
Het rendement van verschillende ontwerpen van de trebuchet
bij het afschieten van een voorwerp

DOOR
ANNELIE HUISMAN

*Bachelor Eind Project 2020
Technische Wiskunde*

Het rendement van verschillende ontwerpen van de trebuchet bij het afschieten van een voorwerp.

door

Annelie Huisman

ter verkrijging van de graad van Bachelor of Science
aan de Technische Universiteit Delft,

Student nummer: 4208706
Commissie: Dr. B. J. Meulenbroek, begeleider
Dr. P. M. Visser,
Dr. E. M. van Elderen,
Dr. N. V. Budko

Inhoudsopgave

1	Introductie	2
1.1	Wat is een trebuchet?	2
1.2	Schematisch model	3
1.2.1	Aannames	3
1.3	Onderzoeksvraag	4
1.4	Literatuur	4
1.5	Methode	4
1.6	Parameters en variabelen	5
2	Eén hoek model	6
2.1	Wiskundig model	6
2.2	Analytische oplossing	8
2.3	Numerieke oplossing	9
2.3.1	Euler Forward methode	9
2.3.2	Ode45	10
2.4	Oplossing differentiaalvergelijking	10
2.5	Afschieten van het voorwerp	11
2.6	Rendement	14
3	Twee hoeken model	15
3.1	Wiskundig model	15
3.2	Lagrangiaan controleren	18
3.3	Numerieke oplossing	19
3.4	Afschieten van het voorwerp	20
3.5	Rendement	21
4	Het drie hoeken model	22
4.1	Wiskundig model	22
4.2	Lagrangiaan controleren	25
4.3	Numerieke oplossing	26
4.4	Afschieten van het voorwerp	27
4.5	Rendement	29
5	Eén hoek model op wielen	30
5.1	Wiskundig model	30
5.2	Numerieke oplossing	33
5.3	Afschieten van het voorwerp	34
5.4	Rendement	35
6	Discussie	36
7	Conclusie	37
8	Bronnenlijst	38
9	Bijlagen	39
9.1	Blauwdrukken	39
9.2	Matlab code	42
9.2.1	Eén hoek model	42
9.2.2	Twee hoeken model	44
9.2.3	Drie hoeken model	47
9.2.4	Eén hoek model op wielen	51

1 Introductie

1.1 Wat is een trebuchet?

De trebuchet is een wapen dat in de middeleeuwen gebruikt werd om een voorwerp op de vijand af te schieten. De trebuchet is een opvolger van de katapult. De katapult maakt gebruik van mensen die aan de katapult trekken en tegelijk loslaten om het voorwerp weg te schieten. De afstand die er met een katapult geschoten kon worden net als de impact die het voorwerp op de grond maakte, was afhankelijk van de kracht en timing van de mensen die trokken. De onvoorspelbaarheid van de katapult was groot. De trebuchet daarentegen maakt gebruik van een zwaar tegengewicht dat omhoog gehezen wordt. Als het voorwerp in de lucht hangt, is er potentiële energie in het voorwerp opgeslagen. Op het moment dat het tegengewicht wordt losgelaten, komt deze energie in een paar seconden vrij. De trebuchet kon veel preciezer schieten dan de katapult, omdat de energie die bij het afschieten vrij kwam elke keer nageenough hetzelfde was. Er was voor de trebuchet nog steeds mankracht nodig om het tegengewicht omhoog te krijgen, mede hierdoor werd de trebuchet na de uitvinding van buskruit vervangen door kanonnen. [Purton, 2009]



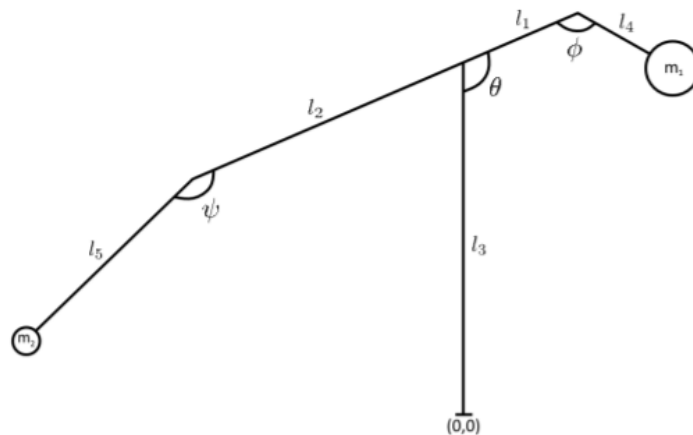
Figuur 1.1: Een nagebouwde trebuchet. Er is een verticale balk te zien (l_3) met daarop een hoofdbalk ($l_1 + l_2$). Links hangt het af te schieten voorwerp (m_2) aan een touw met lengte l_5 . Rechts is het zware tegengewicht (m_1) te zien die met een tussenbalk (l_4) aan de hoofdbalk vast zit. [Onbekend]

De trebuchet bestaat uit een verticale balk (l_3) met daarbovenop de hoofdbalk ($l_1 + l_2$). Zoals te zien is in figuur 1.1 zijn aan deze balk het tegengewicht (m_1) en het af te schieten voorwerp (m_2) verbonden met een balk tussen het gewicht en de hoofdbalk in (l_4 en l_5). Voordat er met de trebuchet geschoten kan worden, moet het tegengewicht omhoog gehezen worden. Voor het afschieten bevindt het tegengewicht zich hoog boven de grond en bevindt het af te schieten voorwerp zich laag bij de grond. Op het moment van afschieten valt het tegengewicht naar beneden en vliegt het afgeschoten voorwerp in een boog over de trebuchet heen. Nu we weten hoe de trebuchet werkt, kunnen we een schematisch model gaan maken.

1.2 Schematisch model

In figuur 1.1 zijn de verschillende namen voor de balken en gewichten af te lezen. Deze zijn ook terug te vinden in het schematische model van de trebuchet, zie figuur 1.2. In figuur 1.2 zijn de balken weergegeven als lijnen en de massa's zijn weergegeven als puntmassa's. De hoeken die tussen de verschillende balken zitten, hebben een naam gekregen (θ , ϕ en ψ).

In figuur 1.2 is het algemene model te zien. Dit model is op een aantal manieren te vereenvoudigen. In dit project zullen wij vier verschillende vereenvoudigingen gaan bekijken. In ons eerste model zijn l_4 en l_5 gelijk aan nul. Hierdoor houden we alleen hoek θ over, dit model wordt daarom ook wel het één hoek model genoemd. In ons tweede model kiezen we l_5 nog steeds gelijk aan nul, maar kijken we naar de invloed van het toevoegen van l_4 en de hoek ϕ op het model. Dit model wordt ook wel het twee hoeken model genoemd. Het derde model is gelijk aan het model in figuur 1.2. Dit model heeft drie hoeken en wordt daarom ook wel het drie hoeken model genoemd. Als laatste willen we kijken wat de toevoeging van wielen voor invloed heeft op het model. We zullen dit gaan doen bij het één hoek model.



Figuur 1.2: Schematisch model van de trebuchet. De massa's m_1 en m_2 , de lengtes l_1, l_2, l_3, l_4 en l_5 en de oriëntatie van de hoeken θ, ϕ en ψ zijn in dit schematische model weergegeven. [Robin, 2020]

1.2.1 Aannames

Bij het maken van een schematisch model moeten er aannames gemaakt worden. Het doel van een schematisch model is om de trebuchet zo overzichtelijk mogelijk weer te geven. Om dit doel te bereiken worden sommige balken uit figuur 1.1 weg gelaten en worden de massa's en balken als puntmassa's en lijnen weergegeven. We doen een aantal aannames om met dit model te kunnen werken. Hierboven is al genoemd dat er in het model uitgegaan is van lijnen en puntmassa's. In het model wordt de grond niet meegenomen. Het nulpunt van het assenstelsel kiezen we aan de onderkant van de verticale balk. Het energieverlies door wrijving wordt in het model niet meegenomen. De massa van de hele trebuchet zie je in de eerste drie vereenvoudigingen van de trebuchet niet terug, omdat we ervoor gekozen hebben de massa van de hele trebuchet als puntmassa te zien. Bij het model waarbij we de trebuchet op wielen plaatsen, zal de massa van de trebuchet wel een rol gaan spelen. We nemen aan dat de balken in het model stijf zijn.

1.3 Onderzoeksvraag

In dit project worden vier vereenvoudigingen van de trebuchet onderzocht. Er wordt gekeken naar het rendement met betrekking tot de energie overdracht van het zware tegengewicht op het afgeschoten voorwerp. De invloed van het toevoegen van extra armen en wielen wordt onderzocht. Bij meer energie overdracht kan het voorwerp verder weg geschoten worden en zal het voorwerp meer impact hebben als het op de grond terecht komt.

1.4 Literatuur

Na het opstellen van het schematisch model en de onderzoeksvraag zijn we op zoek gegaan naar literatuur die kan helpen bij het onderzoek. Voor dit project maken we gebruik van het bachelor eindproject van Robin de Jong [de Jong, 2020] over het modelleren van de beweging van de trebuchet bij het afvuren. We hebben ook gebruik gemaakt van de referenties in haar verslag. Ze heeft, net zoals in andere literatuur, het model van de Trebuchet stapsgewijs opgebouwd. De verschillende vereenvoudigingen worden in dit project ook beschreven, maar er wordt in dit project als toevoeging gekeken naar het rendement dat elk van deze vereenvoudigingen heeft. Hierdoor kunnen de verschillende vereenvoudigingen met elkaar vergeleken worden en kan er gekeken worden naar de invloed van het toevoegen van een extra arm met bijbehorende hoek. Zorgt een toevoeging daadwerkelijk voor meer energieoverdracht tussen het zware tegengewicht en het afgeschoten voorwerp. In dit verslag voegen we een extra model toe, namelijk het één hoek model op wielen.

Voor de lengtes en de gewichten van de trebuchet maken we gebruik van een gevonden blauwdruk [Hansen, 1992]. Dit doen we om een zo realistisch mogelijk model te maken, waarbij de variabelen en parameters, die later nog aan bod zullen komen, een juiste verhouding hebben.

De opgestelde vergelijkingen van de vereenvoudigingen worden vergeleken met vergelijkingen uit de literatuur [Rutan and Wieczorek, 2005], zodat we er zeker van kunnen zijn dat de opgestelde vergelijkingen kloppen. De methode die we gebruiken voor het opstellen van de vergelijkingen, wordt in de volgende paragraaf besproken.

1.5 Methode

We hebben een schematisch model gemaakt van een trebuchet, maar hoe kunnen we hier nu mee gaan rekenen? Er zijn verschillende manieren om met dit schematische model aan de slag te gaan. In ons project zullen we de Euler-Lagrange methode gaan gebruiken. Deze methode maakt gebruik van de energiën die zich in het systeem bevinden. De methode leidt de bewegingsvergelijkingen af door de energiën op te schrijven. Het fijne aan deze methode is dat we niet hoeven te puzzelen met alle krachten die op het systeem werken.

Het grootste voordeel van deze methode is dat niet alle krachten die op het systeem werken opgeschreven hoeven te worden.

De Euler-Lagrange vergelijking is een herformulering van de bewegingswetten van Newton en is als volgt geformuleerd:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0$$

Voor de Euler-Lagrange methode hebben we een Lagrangiaan nodig: $L(x_1, \dots, x_n) = E_k - E_p$.

De Lagrangiaan is de kinetische energie min de potentiële energie, voor verschillende x_i . Waarbij de x_i zowel in de Euler-Lagrange vergelijking als in de Lagrangiaan staat voor de gegeneraliseerde coördinaten, die in dit project θ , ϕ , ψ en $x(t)$ zijn.

1.6 Parameters en variabelen

In paragraaf 1.4 hebben we variabelen en parameters kort genoemd. In deze paragraaf wordt hier verder op in gegaan. In ons model hebben we te maken met verschillende lengtes van balken, massa's van gewichten en hoeken tussen balken. De lengtes en gewichten voor ons model halen we uit de literatuur [Hansen, 1992] om een zo realistisch mogelijk model te krijgen. De lengtes en gewichten noemen we ook wel parameters. Een andere parameter die in ons model voorkomt is de gravitatieconstante.

Welke hoeken we kiezen in ons model heeft invloed op de uitkomsten. We kiezen de beginwaarden zo dat het af te schieten voorwerp op de grond ligt. De beginsnelheid van de hoeken is gelijk aan nul.

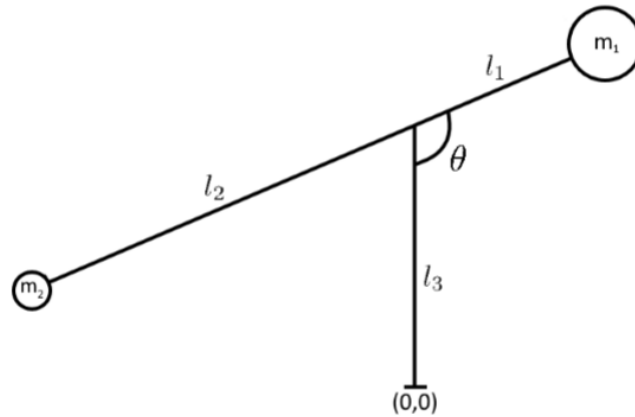
We willen gaan kijken wat er gebeurt op het moment dat het tegengewicht losgelaten wordt. We kijken naar de ontwikkelingen in de tijd. Een onafhankelijke variabele in ons model is daarom de tijd met de eenheid seconde(s). De hoeken θ , ϕ en ψ zijn afhankelijk van de tijd en worden weergegeven in de eenheid radialen (rad). In ons laatste model, het één hoek model op wielen, krijgen we nog een extra afhankelijke variabele, namelijk $x(t)$, welke wordt weergegeven in de eenheid(m). Deze variabele geeft de verplaatsing van de trebuchet in de x-richting weer.

Tabel 1: Parameters en variabelen

M	massa van de trebuchet	2000 kg
m_1	massa van het tegengewicht	2000 kg
m_2	massa van het af te schieten voorwerp	15 kg
l_1	hoofdbalk aan de kant van het tegengewicht	1.2 m
l_2	hoofdbalk aan de kant van af te schieten voorwerp	5.7 m
l_3	verticale balk die met de hoofdbalk verbonden is	3.2 m
l_4	tussenbalk bij het tegengewicht	1.4 m
l_5	tussenbalk bij het af te vuren voorwerp	5 m
g	gravitatieconstante	9.81 m/s^2
θ_0	θ op $t = 0$	0.7π rad
$\dot{\theta}_0$	$\dot{\theta}$ op $t = 0$	0π rad/s
ϕ_0	ϕ op $t = 0$	$\pi - \theta_0$ rad
$\dot{\phi}_0$	$\dot{\phi}$ op $t = 0$	0π rad/s
ψ_0	ψ op $t = 0$	$\theta_0 - 0.5\pi$ rad
$\dot{\psi}_0$	$\dot{\psi}$ op $t = 0$	0π rad/s
x_0	x op $t = 0$	0 m
\dot{x}_0	\dot{x} op $t = 0$	0 m/s
t	tijd	s
θ	hoek tussen de verticale balk en de hoofdbalk (l_1 en l_3)	rad
ϕ	hoek tussen de hoofdbalk en de balk van het tegengewicht(l_1 en l_4)	rad
ψ	hoek tussen de hoofdbalk en de balk van het af te schieten voorwerp (l_2 en l_5)	rad
$x(t)$	horizontale verplaatsing van de trebuchet	m

2 Eén hoek model

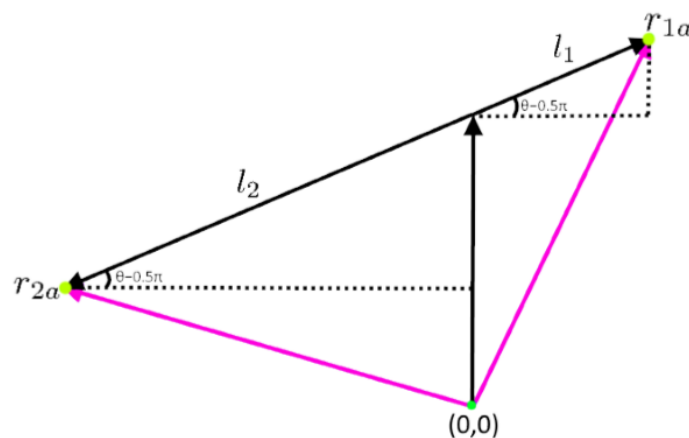
Zoals in paragraaf 1.2 al beschreven staat, zijn er verschillende vereenvoudigingen van de trebuchet te bedenken. We beginnen met het één hoek model, waar l_4 en l_5 van het algemene model (figuur 1.2) gelijk zijn aan nul. Hierdoor houden we nog maar één hoek over, namelijk hoek θ . Hieronder vindt u een schematische weergave van het één hoek model met de drie verschillende lengtes (l_1 , l_2 en l_3), de twee massa's (m_1 en m_2) en de hoek(θ). Het nulpunt van ons model is onder de verticale balk(l_3) gekozen.



Figuur 2.1: Schematische weergave van het één hoek model waarin de plaats van de drie verschillende lengtes (l_1 , l_2 en l_3), de plaats van de twee verschillende massa's (m_1 en m_2), de plaats en oriëntatie van de hoek (θ) en het gekozen nulpunt te zien zijn. [Robin, 2020]

2.1 Wiskundig model

Een schematisch model geeft ons meer duidelijkheid over waar de balken, massa's en hoek zich bevinden. Voor de berekeningen die wij met dit model willen gaan doen, is het handig om het model om te schrijven naar een vector weergave. In de vector weergave loopt een vector van het gekozen nulpunt naar een massa. De vectoren beschrijven de positie van de massa's ten opzichte van het nulpunt. In de vector weergave hieronder zijn een aantal hulp(stippel)lijnen weergegeven, zodat we de vectoren uit kunnen drukken in de constanten l_1 , l_2 , l_3 en de variabele θ . We gebruiken hiervoor de hoek $\theta - \frac{1}{2}\pi$.



Figuur 2.2: Vector weergave van het één hoek model waarin twee (roze) vectoren te zien zijn die van het nulpunt naar de twee massa's lopen. Door deze vectoren op te schrijven, kunnen we berekeningen gaan uitvoeren voor dit model. [Robin, 2020]

Bij het opschrijven van de vectoren maken we gebruik van de zwarte vectoren die in de figuur hierboven zichtbaar zijn. We gaan vanuit het nulpunt eerst via de verticale balk l_3 omhoog en dan via de hoofdbalk (l_1 en l_2) naar de massa's m_1 en m_2 . Op deze manier vinden we de vectoren:

$$r_{1a} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta - \frac{1}{2}\pi) \\ l_1 \sin(\theta - \frac{1}{2}\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(\theta) \\ -l_1 \cos(\theta) + l_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$r_{2a} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_2 \cos(\theta - \frac{1}{2}\pi) \\ l_2 \sin(\theta - \frac{1}{2}\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin(\theta) \\ l_2 \cos(\theta) + l_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

We gaan nu terug naar paragraaf 1.5 waarin de Euler-Lagrange methode aan bod kwam. Voor de Euler-Lagrange vergelijking hebben we een Lagrangiaan nodig.

$$L(x_1, \dots, x_n) = E_k - E_p$$

We berekenen eerst de kinetische en potentiële energie van de massa's m_1 en m_2 en maken hierbij gebruik van de vectoren r_{1a} en r_{2a} .

De potentiële energie ($E_p = mgh$):

We berekenen de potentiële energie voor de massa's m_1 en m_2 eerst los, daarna tellen we de twee bij elkaar op. We gebruiken hiervoor de y-coördinaat van de vectoren.

$$\begin{aligned} E_{p1a} &= m_1 g (-l_1 \cos(\theta) + l_3) \\ E_{p2a} &= m_2 g (l_2 \cos(\theta) + l_3) \\ E_{pa} &= E_{p1a} + E_{p2a} = -g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \cos(\theta) + g l_3 (m_1 + m_2) \end{aligned} \quad (3)$$

De kinetische energie ($E_k = \frac{1}{2} m v^2$):

Voor de kinetische energie moeten we eerst de snelheid van de massa's berekenen. Daarna rekenen we de kinetische energie voor de massa's uit, waarna we deze bij elkaar optellen. We gebruiken hiervoor de x-coördinaat en de y-coördinaat van de vectoren en leiden deze af naar de tijd.

$$\begin{aligned} v_{1a}^2 &= ((r'_{1a,x})^2 + (r'_{1a,y})^2) = (l_1 \cos(\theta) \dot{\theta})^2 + (-l_1 \sin(\theta) \dot{\theta})^2 = l_1^2 \dot{\theta}^2 \\ v_{2a}^2 &= ((r'_{2a,x})^2 + (r'_{2a,y})^2) = (-l_2 \cos(\theta) \dot{\theta})^2 + (-l_2 \sin(\theta) \dot{\theta})^2 = l_2^2 \dot{\theta}^2 \\ E_{k1a} &= \frac{1}{2} m_1 v_{1a}^2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 \\ E_{k2a} &= \frac{1}{2} m_2 v_{2a}^2 = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2 \\ E_{ka} &= E_{k1a} + E_{k2a} = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

We vinden de Lagrangiaan ($L_a = E_{ka} - E_{pa}$) door de potentiële energie(3) van de kinetische energie(4) af te trekken:

$$L_a = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\theta}^2 + g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \cos(\theta) - g l_3 (m_1 + m_2) \quad (5)$$

Nu we de Lagrangiaan gevonden hebben, gaan we terug naar de Euler-Lagrange vergelijking:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0$$

In het één hoek model hoeven we deze vergelijking alleen voor $x_1 = \theta$ uit te rekenen. We berekenen eerst de losse termen van deze vergelijking, trekken deze daarna van elkaar af en stellen dit gelijk aan nul om de Euler-Lagrange vergelijking te krijgen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_a}{\partial \theta} &= -g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \sin(\theta) \\
\frac{\partial L_a}{\partial \dot{\theta}} &= (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\theta} \\
\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L_a}{\partial \dot{\theta}} \right) &= (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \ddot{\theta} \\
\frac{\partial L_a}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L_a}{\partial \dot{\theta}} \right) &= -g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \sin(\theta) - (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \ddot{\theta} = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

Uit (6) kunnen we de tweede afgeleide van θ vrijmaken. We krijgen dan de volgende vergelijking:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g(m_1 l_1 - m_2 l_2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} \sin(\theta) \tag{7}$$

We mogen delen door de term $(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)$ omdat m_1, m_2, l_1 en l_2 ongelijk aan nul zijn, we delen dus door een term die ongelijk is aan nul.

Om onze differentiaalvergelijking compleet te maken hebben we de begincondities nodig voor θ en de afgeleide van θ . Deze begincondities kiezen we als volgt:

$$\theta(t=0) = \theta_0 \quad \dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0$$

2.2 Analytische oplossing

Om erachter te komen wat de nauwkeurigheid van de methode die we gaan gebruiken voor het oplossen van de differentiaalvergelijkingen is, bepalen we eerst de analytische oplossing. We kunnen dan twee verschillende numerieke oplossingen vergelijken met de gevonden analytische oplossing. De methode die het nauwkeurigste resultaat geeft zullen we in het vervolg gebruiken.

De gevonden differentiaalvergelijking bij (7):

$$\ddot{\theta} = -\frac{g(m_1 l_1 - m_2 l_2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} \sin(\theta)$$

Voor het oplossen van deze differentiaalvergelijking vermenigvuldigen we beide kanten met $\dot{\theta}$, waarna we de vergelijking integreren.

