLUSIxzv = -1.4692;

```

```

%Traagheidsmoment geheel fiets + berijder:

```

```

Ix = IxaPLUSIxv + hCv^2*Mv + hCa^2*Ma; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder
Iz = IzaPLUSIzv + uv^2*Mv + ua^2*Ma; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder
Ixz = IxzaPLUSIxzv +ua*hCa*Ma + uv*hCv*Mv; %Traagheidsproduct van de complete fiets + berijder

```

```

Ias = 0.195;
Ian = -0.04;
Sx = Mv*hCv+Ma*hCa ;
Sz = Mv*uv+ua*Ma ;

```

```

DEL = Ias*cot(alfa)+Ian+k*f*Mv;
GAM = Ias-Ian*cot(alfa)+j*f*Mv;

```

```

for i = 1:n
    syms V
    a1 = Ix;
    a2 = 0;
    a3 = -g*Sx;
    a4 = (p/b)*Ixz + DEL;
    a5 = (v(i)/b)*(Ixz+p*Sx+(b+p)/b*Iwv*(b/rv)+(p/b)*Iwa*(b/ra));
    a6 = (v(i).^2/b)*(Sx+(Iwv/rv)+(Iwa/ra))-g*((p/b)*Sz+f*Mv);

    b1 = (p/b)*Ixz + DEL;
    b2 = -v(i)*(((b+p)/b)*(Iwv/rv)+(p/b)*(Iwa/ra));

```

```

b3 = -g*((p/b)*Sz+f*Mv);
b4 = Ias/(sin(alfa)^2)+(p/b)^2*Iz+(2*p/b)*GAM;
b5 = (v(i)/b)*((p/b)*Iz+p*(p/b * Sz+f*Mv)+GAM);
b6 = (p/b *Sz+f*Mv+(Iwv/rv)*cot(alfa))*(v(i).^2/b)-g*(p/b *Sz+f*Mv)*cot(alfa)

A = [a1 a4;b1 b4];      %Matrix met dubbele afgeleiden
B = [a2 a5; b2 b5];    %Matrix met enkele afgeleiden
C = [a3 a6; b3 b6];    %Matrix zonder afgeleiden

E = V.^2*A +V.*B + C ;
determinant = det(E);  %Hier ontstaat 4e graads polynoom
eqn = determinant == 0;
res = solve(eqn,V);    %Det = 0 oplossen
for j = 1:4            %kolom maken van oplossingen
    reopl(j,1) = real(res(j)); %reele oplossingen in kolomvector
    imopl(j,1) = imag(res(j)); %imaginaire oplossingen in kolomvector
end
if reopl(1,1)<0 & reopl(2,1)<0 & reopl(3,1)<0 & reopl(4,1)<0 %Alle reële oplossingen
    stabvec(i) = 1;
else
    stabvec(i) = 0;
end
R(:,i) = reopl;        %Matrix maken van reële oplossingen
I(:,i) = imopl;        %Matrix maken van complexe oplossingen
end

stabvalue = find(stabvec == 1); %Zoeken waar alle re(lambda) < 0
stabval = h*stabvalue; %In verhouding maken emt de stapgrootte

s = [stabval(1) stabval(end)]

plot(b, stabval(1))
hold on
plot (b, stabval(end))
hold on
end

%Resultaten van b variëren
g = [0.9 0.95 1 1.05 1.1 1.15 1.2 1.25 1.3];
h = [3.6 3.6 3.7 3.7 3.8 3.8 3.9 4 4];
i = [6.3 6.3 6.3 6.3 6.3 6.4 6.4 6.4 6.4];

plot(g,h)
hold on
plot(g,i)

```



```
xlabel('b (m), afstand tussen de wielen')
ylabel('v (m\s)')
```

## J $S_x$ variëren

$S_x = mh_f$  wordt hier gevarieerd. De resultaten staan in H5.4.

```
clc
clear all
close all

h = 0.3;
v = [0:h:15];
n = length(v);
g = 9.81;
R = zeros(4,n);           %Matrix voor reele eigenwaarden
I = zeros(4,n);           %Matrix voor complexe eigenwaarden
reopl = zeros(4,1);       %vector met re(lambda)
imopl = zeros(4,1);       %Vector met im(lambda)
stabvec = zeros(1,n);     %Stabiliteitsvector

rv = 0.35; %Radius voorwiel
ra = 0.35; %Radius achterwiel
b = 1.17; %aftand tussen Sv en Sa, raakpunten van de wielen op de grond
p = 0.08; %trail, afstand tussen H en Sv
a = 0.12; %Horizontale afstand tussen Cv en de verticaal door Sv
alfa = 65*(pi/180); %Hoek tussen stuuras en grondvlak

%Coordinaten Ca:
ua = 0.2777;           %x coördinaat Ca
hCa = 1;               %z coördinaat Ca
%Coördianten Cv
uv = b-a;              %x coördinaat Cv
hCv = 0.532; %z-coördinaat zwaartepunt Cv
%Coordinaten Cf
uf = 0.33; %x coördinaat zwaartepunt gehele fiets

%-----

%De volgende waarden zijn berekend met de waarden die gegeven zijn
%hierboven

d = 0.08; %Afstand van Bv naar de stuuras
w = 0.03; %Afstand van Cv naar de stuuras = CvD
```

```

f = w/sin(alfa); % afstand van Cv naar de stuuras, horizontaal gemeten
g = 9.81; %Zwaartekrachtsconstante
j = b-a-f*(sin(alfa))^2; %x coördinaat van D
k = hCv - f*cos(alfa)*sin(alfa) ;%Afstand van D naar het grondvlak (X-as)

```

```

%Deze massa's zijn gekozen

```

```

M = 82.5; %Massa van fiets + berijder
Mv = 5.55; %Massa stuurgedeelte
Ma = M-Mv; %Massa achterste gedeelte
Mwa = 2.65; %Massa achterwiel
Mwv = 2.65; %Massa voorwiel

```

```

%Deze traagheidsmomenten zijn gekozen

```

```

Iwa = 0.245; %Traagheidsmoment van achterwiel om zijn as
Iwv = 0.245; %Traagheidsmoment van voorwiel om zijn as

```

```

IxaPLUSIxv = 19.4752;
IzaPLUSIzv = 2.6469;
IxzaPLUSIxzv = -1.4692;

```

```

%Traagheidsmoment geheel fiets + berijder:

```

```

Ix = IxaPLUSIxv + hCv^2*Mv + hCa^2*Ma; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder om
Iz = IzaPLUSIzv + uv^2*Mv + ua^2*Ma; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder om
Ixz = 23.5; %Traagheidsproduct van de complete fiets + berijder om de x-as

```

```

Ias = 0.195;
Ian = -0.04;
Sx = Mv*hCv+Ma*hCa ;
Sz = Mv*uv+ua*Ma ;

```

```

DEL = Ias*cot(alfa)+Ian+k*f*Mv;
GAM = Ias-Ian*cot(alfa)+j*f*Mv;
y = zeros(1,10);
t = zeros(1,10);
for z = 10:10:100
    Sx = z;
    for i = 1:n
        syms V
        a1 = Ix;
        a2 = 0;
        a3 = -g*Sx;
        a4 = (p/b)*Ixz + DEL;
        a5 = (v(i)/b)*(Ixz+p*Sx+(b+p)/b*Iwv*(b/rv)+(p/b)*Iwa*(b/ra));
        a6 = (v(i).^2/b)*(Sx+(Iwv/rv)+(Iwa/ra))-g*((p/b)*Sz+f*Mv);
    end
end

```

```

b1 = (p/b)*Ixz + DEL;
b2 = -v(i)*(((b+p)/b)*(Iwv/rv)+(p/b)*(Iwa/ra));
b3 = -g*((p/b)*Sz+f*Mv);
b4 = Ias/(sin(alfa)^2)+(p/b)^2*Iz+(2*p/b)*GAM;
b5 = (v(i)/b)*((p/b)*Iz+p*(p/b * Sz+f*Mv)+GAM);
b6 = (p/b *Sz+f*Mv+(Iwv/rv)*cot(alfa))*(v(i).^2/b)-g*(p/b *Sz+f*Mv)*cot(alfa);