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} \dot{\theta} &= -\frac{g(m_1 l_1 - m_2 l_2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} \sin(\theta) \dot{\theta} \\
\int \ddot{\theta} \dot{\theta} dt &= \int -\frac{g(m_1 l_1 - m_2 l_2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} \sin(\theta) \dot{\theta} dt \\
\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 &= \frac{g(m_1 l_1 - m_2 l_2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} \cos(\theta) + \alpha
\end{aligned}$$

Door de begincondities van de differentiaalvergelijking te gebruiken vinden we voor α :

$$\alpha = \frac{1}{2} \dot{\theta}_0^2 - \frac{g(m_1 l_1 - m_2 l_2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} \cos(\theta_0)$$

Als we de gevonden α invullen in de vergelijking, dan krijgen we:

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{g(m_1 l_1 - m_2 l_2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} \cos(\theta) + \frac{1}{2} \dot{\theta}_0^2 - \frac{g(m_1 l_1 - m_2 l_2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} \cos(\theta_0)$$

Als we deze vergelijking oplossen voor $\dot{\theta}$ dan krijgen we:

$$\dot{\theta} = \begin{cases} -\sqrt{2 \frac{g(m_1 l_1 - m_2 l_2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) + \dot{\theta}_0^2} \\ \sqrt{2 \frac{g(m_1 l_1 - m_2 l_2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) + \dot{\theta}_0^2} \end{cases} \tag{8}$$

De tweede afgeleide van θ is negatief en hierdoor vinden we dat we de eerste oplossing moeten gebruiken.

2.3 Numerieke oplossing

Voor de numerieke oplossing van onze differentiaalvergelijking, vergelijken we twee methodes met elkaar om te kijken welke het meest overeenkomt met onze analytische oplossing. We vergelijken de Euler Forward methode met een methode van matlab genaamd ode45.

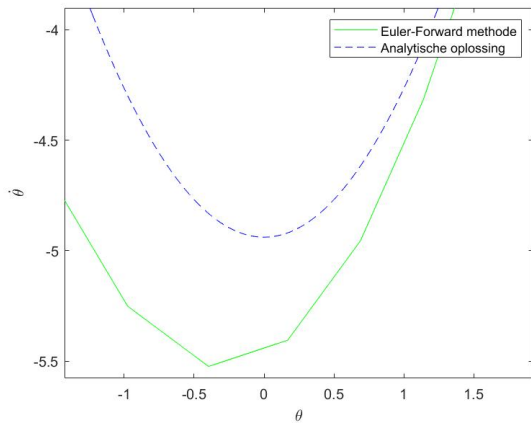
Om (7) op te kunnen lossen, moeten we de tweede orde differentiaalvergelijking omschrijven naar twee eerste orde differentiaalvergelijkingen. Dit resulteert in de volgende differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -g \frac{(m_1 l_1 - m_2 l_2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} \sin(y_1) \end{cases} \quad (9)$$

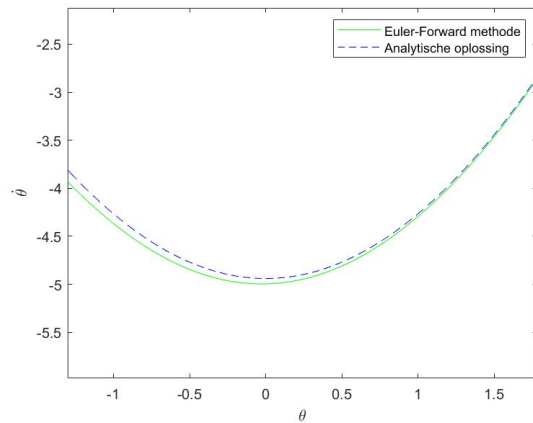
We gebruiken de begincondities zoals genoemd in paragraaf 1.6, deze zijn: $y_1(0) = 0.7\pi$ en $y_2(0) = 0$.

2.3.1 Euler Forward methode

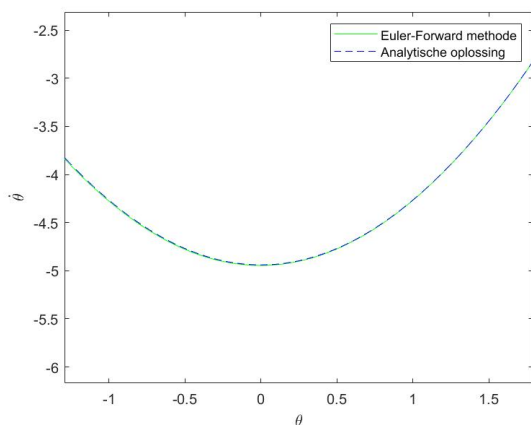
Bij de Euler Forward methode is de keuze voor een goede Δt belangrijk. Hieronder zijn verschillende figuren te zien waarin de analytische oplossing en de Euler Forward oplossing in één figuur geplot zijn voor verschillende waarden van Δt .



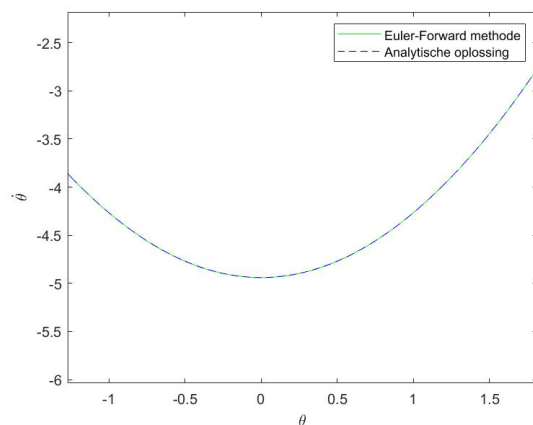
((a)) $\Delta t = 0.1$



((b)) $\Delta t = 0.01$



((c)) $\Delta t = 0.001$



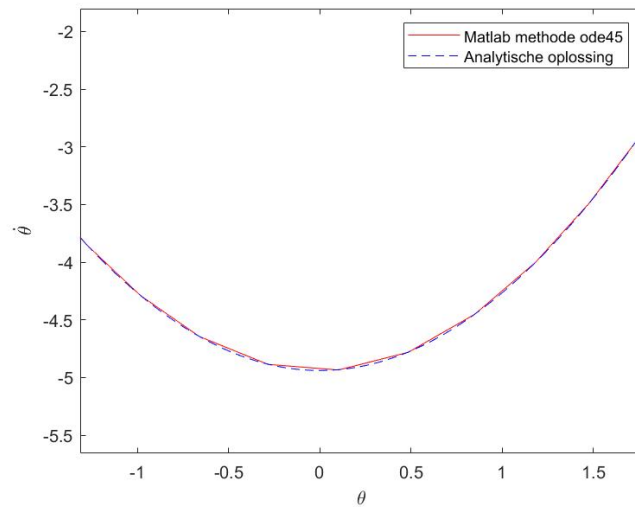
((d)) $\Delta t = 0.0001$

Figuur 2.3: Analytische methode en Euler Forward methode in één figuur geplot voor verschillende Δt om een juiste keuze voor Δt te maken.

Om een nauwkeurig resultaat te krijgen, moeten we onze Δt dus minstens 0.001 kiezen.

2.3.2 Ode45

Ode45 is een methode van matlab die zelf de grootte van zijn tijdstappen bepaald.



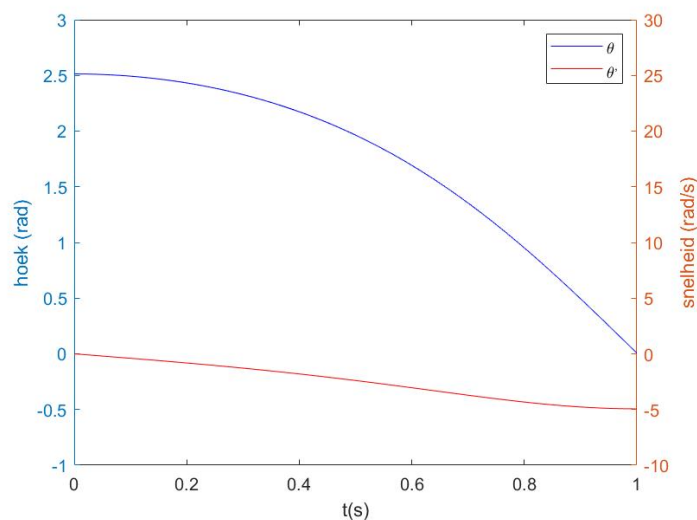
Figuur 2.4: Analytische oplossing en Ode45 in één figuur geplot om te kijken hoe nauwkeurig de Ode45 oplossing is.

Als je ver genoeg inzoomt, dan kun je de tijdstappen zien. De berekende punten liggen netjes op de analytische oplossing, maar de verbindinglijntjes liggen hier net iets buiten.

De tijdstappen van Ode45 leveren in het twee hoeken model problemen op, daarom is er voor gekozen om de Euler Forward methode te gebruiken.

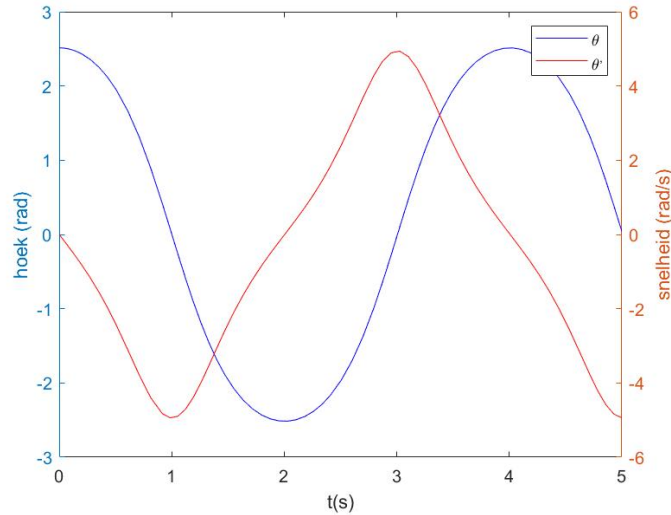
2.4 Oplossing differentiaalvergelijking

We hebben een methode gekozen waarmee we onze differentiaalvergelijking op kunnen lossen. We gaan nu kijken naar de resultaten.



Figuur 2.5: De verandering van de hoek en de hoeksnelheid ten opzichte van de tijd vanaf het moment van loslaten(0s) tot 1 seconde na het loslaten van het tegengewicht

We zien dat na één seconde theta gelijk is aan nul. Op dat moment hangt het tegengewicht verticaal naar beneden. In de figuur hieronder laten we de tijd langer lopen, we zien dat de hoek θ negatief wordt. De hoofdbalk draait een rondje. De oplossingen voor hoek θ en voor de bijbehorende hoeksnelheid zijn periodiek.



Figuur 2.6: De verandering van de hoek en de hoeksnelheid ten opzichte van de tijd vanaf het moment van loslaten(0 s) tot 5 seconde na het loslaten van het tegengewicht

2.5 Afschieten van het voorwerp

De verandering van de hoek en de hoeksnelheid zijn belangrijk in het bepalen op welk moment we het voorwerp af willen schieten. We gaan nu vergelijkingen opstellen om de baan van het afgeschoten voorwerp te kunnen bepalen, maar ook een vergelijking voor het uitrekenen van de impact die het voorwerp op de grond zal hebben.

Het moment dat het voorwerp wordt afgeschoten noemen we t_R . Hierbij hoort ook een hoek θ_R . Tot het moment van afschieten weten we welke baan het voorwerp aflegt, namelijk vergelijking (2):

$$r_{2a}(t) = \begin{bmatrix} -l_2 \sin(\theta) \\ l_2 \cos(\theta) + l_3 \end{bmatrix}$$

vanaf het moment dat het voorwerp los komt van de trebuchet, weten we de baan die het voorwerp gaat afleggen nog niet. We zullen gebruik maken van het feit dat we weten welke versnelling het voorwerp zal gaan hebben. Weerstand worden niet meegenomen in dit model, dus we hebben alleen te maken met de zwaartekracht in de y-richting.

We kunnen r_{2a} differentiëren naar de tijd, dan krijgen we:

$$\dot{r}_{2a}(t) = \begin{bmatrix} -l_2 \dot{\theta} \cos(\theta) \\ -l_2 \dot{\theta} \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (10)$$

De versnelling van het voorwerp is:

$$\ddot{r}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

Als we deze integreren naar de tijd sinds het moment van afschieten, dan krijgen we:

$$\dot{r}_2(t) = \begin{bmatrix} \beta \\ -g(t - t_R) + \gamma \end{bmatrix} \quad (11)$$

Als we deze nog een keer naar de tijd sinds het moment van afschieten integreren, dan krijgen we:

$$r_2(t) = \left[\begin{array}{c} \beta(t - t_R) + \delta \\ -\frac{1}{2}g(t - t_R)^2 + \gamma(t - t_R) + \epsilon \end{array} \right] \quad (12)$$

Op het moment van afschieten ($t = t_R$) weten we dat de vergelijkingen van de positie en de snelheid van het voorwerp aan elkaar gelijk moeten zijn, dus vergelijkingen $r_{2a}(t_R) = r_2(t_R)$ (2) en (12) en $\dot{r}_{2a}(t_R) = \dot{r}_2(t_R)$ ((10) en (11)).

Op deze manier vinden we β, γ, δ en ϵ .

$$\begin{aligned} \beta(\theta_R, \dot{\theta}_R) &= -l_2 \dot{\theta}_R \cos(\theta_R) \\ \gamma(\theta_R, \dot{\theta}_R) &= -l_2 \dot{\theta}_R \sin(\theta_R) \\ \delta(\theta_R) &= -l_2 \sin(\theta_R) \\ \epsilon(\theta_R) &= l_2 \cos(\theta_R) + l_3 \end{aligned} \quad (13)$$

Om erachter te komen waar het voorwerp op de grond komt, kijken we naar het moment waarop de hoogte, dus de y -coördinaat, gelijk is aan nul. Het moment waarop het voorwerp op de grond terecht komt, noemen we t_E .

$$0 = -\frac{1}{2}g(t_E - t_R)^2 + \gamma(t_E - t_R) + \epsilon$$

Door t_E vrij te maken, vinden we de volgende oplossing:

$$t_E(\theta_R) = \frac{\gamma(\theta_R, \dot{\theta}_R) + \sqrt{\gamma(\theta_R, \dot{\theta}_R)^2 + 2g\epsilon(\theta_R)}}{g} + t_R \quad (14)$$

We hebben voor de positieve oplossing gekozen omdat de eindtijd groter moet zijn dan de tijd van loslaten.

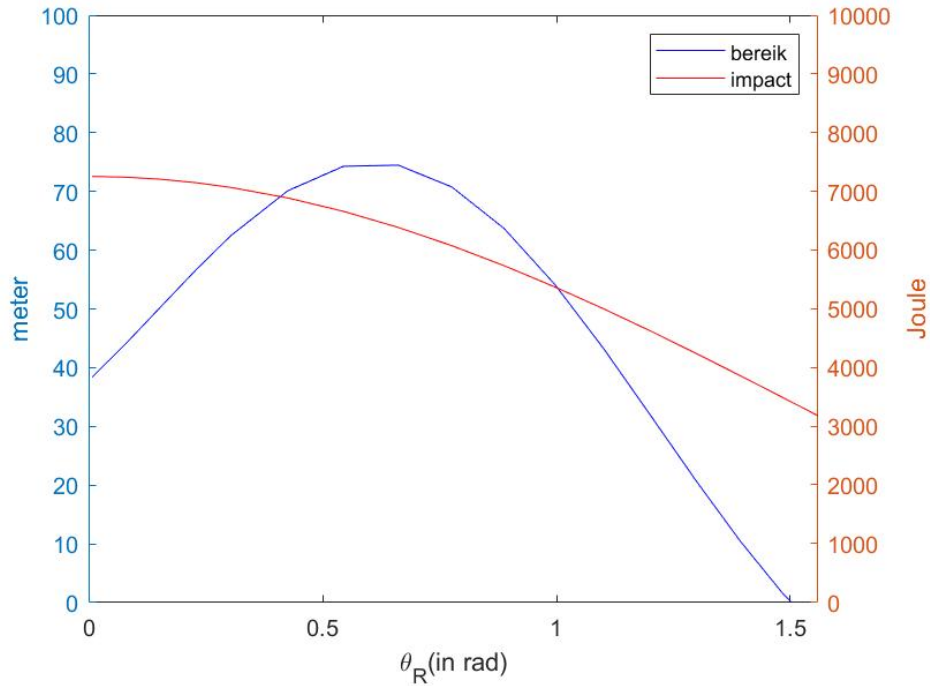
Door de gevonden t_E in te vullen in vergelijking (12), komen we erachter hoever het voorwerp afgeschoten kan worden.

$$s(\theta_R) = \beta(\theta_R, \dot{\theta}_R)(t_E(\theta_R) - t_R) + \delta(\theta_R) \quad (15)$$

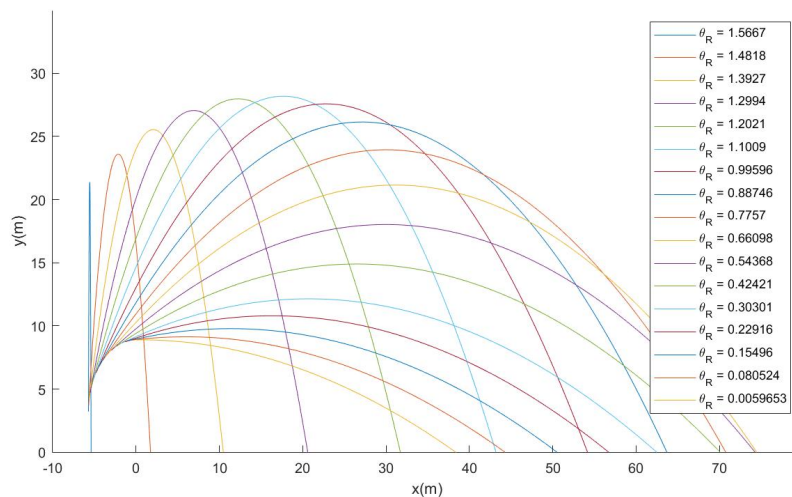
Als we het behoud van Energie combineren met de gevonden t_E die we invullen in (11) om de snelheid te berekenen op t_E , dan vinden we de impact van het voorwerp op de vloer, omdat er alleen nog maar kinetische energie overblijft.

$$E(\theta_R) = \frac{1}{2}m_2(\beta(\theta_R, \dot{\theta}_R)^2 + (-g(t_E(\theta_R) - t_R) + \gamma(\theta_R, \dot{\theta}_R))^2) \quad (16)$$

Wanneer schieten we het voorwerp af? Als we dit direct na het loslaten van het tegengewicht doen, dan zal het voorwerp achter de trebuchet op de grond neerkomen. Als we nadenken over de ideale hoek bij het afschieten, komen we tot de conclusie dat het geen zin heeft om het voorwerp af te schieten als de hoek nog groter is dan $\frac{1}{2}\pi$. De grote massa is dan nog maar net los gelaten en het voorwerp dat we af willen schieten heeft nog weinig snelheid en hoogte kunnen maken. Als $\theta = 0$ dan is de massa tegen de stam aangekomen. We kijken bij het afschieten naar het moment waarop $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$.



Figuur 2.7: Het bereik, hoever een voorwerp afgeschoten kan worden, en de impact, hoe hard een voorwerp op de grond neerkomt, wanneer het voorwerp bij verschillende hoeken wordt afgeschoten. Uit de figuur kunnen we halen dat de grootste afstand wordt bereikt als we afvuren bij een hoek van 0,67 rad, dan komt het voorwerp 75 meter ver. De grootste impact hebben we als we het voorwerp loslaten bij 0,0060 rad, dan hebben we een impact van $7,3 \cdot 10^3$ Joule. De hoofdbalk is bij nul radialen verticaal.

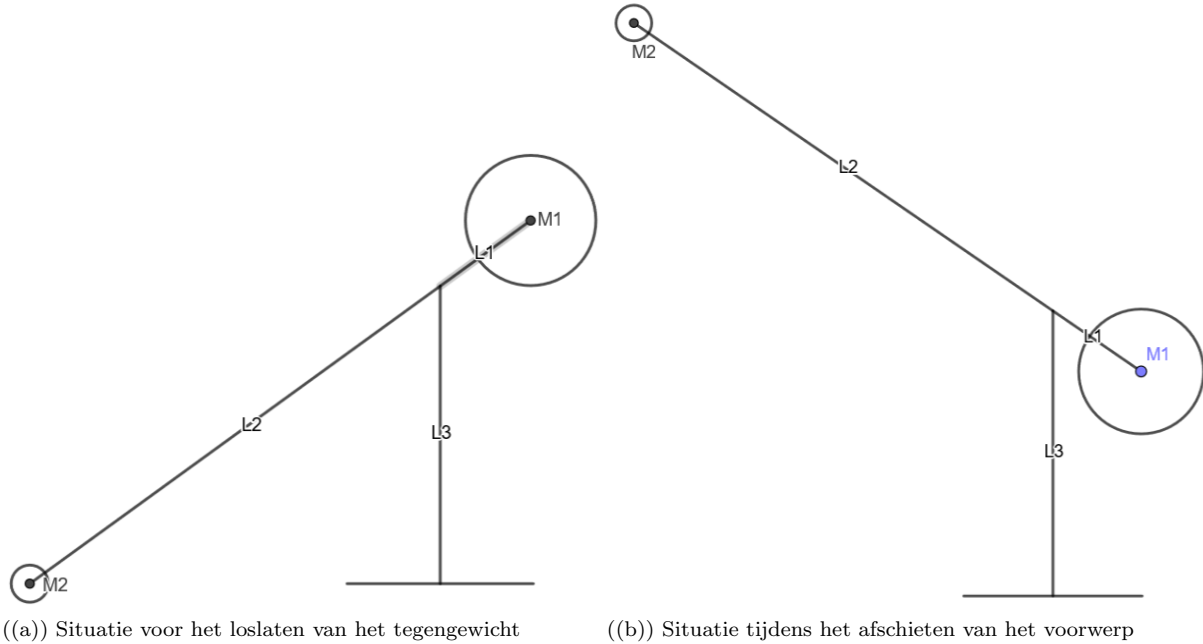


Figuur 2.8: De baan die het voorwerp aflegt wanneer het bij verschillende hoeken wordt afgeschoten

Bij het vroeg afvuren van het voorwerp wordt deze vooral omhoog geschoten. Bij het laat afvuren wordt het voorwerp alleen in de horizontale richting geschoten. Wanneer we hier tussenin afschieten zien we dat het afgeschoten voorwerp een mooie boog door de lucht maakt en veel verder pas de grond raakt.

2.6 Rendement

Er zit energie in het systeem voordat het voorwerp wordt afgeschoten en er blijft energie achter in het systeem nadat het voorwerp is afgeschoten. We willen weten wat het rendement is van de energie die het afgeschoten voorwerp mee heeft gekregen van de grote massa. We gebruiken hiervoor vergelijking (1) voor de hoogte van m_1 en vergelijking (4) voor de kinetische energie van m_1 .



Figuur 2.9: De posities van het zware tegengewicht en het af te schieten voorwerp voor en na het afschieten

Energie in het systeem in situatie (a):

$$\begin{aligned} E_{p,a} &= m_1 g y_a \\ E_{k,a} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Energie in het systeem in situatie (b):

$$\begin{aligned} E_{p,b} &= m_1 g y_b \\ E_{k,b} &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_R^2 \end{aligned} \quad (18)$$

We moeten hierbij wel opmerken dat we de potentiële energie die m_2 heeft verwaarlozen, dit doen we omdat het verschil in massa's zo groot is, dat de invloed hiervan te verwaarlozen valt.