A = [a1 a4;b1 b4];           %Matrix met dubbele afgeleiden
B = [a2 a5; b2 b5];         %Matrix met enkele afgeleiden
C = [a3 a6; b3 b6];         %Matrix zonder afgeleiden

E = V.^2*A +V.*B + C ;
determinant = det(E);       %Hier ontstaat 4e graads polynoom
eqn = determinant == 0;
res = solve(eqn,V);         %Det = 0 oplossen
for j = 1:4                 %kolom maken van oplossingen
    reopl(j,1) = real(res(j)); %reele oplossingen in kolomvector
    imopl(j,1) = imag(res(j)); %imaginaire oplossingen in kolomvector
end
if reopl(1,1)<0 & reopl(2,1)<0 & reopl(3,1)<0 & reopl(4,1)<0 %Alle re(la
    stabvec(i) = 1;
else
    stabvec(i) = 0;
end
R(:,i) = reopl;             %Matrix maken van reele oplossingen
I(:,i) = imopl;             %Matrix maken van complexe oplossingen
end

stabvalue = find(stabvec == 1); %Zoeken waar alle re(lambda) < 0
stabval = h*stabvalue;        %In verhouding maken emt de stapgrootte

stabval(1);
stabval(end);
y(z/10) = [abs(stabval(end)-stabval(1))];
t(z/10) = [stabval(1)];
end
k = [10 20 30 40 50 60 70 80 90 100];
plot(k,y)

```

## K $S_x$ ten opzichte van $S_z$ variëren

De verhouding  $\frac{S_x}{S_z}$  wordt hier veranderd. H5.5 bevat de resultaten.

```
clc
clear all
close all

%De goede variabelen het meest uitgeschreven

h = 0.3;
v = [0:h:15];
n = length(v);
g = 9.81;
R = zeros(4,n);           %Matrix voor reele eigenwaarden
I = zeros(4,n);           %Matrix voor complexe eigenwaarden
reopl = zeros(4,1);       %vector met re(lambda)
imopl = zeros(4,1);       %Vector met im(lambda)
stabvec = zeros(1,n);     %Stabiliteitsvector

rv = 0.35; %Radius voorwiel
ra = 0.35; %Radius achterwiel
b = 1.17; %aftand tussen Sv en Sa, raakpunten van de wielen op de grond
p = 0.08; %trail, afstand tussen H en Sv
a = 0.12; %Horizontale afstand tussen Cv en de verticaal door Sv
alfa = 80*(pi/180); %Hoek tussen stuuras en grondvlak

%Coördinaten Ca:
ua = 0.2777;           %x coördinaat Ca
hCa = 1;               %z coördinaat Ca
%Coördianten Cv
uv = b-a;              %x coördinaat Cv
hCv = 0.5327; %z-coördinaat zwaartepunt Cv
%Coördinaten Cf
uf = 0.33; %x coördinaat zwaartepunt gehele fiets

%-----

%De volgende waarden zijn berekend met de waarden die gegeven zijn
%hierboven

d = 0.08; %Afstand van Bv naar de stuuras
w = 0.03; %Afstand van Cv naar de stuuras = CvD

f = w/sin(alfa); % afstand van Cv naar de stuuras, horizontaal gemeten
g = 9.81; %Zwaartekrachtsconstante
```

```

j = b-a-f*(sin(alfa))^2; %x coördinaat van D
k = hCv - f*cos(alfa)*sin(alfa) ;%Afstand van D naar het grondvlak (X-as)

```

```

%Deze massa's zijn gekozen

```

```

M = 82.5; %Massa van fiets + berijder
Mv = 5.55; %Massa stuurgedeelte
Ma = M-Mv; %Massa achterste gedeelte
Mwa = 2.65; %Massa achterwiel
Mwv = 2.65; %Massa voorwiel

```

```

%Deze traagheidsmomenten zijn gekozen

```

```

Iwa = 0.245; %Traagheidsmoment van achterwiel om zijn as
Iwv = 0.245; %Traagheidsmoment van voorwiel om zijn as

```

```

IxaPLUSIxv = 19.4752;
IzaPLUSIzv = 2.6469;
IxzaPLUSIxzv = -1.4692;

```

```

%Traagheidsmoment geheel fiets + berijder:

```

```

Ix = IxaPLUSIxv + hCv^2*Mv + hCa^2*Ma; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder om
Iz = IzaPLUSIzv + uv^2*Mv + ua^2*Ma; %Traagheidsmoment van de complete fiets + berijder om
Ixz = IxzaPLUSIxzv +ua*hCa*Ma + uv*hCv*Mv; %Traagheidsproduct van de complete fiets + berijder

```

```

Ias = 0.195;
Ian = -0.04;
Sx = Mv*hCv+Ma*hCa ;
Sz = Mv*uv+ua*Ma ;

```

```

DEL = Ias*cot(alfa)+Ian+k*f*Mv;
GAM = Ias-Ian*cot(alfa)+j*f*Mv;
y = zeros(1,4);
t = zeros(1,4);

```

```

for z = 10:10:40

```

```

    Sz = (10/z)*Sx;

```

```

    for i = 1:n

```

```

        syms V
        a1 = Ix;
        a2 = 0;
        a3 = -g*Sx;
        a4 = (p/b)*Ixz + DEL;
        a5 = (v(i)/b)*(Ixz+p*Sx+(b+p)/b*Iwv*(b/rv)+(p/b)*Iwa*(b/ra));
        a6 = (v(i).^2/b)*(Sx+(Iwv/rv)+(Iwa/ra))-g*((p/b)*Sz+f*Mv);
    end
end

```

```

b1 = (p/b)*Ixz + DEL;
b2 = -v(i)*(((b+p)/b)*(Iwv/rv)+(p/b)*(Iwa/ra));
b3 = -g*((p/b)*Sz+f*Mv);
b4 = Ias/(sin(alfa)^2)+(p/b)^2*Iz+(2*p/b)*GAM;
b5 = (v(i)/b)*((p/b)*Iz+p*(p/b * Sz+f*Mv)+GAM);
b6 = (p/b *Sz+f*Mv+(Iwv/rv)*cot(alfa))*(v(i).^2/b)-g*(p/b *Sz+f*Mv)*cot(alfa);

A = [a1 a4;b1 b4];          %Matrix met dubbele afgeleiden
B = [a2 a5; b2 b5];        %Matrix met enkele afgeleiden
C = [a3 a6; b3 b6];        %Matrix zonder afgeleiden

E = V.^2*A +V.*B + C ;
determinant = det(E);      %Hier ontstaat 4e graads polynoom
eqn = determinant == 0;
res = solve(eqn,V);        %Det = 0 oplossen
for j = 1:4                %kolom maken van oplossingen
    reopl(j,1) = real(res(j)); %reele oplossingen in kolomvector
    imopl(j,1) = imag(res(j)); %imaginaire oplossingen in kolomvector
end
if reopl(1,1)<0 & reopl(2,1)<0 & reopl(3,1)<0 & reopl(4,1)<0 %Alle re(la
    stabvec(i) = 1;
else
    stabvec(i) = 0;
end
R(:,i) = reopl;           %Matrix maken van reele oplossingen
I(:,i) = imopl;          %Matrix maken van complexe oplossingen
end

stabvalue = find(stabvec == 1); %Zoeken waar alle re(lambda) < 0
stabval = h*stabvalue; %In verhouding maken emt de stapgrootte

stabval(1)
stabval(end)
y(z/10) = [stabval(1)];
t(z/10) = [stabval(end)];