De energie die het afgeschoten voorwerp mee heeft gekregen is de energie in situatie (a) min de energie in situatie (b). We bekijken hoe groot de energie overdracht is op het moment van loslaten met de grootste impact, dus als $\theta = 0.0060$ rad. De impact is dan 7.3 kJ.

$$\begin{aligned} E_{p,a} + E_{k,a} - E_{p,b} - E_{k,b} \\ = m_1 g (y_a - y_b) - \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_R^2 \\ = 7.46 \cdot 10^3 \end{aligned} \quad (19)$$

Het rendement rekenen we uit door het hierboven gevonden antwoord te delen door alleen de potentiële energie van de beginsituatie. In de ideale situatie zou namelijk alle potentiële energie naar het afgeschoten voorwerp gaan.

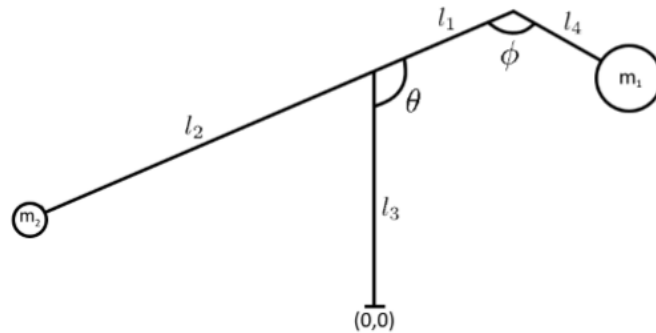
$$E_p = m_1 g y_a = 81.8 \cdot 10^3 \quad (20)$$

Het rendement is $\frac{7.46 \cdot 10^3}{81.8 \cdot 10^3} = 0.0911$, dus 9.11%.

De gevonden uitkomst komt overeen met de verwachte 7.3 kJ die we eerder al gevonden hadden. Het kleine verschil kan komen door afrondingen en doordat we in de berekeningen hierboven de kinetische energie van het afgeschoten voorwerp niet meegenomen hebben.

3 Twee hoeken model

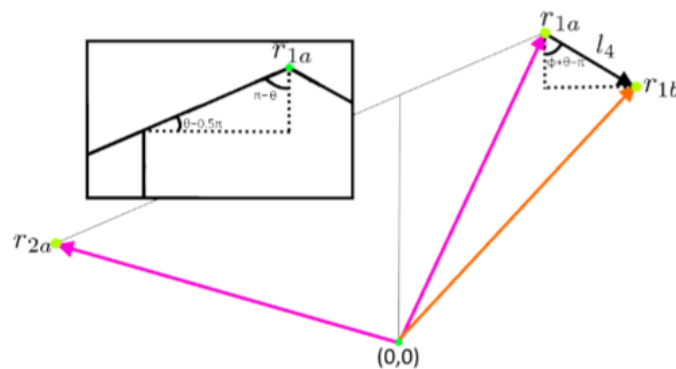
In het vorige hoofdstuk hebben we het één hoek model van de trebuchet besproken. In dit hoofdstuk voegen we de arm l_4 en de bijbehorende hoek ϕ toe, het zogenaemde twee hoeken model. We zijn benieuwd hoeveel invloed het toevoegen van deze arm heeft op de afstand die de trebuchet kan schieten en de impact die het afgeschoten voorwerp op de grond heeft. Aan het einde zullen we kijken naar het rendement van dit model. Hieronder vindt u een schematische weergave van het twee hoeken model met de vier verschillende lengtes(l_1, l_2, l_3 en l_4), de twee massa's(m_1 en m_2) en de twee hoeken(θ en ϕ). Het nulpunt van dit model is net als bij het één hoek model onder de verticale balk(l_3) gekozen.



Figuur 3.1: Schematische weergave van het twee hoeken model waarin de plaats van de vier verschillende lengtes(l_1, l_2, l_3 en l_4), de plaats van de twee verschillende massa's(m_1 en m_2), de plaats en oriëntatie van de twee hoeken(θ en ϕ) en het gekozen nulpunt te zien zijn. [Robin, 2020]

3.1 Wiskundig model

Net als bij het één hoek model geeft een schematisch model ons meer duidelijkheid over waar de balken, massa's en hoeken zich bevinden. Voor de berekeningen die wij met dit model willen gaan doen, is het handig om het model om te schrijven naar een vector weergave. We doen dit op dezelfde manier als bij het één hoek model, waarbij de vectoren de positie van de massa's ten opzichte van het nulpunt beschrijven. In de vector weergave hieronder zijn een aantal hulp(stippel)lijnen weergegeven, zodat we de vectoren uit kunnen drukken in de constanten l_1, l_2, l_3, l_4 en de variabelen θ en ϕ . We gebruiken hiervoor de hoeken $\theta - \frac{1}{2}\pi$ en $\phi + \theta - \pi$. De positie van r_{2b} is hetzelfde als de positie van r_{2a} in het één hoek model, omdat de toegevoegde arm geen invloed heeft op de positie van het af te schieten voorwerp.



Figuur 3.2: Vector weergave van het twee hoeken model waarin de twee roze vectoren van het één hoek model te zien zijn, maar ook een oranje vector die de nieuwe positie van r_{1b} beschrijft. Door de twee vectoren die van het nulpunt naar de massa's lopen op te schrijven, kunnen we berekeningen gaan uitvoeren voor dit model. [Robin, 2020]

We maken bij het opschrijven van de vectoren gebruik van de vectoren uit het één hoek model. Voor massa m_2 blijft de vector hetzelfde.

$$r_{2b} = r_{2a} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin(\theta) \\ l_2 \cos(\theta) + l_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Voor r_{1b} gebruiken we de positie van r_{1a} welke we aanvullen met l_4 en de bijbehorende hoek.

$$r_{1b} = r_{1a} + \begin{bmatrix} l_4 \sin(\theta + \phi - \pi) \\ -l_4 \cos(\theta + \phi - \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(\theta) - l_4 \sin(\theta + \phi) \\ -l_1 \cos(\theta) + l_3 + l_4 \cos(\theta + \phi) \end{bmatrix} \quad (22)$$

Om de Euler-Lagrange vergelijking te kunnen gebruiken, hebben we voor de Lagrangiaan de kinetische en potentiële energie van de twee massa's nodig. Voor r_{2b} is deze gelijk aan die van r_{2a} die we in het vorige hoofdstuk uitgerekend hebben. Voor r_{1b} zullen we de potentiële en kinetische energie opnieuw moeten uitrekenen.

De potentiële energie ($E_p = mgh$):

$$\begin{aligned} E_{p1b} &= m_1 g (-l_1 \cos(\theta) + l_3 + l_4 \cos(\theta + \phi)) \\ E_{p2b} &= E_{p2a} = m_2 g (l_2 \cos(\theta) + l_3) \\ E_{pb} &= E_{p1b} + E_{p2b} = -g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \cos(\theta) + g l_3 (m_1 + m_2) + g m_1 l_4 \cos(\theta + \phi) \end{aligned} \quad (23)$$

De kinetische energie ($E_k = \frac{1}{2} m v^2$):

Voor de kinetische energie hebben we de snelheid van de massa's nodig. Voor r_{2b} geldt dat deze hetzelfde is als bij r_{2a} . Voor r_{1b} moeten we deze opnieuw berekenen.

$$\begin{aligned} v_{1b}^2 &= ((r'_{1b,x})^2 + (r'_{1b,y})^2) \\ &= (l_1 \cos(\theta) \dot{\theta} - l_4 \cos(\theta + \phi) (\dot{\theta} + \dot{\phi}))^2 + (l_1 \sin(\theta) \dot{\theta} - l_4 \sin(\theta + \phi) (\dot{\theta} + \dot{\phi}))^2 \\ &= l_1^2 \cos^2(\theta) \dot{\theta}^2 - 2 l_1 l_4 \cos(\theta) \cos(\theta + \phi) \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) + l_4^2 \cos^2(\theta + \phi) (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 \\ &\quad + l_1^2 \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2 - 2 l_1 l_4 \sin(\theta) \sin(\theta + \phi) \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) + l_4^2 \sin^2(\theta + \phi) (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 \\ &= l_1^2 \dot{\theta}^2 + l_4^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 - 2 l_1 l_4 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos(\phi) \\ E_{k1b} &= \frac{1}{2} m_1 v_{1b}^2 = \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\theta}^2 + l_4^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 - 2 l_1 l_4 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos(\phi)) \end{aligned} \quad (24)$$

$$E_{k2b} = E_{k2a} = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2$$

$$E_{kb} = E_{k1b} + E_{k2b} = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 l_4^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 - m_1 l_1 l_4 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos(\phi) \quad (25)$$

We vinden de Lagrangiaan ($L_b = E_{kb} - E_{pb}$) door de potentiële energie(23) van de kinetische energie(25) af te trekken:

$$\begin{aligned} L_b &= \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 l_4^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 - m_1 l_1 l_4 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos(\phi) \\ &\quad + g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \cos(\theta) - g l_3 (m_1 + m_2) - g m_1 l_4 \cos(\theta + \phi) \end{aligned} \quad (26)$$

Nu we de Lagrangiaan gevonden hebben, gaan we terug naar de Euler-Lagrange vergelijking:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0$$

In het twee hoeken model moeten we deze vergelijking voor $x_1 = \theta$ en $x_2 = \phi$ uitrekenen. We berekenen eerst de losse termen van deze vergelijking voor de hoek θ , trekken deze daarna van elkaar af en stellen dit gelijk aan nul om de Euler-Lagrange vergelijking te krijgen. Dit herhalen we voor hoek ϕ .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_b}{\partial \theta} &= -g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \sin(\theta) + g m_1 l_4 \sin(\theta + \phi) \\
\frac{\partial L_b}{\partial \dot{\theta}} &= (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\theta} + m_1 l_4^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi}) - m_1 l_1 l_4 \cos(\phi) (2\dot{\theta} + \dot{\phi}) \\
\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L_b}{\partial \dot{\theta}} \right) &= (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \ddot{\theta} + m_1 l_4^2 (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) + m_1 l_1 l_4 [\sin(\phi) (2\dot{\theta} + \dot{\phi}) \dot{\phi} - \cos(\phi) (2\ddot{\theta} + \ddot{\phi})] \\
\frac{\partial L_a}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L_a}{\partial \dot{\theta}} \right) &= -g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \sin(\theta) + g m_1 l_4 \sin(\theta + \phi) - (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \ddot{\theta} \\
&\quad - m_1 l_4^2 (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) - m_1 l_1 l_4 [\sin(\phi) (2\dot{\theta} + \dot{\phi}) \dot{\phi} - \cos(\phi) (2\ddot{\theta} + \ddot{\phi})] = 0
\end{aligned} \tag{27}$$

De vergelijking hierboven is moeilijk te lezen. We maken daarom de keuze om de vergelijking op de volgende manier op te schrijven:

$$b_{11} \ddot{\theta} + b_{12} \ddot{\phi} - v_1 = 0 \tag{28}$$

Met b_{11} , b_{12} en v_1 :

$$\begin{aligned}
b_{11}(\phi) &= -m_1 l_1^2 - m_2 l_2^2 - m_1 l_4^2 + 2m_1 l_1 l_4 \cos(\phi) \\
b_{12}(\phi) &= m_1 l_4 (l_1 \cos(\phi) - l_4) \\
v_1(\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}) &= -g(m_2 l_2 - m_1 l_1) \sin(\theta) - g m_1 l_4 \sin(\theta + \phi) + m_1 l_1 l_4 \sin(\phi) (2\dot{\theta} + \dot{\phi}) \dot{\phi}
\end{aligned}$$

We doen nu hetzelfde voor de hoek ϕ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_b}{\partial \phi} &= m_1 l_1 l_4 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \sin(\phi) + g m_1 l_4 \sin(\theta + \phi) \\
\frac{\partial L_b}{\partial \dot{\phi}} &= m_1 l_4^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi}) - m_1 l_1 l_4 \dot{\theta} \cos(\phi) \\
\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L_b}{\partial \dot{\phi}} \right) &= m_1 l_4^2 (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) - m_1 l_1 l_4 \ddot{\theta} \cos(\phi) + m_1 l_1 l_4 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\phi) \\
\frac{\partial L_a}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L_a}{\partial \dot{\phi}} \right) &= m_1 l_1 l_4 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \sin(\phi) + g m_1 l_4 \sin(\theta + \phi) - m_1 l_4^2 (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) + m_1 l_1 l_4 \ddot{\theta} \cos(\phi) - m_1 l_1 l_4 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\phi) = 0
\end{aligned} \tag{29}$$

Ook deze vergelijking is moeilijk te lezen. We herschrijven de vergelijking op dezelfde manier als dat we bij hoek θ hebben gedaan. We krijgen dan de volgende vergelijking:

$$b_{21} \ddot{\theta} + b_{22} \ddot{\phi} - v_2 = 0 \tag{30}$$

Met b_{21} , b_{22} en v_2 :

$$\begin{aligned}
b_{21}(\phi) &= m_1 l_4 (l_1 \cos(\phi) - l_4) \\
&= b_{12}(\phi) \\
b_{22}(\phi) &= -m_1 l_4^2 \\
v_2(\theta, \dot{\theta}, \phi) &= -m_1 l_1 l_4 \dot{\theta}^2 \sin(\phi) - g m_1 l_4 \sin(\theta + \phi)
\end{aligned}$$

Doordat we de vergelijkingen op deze manier hebben opgeschreven, kunnen we de vergelijkingen (28) en (30) in matrixvorm schrijven.

$$\begin{bmatrix} b_{11}(\phi) & b_{12}(\phi) \\ b_{12}(\phi) & b_{22}(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}) \\ v_2(\theta, \dot{\theta}, \phi) \end{bmatrix} \tag{31}$$

Deze matrixvergelijking kunnen we nog eenvoudiger opschrijven als $B \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \vec{v}$, waarin B de matrix is en v de vector.

We kunnen $\ddot{\theta}$ en $\ddot{\phi}$ berekenen als de matrix B inverteerbaar is. Dan krijgen we: $\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = B^{-1} \vec{v}$. Om te kijken of B inverteerbaar is moeten we de determinant van B uitrekenen.

$$\begin{aligned}
\det B &= b_{11} \cdot b_{22} - (b_{12})^2 \\
&= (-m_1 l_1^2 - m_2 l_2^2 - m_1 l_4^2 + 2m_1 l_1 l_4 \cos(\phi)) \cdot (-m_1 l_4^2) - (m_1 l_4 (l_1 \cos(\phi) - l_4))^2 \\
&= m_1^2 l_1^2 l_4^2 + m_1 m_2 l_2^2 l_4^2 + m_1^2 l_4^4 - 2m_1^2 l_1 l_4^3 \cos(\phi) - m_1^2 l_1^2 l_4^2 \cos^2(\phi) - m_1^2 l_4^4 + 2m_1^2 l_1 l_4^3 \cos(\phi) \\
&= m_1 m_2 l_2^2 l_4^2 + m_1^2 l_1^2 l_4^2 \sin(\phi) \\
&= m_1 l_4^2 (m_2 l_2^2 + m_1 l_1^2 \sin^2(\phi))
\end{aligned} \tag{32}$$

Omdat m_1, m_2, l_1, l_2, l_3 en l_4 ongelijk zijn aan nul, zal de determinant altijd groter zijn dan nul. De matrix B is dus inverteerbaar. Nu kunnen we (31) oplossen voor $\ddot{\theta}$ en $\ddot{\phi}$:

$$\begin{aligned}
B^{-1} &= \frac{1}{\det B} \begin{bmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{12} & b_{11} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} &= B^{-1} \cdot v = \frac{1}{\det B} \begin{bmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{12} & b_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\
\ddot{\theta} &= \frac{1}{\det B} (b_{22} v_1 - b_{12} v_2) \\
\ddot{\phi} &= \frac{1}{\det B} (-b_{12} v_1 + b_{11} v_2)
\end{aligned}$$

Als we dit omschrijven naar vier eerstegraads differentiaalvergelijkingen dan krijgen we:

$$\begin{cases} y_1 = y_2 \\ y_2 = \frac{1}{\det B} (b_{22} v_1 - b_{12} v_2) \\ y_3 = y_4 \\ y_4 = \frac{1}{\det B} (-b_{12} v_1 + b_{11} v_2) \end{cases} \tag{33}$$

Waar $y_1 = \theta, y_2 = \dot{\theta}, y_3 = \phi$ en $y_4 = \dot{\phi}$.

Om onze differentiaalvergelijking compleet te maken hebben we de begincondities nodig voor θ , de afgeleide van θ , ϕ en de afgeleide van ϕ . Deze begincondities zijn te vinden in paragraaf 1.6.

3.2 Lagrangiaan controleren

In het vorige hoofdstuk hebben we onze differentiaalvergelijking gecontroleerd met de analytische oplossing. Bij dit model is dat niet meer mogelijk, maar we willen wel weten of onze vergelijkingen kloppen. We controleren dit met behulp van de Hamiltoniaan. De Hamiltoniaan controleert op het behoud van energie. De vergelijking van de Hamiltoniaan voor het twee hoeken model is als volgt:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\partial L_b}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} + \frac{\partial L_b}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - L_b \\
E_b &= \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_1 l_4^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 - m_1 l_1 l_4 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos(\phi) \\
&\quad - g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \cos(\theta) + g m_1 l_4 \cos(\theta + \phi) + g l_3 (m_1 + m_2)
\end{aligned}$$

Als we de Hamiltoniaan plotten dan krijgen we inderdaad een rechte lijn op de hoogte van ongeveer $5.4 \cdot 10^4$ Joule. Er gaat dus geen energie verloren in ons twee hoeken model.

In de literatuur [Rutan and Wiczorek, 2005] vinden we ook een vergelijking voor het twee hoeken model:

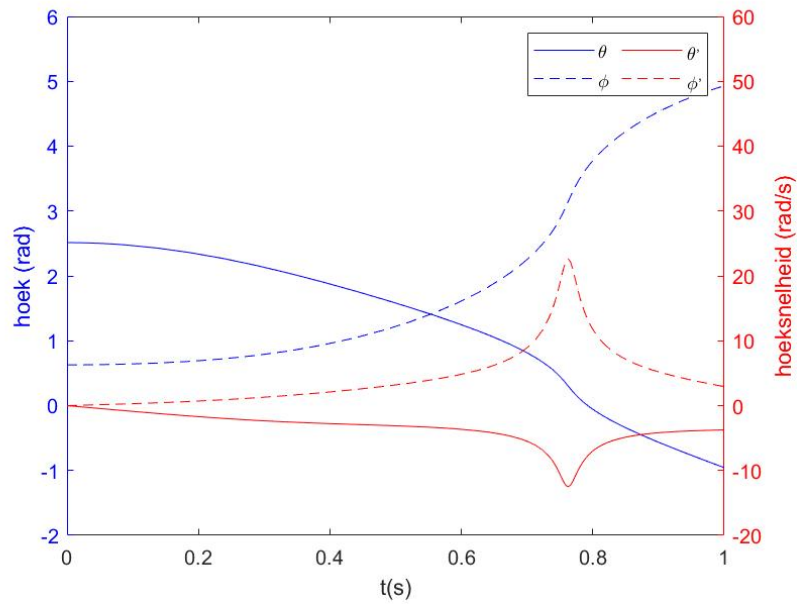
$$\begin{aligned}
L &= T - V \\
&\frac{1}{2} m_1 [l_1^2 \dot{\theta}^2 - 2l_1 l_4 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos(\theta) + l_4^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2] \\
&+ \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2 + m_1 g l_1 \cos(\theta) - m_1 g l_4 \cos(\theta + \phi) - m_2 l_2 g \cos(\theta)
\end{aligned} \tag{34}$$

Als we de twee Lagrangianen met elkaar vergelijken, zien we dat in onze Lagrangiaan een extra term staat, namelijk: $-g l_3 (m_1 + m_2)$, dit is een constante term die wegvalt bij het differentiëren, dus onze gevonden Lagrangiaan klopt met de Lagrangiaan die we gevonden hebben in de literatuur.

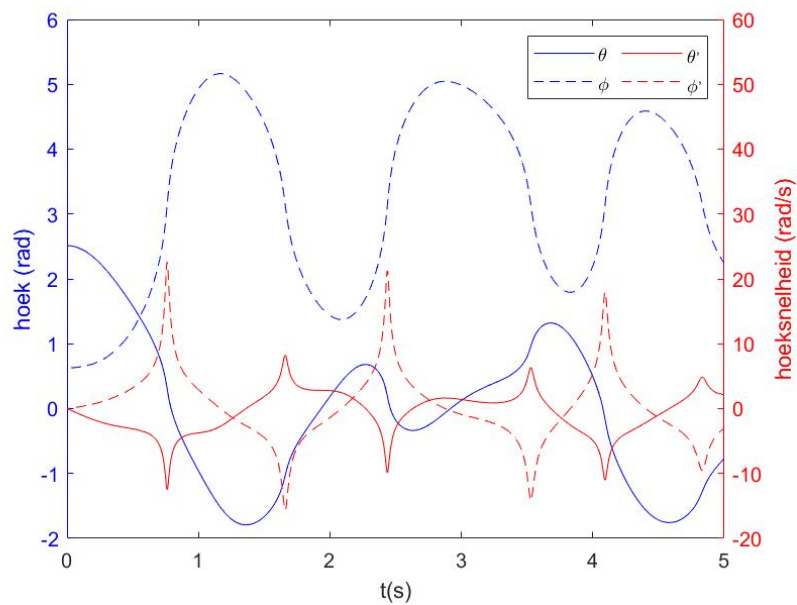
Als laatste kijken we naar de verhouding tussen L_a en L_b . Wanneer we l_4 gelijk kiezen aan nul in onze Lagrangiaan L_b , dan krijgen we L_a . Dit viel te verwachten, maar is wel belangrijk om te controleren.

3.3 Numerieke oplossing

In deze paragraaf kijken naar de numerieke oplossingen van de gevonden differentiaal vergelijkingen (33).



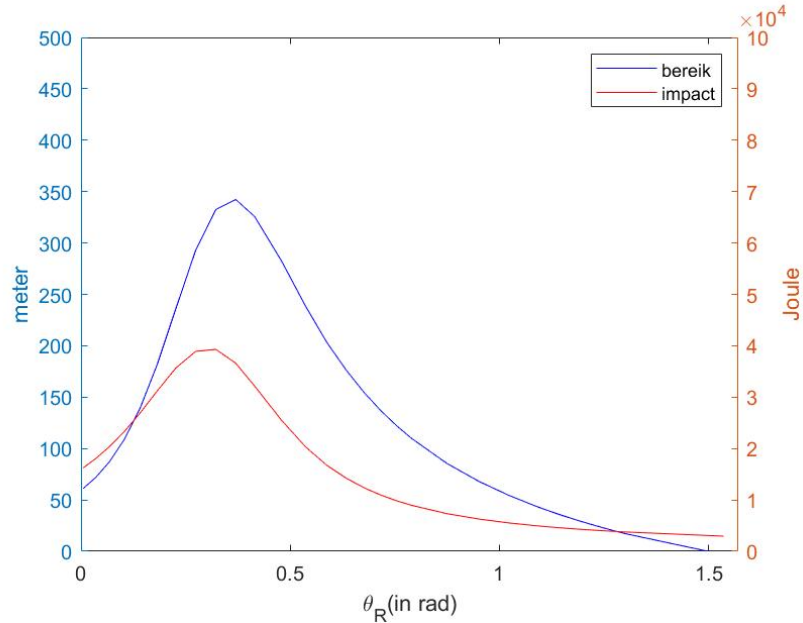
Figuur 3.3: De verandering van de hoeken en de hoeksnelheden van het twee hoeken model ten opzichte van de tijd vanaf het moment van loslaten(0s) tot 1 seconde na het loslaten van het tegengewicht.