end
k = [1 2 3 4]
plot(k, y)
hold on
plot (k,t)

```

L Gyroscopsich Effect gelijk aan nul

*%Herfkens variabelen voor de routh table :*

*%Kappa's zijn voor de routh table :*

$g := 9.81 :$

$rv := 0.35 :$

$ra := 0.35 :$

$b := 1.17 :$

$p := 0.08 :$

$a := 0.12 :$

$ua := 0.33 :$

$hf := 1 :$

$j := 1 :$

$k := 0.52 :$

$d := 0.08 :$

$w := 0.03 :$

$alfa := 65 * (2 * Pi / 360) :$

$f := w / \sin(alfa) :$

$g := 9.81 :$

$M := 82.5 :$

$Mv := 5.55 :$

$Ma := M - Mv :$

$Mwa := 2.65 :$

$Mwv := 2.65 :$

$Iwa := 0 :$

$Iwv := 0 :$

$Ix := 98 :$

$Iz := 14.7 :$

$Ixz := 23.5 :$

$Ias := 0.195 :$

$Ian := -0.04 :$

$Sx := M * hf :$

$Sz := 27.2 :$

$Ss := 0.005 :$

$DEL := Ias * \cot(alfa) + Ian + k * f * Mv :$

$GAM := Ias - Ian * \cot(alfa) + j * f * Mv :$

$a1 := Ix :$

$a2 := 0 :$

$a3 := -g * Sx :$

$a4 := (p/b) * Ixz + DEL :$

$a5 := (V/b) * (Ix + p * Sx + (b+p)/b * Iwv * (b/rv) + (p/b) * Iwa * (b/ra)) :$

$a6 := (V^2/b) * (Sx + (Iwv/rv) + (Iwa/ra)) - g * ((p/b) * Sz + f * Mv) :$

$b1 := (p/b) * Ixz + DEL :$

$b2 := -V * (((b+p)/b) * (Iwv/rv) + (p/b) * (Iwa/ra)) :$

$b3 := -g * ((p/b) * Sz + f * Mv) :$

$b4 := Ias / (\sin(alfa)^2) + (p/b)^2 * Iz + (2 * p/b) * GAM :$

$b5 := (V/b) * ((p/b) * Iz + p * (p/b * Sz + f * Mv) + GAM) :$



$$b6 := (V^2/b) * (p/b * Sz + f * Mv + (Iwv/rv) * \cot(\text{alfa})) - g * (p/b * Sz + f * Mv) * \cot(\text{alfa}) :$$

$$A1 := \text{evalf}(a1 * b4 - a4 * b1) :$$

$$A2 := \text{evalf}(a1 * b5 - a5 * b1 - a4 * b2) :$$

$$A3 := \text{evalf}(a1 * b6 + a3 * b4 - a6 * b1 - a5 * b2 - a4 * b3) :$$

$$A4 := \text{evalf}(a3 * b5 - a6 * b2 - a5 * b3) :$$

$$A5 := \text{evalf}(a3 * b6 - a6 * b3) :$$