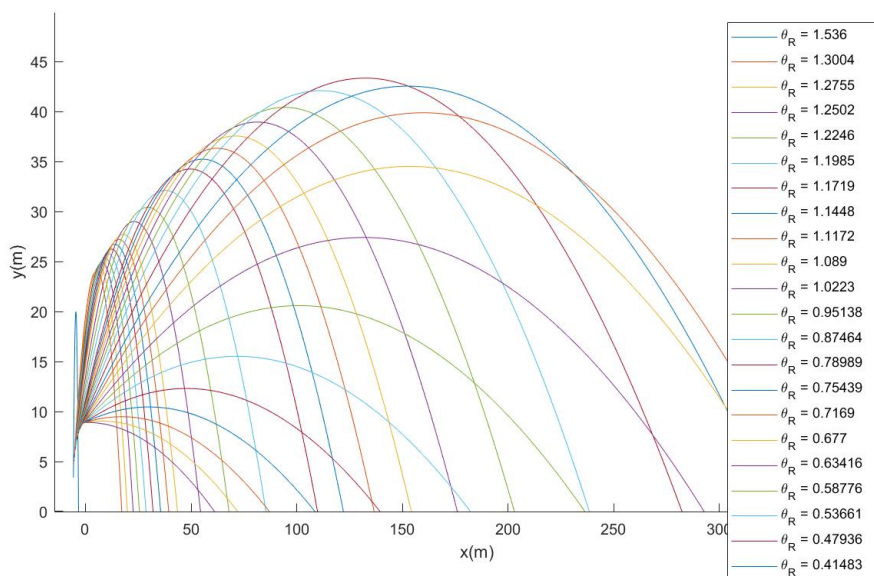
Figuur 3.4: De verandering van de hoeken en de hoeksnelheden van het twee hoeken model ten opzichte van de tijd vanaf het moment van loslaten(0 s) tot 5 seconde na het loslaten van het tegengewicht.

3.4 Afschieten van het voorwerp

De hoeken en de hoeksnelheden veranderden, maar wat gebeurt er als we het voorwerp loslaten? Hoever kan het voorwerp geschoten worden en hoeveel impact heeft het voorwerp als het neerkomt op de grond? De positie van r_{2b} is gelijk aan de positie van r_{2a} , we kunnen daarom gebruik maken van de vergelijkingen die we bij het één hoek model hebben opgesteld. De hoek en de hoeksnelheid zijn wel veranderd.



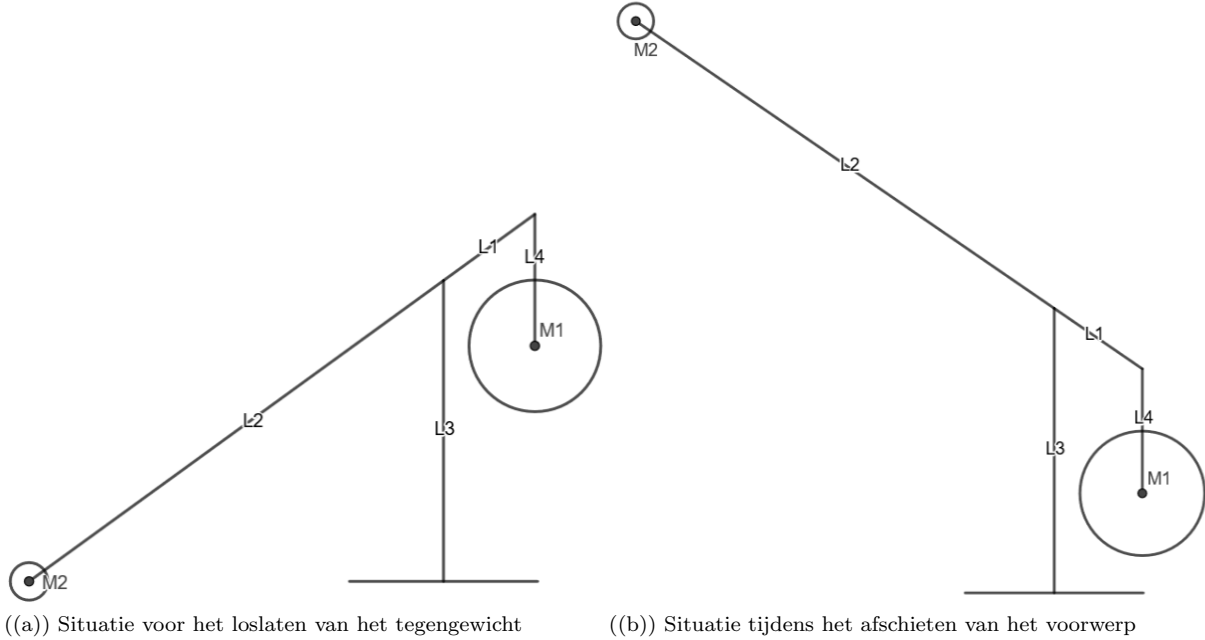
Figuur 3.5: Het bereik, hoever een voorwerp afgeschoten kan worden, en de impact, hoe hard een voorwerp op de grond neerkomt, wanneer het voorwerp bij verschillende hoeken wordt afgeschoten. Uit de figuur kunnen we halen dat de grootste afstand wordt bereikt als we afvuren bij een hoek van 0.37 rad, dan komt het voorwerp 342 meter ver. De grootste impact hebben we als we het voorwerp loslaten bij 0.32 rad, dan hebben we een impact van $39.3 \cdot 10^3$ Joule.



Figuur 3.6: De baan die het voorwerp aflegt wanneer het bij verschillende hoeken wordt afgeschoten

3.5 Rendement

Er zit energie in het systeem voordat het voorwerp wordt afgeschoten en er blijft energie achter in het systeem nadat het voorwerp is afgeschoten. We willen weten wat het rendement is van de energie die het afgeschoten voorwerp mee heeft gekregen van de grote massa. We gebruiken hiervoor vergelijking (22) voor de hoogte van m_1 en vergelijking (24) voor de kinetische energie van m_1 .



Figuur 3.7: De posities van het zware tegengewicht en het af te schieten voorwerp voor en na het afschieten voor het twee hoeken model

Energie in het systeem in situatie (a):

$$\begin{aligned} E_{p,a} &= m_1 g y_a \\ E_{k,a} &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Energie in het systeem in situatie (b):

$$E_{k,b} = \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_R^2 + l_4^2 (\dot{\theta}_R + \dot{\phi}_R)^2 - 2l_1 l_4 \dot{\theta}_R (\dot{\theta}_R + \dot{\phi}_R) \cos(\phi)) \quad (36)$$

We moeten hier wel opmerken dat we de potentiële energie die m_2 heeft verwaarlozen, dit doen we omdat het verschil in massa's zo groot is, dat de invloed hiervan te verwaarlozen valt.

De energie die het afgeschoten voorwerp mee heeft gekregen is de energie in situatie (a) min de energie in situatie (b). We bekijken hoe groot de energie overdracht is op het moment van loslaten met de grootste impact, dus als $\theta = 0.32$ rad. De impact is dan 39.3 kJ.

$$\begin{aligned} & E_{p,a} + E_{k,a} - E_{p,b} - E_{k,b} \\ &= m_1 g (y_a - y_b) - \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_R^2 + l_4^2 (\dot{\theta}_R + \dot{\phi}_R)^2 - 2l_1 l_4 \dot{\theta}_R (\dot{\theta}_R + \dot{\phi}_R) \cos(\phi)) \\ &= 39.3 \cdot 10^3 \end{aligned} \quad (37)$$

Het rendement rekenen we uit door het hierboven gevonden antwoord te delen door alleen de potentiële energie van de beginsituatie. In de ideale situatie zou namelijk alle potentiële energie naar het afgeschoten voorwerp gaan.

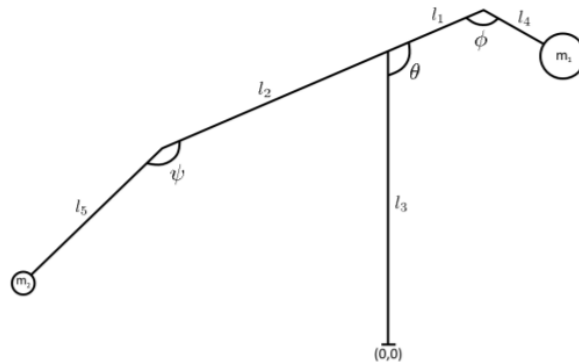
$$E_p = m_1 g y_a = 54.4 \cdot 10^3 \quad (38)$$

Het rendement is $\frac{39.3 \cdot 10^3}{54.4 \cdot 10^3} = 0.723$, dus 72.3%.

De gevonden uitkomst komt overeen met de verwachte 39.3 kJ die we eerder al gevonden hadden.

4 Het drie hoeken model

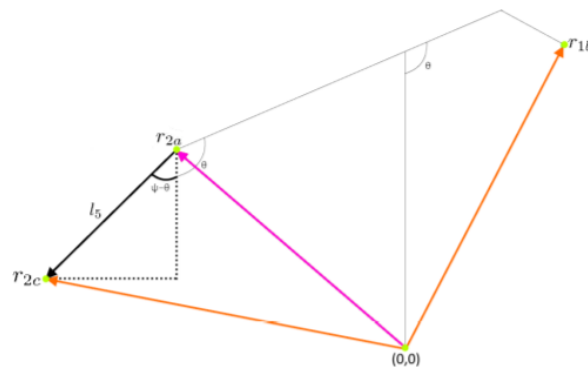
In het vorige hoofdstuk hebben we het twee hoeken model van de trebuchet besproken. In dit hoofdstuk voegen we de laatste arm l_5 en de bijbehorende hoek ψ toe, het zogenaemde drie hoeken model. We zijn benieuwd hoeveel invloed het toevoegen van deze arm heeft op de afstand die de trebuchet kan schieten en de impact die het afgeschoten voorwerp op de grond heeft. Aan het einde zullen we kijken naar het rendement van dit model. Hieronder vindt u een schematische weergave van het drie hoeken model.



Figuur 4.1: Schematische weergave van het drie hoeken model waarin de plaats van de vijf verschillende lengtes (l_1 , l_2 , l_3 , l_4 en l_5), de plaats van de twee verschillende massa's (m_1 en m_2), de plaats en oriëntatie van de drie hoeken (θ , ϕ en ψ) en het gekozen nulpunt te zien zijn. [Robin, 2020]

4.1 Wiskundig model

Net als bij het één hoek en twee hoeken model geeft een schematisch model ons meer duidelijkheid over waar de balken, massa's en hoeken zich bevinden. Ook voor dit model is het voor de berekeningen handig om het model om te schrijven naar een vector weergave. We doen dit op dezelfde manier als bij het één hoek en het twee hoeken model, waarbij de vectoren de positie van de massa's ten opzichte van het nulpunt beschrijven. In de vector weergave hieronder zijn een aantal hulp(stippel)lijnen weergegeven, zodat we de vectoren uit kunnen drukken in de constantes l_1 , l_2 , l_3 , l_4 , l_5 en de variabelen θ , ϕ en ψ . De positie van m_1 is hetzelfde als bij het twee hoeken model ($r_{1b} = r_{1c}$). De positie van m_2 verandert en hiervoor gebruiken we de hoek $\psi - \theta$.



Figuur 4.2: Vector weergave van het drie hoeken model waarin de twee oranje vectoren van het twee hoeken model te zien zijn, maar ook een roze vector die de nieuwe positie van r_{2c} beschrijft. Door de twee vectoren die van het nulpunt naar de massa's lopen op te schrijven, kunnen we berekeningen gaan uitvoeren voor dit model. [Robin, 2020]

Zoals hierboven al genoemd blijft de vector van m_1 gelijk aan de vector van het twee hoeken model.

$$r_{1c} = r_{1b} = \begin{bmatrix} l_1 \sin(\theta) - l_4 \sin(\theta + \phi) \\ -l_1 \cos(\theta) + l_3 + l_4 \cos(\theta + \phi) \end{bmatrix} \quad (39)$$

Voor r_{2c} gebruiken we de positie van r_{2a} welke we aanvullen met l_5 en de bijbehorende hoek.

$$r_{2c} = r_{2a} - \begin{bmatrix} l_5 \sin(\psi - \theta) \\ l_5 \cos(\psi - \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin(\theta) - l_5 \sin(\psi - \theta) \\ l_2 \cos(\theta) + l_3 - l_5 \cos(\psi - \theta) \end{bmatrix} \quad (40)$$

Om de Euler-Lagrange vergelijking te kunnen gebruiken, hebben we voor de Lagrangiaan de kinetische en potentiële energie van de twee massa's nodig. Voor r_{1c} is deze gelijk aan die van r_{1b} die we in het vorige hoofdstuk uitgerekend hebben. Voor r_{2c} zullen we de potentiële en kinetische energie opnieuw moeten uitrekenen.

De potentiële energie ($E_p = mgh$):

$$E_{p1c} = E_{p1b} = m_1 g (-l_1 \cos(\theta) + l_3 + l_4 \cos(\theta + \phi))$$

De hoogte van m_2 is veranderd, dus de potentiële energie wordt:

$$E_{p2c} = m_2 g (l_2 \cos(\theta) + l_3 - l_5 \cos(\psi - \theta))$$

$$E_{pc} = E_{p1c} + E_{p2c} = -g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \cos(\theta) + g l_3 (m_1 + m_2) + g m_1 l_4 \cos(\theta + \phi) - g m_2 l_5 \cos(\psi - \theta) \quad (41)$$

De kinetische energie ($E_k = \frac{1}{2} m v^2$):

Voor de kinetische energie hebben we de snelheid van de massa's nodig. Voor r_{1c} geldt dat deze hetzelfde is als bij r_{1b} . Voor r_{2c} moeten we deze opnieuw berekenen.

$$\begin{aligned} v_{2c}^2 &= ((r'_{2c,x})^2 + (r'_{2c,y})^2) \\ &= (l_2 \cos(\theta) \dot{\theta} + l_5 \cos(\psi - \theta) (\dot{\psi} - \dot{\theta}))^2 + (l_2 \sin(\theta) \dot{\theta} - l_5 \sin(\psi - \theta) (\dot{\psi} - \dot{\theta}))^2 \\ &= l_2^2 \cos^2(\theta) \dot{\theta}^2 + 2 l_2 l_5 \cos(\theta) \cos(\psi - \theta) \dot{\theta} (\dot{\psi} - \dot{\theta}) + l_5^2 \cos^2(\psi - \theta) (\dot{\psi} - \dot{\theta})^2 \\ &\quad + l_2^2 \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2 - 2 l_2 l_5 \sin(\theta) \sin(\psi - \theta) \dot{\theta} (\dot{\psi} - \dot{\theta}) + l_5^2 \sin^2(\psi - \theta) (\dot{\psi} - \dot{\theta})^2 \\ &= l_2^2 \dot{\theta}^2 + l_5^2 (\dot{\psi} - \dot{\theta})^2 + 2 l_2 l_5 \dot{\theta} (\dot{\psi} - \dot{\theta}) \cos(\psi) \\ E_{k1c} &= E_{k1b} = \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\theta}^2 + l_4^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 - 2 l_1 l_4 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos(\phi)) \end{aligned} \quad (42)$$

$$E_{k2c} = \frac{1}{2} m_2 (l_2^2 \dot{\theta}^2 + l_5^2 (\dot{\psi} - \dot{\theta})^2 + 2 l_2 l_5 \dot{\theta} (\dot{\psi} - \dot{\theta}) \cos(\psi))$$

$$E_{kc} = E_{k1c} + E_{k2c} = \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\theta}^2 + l_4^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 - 2 l_1 l_4 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos(\phi)) + \frac{1}{2} m_2 (l_2^2 \dot{\theta}^2 + l_5^2 (\dot{\psi} - \dot{\theta})^2 + 2 l_2 l_5 \dot{\theta} (\dot{\psi} - \dot{\theta}) \cos(\psi)) \quad (43)$$

We vinden de Lagrangiaan ($L_c = E_{kc} - E_{pc}$) door de potentiële energie(41) van de kinetische energie(43) af te trekken:

$$\begin{aligned} L_c &= \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\theta}^2 - g l_3 (m_1 + m_2) + g (m_1 l_1 - m_2 l_2) \cos(\theta) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_1 l_4^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 - m_1 l_1 l_4 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos(\phi) - g m_1 l_4 \cos(\theta + \phi) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 l_5^2 (\dot{\psi} - \dot{\theta})^2 + m_2 l_2 l_5 \dot{\theta} (\dot{\psi} - \dot{\theta}) \cos(\psi) + g m_2 l_5 \cos(\psi - \theta) \end{aligned} \quad (44)$$

Nu we de Lagrangiaan gevonden hebben, gaan we terug naar de Euler-Lagrange vergelijking:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0$$

In het drie hoeken model moeten we deze vergelijking voor $x_1 = \theta$, $x_2 = \phi$ en $x_3 = \psi$ uitrekenen.

We berekenen eerst de losse termen van deze vergelijking voor de hoek θ , trekken deze daarna van elkaar af en stellen dit gelijk aan nul om de Euler-Lagrange vergelijking te krijgen. Dit herhalen we voor de hoeken ϕ en ψ .

De vergelijkingen voor hoek θ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_c}{\partial \theta} &= -g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \sin(\theta) + g m_1 l_4 \sin(\theta + \phi) + g m_2 l_5 \sin(\psi - \theta) \\ \frac{\partial L_c}{\partial \dot{\theta}} &= (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\theta} + m_1 l_4^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi}) - m_1 l_1 l_4 \cos(\phi) (2\dot{\theta} + \dot{\phi}) - m_2 l_5^2 (\dot{\psi} - \dot{\theta}) - m_2 l_2 l_5 \cos(\psi) (2\dot{\theta} - \dot{\psi}) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L_c}{\partial \dot{\theta}} \right) &= (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \ddot{\theta} \\ &\quad + m_1 l_4^2 (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) + m_1 l_1 l_4 [\sin(\phi) (2\dot{\theta} + \dot{\phi}) \dot{\phi} - \cos(\phi) (2\ddot{\theta} + \ddot{\phi})] \\ &\quad - m_2 l_5^2 (\ddot{\psi} - \ddot{\theta}) + m_2 l_2 l_5 [\sin(\psi) \dot{\psi} (2\dot{\theta} - \dot{\psi}) - \cos(\psi) (2\ddot{\theta} - \ddot{\psi})]\end{aligned}$$

Bij het toepassen van de Euler Lagrange vergelijking is de vergelijking in een leesbare vorm opgeschreven, net zoals we bij het twee hoeken model gedaan hebben.

$$\frac{\partial L_c}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L_c}{\partial \dot{\theta}} \right) = c_{11} \ddot{\theta} + c_{12} \ddot{\phi} + c_{13} \ddot{\psi} - w_1 = 0 \quad (45)$$

Met c_{11} , c_{12} , c_{13} en w_1 :

$$\begin{aligned}c_{11}(\phi, \psi) &= -m_1 l_1^2 - m_2 l_2^2 - m_1 l_4^2 + 2m_1 l_1 l_4 \cos(\phi) - m_2 l_5^2 + 2m_2 l_2 l_5 \cos(\psi) \\ c_{12}(\phi) &= -m_1 l_4^2 + m_1 l_1 l_4 \cos(\phi) \\ c_{13}(\psi) &= m_2 l_5^2 - m_2 l_2 l_5 \cos(\psi) \\ w_1(\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}, \psi, \dot{\psi}) &= g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \sin(\theta) - g m_1 l_4 \sin(\theta + \phi) - g m_2 l_5 \sin(\psi - \theta) \\ &\quad + 2m_1 l_1 l_4 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\phi) + m_1 l_1 l_4 \dot{\phi}^2 \sin(\phi) + m_2 l_2 l_5 \dot{\psi} (2\dot{\theta} - \dot{\psi}) \sin(\psi)\end{aligned}$$

De vergelijkingen voor hoek ϕ :

De vergelijkingen voor ϕ zijn hetzelfde voor het twee en drie hoeken model, zie vergelijking 30. De Euler Lagrange vergelijking ($\frac{dL_b}{d\theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{dL_b}{d\dot{\theta}} \right) = 0$) voor ϕ is:

$$c_{21} \ddot{\theta} + c_{22} \ddot{\phi} + c_{23} \ddot{\psi} - w_2 = 0 \quad (46)$$

Met c_{21} , c_{22} en w_2 :

$$\begin{aligned}c_{21}(\phi) &= b_{21}(\phi) = m_1 l_4 (l_1 \cos(\phi) - l_4) \\ &= c_{12}(\phi) \\ c_{22} &= b_{22} = -m_1 l_4^2 \\ c_{23} &= 0 \\ w_2(\theta, \dot{\theta}, \phi) &= v_2(\theta, \dot{\theta}, \phi) = -m_1 l_1 l_4 \dot{\theta}^2 \sin(\phi) - g m_1 l_4 \sin(\theta + \phi)\end{aligned}$$

De vergelijkingen voor hoek ψ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_c}{\partial \psi} &= -m_2 l_2 l_5 \dot{\theta} (\dot{\psi} - \dot{\theta}) \sin(\psi) - g m_2 l_5 \sin(\psi - \theta) \\ \frac{\partial L_c}{\partial \dot{\psi}} &= m_2 l_5^2 (\dot{\psi} - \dot{\theta}) + m_2 l_2 l_5 \dot{\theta} \cos(\psi) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L_c}{\partial \dot{\psi}} \right) &= m_2 l_5^2 (\ddot{\psi} - \ddot{\theta}) + m_2 l_2 l_5 \ddot{\theta} \cos(\psi) - m_2 l_2 l_5 \dot{\theta} \dot{\psi} \sin(\psi) \\ \frac{\partial L_c}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L_c}{\partial \dot{\psi}} \right) &= c_{31} \ddot{\theta} + c_{32} \ddot{\phi} + c_{33} \ddot{\psi} - w_3 = 0 \quad (47)\end{aligned}$$

Met c_{31} , c_{32} , c_{33} en w_3 :

$$\begin{aligned}c_{31}(\psi) &= m_2 l_5^2 - m_2 l_2 l_5 \cos(\psi) \\ &= c_{13} \\ c_{32} &= 0 \\ c_{33} &= -m_2 l_5^2 \\ w_3(\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}, \psi, \dot{\psi}) &= -m_2 l_2 l_5 \dot{\theta}^2 \sin(\psi) + g m_2 l_5 \sin(\psi - \theta)\end{aligned}$$

Doordat we de vergelijkingen op deze manier hebben opgeschreven, kunnen we de vergelijkingen (45), (46) en (47) in matrixvorm schrijven.

$$\begin{bmatrix} c_{11}(\phi, \psi) & c_{12}(\phi) & c_{13}(\psi) \\ c_{12}(\phi) & c_{22} & 0 \\ c_{31}(\psi) & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}, \psi, \dot{\psi}) \\ w_2(\theta, \dot{\theta}, \phi) \\ w_3(\theta, \dot{\theta}, \psi) \end{bmatrix} \quad (48)$$

Deze matrixvergelijking kunnen we nog eenvoudiger opschrijven als $C \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \vec{w}$, waarin C de matrix is en w de vector.

We kunnen $\ddot{\theta}$, $\ddot{\phi}$ en $\ddot{\psi}$ berekenen als de matrix C inverteerbaar is. Dan krijgen we: $\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = C^{-1}\vec{w}$. Om te kijken of C inverteerbaar is moeten we de determinant van C uitrekenen.

$$\begin{aligned} \det C &= c_{11}c_{22}c_{33} - c_{12}^2c_{33} - c_{13}^2c_{22} \\ &= (-m_1l_1^2 - m_2l_2^2 - m_1l_4^2 + 2m_1l_1l_4 \cos(\phi) - m_2l_5^2 + 2m_2l_2l_5 \cos(\psi)) \cdot -m_1l_4^2 \cdot -m_2l_5^2 \\ &\quad - (-m_1l_4^2 + m_1l_1l_4 \cos(\phi))^2 \cdot -m_2l_5^2 - (m_2l_5^2 - m_2l_2l_5 \cos(\psi))^2 \cdot -m_1l_4^2 \\ &= -m_1m_2l_4^2l_5^2(m_1l_1^2 \sin^2(\phi) + m_2l_2^2 \sin^2(\psi)) \end{aligned} \quad (49)$$

De determinant van C is gelijk aan nul als $\sin(\phi)$ en $\sin(\psi)$ tegelijkertijd nul zijn. In onze code zullen we moeten controleren of dit het geval is. Als dit niet het geval is krijgen we de volgende vergelijkingen:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} c_{22}c_{33} & -c_{12}c_{33} & -c_{13}c_{22} \\ -c_{12}c_{33} & c_{11}c_{33} - c_{13}^2 & c_{12}c_{13} \\ -c_{13}c_{22} & c_{12}c_{13} & c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = C^{-1} \cdot w = \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} c_{22}c_{33} & -c_{12}c_{33} & -c_{13}c_{22} \\ -c_{12}c_{33} & c_{11}c_{33} - c_{13}^2 & c_{12}c_{13} \\ -c_{13}c_{22} & c_{12}c_{13} & c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{1}{\det C} (c_{22}c_{33}w_1 - c_{12}c_{33}w_2 - c_{13}c_{22}w_3) \\ \ddot{\phi} &= \frac{1}{\det C} (-c_{12}c_{33}w_1 + c_{11}c_{33}w_2 - c_{13}^2w_2 + c_{12}c_{13}w_3) \\ \ddot{\psi} &= \frac{1}{\det C} (-c_{13}c_{22}w_1 + c_{12}c_{13}w_2 + c_{11}c_{22}w_3 - c_{12}^2w_3) \end{aligned}$$

Als we dit omschrijven naar zes eerstegraads differentiaalvergelijkingen dan krijgen we:

$$\begin{cases} y_1 = y_2 \\ y_2 = \frac{1}{\det C} (c_{22}c_{33}w_1 - c_{12}c_{33}w_2 - c_{13}c_{22}w_3) \\ y_3 = y_4 \\ y_4 = \frac{1}{\det C} (-c_{12}c_{33}w_1 + c_{11}c_{33}w_2 - c_{13}^2w_2 + c_{12}c_{13}w_3) \\ y_5 = y_6 \\ y_6 = \frac{1}{\det C} (-c_{13}c_{22}w_1 + c_{12}c_{13}w_2 + c_{11}c_{22}w_3 - c_{12}^2w_3) \end{cases} \quad (50)$$

Waar $y_1 = \theta, y_2 = \dot{\theta}, y_3 = \phi, y_4 = \dot{\phi}, y_5 = \psi$ en $y_6 = \dot{\psi}$.

Om onze differentiaalvergelijking compleet te maken hebben we de begincondities nodig voor θ , de afgeleide van θ , ϕ , de afgeleide van ϕ , ψ en de afgeleide van ψ . Deze begincondities zijn te vinden in paragraaf 1.6.

4.2 Lagrangiaan controleren

Net als in het vorige hoofdstuk willen we onze Lagrangiaan controleren. We doen dit met behulp van de Hamiltoniaan en kijken of de energie behouden blijft.

$$E = \frac{\partial L_c}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} + \frac{\partial L_c}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} + \frac{\partial L_c}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} - L_c$$

$$\begin{aligned}
E_c = & (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\theta}^2 + m_1 l_4^2 \dot{(\theta + \phi)} - m_1 l_1 l_4 \dot{\theta} (2\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos(\phi) - m_2 l_5^2 \dot{(\psi - \theta)} - m_2 l_2 l_5 \dot{\theta} (2\dot{\theta} - \dot{\psi}) \cos(\psi) \\
& + m_1 l_4^2 \dot{\phi} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) - m_1 l_1 l_4 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\phi) + m_2 l_5^2 \dot{\psi} (\dot{\psi} - \dot{\theta}) + m_2 l_2 l_5 \dot{\theta} \dot{\psi} \cos(\psi) - \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\theta}^2 \\
& + g l_3 (m_1 + m_2) - g (m_1 l_1 - m_2 l_2) \cos(\theta) - \frac{1}{2} m_1 l_4^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + m_1 l_1 l_4 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos(\phi) + g m_1 l_4 \cos(\theta + \phi) \\
& - \frac{1}{2} m_2 l_5^2 (\dot{\psi} - \dot{\theta})^2 - m_2 l_2 l_5 \dot{\theta} (\dot{\psi} - \dot{\theta}) \cos(\psi) - g m_2 l_5 \cos(\psi - \theta)
\end{aligned}$$

Als we de Hamiltoniaan plotten dan krijgen we inderdaad een rechte lijn op de hoogte van ongeveer $5.4 \cdot 10^4$ Joule. Er gaat dus geen energie verloren in ons drie hoeken model.

In de literatuur[Rutan and Wiecezorek, 2005] vinden we ook een vergelijking voor het drie hoeken model:

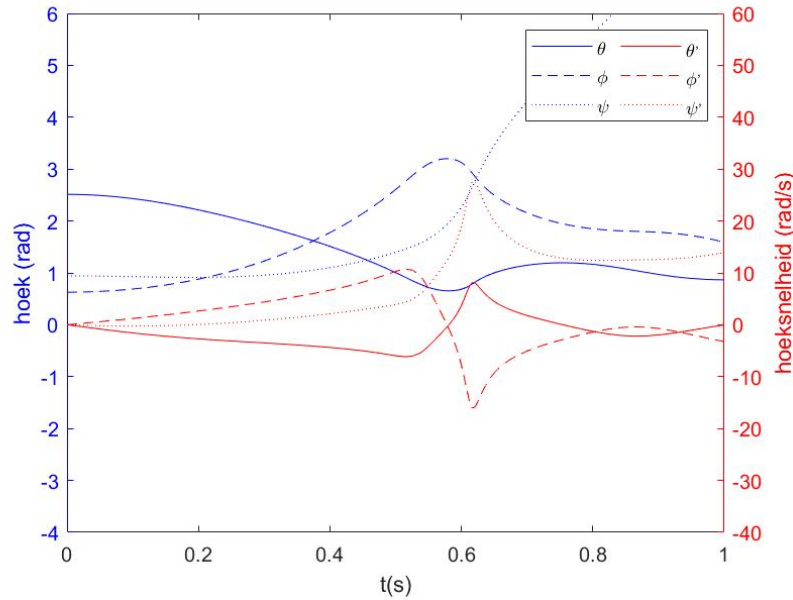
$$\begin{aligned}
L = T - V \\
\frac{1}{2} (\dot{\theta})^2 m_1 l_1^2 - m_1 l_1 l_4 (\dot{\theta})^2 \cos(\phi) + g m_1 l_1 \cos(\theta) - m_1 l_1 l_4 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\phi) \\
+ \frac{1}{2} (\dot{\theta})^2 m_2 l_2^2 - g m_2 l_2 \cos(\theta) - m_2 l_2 l_5 (\dot{\theta})^2 \cos(\psi) + m_2 l_2 l_5 \dot{\theta} \dot{\psi} \cos(\psi) \\
+ \frac{1}{2} m_2 l_5^2 (\dot{\psi})^2 - m_2 l_5^2 \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{1}{2} m_2 l_5^2 (\dot{\theta})^2 + g m_2 l_5 \cos(-\theta + \psi) + m_1 l_4^2 \dot{\theta} \dot{\phi} \\
+ \frac{1}{2} m_1 l_4^2 (\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} m_1 l_4^2 (\dot{\theta})^2 - g m_1 l_4 \cos(\theta + \phi)
\end{aligned} \tag{51}$$

Als we de twee Lagrangianen met elkaar vergelijken, zien we dat in onze Lagrangiaan een extra term staat, namelijk: $-g l_3 (m_1 + m_2)$, dit is een constante term die wegvalt bij het differentiëren, dus onze gevonden Lagrangiaan klopt met de Lagrangiaan die we gevonden hebben in de literatuur.

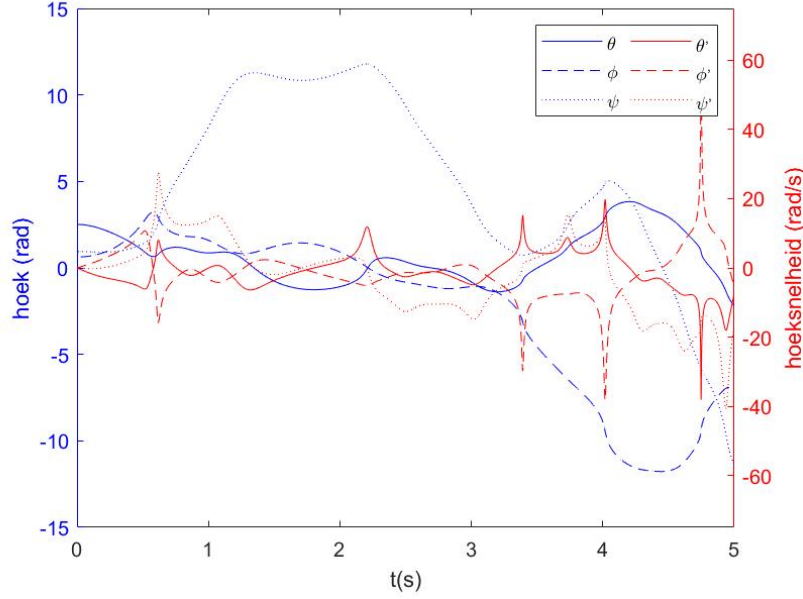
Als laatste kijken we naar de verhouding tussen L_b en L_c . Wanneer we l_5 gelijk kiezen aan nul in onze Lagrangiaan L_c , dan krijgen we L_b . Dit viel te verwachten, maar is wel belangrijk om te controleren.

4.3 Numerieke oplossing

In deze paragraaf kijken we naar de numerieke oplossingen van de gevonden differentiaal vergelijkingen (50).



Figuur 4.3: De verandering van de hoeken en de hoeksnelheden van het drie hoeken model ten opzichte van de tijd vanaf het moment van loslaten(0s) tot 1 seconde na het loslaten van het tegengewicht.



Figuur 4.4: De verandering van de hoeken en de hoeksnelheden van het drie hoeken model ten opzichte van de tijd vanaf het moment van loslaten(0 s) tot 5 seconde na het loslaten van het tegengewicht.

4.4 Afschieten van het voorwerp

De positie van r_{2c} is veranderd ten opzichte van r_{2b} , hierdoor moeten we opnieuw naar de formules voor het afschieten van het voorwerp kijken.

$$r_{2c} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin(\theta) - l_5 \sin(\psi - \theta) \\ l_2 \cos(\theta) + l_3 - l_5 \cos(\psi - \theta) \end{bmatrix} \quad (52)$$

Als we deze differentiëren naar de tijd, dan krijgen we:

$$\dot{r}_{2c} = \begin{bmatrix} -l_2 \cos(\theta_R) \dot{\theta}_R - l_5 \cos(\psi_R - \theta_R) (\dot{\psi}_R - \dot{\theta}_R) \\ -l_2 \sin(\theta_R) \dot{\theta}_R + l_5 \sin(\psi_R - \theta_R) (\dot{\psi}_R - \dot{\theta}_R) \end{bmatrix} \quad (53)$$

We weten de versnelling van het voorwerp, omdat we de luchtwrijving voor dit model buiten beschouwing laten.

$$\ddot{r}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (54)$$

Als we deze integreren naar de tijd sinds het moment van afschieten, dan krijgen we:

$$\dot{r}_2(t) = \begin{bmatrix} \beta \\ -g(t - t_R) + \gamma \end{bmatrix} \quad (55)$$

Als we deze nog een keer integreren naar de tijd sinds het moment van afschieten, dan krijgen we:

$$r_2(t) = \begin{bmatrix} \beta(t - t_R) + \delta \\ -\frac{1}{2}g(t - t_R)^2 + \gamma(t - t_R) + \epsilon \end{bmatrix} \quad (56)$$

Op het moment van afschieten ($t = t_R$) weten we dat de vergelijkingen van de positie en de snelheid van het voorwerp aan elkaar gelijk moeten zijn.

$r_{2c}(t_R) = r_2(t_R)$, dit zijn vergelijkingen (52) en (56).

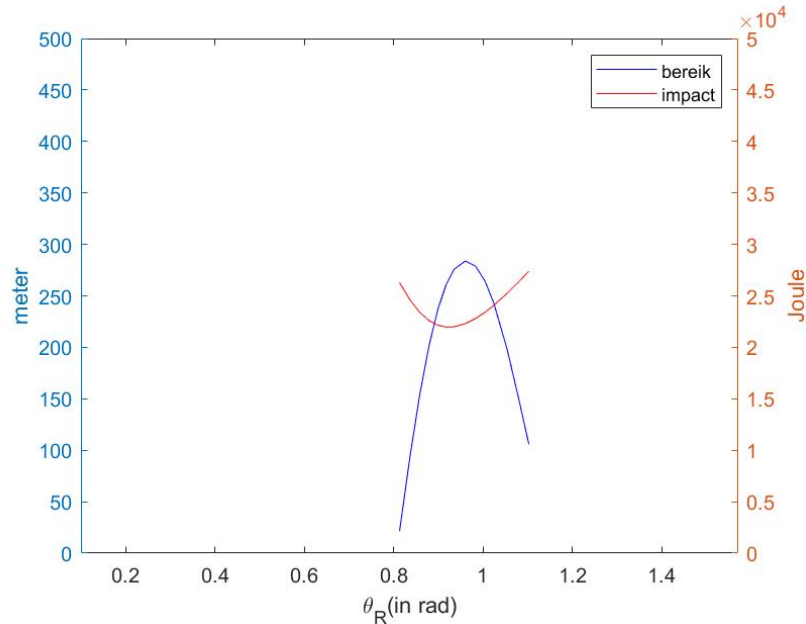
$\dot{r}_{2c}(t_R) = \dot{r}_2(t_R)$, dit zijn vergelijkingen (53) en (55).

Op deze manier vinden we β, γ, δ en ϵ .

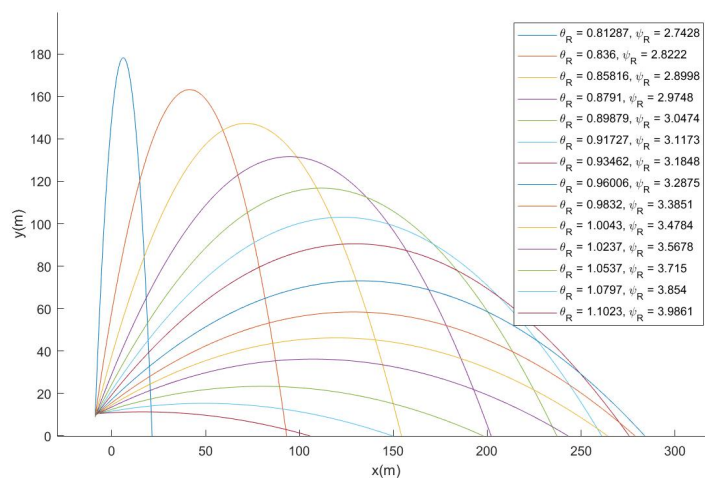
$$\begin{aligned} \beta(\theta_R, \psi_R) &= -l_2 \cos(\theta_R) \dot{\theta}_R - l_5 \cos(\psi_R - \theta_R) (\dot{\psi}_R - \dot{\theta}_R) \\ \gamma(\theta_R, \psi_R) &= -l_2 \sin(\theta_R) \dot{\theta}_R + l_5 \sin(\psi_R - \theta_R) (\dot{\psi}_R - \dot{\theta}_R) \\ \delta(\theta_R, \psi_R) &= -l_2 \sin(\theta_R) - l_5 \sin(\psi_R - \theta_R) \\ \epsilon(\theta_R, \psi_R) &= l_2 \cos(\theta_R) + l_3 - l_5 \cos(\psi_R - \theta_R) \end{aligned} \quad (57)$$

De formules voor t_E , $s(\theta_R)$ en $E(\theta_R)$ blijven hetzelfde, alleen de in te vullen β, γ, δ en ϵ zijn veranderd.

Doordat het drie hoeken model ingewikkelder is dan de twee vorige modellen, moeten we goed nadenken over wanneer we het voorwerp af zouden willen schieten. De snelheid van het voorwerp moet in de positieve richting zijn. We hebben daarom alleen gekeken naar de momenten waarop v_x en v_y groter zijn dan nul. Op die momenten wordt het voorwerp zowel omhoog als naar voren geschoten en krijgen we de gewenste baan.



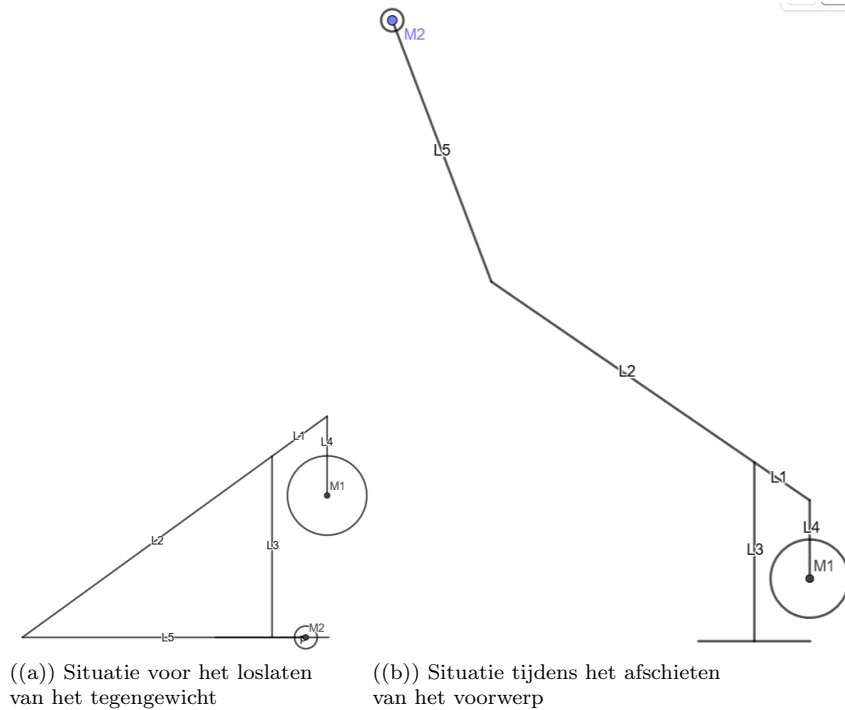
Figuur 4.5: Het bereik, hoever een voorwerp afgeschoten kan worden, en de impact, hoe hard een voorwerp op de grond neerkomt, wanneer het voorwerp bij verschillende hoeken wordt afgeschoten. Uit de figuur kunnen we halen dat de grootste afstand wordt bereikt als we afvuren bij een hoek θ van 0.96 rad en een hoek ψ van 3.3 rad, dan komt het voorwerp 284 meter ver. De grootste impact hebben we als we het voorwerp loslaten bij $\theta = 1.10$ rad en $\psi = 3.9861$ rad, dan hebben we een impact van $27.4 \cdot 10^3$ Joule.



Figuur 4.6: De baan die het voorwerp aflegt wanneer het bij verschillende hoeken wordt afgeschoten

4.5 Rendement

Er zit energie in het systeem voordat het voorwerp wordt afgeschoten en er blijft energie achter in het systeem nadat het voorwerp is afgeschoten. We willen weten wat het rendement is van de energie die het afgeschoten voorwerp mee heeft gekregen van de grote massa. We gebruiken hiervoor vergelijking 39 voor de hoogte van m_1 en vergelijking 42 voor de kinetische energie van m_1 .



Figuur 4.7: De posities van het zware tegengewicht en het af te schieten voorwerp voor en na het afschieten

Energie in het systeem in situatie (a):

$$\begin{aligned} E_{p,a} &= m_1 g y_a \\ E_{k,a} &= 0 \end{aligned} \quad (58)$$

Energie in het systeem in situatie (b):

$$\begin{aligned} E_{p,b} &= m_1 g y_b \\ E_{k,b} &= \frac{1}{2} m_1 (l_1^2 \dot{\theta}^2 + l_4^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 - 2l_1 l_4 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \cos(\phi)) \end{aligned} \quad (59)$$

We moeten hier wel opmerken dat we de potentiële energie die m_2 heeft verwaarlozen, dit doen we omdat het verschil in massa's zo groot is, dat de invloed hiervan te verwaarlozen valt.

De energie die het afgeschoten voorwerp mee heeft gekregen is de energie in situatie (a) min de energie in situatie (b). We bekijken hoe groot de energie overdracht is op het moment van loslaten met de grootste impact, dus als $\theta = 1.10$ rad. De impact is dan 27.4 kJ.

$$\begin{aligned} & E_{p,a} + E_{k,a} - E_{p,b} - E_{k,b} \\ &= m_1 g (y_a - y_b) - \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_R^2 + l_4^2 (\dot{\theta}_R + \dot{\phi}_R)^2 - 2l_1 l_4 \dot{\theta}_R (\dot{\theta}_R + \dot{\phi}_R) \cos(\phi)) \\ &= 27.4 \cdot 10^3 \end{aligned} \quad (60)$$

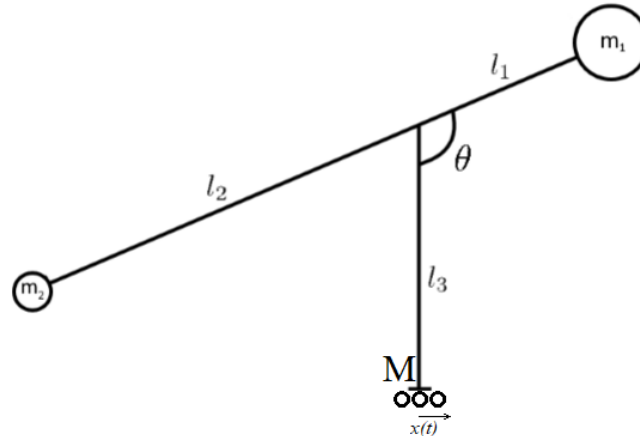
Het rendement rekenen we uit door het hierboven gevonden antwoord te delen door alleen de potentiële energie van de beginsituatie. In de ideale situatie zou namelijk alle potentiële energie naar het afgeschoten voorwerp gaan.

$$E_p = m_1 g y_a = 54.4 \cdot 10^3 \quad (61)$$

Het rendement is $\frac{27.4 \cdot 10^3}{54.4 \cdot 10^3} = 0.504$, dus 50.4%.

5 Eén hoek model op wielen

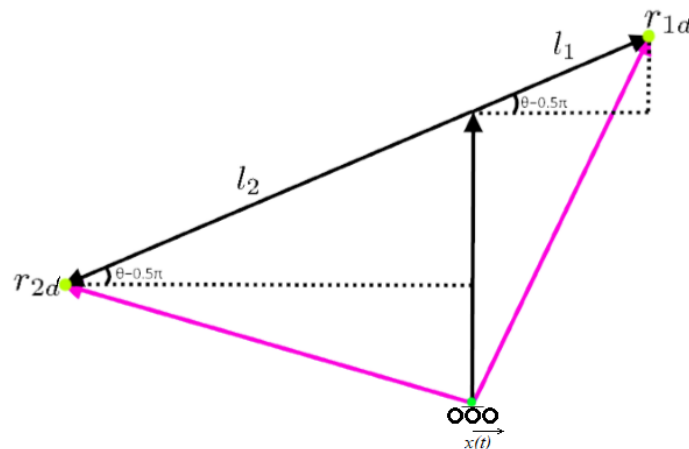
In dit hoofdstuk kijken we naar het één hoek model op wielen. We zagen bij het één hoek model dat het tegengewicht nog veel kinetische energie had bij het afschieten. In het twee hoek model zorgde de extra balk ervoor dat het tegengewicht minder kinetische energie had bij het afschieten. We willen nu kijken wat het effect van wielen onder de trebuchet heeft op het rendement van de energie. We doen dit door onder het één hoek wielen te plaatsen. Door het toevoegen van wielen, zal de trebuchet niet op het gekozen nulpunt blijven staan. Het gewicht van de trebuchet (M) gaat in dit model een rol spelen.