$$\text{kappa1} := (A2 * A3 - A1 * A4) / A2 :$$

$$\text{kappa2} := A5 :$$

$$\text{kappa3} := (\text{kappa1} * A4 - \text{kappa2} * A2) / \text{kappa1} :$$

$$\text{kappa4} := \text{kappa2} :$$

$$\text{solve}(A1 > 0, V)$$

$$V$$

(1)

$$\text{solve}(A2 > 0, V)$$

$$(0., \infty]$$

(2)

$$\text{solve}(\text{kappa1} > 0, V)$$

$$[-\infty, -4.410842631), (4.410842631, \infty]$$

(3)

$$\text{solve}(\text{kappa3} > 0, V)$$

$$[-\infty, -4.410842631), (0., 4.410842631)$$

(4)

$$\text{solve}(\text{kappa4} > 0, V)$$

$$V$$

(5)

$$\text{solve}(\{A1 > 0, A2 > 0, \text{kappa1} > 0, \text{kappa3} > 0, \text{kappa4} > 0\}, V)$$

## M Hoeken, punten en afstanden

Alle hoeken, punten en afstanden die gebruikt zijn in het model van Herfkens [3].

### Punten

$S_a$	Het raakpunt van het achterwiel met het grondvlak.
$S_v$	Het raakpunt van het voorwiel met het grondvlak.
$B_a$	Het middelpnt van het achterwiel.
$B_v$	Het middelpunt van het voorwiel.
$H$	Dit is het snijpunt van twee lijnen. De eerste lijn is de snijlijn van het framevlak en het grondvlak. De tweede is de snijlijn tussen de stuuras en het grondvlak.
$C_a$	Het zwaartepunt van het achterste gedeelte van de fiets. Dit is dus het zwaartepunt van de berijder met het frame.
$C_v$	Het zwaartepunt van de stuuras en het voorwiel.
$C_f$	Het zwaartepunt van de gehele fiets met berijder.

### Afstanden

$x$	De $x$ -coördinaat van het raakpunt van het achterwiel op het grondvlak $S_a$ .
$y$	De $y$ -coördinaat van het raakpunt van het achterwiel op het grondvlak $S_a$ .
$h_a$	De $z$ -coördinaat van het zwaartepunt $C_a$ .
$h_v$	De $z$ -coördinaat van het zwaartepunt $C_v$ .
$h_f$	De $z$ -coördinaat van het zwaartepunt $C_f$ .