Figuur 5.1: Schematische weergave van het één hoek model op wielen waarin de plaats van de drie verschillende lengtes (l_1 , l_2 en l_3), de plaats van de drie verschillende massa's (m_1 , m_2 en M), de plaats en oriëntatie van de hoek (θ) en de positieve oriëntatie van $x(t)$ te zien zijn. ([Robin, 2020] Aangepast)

5.1 Wiskundig model

De vectorweergave van dit model is bijna hetzelfde als voor het één hoek model. We hebben alleen een extra variabele $x(t)$, omdat de trebuchet langs de horizontale as kan bewegen. Als de trebuchet beweegt, dan bewegen de vectoren mee, we krijgen dus een extra term $x(t)$ in de x component.



Figuur 5.2: Vector weergave van het één hoek model op wielen, waarbij te zien is dat de vectoren bijna hetzelfde zijn als in het één hoek model. Er komt alleen een extra variabele $x(t)$ bij. ([Robin, 2020] Aangepast)

Als we de vectoren uitschrijven dan krijgen we:

$$r_{1d} = \begin{bmatrix} x(t) \\ l_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta - \frac{1}{2}\pi) \\ l_1 \sin(\theta - \frac{1}{2}\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) + l_1 \sin(\theta) \\ -l_1 \cos(\theta) + l_3 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$r_{2d} = \begin{bmatrix} x(t) \\ l_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_2 \cos(\theta - \frac{1}{2}\pi) \\ l_2 \sin(\theta - \frac{1}{2}\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) - l_2 \sin(\theta) \\ l_2 \cos(\theta) + l_3 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Om de Euler-Lagrange vergelijking te kunnen gebruiken, hebben we voor de Lagrangiaan de kinetische en potentiële energie van de drie massa's nodig.

De potentiële energie ($E_p = mgh$):

De potentiële energie blijft hetzelfde, omdat de hoogte niet veranderd.

$$E_{pd} = -g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \cos(\theta) + gl_3(m_1 + m_2) \quad (64)$$

De kinetische energie ($E_k = \frac{1}{2}mv^2$):

De kinetische energie voor de verschillende massa's moeten we opnieuw uitrekenen, omdat de horizontale plaats is veranderd en daarmee ook de snelheden van de massa's.

$$\begin{aligned} v_{1d}^2 &= ((r'_{1d,x})^2 + (r'_{1d,y})^2) = (\dot{x}(t) + l_1 \cos(\theta)\dot{\theta})^2 + (-l_1 \sin(\theta)\dot{\theta})^2 = (\dot{x}(t))^2 + l_1^2 \dot{\theta}^2 + 2l_1 \dot{\theta} \dot{x}(t) \cos(\theta) \\ v_{2d}^2 &= ((r'_{2d,x})^2 + (r'_{2d,y})^2) = (\dot{x}(t) - l_2 \cos(\theta)\dot{\theta})^2 + (-l_2 \sin(\theta)\dot{\theta})^2 = (\dot{x}(t))^2 + l_2^2 \dot{\theta}^2 - 2l_2 \dot{\theta} \dot{x}(t) \cos(\theta) \\ E_{k1d} &= \frac{1}{2}m_1 v_{1d}^2 = \frac{1}{2}m_1((\dot{x}(t))^2 + l_1^2 \dot{\theta}^2 + 2l_1 \dot{\theta} \dot{x}(t) \cos(\theta)) \\ E_{k2d} &= \frac{1}{2}m_2 v_{2d}^2 = \frac{1}{2}m_2((\dot{x}(t))^2 + l_2^2 \dot{\theta}^2 - 2l_2 \dot{\theta} \dot{x}(t) \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (65)$$

$$E_{k1d} + E_{k2d} = \frac{1}{2}(m_1((\dot{x}(t))^2 + l_1^2 \dot{\theta}^2 + 2l_1 \dot{\theta} \dot{x}(t) \cos(\theta)) + m_2((\dot{x}(t))^2 + l_2^2 \dot{\theta}^2 - 2l_2 \dot{\theta} \dot{x}(t) \cos(\theta)))$$

Omdat het hele systeem op wielen staat en zich kan verplaatsen, krijgen we ook nog de extra term: $\frac{1}{2}M(\dot{x}(t))^2$ die de kinetische energie van de trebuchet zelf weergeeft. De totale kinetische energie wordt:

$$E_{kd} = \frac{1}{2}(m_1((\dot{x}(t))^2 + l_1^2 \dot{\theta}^2 + 2l_1 \dot{\theta} \dot{x}(t) \cos(\theta)) + m_2((\dot{x}(t))^2 + l_2^2 \dot{\theta}^2 - 2l_2 \dot{\theta} \dot{x}(t) \cos(\theta))) + \frac{1}{2}M(\dot{x}(t))^2 \quad (66)$$

We vinden de Lagrangiaan ($L_b = E_{kb} - E_{pb}$) door de potentiële energie(64) van de kinetische energie(66) af te trekken:

$$\begin{aligned} L_d &= \frac{1}{2}(m_1((\dot{x}(t))^2 + l_1^2 \dot{\theta}^2 + 2l_1 \dot{\theta} \dot{x}(t) \cos(\theta)) + m_2((\dot{x}(t))^2 + l_2^2 \dot{\theta}^2 \\ &\quad - 2l_2 \dot{\theta} \dot{x}(t) \cos(\theta))) + \frac{1}{2}M(\dot{x}(t))^2 + g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \cos(\theta) - gl_3(m_1 + m_2) \end{aligned} \quad (67)$$

Nu we de Lagrangiaan gevonden hebben, gaan we terug naar de Euler-Lagrange vergelijking:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0$$

In het één hoek model op wielen moeten we deze vergelijking voor $x_1 = \theta$ en $x_2 = x(t)$ uitrekenen. We berekenen eerst de losse termen van deze vergelijking voor de hoek θ , trekken deze daarna van elkaar af en stellen dit gelijk aan nul om de Euler-Lagrange vergelijking te krijgen. Dit herhalen we voor $x(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_d}{\partial \theta} &= -(m_1 l_1 + m_2 l_2) \dot{\theta} \dot{x}(t) \sin(\theta) - g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \sin(\theta) \\ \frac{\partial L_d}{\partial \dot{\theta}} &= (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\theta} + (m_1 l_1 - m_2 l_2) \dot{x}(t) \cos(\theta) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L_d}{\partial \dot{\theta}} \right) &= (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \ddot{\theta} + (m_1 l_1 - m_2 l_2) \ddot{x}(t) \cos(\theta) - (m_1 l_1 - m_2 l_2) \dot{\theta} \dot{x}(t) \sin(\theta) \end{aligned}$$

$$\frac{dL_d}{d\theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{dL_d}{d\dot{\theta}} \right) = d_{11}\ddot{\theta} + d_{12}\ddot{x} - z_1 = 0 \quad (68)$$

met d_{11} , d_{12} en z_1 :

$$\begin{aligned} d_{11} &= -(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \\ d_{12}(\theta) &= -(m_1 l_1 - m_2 l_2) \cos(\theta) \\ z_1(\dot{\theta}, \theta, \dot{x}(t)) &= (m_1 l_1 + m_2 l_2) \dot{\theta} \dot{x}(t) \sin(\theta) + g(m_1 l_1 - m_2 l_2) \sin(\theta) - (m_1 l_1 - m_2 l_2) \dot{\theta} \dot{x}(t) \sin(\theta) \end{aligned} \quad (69)$$

We doen hetzelfde voor $x(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_d}{\partial x(t)} &= 0 \\ \frac{\partial L_d}{\partial \dot{x}(t)} &= m_1 \dot{x}(t) + m_1 l_1 \dot{\theta} \cos(\theta) + m_2 \dot{x}(t) - m_2 l_2 \dot{\theta} \cos(\theta) + M \dot{x}(t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L_d}{\partial \dot{x}(t)} \right) &= m_1 \ddot{x}(t) + m_1 l_1 \ddot{\theta} \cos(\theta) - m_1 l_1 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + m_2 \ddot{x}(t) - m_2 l_2 \ddot{\theta} \cos(\theta) - m_2 l_2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + M \ddot{x}(t) \\ \frac{\partial L_d}{\partial x(t)} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L_d}{\partial \dot{x}(t)} \right) &= d_{21}\ddot{\theta} + d_{22}\ddot{x} - z_2 = 0 \end{aligned} \quad (70)$$

Met d_{21} , d_{22} en z_2 :

$$\begin{aligned} d_{21}(\theta) &= -m_1 l_1 \cos(\theta) + m_2 l_2 \cos(\theta) \\ d_{22} &= -m_1 - m_2 - M \\ z_2(\dot{\theta}, \theta) &= -m_1 l_1 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) - m_2 l_2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \end{aligned} \quad (71)$$

We kunnen de twee differentiaalvergelijkingen (68) en (70) in matrixvorm schrijven, dan krijgen we:

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12}(\theta) \\ d_{21}(\theta) & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(\theta, \dot{\theta}, \dot{x}) \\ z_2(\theta, \dot{\theta}) \end{bmatrix} \quad (72)$$

Deze matrixvergelijking kunnen we nog eenvoudiger opschrijven als $D \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \vec{z}$, waarin D de matrix is en z de vector.

We kunnen nu $\ddot{\theta}$ en \ddot{x} uitrekenen als de matrix D inverteerbaar is, dan hebben we $\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = D^{-1} \vec{z}$. Om te kijken of D inverteerbaar is moeten we de determinant van D uitrekenen.

$$\begin{aligned} \det D &= -(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \cdot (-m_1 - m_2 - M) - (-(m_1 l_1 - m_2 l_2) \cos(\theta)) \cdot (-m_1 l_1 \cos(\theta) + m_2 l_2 \cos(\theta)) \\ &= (m_1^2 + m_1 m_2 + m_1 M) l_1^2 + (m_1 m_2 + m_2^2 + m_2 M) l_2^2 - (m_1^2 l_1^2 - 2m_1 m_2 l_1 l_2 - m_2^2 l_2^2) \cos^2(\theta) \end{aligned} \quad (73)$$

Omdat $0 \leq \cos^2(\theta) \leq 1$ is deze term altijd groter dan nul. De matrix D is dus inverteerbaar. Nu kunnen we (72) oplossen voor $\ddot{\theta}$ en $\ddot{x}(t)$:

$$\begin{aligned} D^{-1} &= \frac{1}{\det D} \begin{bmatrix} d_{22} & -d_{21} \\ -d_{12} & d_{11} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} &= D^{-1} \cdot z = \frac{1}{\det D} \begin{bmatrix} d_{22} & -d_{21} \\ -d_{12} & d_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{\det D} (d_{22} z_1 - d_{21} z_2) \\ \ddot{x}(t) &= \frac{1}{\det D} (-d_{12} z_1 + d_{11} z_2) \end{aligned}$$

Als we dit omschrijven naar vier eerstegraads differentiaalvergelijkingen dan krijgen we:

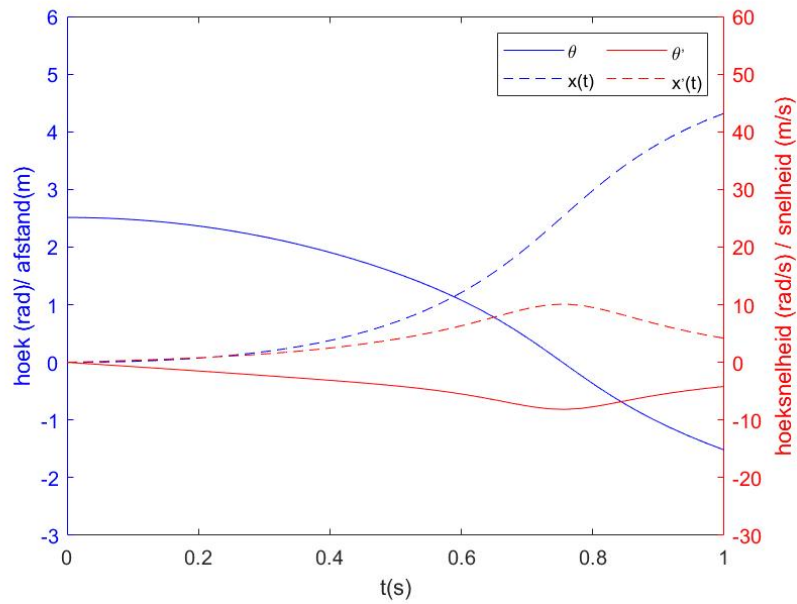
$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \frac{1}{\det D} (d_{22} z_1 - d_{21} z_2) \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = \frac{1}{\det D} (-d_{12} z_1 + d_{11} z_2) \end{cases} \quad (74)$$

Waar $y_1 = \theta$, $y_2 = \dot{\theta}$, $y_3 = x(t)$ en $y_4 = \dot{x}(t)$.

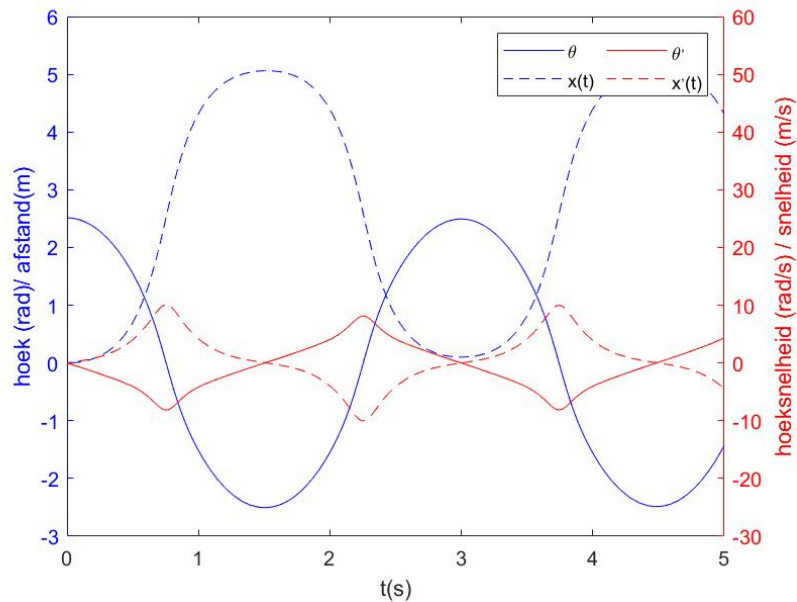
Om onze differentiaalvergelijking compleet te maken hebben we de begincondities nodig voor θ , de afgeleide van θ , $x(t)$ en de afgeleide van $x(t)$. Deze begincondities zijn te vinden in paragraaf 1.6.

5.2 Numerieke oplossing

In deze paragraaf kijken naar de numerieke oplossingen van de gevonden differentiaal vergelijkingen (74).



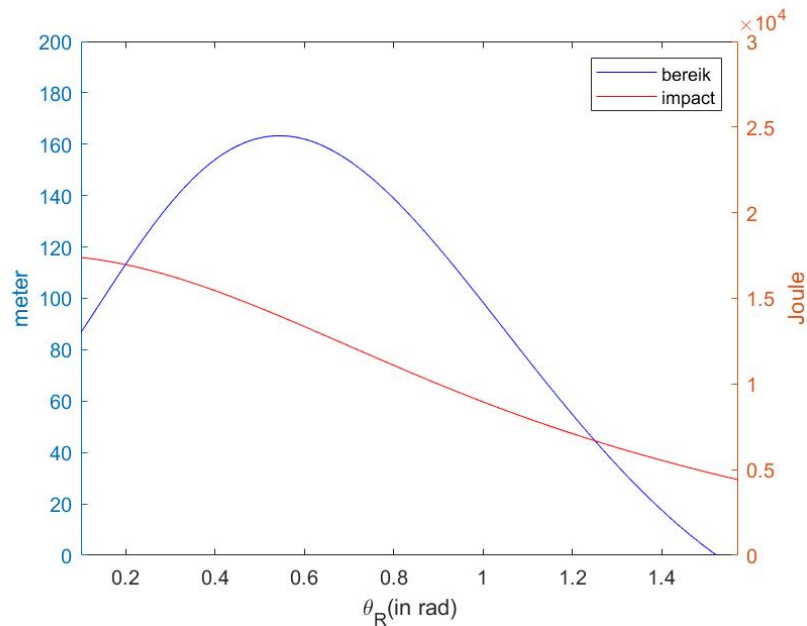
Figuur 5.3: De verandering van de hoek, de plaats en de hoeksnelheid en de verplaatsingssnelheid van het één hoek model op wielen ten opzichte van de tijd vanaf het moment van loslaten(0s) tot 1 seconde na het loslaten van het tegengewicht.



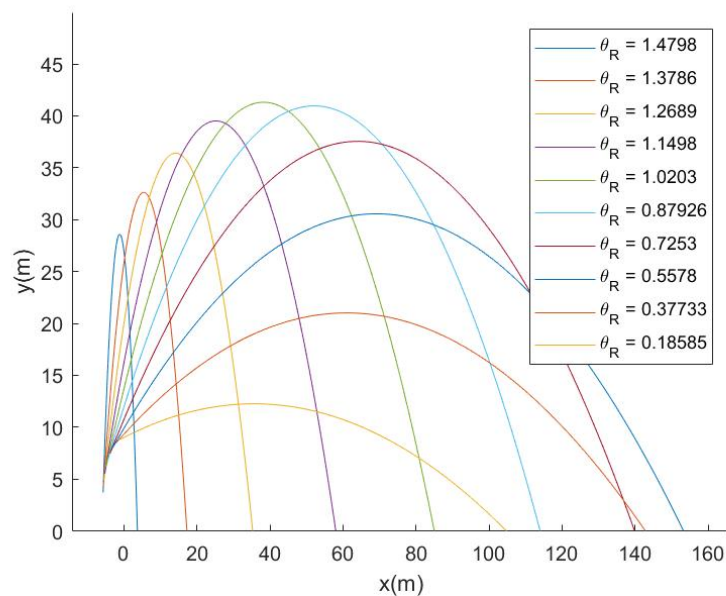
Figuur 5.4: De verandering van de hoek, de plaats en de hoeksnelheid en de verplaatsingssnelheid van het één hoek model op wielen ten opzichte van de tijd vanaf het moment van loslaten(0s) tot 5 seconde na het loslaten van het tegengewicht.

5.3 Afschieten van het voorwerp

De hoeken en de hoeksnelheden veranderden, maar wat gebeurt er als we het voorwerp loslaten? Hoever kan het voorwerp geschoten worden en hoeveel impact heeft het voorwerp als het neerkomt op de grond?



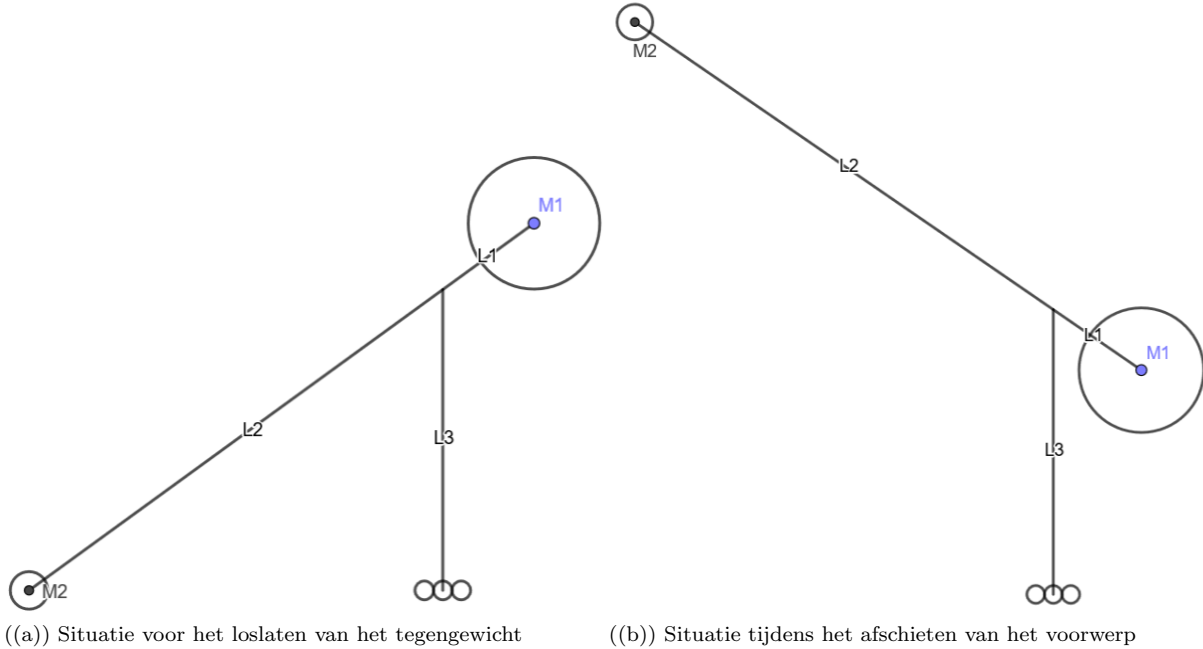
Figuur 5.5: Het bereik, hoever een voorwerp afgeschoten kan worden, en de impact, hoe hard een voorwerp op de grond neerkomt, wanneer het voorwerp bij verschillende hoeken wordt afgeschoten. Uit de figuur kunnen we halen dat de grootste afstand wordt bereikt als we afvuren bij een hoek van 0.56 rad, dan komt het voorwerp 163 meter ver. De grootste impact hebben we als we het voorwerp loslaten bij 0 rad, dan hebben we een impact van $17.1 \cdot 10^3$ Joule. De hoofdbalk is bij nul radialen verticaal.



Figuur 5.6: De baan die het voorwerp aflegt wanneer het bij verschillende hoeken wordt afgeschoten

5.4 Rendement

Er zit energie in het systeem voordat het voorwerp wordt afgeschoten en er blijft energie achter in het systeem nadat het voorwerp is afgeschoten. We willen weten wat het rendement is van de energie die het afgeschoten voorwerp mee heeft gekregen van de grote massa. We gebruiken hiervoor vergelijking (62) voor de hoogte van m_1 en vergelijking (65) voor de kinetische energie van m_1 .



Figuur 5.7: De posities van het zware tegengewicht en het af te schieten voorwerp voor en na het afschieten

Energie in het systeem in situatie (a):

$$\begin{aligned} E_{p,a} &= m_1 g y_a \\ E_{k,a} &= 0 \end{aligned} \quad (75)$$

Energie in het systeem in situatie (b):

$$\begin{aligned} E_{p,b} &= m_1 g y_b \\ E_{k,b} &= \frac{1}{2} m_1 ((\dot{x}(t))^2 + l_1^2 \dot{\theta}^2 + 2l_1 \dot{\theta} \dot{x}(t) \cos(\theta)) + \frac{1}{2} M (\dot{x}(t))^2 \end{aligned} \quad (76)$$

We moeten hier wel opmerken dat we de potentiële energie die m_2 heeft verwaarlozen, dit doen we omdat het verschil in massa's zo groot is, dat de invloed hiervan te verwaarlozen valt.

De energie die het afgeschoten voorwerp mee heeft gekregen is de energie in situatie (a) min de energie in situatie (b). We bekijken hoe groot de energie overdracht is op het moment van loslaten met de grootste impact, dus als $\theta = 0$ rad. De impact is dan 17.1 kJ.

$$\begin{aligned} & E_{p,a} + E_{k,a} - E_{p,b} - E_{k,b} \\ &= m_1 g (y_a - y_b) - \frac{1}{2} m_1 ((\dot{x}_R(t))^2 + l_1^2 \dot{\theta}_R^2 + 2l_1 \dot{\theta}_R \dot{x}_R(t) \cos(\theta_R)) + \frac{1}{2} M (\dot{x}_R(t))^2 \\ &= 17.1 \cdot 10^3 \end{aligned} \quad (77)$$

Het rendement rekenen we uit door het hierboven gevonden antwoord te delen door alleen de potentiële energie van de beginsituatie. In de ideale situatie zou namelijk alle potentiële energie naar het afgeschoten voorwerp gaan.

$$E_p = m_1 g y_a = 81.8 \cdot 10^3 \quad (78)$$

Het rendement is $\frac{17.1 \cdot 10^3}{81.8 \cdot 10^3} = 0.209$, dus 20.9%.

6 Discussie

In de voorgaande hoofdstukken zijn vier verschillende ontwerpen van de trebuchet bekeken. Met behulp van de Euler-Lagrange vergelijking en de Lagrangiaan zijn differentiaalvergelijkingen opgesteld voor elk model. In de tabel hieronder zijn de belangrijkste resultaten weergegeven.

Tabel 2: Gevonden resultaten van alle vier de modellen

	maximale afstand	maximale impact	rendement
Eén hoek model	75 m	7.3 kJ	9.1 %
Twee hoeken model	342 m	39.3 kJ	72.3 %
Drie hoeken model	284 m	27.4 kJ	50.4 %
Eén hoek model op wielen	163 m	17.1 kJ	20.9 %

Het eerste model bestaat uit een verticale balk met een hoofdbalk daarboven op. Aan de hoofdbalk zijn de twee massa's m_1 en m_2 bevestigd. Het model kent één hoek, namelijk hoek θ . In de modellen die volgen is er elke keer een onderdeel aan het voorgaande model toegevoegd. Het één hoek model had een laag rendement van 9.1%. De maximale afstand en de maximale impact van het één hoek model zijn hierboven in tabel 2 terug te vinden.

Bij het twee hoeken model is de arm l_4 en de hoek ϕ toegevoegd aan het één hoek model. De toevoeging van deze arm was een verbetering voor het model. Het rendement ging door deze toevoeging van 9.1% naar 72.3%. Door de toevoeging van de arm heeft massa m_1 minder kinetische energie op het moment van afschieten.

Bij het drie hoeken model is de arm l_5 en de hoek ψ toegevoegd aan het twee hoeken model. De toevoeging van deze arm had negatieve gevolgen voor het rendement. Het rendement ging door deze toevoeging van 72.3% naar 50.4%. De daling in het rendement zou kunnen komen door de grotere afstand tot het draaipunt.

Als laatste is er gekeken naar de toevoeging van wielen op het één hoek model. De toevoeging van wielen had een positief effect op de gevonden resultaten en was een verbetering voor het één hoek model. Het rendement ging door de toevoeging van 9.1% naar 20.9%.

Er is een groot verschil te zien tussen de verschillende modellen. Het twee hoeken model heeft de grootste maximale afstand, heeft de meeste impact en het hoogste rendement. De resultaten van het drie hoeken model ten opzichte van het twee hoeken model waren anders dan verwacht.

De matlab methode Ode45 leek in het begin geschikt, omdat de methode zelf zijn stapgroottes bepaald. Dit bleek later niet gunstig te zijn. Doordat de methode zelf de stapgroottes bepaald en deze niet aangepast kunnen worden, was het lastig te zien of er behoud van energie binnen de numerieke precisie plaats vond.

7 Conclusie

In dit verslag is er gekeken naar de rendementen van het één hoek model, het twee hoeken model, het drie hoeken model en het één hoek model op wielen. In het twee hoeken model kon de meeste energie van het zware tegengewicht worden meegegeven aan het afgeschoten voorwerp, het rendement was het hoogst. Met het twee hoeken model kon het afgeschoten voorwerp hierdoor de grootste maximale afstand afleggen en de impact op de grond was ook het grootst.

De uitbreiding van het twee hoeken model naar het drie hoeken model had niet het verwachte resultaat. De trebuchet die vroeger gebruikt werd, had deze arm wel, waardoor aan te nemen valt dat het een positief effect zou moeten hebben. Het verschil in onze bevindingen kan komen doordat l_5 in het model als een balk gemodelleerd is en niet als een touw. Er zou in een volgend project gekeken kunnen worden naar het modelleren van een touw in plaats van een balk.

De toevoeging van wielen aan het één hoek model zorgt voor een grote verbetering in de af te schieten afstand, de impact en het rendement. Het toevoegen van wielen aan het twee hoeken model zou voor een hoger rendement kunnen zorgen.

In paragraaf 1.2.1 zijn verschillende aannames gedaan met betrekking tot de modellen. In een vervolg onderzoek zou de grond en de wrijvingskrachten meegenomen kunnen worden in het model. Dit zou mogelijk tot een realistischer resultaat kunnen leiden.

8 Bronnenlijst

[de Jong, 2020] de Jong, R. (2020). Modelling the movements of a counterweight trebuchet while firing.

[Hansen & Falster, 1992] Hansen, P. V., & Falster, N. (1992). Experimental reconstruction of a medieval trebuchet. *Acta archaeologica*, 63, 189-208.

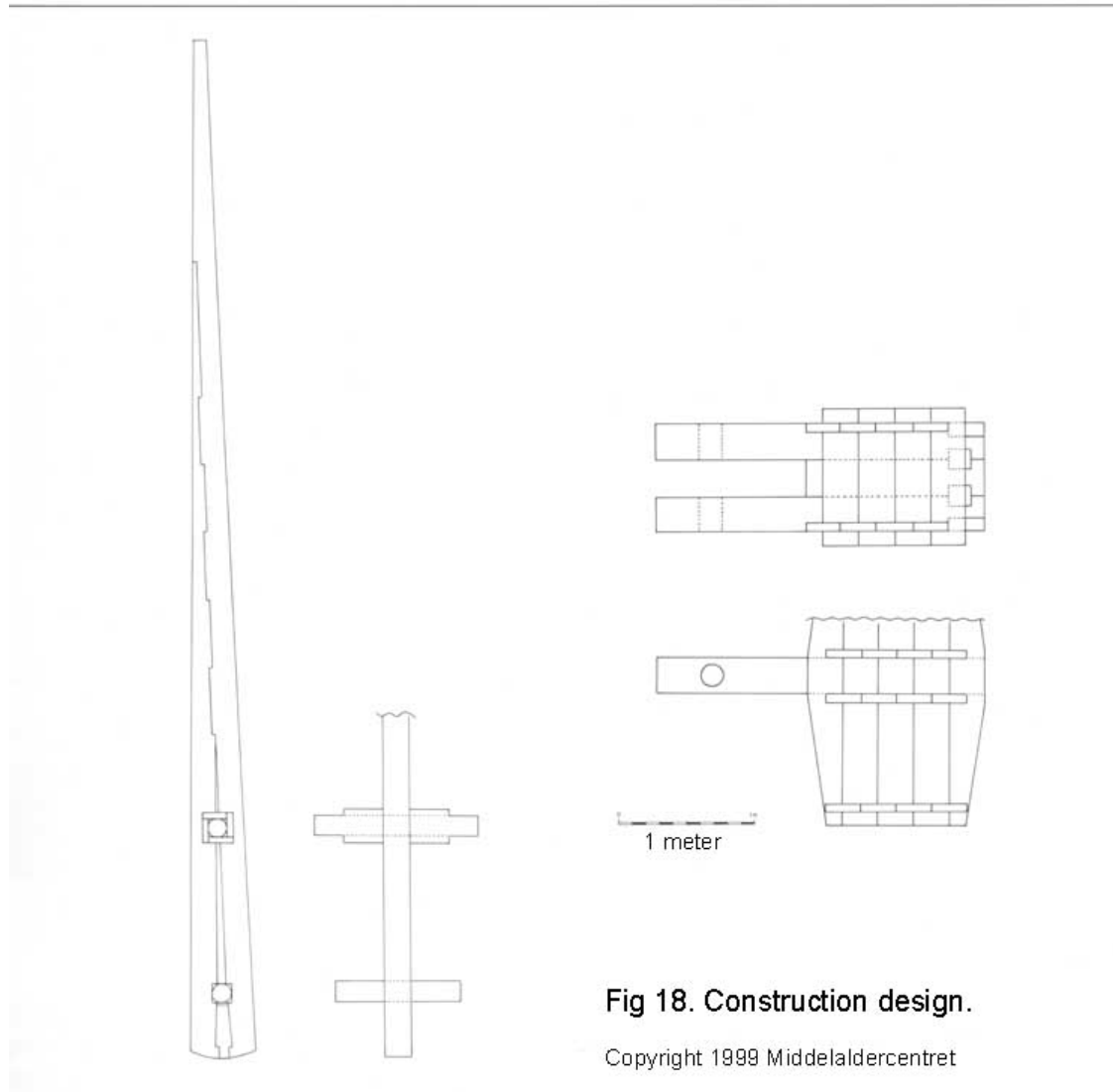
[Rutan and Wieczorek, 2005] Rutan, S., & Wieczorek, B. (2005). *Modern Siege Weapons: Mechanics of the Trebuchet*.

[Purton, 2009] Purton, P. F. (2009). *A History of the Early Medieval Siege, c. 450-1220 (Vol. 1)*. Boydell Brewer Ltd.

9 Bijlagen

9.1 Blauwdrukken

Uit de blauwdrukken van [Hansen & Falster, 1992] hebben we de gebruikte lengtes en massa's gehaald voor dit project.



Figuur 9.1: Eerste blauwdruk van een replica trebuchet, waaruit we de lengtes l_1 , l_2 en l_4 kunnen afleiden. [Hansen & Falster, 1992]

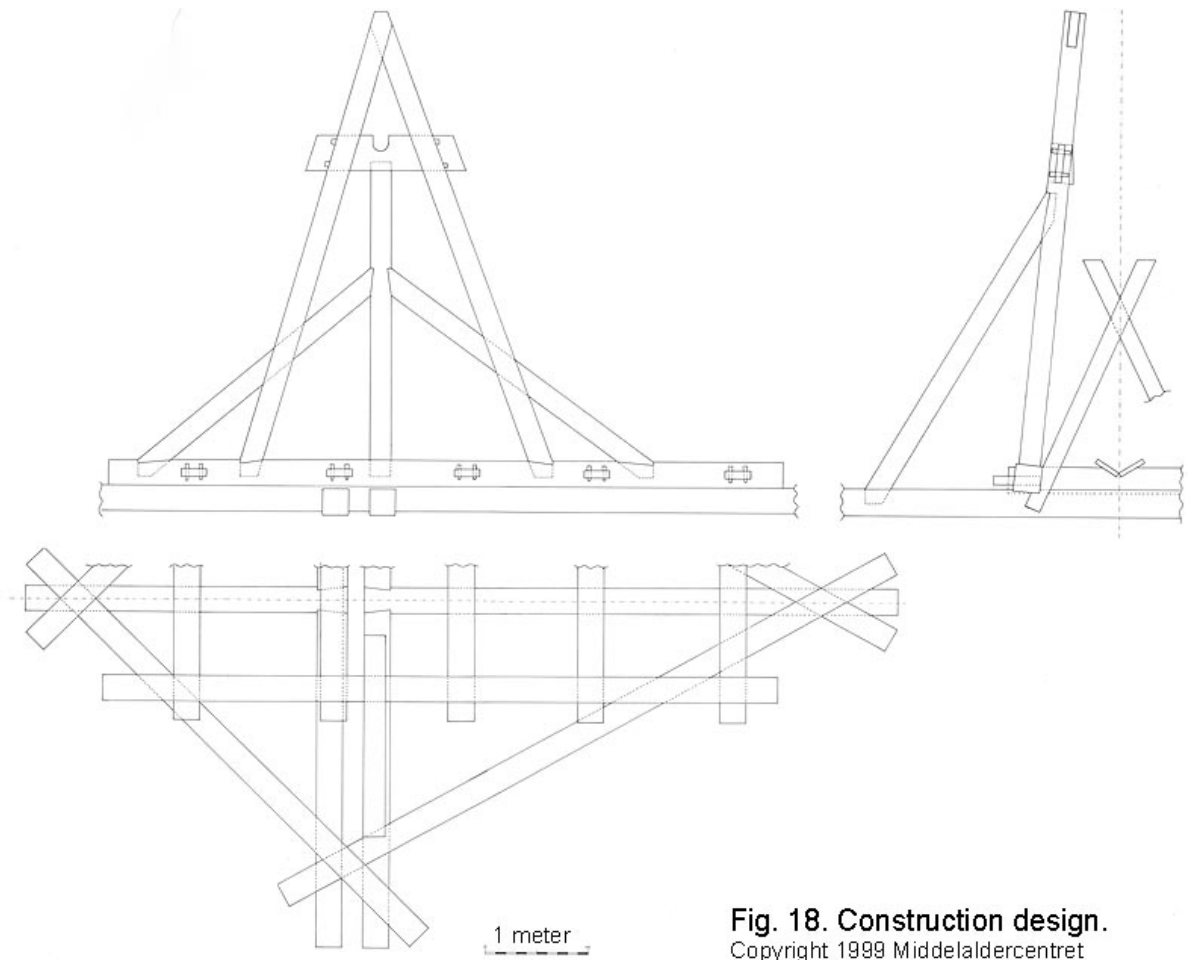


Fig. 18. Construction design.
 Copyright 1999 Middelaldercentret

Figuur 9.2: Tweede blauwdruk van een replica trebuchet, waaruit we de lengte van l_3 kunnen afleiden.
 [Hansen & Falster, 1992]

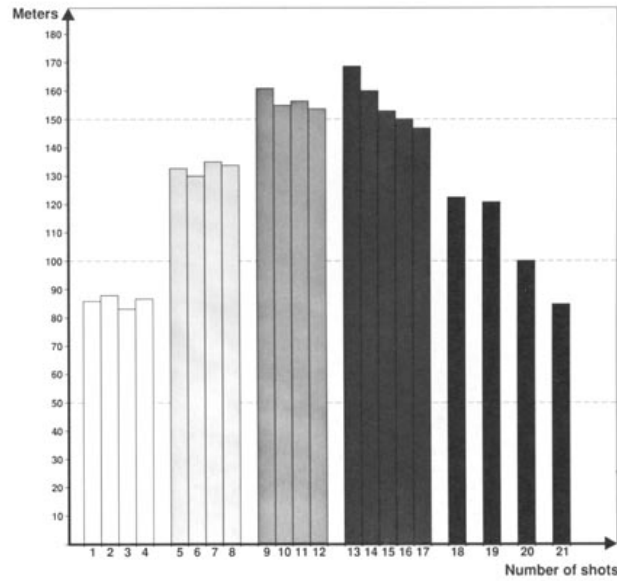


Fig. 17. Experiment results. Drawn by C. Oksen.

Figuur 9.3: De resultaten die gevonden zijn bij het afschieten van een voorwerp met een replica trebuchet. We zien dat het voorwerp de meeste afstand aflegt bij nummer 13. In de figuur hiernaast, kunnen we de parameters van nummer 13 aflezen, die we gebruiken in ons verslag.[Hansen & Falster, 1992]

Shots 1-4:	Ballast 1000 kg	sling 5 m	projectile 15 kg.
Shots 5-8:	Ballast 1500 kg	sling 5 m	projectile 15 kg
Shots 9-13:	Ballast 2000 kg	sling 5 m	projectile 15 kg
Shot 14:	Ballast 1000 kg	sling 5 m	projectile 15 kg
Shot 15:	Ballast 2000 kg	sling 5 m	projectile 15 kg
Shot 16:	Ballast 2000 kg	sling 5 m	projectile 15 kg
Shot 17:	Ballast 2000 kg	sling 5 m	projectile 15 kg
Shot 18:	Ballast 2000 kg	sling 4 m	projectile 15 kg
Shot 19:	Ballast 2000 kg	sling 5 m	projectile 20 kg
Shot 20:	Ballast 2000 kg	sling 5 m	projectile 25 kg
Shot 21:	Ballast 2000 kg	sling 5 m	projectile 47 kg

Figuur 9.4: De keuze voor m_1 , m_2 en l_5 hebben we gebaseerd op de gevonden waarden bij shot 13. [Hansen & Falster, 1992]

9.2 Matlab code

9.2.1 Eén hoek model

```
clear all
%Variabele
p = -pi:pi/100:pi;
g = 9.81; M1 = 2000; M2 = 15; L1 = 1.2; L2=5.7; L3=3.2;
ML = (M1*L1 - M2*L2)/(M1*(L1)^2 + M2*(L2)^2);

%Analytische methode
z = - sqrt(2*g*ML*(cos(p)-cos(0.7*pi)));

%ode45 Matlab methode
[t,y] = ode45(@odefun,[0 1],[0.7*pi 0]);

% Euler's Forward Method
tend = 1; %maximale tijd
m = 30000; %aantal stapjes 0000
EF1 = zeros(m+1,1);
EF2 = zeros(m+1,1);
d = zeros(m+1,1);
w1 = 0.7*pi; %beginwaarde 1
w2 = 0; %beginwaarde 2
EF1(1,1) = w1;
EF2(1,1) = w2;
d(1,1) = 0;
dt = tend/m; %delta t
t0 = 0; %initiele tijd

for i = 1:m
    EF1(i+1,1) = EF1(i,1)+dt*EF2(i,1);
    EF2(i+1,1) = EF2(i,1)-dt*g*ML*sin(EF1(i,1));
    d(i+1,1) = d(i,1) + dt;
end

% %plots
% figure
% Forward oplossing tegen tijd
% plot(t,y(:,1),'b',t,y(:,2),'r')%Ode45 oplossing tegen tijd
% plot(EF1,EF2,'g',p,z,'b—') %Euler Forward en analytische oplossing
% plot(y(:,1),y(:,2),'r', x, z,'b—') %ode45 en analytische oplossing
% title('analytische oplossing (b—) vs Euler Forward (g)')
% legend('Matlab methode ode45','Analytische oplossing')
% xlabel('\theta')
% ylabel('$\dot{\theta}$', 'Interpreter','latex')
% yyaxis left
% plot(t,y(:,1),'b');
% yyaxis right
% plot(t,y(:,2),'r');
% yyaxis left
% legend('\theta','\theta^','')
% xlabel('t(s)')
% ylabel('hoek (rad)')
% xlim([0 5])
% ylim([-3 3])
% yyaxis right
% ylabel('snelheid (rad/s)')
% ylim([-6 6])
```

```

%Afschieten
ta = zeros (17,1); pa = zeros (17,1); qa = zeros (85,1); sa = zeros(17,1);
Ea = zeros(17,1); tEea = zeros(85,1); m=61; j=1;
figure;
clf;
hold on;
for i = 1 : m
    d = t(i); %tR
    p = y(i,1); %thetaR
    q = y(i,2); %thetadotR
    if p>0
        if p<0.5*pi
            ta(j,1) = d; %t afschieten
            pa(j,1) = p; %hoek afschieten
            qa(j,1) = q; %hoeksnelheid afschieten
            %benodigde tussenberekeningen
            beta = -q*L2* cos (p);
            gamma = sin (p) * (-q*L2);
            delta = -L2*sin (p);
            epsilon = L2*cos(p)+L3;
            %Eindtijd , impact en afstand
            tE = (gamma + sqrt(gamma^2 + 2*g*epsilon))/g + d; %eindtijd
            sa(j,1) = beta*(tE-d)+ delta; %geschoten afstand
            Ea(j,1) = 0.5*M2*(beta^2 + (-g*(tE - d) + gamma)^2); %impact
            tEea(j,1) = tE; %eindtijd opslaan
            %Benodigdheden voor plot verloop afschieten
            T = linspace(d,tE,100);
            raxy = zeros(2,numel(T));
            raxy(:, :) = verloop(d,T,p,q,L2,L3,g);
            legendatekst = ['\theta_R = ', num2str(p)];
            plot(raxy(1,:), raxy(2,:), 'DisplayName', legendatekst);
            j=j+1;
        end
    end
end
hold off;
legend show;
xlabel('x(m)')
ylabel('y(m)')

%plot bereik impact
figure
yyaxis left
plot(pa, sa, 'b');
ylabel('meter')
yyaxis right
plot(pa,Ea, 'r');
ylabel('Joule')
yyaxis left
legend('bereik', 'impact')
xlabel('\theta_R(in rad)')
xlim([0.1 0.4*pi])
ylim([0 100])
yyaxis right
ylim([0 100*10^2])

%Hamiltoniaan

```

```

E = zeros(length(y),1);
for i=1:length(y)
E(i,1) = 0.5*(m1*(l1)^2+m2*(l2)^2)*(y(i,2))^2 - g*(m1*l1 -m2*l2)*cos(y(i,1)) + g*l3*(m1+
%E(i,1) = 0.5*(m1*(l1)^2+m2*(l2)^2)*(EF2(i,1))^2 - g*(m1*l1 -m2*l2)*cos(EF1(i,1)) + g*l3
%E(i,1) = 0.5*(m1*(l1)^2+m2*(l2)^2)*(z(1,i))^2 - g*(m1*l1 - m2*l2)*cos(p(1,i)) + g*l3*(n
end
plot(t,E)
title('Hamiltoniaan 1 hoek model')
xlabel('t(s)')
ylabel(' Hamiltoniaan ' )

Odefun.m

%Functie voor ode45 voor het 1 hoek model
function dydt = odefun(t,y)
%y(1) = theta , y(2) = thetap;
g = 9.81; M1 = 2000; M2 = 15; L1 = 1.2; L2=5.7;
ML = (M1*L1 - M2*L2)/(M1*(L1)^2 + M2*(L2)^2);

%Differentiaalvergelijkingen
dydt = zeros(2,1);
dydt(1) = y(2);
dydt(2) = -g*ML*sin(y(1));

verloop.m

% Functie om de baan van het afgeschoten voorwerp te plotten
% d = tijd loslaten , t = eindtijd , p = theta , q = thetapunt
function raxy = verloop(d,t,p,q,L2,L3,g)
beta = -q*L2*(cos(p));
gamma = -q*L2*(sin(p));
delta = -L2*(sin(p));
epsilon = L2*(cos(p))+L3;

raxy = zeros(2,numel(t));
raxy(1,:) = beta*(t-d)+delta; %x-coordinaat
raxy(2,:) = -0.5*g*((t-d).^2)+gamma*(t-d)+epsilon; %y-coordinaat
end

```

9.2.2 Twee hoeken model

```

clear all;
% Variabelen
g = 9.81; M1 = 2000; M2 = 15; L1 = 1.2; L2=5.7; L3=3.2; L4=1.4;

%differentiaalvergelijking met ode45 oplossen
[t,y] = ode45(@odefun2,[0 5],[0.8*pi 0 0.2*pi 0]);

% Euler's Forward Method
tend = 1; %maximale tijd
m = 90000000; %aantal stapjes
WE1 = zeros(m+1,1); WE2 = zeros(m+1,1); WE3 = zeros(m+1,1); WE4 = zeros(m+1,1); j=zeros(
w1 = 0.8*pi; w2 = 0; w3 = 0.2*pi; w4 = 0;%beginwaarde
WE1(1,1) = w1; WE2(1,1) = w2; WE3(1,1) = w3; WE4(1,1) = w4; n(1,1)=0;
dt = tend/m; % delta t
t0 = 0; %initiele tijd

for i = 1:m
%matrix B en inv(B)
b11 = -M1*(L1)^2 - M2*(L2)^2 - M1*(L4)^2 + 2*M1*L1*L4*cos(WE3(i,1));
b12 = M1*L4*(L1*cos(WE3(i,1))-L4);