$b$	De afstand tussen de raakpunten van de wielen $S_a$ en $S_v$ .
$u$	De horizontale (liggend in het $(x, y)$ -vlak) afstand tussen het zwaartepunt $C_a$ en de loodlijn door het achterwiel.
$p$	De afstand tussen $H$ en $S_v$ .
$q$	De afstand tussen $H$ en $S_a$ . Als de fiets rechtdoor gaat en er dus geen draaiing van het stuur is geldt dan $b = q - p$ .
$f$	De horizontale (liggend in het $(x, y)$ -vlak) afstand tussen $C_v$ en de stuuras.
$a$	De afstand tussen de verticaal door het voorwiel en $C_v$ .
$r_a$	De lengte van de straal van het achterwiel.
$r_v$	De lengte van de straal van het voorwiel.

### Hoeken

$\epsilon$	Dit is de kanteling van de berijder met het frame. Als de fiets in verticale stand staat, rechtop staat dus, geldt $\epsilon = 0$ .
$\beta$	De hoek die de stuuras maakt ten opzichte van het frame. Als de fiets rechtdoor rijdt geldt dus $\beta = 0$ .
$\alpha$	De hoek tussen de stuuras en de snijlijn van het achterwiel met het grondvlak.
$\gamma$	De hoek tussen de stuuras en de snijlijn van het voorwielvlak met het grondvlak.
$\delta$	De hoek tussen het voorwielvlak en de verticaal.
$\theta$	De hoek tussen de snijlijn van het framevlak en het grondvlak en de $x$ -as.
$\psi$	De verdraaiing om van het stuur om zijn eigen as.

## N Kinetische energie en gyroscopische momenten

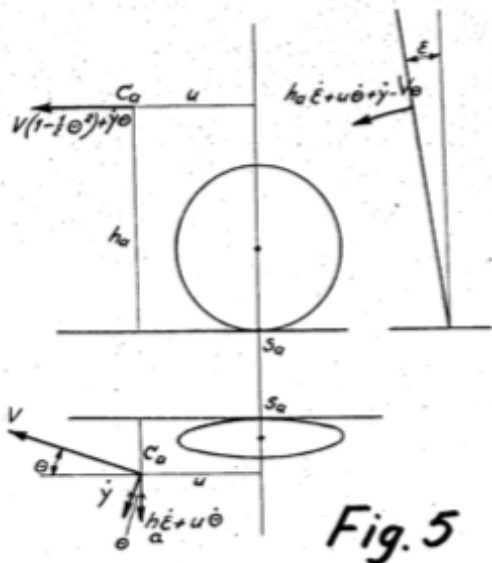


Fig. 5

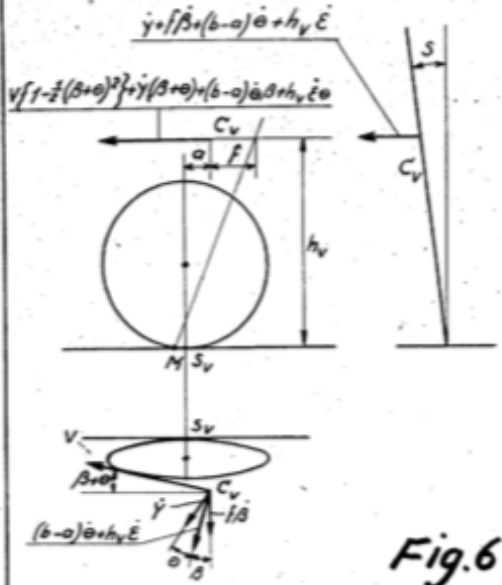


Fig. 6

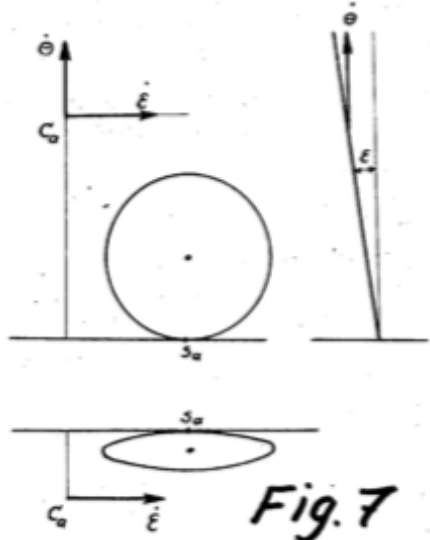


Fig. 7

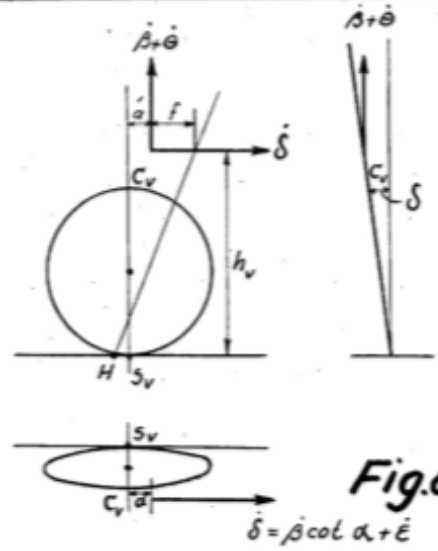


Fig. 8

$\delta = \beta \cos \alpha + \dot{\epsilon}$

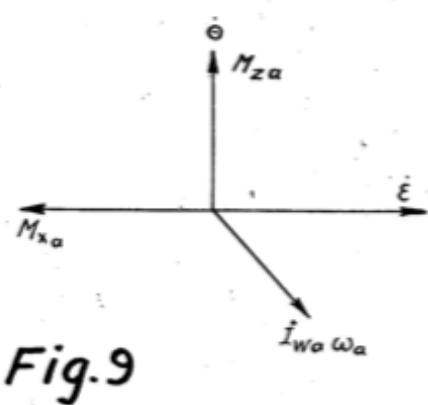


Fig. 9

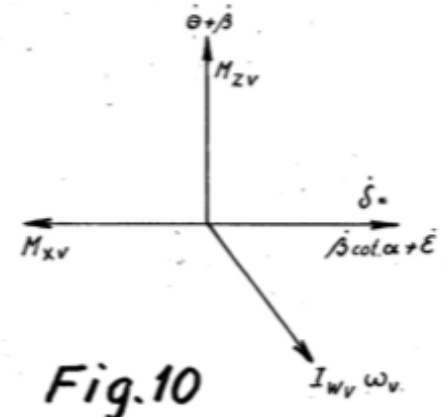


Fig. 10