```

```

b22 = -M1*(L4)^2;
detB = M1*(L4)^2*(M2*(L2)^2+M1*(L1)^2*(sin(WE3(i,1)))^2);
%vector v
v1 = -g*(M2*L2*sin(WE1(i,1)) - M1*(L1*sin(WE1(i,1)) - L4*sin(WE1(i,1)+WE3(i,1)))) +
v2 = -g*M1*L4*sin(WE1(i,1)+WE3(i,1)) - M1*L1*L4*sin(WE3(i,1))*(WE2(i,1))^2;
%differentiaalvergelijking
WE1(i+1,1) = WE1(i,1)+dt*WE2(i,1);
WE2(i+1,1) = WE2(i,1)+dt*(1/detB)*(b22*v1-b12*v2);
WE3(i+1,1) = WE3(i,1)+dt*WE4(i,1);
WE4(i+1,1) = WE4(i,1)+dt*(1/detB)*(-b12*v1+b11*v2);
j(i+1,1) = j(i,1)+dt;
end

%Controleren EF en Ode45 hetzelfde
plot(j,WE1,j,WE2,j,WE3,j,WE4,t,y(:,1),'b',t,y(:,3),'b',t,y(:,2),'r',t,y(:,4),'r')
plot(j,WE1,'r',t,y(:,1),'b-')

%Hamiltoniaan, behoud van energie checken
Eb = zeros(length(y),1);
for i=1:length(y)
% %Ode45
% Eb(i,1)=0.5*(m1*(l1)^2+m2*(l2)^2)*(y(i,2))^2+0.5*m1*(l4)^2*((y(i,2) + y(i,4))^2) - m1*
%EF
Eb(i,1)=0.5*(M1*(L1)^2+M2*(L2)^2)*(WE2(i,1))^2+0.5*M1*(L4)^2*((WE2(i,1) + WE4(i,1))^2) -
end

%Afschieten
m=numel(t); n=1; k=32;
tb = zeros (k,1);
pb = zeros (k,1);
qb = zeros (k,1);
s = zeros(k,1);
E = zeros(k,1);
tEe = zeros(k,1);
figure;
clf;
hold on;
for i = 1 : m
d = t(i,1); %tR
p = y(i,1); %thetaR
q = y(i,2); %thetadotR
if p>0
if p<0.5*pi
if n<33
tb(n,1) = d; %t afschieten
pb(n,1) = p; %hoek afschieten
qb(n,1) = q; %hoeksnelheid afschieten
beta = -q*L2* cos (p);
gamma = sin (p) * (-q*L2);
delta = -L2*sin (p);
epsilon = L2*cos(p)+L3;
tE = (gamma + sqrt(gamma^2 + 2*g*epsilon))/g + d; %eindtijd
s(n,1) = beta*(tE-d)+ delta; %range
E(n,1) = 0.5*M2*(beta^2 + (-g*(tE - d) + gamma)^2); %impact
tEe(n,1) = tE;
T = linspace(d,tE,100);
raxy = zeros(2,numel(T));
raxy(:, :) = verloop(d,T,p,q,L2,L3,g);

```

```

        legendatekst = ['\theta_R = ', num2str(p)];
        plot(raxy(1,:), raxy(2,:), 'DisplayName', legendatekst);
        n=n+1;
    end
end
end
end
hold off;
legend show;
xlabel('x(m)')
ylabel('y(m)')
%plot bereik impact
figure
yyaxis left
plot(pb, s, 'b');
ylabel('meter')
yyaxis right
plot(pb, E, 'r');
ylabel('Joule')
yyaxis left
legend('bereik', 'impact')
xlabel('\theta_R(in rad)')
xlim([0 0.5*pi])
ylim([0 500])
yyaxis right
ylim([0 1*10^5])

% theta en phi met afgeleiden plotten
figure
yyaxis left
plot(t, y(:,1), 'b', t, y(:,3), 'b')
ylabel('hoek (rad)')
yyaxis right
plot(t, y(:,2), 'r', t, y(:,4), 'r')
ylabel('hoeksnelheid (rad/s)')
yyaxis left
xlabel('t(s)')
xlim([0 5])
ylim([-2 6])
ax = gca;
ax.YColor = 'b'; % Red
yyaxis right
ax.YColor = 'r'; % Blue
ylim([-20 60])
% leg1=legend(y, 'Location', 'NorthEast'); set(leg1, 'FontSize', 9);
% ah1=axes('position', get(gca, 'position'), 'visible', 'off');
% leg2=legend(ah1, 'Location', 'NorthWest'); set(leg2, 'FontSize', 9);
lgd=legend('\theta', '\phi', '\theta^', '\phi^');
lgd.NumColumns = 2;
% lgd1=legend('\theta', '\phi', 'Location', 'NorthWest');
% lgd2=legend('\theta^', '\phi^', 'Location', 'NorthEast');

%Hamiltoniaan plotten
plot(t, Eb)

%Rendement berekenen
Ena = M1*g*(-L1*cos(y(1,1))+L4*cos(y(1,1)+y(1,3))+L1*cos(y(55,1))-L4*cos(y(55,1)+y(55,3)))
Ep = M1*g*(-L1*cos(y(1,1))+L4*cos(y(1,1)+y(1,3))+L3)+L1*cos(y(55,1))-L4*cos(y(55,1)+y(55,3))

```



```

Ekna = 0.5*M1*(L1^2*(y(55,2))^2+L4^2*(y(55,2)+y(55,4))^2-2*L1*L4*y(55,2)*(y(55,2)+y(55,4)))
Odefun2
%Functie voor ode45 voor het 2 hoek model
function dydt2 = odefun2(t,y)
%ppunt = iB*v
% y(1) = theta , y(2) = thetap , y(3) = phi , y(4) = phip
g=9.81; M1=2000; M2=15; L1=1.2; L2=5.7; L3=3.2; L4=1.4;

%matrix B en inv(B)
b11 = -M1*((L1)^2) - M2*((L2)^2) - M1*((L4)^2) + 2*M1*L1*L4*(cos(y(3)));
b12 = M1*L4*(L1*(cos(y(3)))-L4);
b22 = -M1*((L4)^2);
detB = M1*((L4)^2)*(M2*((L2)^2)+M1*((L1)^2)*(sin(y(3)))^2);

%vector v
v1 = -g*(M2*L2*(sin(y(1))) - M1*(L1*(sin(y(1))) - L4*(sin(y(1)+y(3)))) + M1*L1*L4*(2*(y(2))^2));
v2 = -g*M1*L4*(sin(y(1)+y(3))) - M1*L1*L4*(sin(y(3)))*((y(2))^2);

%differentiaalvergelijkingen
dydt2 = zeros(4,1);
dydt2(1) = y(2);
dydt2(2) = (1/detB)*(b22*v1-b12*v2);
dydt2(3) = y(4);
dydt2(4) = (1/detB)*(-b12*v1+b11*v2);
end

```

9.2.3 Drie hoeken model

```

clear all;
% Variabelen
g = 9.81; M1 = 2000; M2 = 15; L1 = 1.2; L2=5.7; L3=3.2; L4=1.4; L5=5;

%differentiaalvergelijking met ode45 oplossen
[t,y] = ode45(@odefun3,[0 5],[0.8*pi 0 0.2*pi 0 0.3*pi 0]);

% Euler's Forward Method
tend = 5; %maximale tijd
m = 90000; %aantal stapjes 000
WE1 = zeros(m+1,1); WE2 = zeros(m+1,1); WE3 = zeros(m+1,1); WE4 = zeros(m+1,1);
WE5 = zeros(m+1,1); WE6 = zeros(m+1,1); j=zeros(m+1,1);
w1=0.8*pi; w2=0; w3=0.2*pi; w4=0; w5=0.3*pi; w6=0;%beginwaarde
WE1(1,1)=w1; WE2(1,1)=w2; WE3(1,1)=w3; WE4(1,1)=w4; WE5(1,1)=w5; WE6(1,1)=w6; j(1,1)=0;
dt = tend/m; % delta t
t0 = 0; %initiele tijd

for i = 1:m
%matrix C en inv(C)
c11 = -m1*(l1)^2 - m2*(l2)^2 - m1*(l4)^2 + 2*m1*l1*l4*cos(WE3(i,1)) - m2*(l5)^2 + 2*m2*l1*l4*cos(WE5(i,1));
c12 = m1*l4*(l1*cos(WE3(i,1))-l4);
c13 = m2*(l5)^2 - m2*l2*l5*cos(WE5(i,1));
c22 = -m1*(l4)^2;
c33 = - m2*(l5)^2;
detC = -m1*m2*(l4)^2*(l5)^2*(m1*(l1)^2*(sin(WE3(i,1)))^2 + m2*(l2)^2*(sin(WE5(i,1)))^2);

%vector w
w1 = -g*(m2*l2*sin(WE1(i,1)) - m1*(l1*sin(WE1(i,1)) - l4*sin(WE1(i,1)+WE3(i,1))) + m2*l5*sin(WE5(i,1)));
w2 = g*m1*l4*sin(WE3(i,1)-WE1(i,1)) - m1*l1*l4*((WE2(i,1))^2).*sin(WE3(i,1));
%w2 = -g*m1*l4*sin(WE1(i,1)+WE3(i,1)) - m1*l1*l4*((WE2(i,1))^2).*sin(WE3(i,1));

```

```

w3 = -m2*l2*l5*((WE2(i,1))^2)*sin(WE5(i,1)) + g*m2*l5*sin(WE5(i,1)-WE1(i,1));

if detC ~= 0
    %differentiaalvergelijking
    WE1(i+1,1) = WE1(i,1)+dt*WE2(i,1);
    WE2(i+1,1) = WE2(i,1)+dt*(1/detC)*(c22*c33*w1 - c12*c33*w2 - c13*c22*w3);
    WE3(i+1,1) = WE3(i,1)+dt*WE4(i,1);
    WE4(i+1,1) = WE4(i,1)+dt*(1/detC)*(-c12*c33*w1 + c11*c33*w2 - (c13)^2*w2 + c12*c13*w3);
    WE5(i+1,1) = WE5(i,1)+dt*WE6(i,1);
    WE6(i+1,1) = WE6(i,1)+dt*(1/detC)*(-c13*c22*w1 + c12*c13*w2 + c11*c22*w3 - (c12)^2*w3);
    j(i+1,1) = j(i,1)+dt;
end
end

%Hamiltoniaan, behoud van energie checken
Eb = zeros(length(y),1);
for i=1:length(y)
    %Ode45
    % Eb(i,1)=0.5*(m1*(11)^2+m2*(12)^2)*(y(i,2))^2+0.5*m1*(14)^2*((y(i,2) + y(i,4))^2) - m1*E
    %EF
    Eb(i,1)=0.5*(m1*(11)^2+m2*(12)^2)*(WE2(i,1))^2+0.5*m1*(14)^2*((WE2(i,1) + WE4(i,1))^2) -
end
plot(t,Eb)

plot(j,WE1,t,y(:,1),j,WE3,t,y(:,3),j,WE5,t,y(:,5))
plot(j,WE2,j,WE4,j,WE6,t,y(:,2),t,y(:,4),t,y(:,6))

%Afvuren
tc = zeros (14,1);
pc = zeros (14,1);
qc = zeros (14,1);
rc = zeros (14,1);
sc = zeros (14,1);
s = zeros(14,1);
E = zeros(14,1);
tEe = zeros(14,1);
gammaeps = zeros (14,1);
m=numel(t); j=1;
figure;
clf;
hold on;
for i = 67 : 80
    d = t(i); %tR
    p = y(i,1); %thetaR
    q = y(i,2); %thetadotR
    r = y(i,5); %psiR
    ss = y(i,6); %psidotR
    %if p<0.5pi
    %if p>0
        %if j<188 %18 %112
        tc(j,1) = d; %t afschieten
        pc(j,1) = p; %hoek theta afschieten
        qc(j,1) = q; %hoeksnelheid theta afschieten
        rc(j,1) = r; %hoek psi afschieten
        sc(j,1) = ss; %hoeksnelheid psi afschieten

        beta = -q*L2*(cos(p))-L5*cos(r-p)*(ss-q);
        gamma = -q*L2*(sin(p))+L5*sin(r-p)*(ss-q);
    end
end

```

```

    delta = -L2*(sin(p))-L5*sin(r-p);
    epsilon = L2*(cos(p))+L3 - L5*cos(r-p);

    tE = (gamma + sqrt(gamma^2 + 2*g*epsilon))/g + d; %eindtijd
    s(j,1) = beta*(tE-d)+ delta; %range
    E(j,1) = 0.5*M2*(beta^2 + (-g*(tE - d) + gamma)^2); %impact
    tEe(j,1) = tE;
    T = linspace(d,tE,length(t));
    raxy3 = zeros(2,numel(T));
    raxy3(:, :) = verloop3(d,T,p,q,r,ss,L2,L3,L5,g);
    legendatekst = [ '\theta_R = ', num2str(p), ', ', '\psi_R = ', num2str(r) ];
    plot(raxy3(1,:), raxy3(2,:), 'DisplayName', legendatekst);
    j=j+1;
    %end

    %end
end
hold off;
legend show;
xlabel('x(m)')
ylabel('y(m)')
%plot bereik impact
figure
yyaxis left
plot(pc,s,'b');
ylabel('meter')
yyaxis right
plot(pc,E,'r');
ylabel('Joule')
yyaxis left
legend('bereik','impact')
xlabel('\theta_R(in rad)')
xlim([0.1 0.5*pi])
ylim([0 500])
yyaxis right
ylim([0 5*10^4])

%Startpunt bepalen
xx = zeros(numel(t),1); xy = zeros(numel(t),1); vx = zeros(numel(t),1); vy = zeros(numel(t),1);
for i=1:numel(t)
xx(i) = -L2*sin(y(i,1)) - L5*sin(y(i,5) - y(i,1));
xy(i) = L2*cos(y(i,1)) + L3 - L5*cos(y(i,5) - y(i,1));
vx(i) = L2*cos(y(i,1))*y(i,2) + L5*cos(y(i,5)-y(i,1))*(y(i,6)-y(i,2));
vy(i) = L2*sin(y(i,1))*y(i,2) - L5*sin(y(i,5)-y(i,1))*(y(i,6)-y(i,2));
vxy(i) = vx(i)/vy(i);
end
%plot(xx,xy)

%Rendement
3hoogtebegin = -L1*cos(y(1,1))+L3+L4*cos(y(1,1)+y(1,3))
3hoogteeind = -L1*cos(y(80,1))+L3+L4*cos(y(80,1) + y(80,3))
3kine = 0.5*M1*(L1^2*y(80,2)^2+L4^2*(y(80,2)+y(80,4))^2 - 2*L1*L4*y(80,2)*(y(80,2)+y(80,4)))

% theta, phi en psi met afgeleiden plotten
figure
yyaxis left
plot(t,y(:,1), 'b', t,y(:,3), 'b', t,y(:,5), 'b')
ylabel('hoek (rad)')
yyaxis right

```

```

plot(t,y(:,2),'r',t,y(:,4),'r',t,y(:,6),'r')
ylabel('hoeksnelheid (rad/s)')
yyaxis left
xlabel('t(s)')
xlim([0 5])
ylim([-15 15])
ax = gca;
ax.YColor = 'b'; % Red
yyaxis right
ax.YColor = 'r'; % Blue
ylim([-75 75])
% leg1=legend(y,'Location','NorthEast');set(leg1,'FontSize',9);
% ah1=axes('position',get(gca,'position'),'visible','off');
% leg2=legend(ah1,'Location','NorthWest');set(leg2,'FontSize',9);
lgd=legend('\theta','\phi','\psi','\theta^','\phi^','\psi^');
lgd.NumColumns = 2;
% lgd1=legend('\theta','\phi','Location','NorthWest');
% lgd2=legend('\theta^','\phi^','Location','NorthEast');

%Hamiltoniaan plotten
plot(t,Eb)

Odefun3
function dydt3 = odefun3(t,y)
% Differentiaalvergelijking 3 hoek model
% y(1) = theta , y(2) = thetap , y(3) = phi ,
% y(4) = phip , y(5)= psi , y(6)= psip
g = 9.81; M1 = 2000; M2 = 15; L1 = 1.2; L2=5.7; L3=3.2; L4=1.4; L5=5;

%matrix C en inv(C)
c11 = -M1*(L1)^2 - M2*(L2)^2 - M1*(L4)^2 + 2*M1*L1*L4*cos(y(3)) - M2*(L5)^2 + 2*M2*L2*L5;
c12 = M1*L4*(L1*cos(y(3))-L4);
c13 = M2*(L5)^2 - M2*L2*L5*cos(y(5));
c22 = -M1*(L4)^2;
c33 = - M2*(L5)^2;
detC = - M1*M2*(L4)^2*(L5)^2*(M1*(L1)^2*(sin(y(3)))^2 + M2*(L2)^2*(sin(y(5)))^2);

%vector w
w1 = -g*(M2*L2*sin(y(1)) - M1*(L1*sin(y(1)) - L4*sin(y(1)+y(3)))+ M2*L5*sin(y(5) - y(1)));
w2 = g*M1*L4*sin(y(3)- y(1)) - M1*L1*L4*((y(2))^2)*sin(y(3));
%w2 = -g*M1*L4*sin(y(1)+y(3)) - M1*L1*L4*((y(2))^2)*sin(y(3));
w3 = -M2*L2*L5*((y(2))^2)*sin(y(5)) + g*M2*L5*sin(y(5)-y(1));

%differentiaalvergelijking
dydt3 = zeros(6,1);
dydt3(1) = y(2);
dydt3(2) = (1/detC)*(c22*c33*w1 - c12*c33*w2 - c13*c22*w3);
dydt3(3) = y(4);
dydt3(4) = (1/detC)*(-c12*c33*w1 + c11*c33*w2 - (c13)^2*w2 + c12*c13*w3);
dydt3(5) = y(6);
dydt3(6) = (1/detC)*(-c13*c22*w1 + c12*c13*w2 + c11*c22*w3 - (c12)^2*w3);
end

Verloop3
% Functie om de baan van het afgeschoten voorwerp te plotten voor 3 hoeken
% model
% d = tijd loslaten , t = eindtijd , p = theta , q = thetapunt , r=psi ,
% s=psipunt
function raxy3 = verloop3(d,t,p,q,r,s,L2,L3,L5,g)

```

```

beta = -q*L2*(cos(p))-L5*cos(r-p)*(s-q);
gamma = -q*L2*(sin(p))+L5*sin(r-p)*(s-q);
delta = -L2*(sin(p))-L5*sin(r-p);
epsilon = L2*(cos(p))+L3 - L5*cos(r-p);

raxy3 = zeros(2,numel(t));
raxy3(1,:) = beta*(t-d)+delta; %x-coordinaat
raxy3(2,:) = -0.5*g*((t-d).^2)+gamma*(t-d)+epsilon; %y-coordinaat
end

```

9.2.4 Eén hoek model op wielen

```

clear all
%Variabele
p = -pi:pi/100:pi;
g = 9.81; M1 = 2000; M2 = 15; L1 = 1.2; L2=5.7; L3=3.2; M3 = 2000;

%ode45 Matlab methode
[t,y] = ode45(@odefun4,[0 1],[0.8*pi 0 0 0]);

% Euler's Forward Method
tend = 1; %maximale tijd
m = 3000; %aantal stapjes 00000
EF1 = zeros(m+1,1); EF2 = zeros(m+1,1); EF3 = zeros(m+1,1); EF4 = zeros(m+1,1); k = zeros(m+1,1);
w1 = 0.8*pi; %beginwaarde 1
w2 = 0; %beginwaarde 2
w3 = 0; %beginwaarde 3
w4 = 0; %beginwaarde 4
EF1(1,1) = w1;
EF2(1,1) = w2;
EF3(1,1) = w3;
EF4(1,1) = w4;
dt = tend/m; %delta t
t0 = 0; %initiele tijd

for i = 1:m
%matrix D en inv(D)
d11 = -(M1*(L1)^2 + M2*(L2)^2) ;
d12 = (M1*L1 - M2*L2)*cos(EF1(i,1));
d21 = -M1*L1*cos(EF1(i,1)) + M2*L2*cos(EF1(i,1));
d22 = -M1 - M2 - M3;
detD = (((M1)^2)+M1*M2+M1*M3)*((L1)^2)+(M1*M2+((M2)^2)+M2*M3)*((L2)^2)-((M1)^2)*((L1)^2)-

%vector z
z1 = (M1*L1+M2*L2)*EF2(i,1)*EF4(i,1)*sin(EF1(i,1))+g*(M1*L1-M2*L2)*sin(EF1(i,1))-(M1*L1-
z2 = -M1*L1*((EF2(i,1))^2)*sin(EF1(i,1))-M2*L2*((EF2(i,1))^2)*sin(EF1(i,1));

%differentiaalvergelijkingen
EF1(i+1,1) = EF1(i,1)+dt*EF2(i,1);
EF2(i+1,1) = EF2(i,1)+dt*(1/detD)*(d22*z1-d21*z2);
EF3(i+1,1) = EF3(i,1)+dt*EF4(i,1);
EF4(i+1,1) = EF4(i,1)+dt*(1/detD)*(-d12*z1+d11*z2);
k(i+1,1) = k(i,1)+dt;
end

%plots
% theta en x(t) met afgeleiden plotten
figure
yyaxis left

```

```

plot(t,y(:,1), 'b',t,y(:,3), 'b')
ylabel('hoek (rad)/ afstand(m)')
yyaxis right
plot(t,y(:,2), 'r',t,y(:,4), 'r')
ylabel('hoeksnelheid (rad/s) / snelheid (m/s)')
yyaxis left
xlabel('t(s)')
xlim([0 1])
ylim([-3 6])
ax = gca;
ax.YColor = 'b'; % Red
yyaxis right
ax.YColor = 'r'; % Blue
ylim([-30 60])
% leg1=legend(y, 'Location', 'NorthEast'); set(leg1, 'FontSize', 9);
% ah1=axes('position', get(gca, 'position'), 'visible', 'off');
% leg2=legend(ah1, 'Location', 'NorthWest'); set(leg2, 'FontSize', 9);
lgd=legend('\theta', 'x(t)', '\theta^', 'x^(t)');
lgd.NumColumns = 2;
% lgd1=legend('\theta', '\phi', 'Location', 'NorthWest');
% lgd2=legend('\theta^', '\phi^', 'Location', 'NorthEast');

%Afschieten
ta = zeros (17,1); pa = zeros (17,1); qa = zeros (85,1); sa = zeros(17,1);
Ea = zeros(17,1); tEa = zeros(85,1); m=61; j=1;
figure;
clf;
hold on;
for i = 1 : m
    d = t(i); %tR
    p = y(i,1); %thetaR
    q = y(i,2); %thetadotR
    if p>0
        if p<0.5*pi
            ta(j,1) = d; %t afschieten
            pa(j,1) = p; %hoek afschieten
            qa(j,1) = q; %hoeksnelheid afschieten
            %benodigde tussenberekeningen
            beta = -q*L2* cos (p);
            gamma = sin (p) * (-q*L2);
            delta = -L2*sin (p);
            epsilon = L2*cos(p)+L3;
            %Eindtijd, impact en afstand
            tE = (gamma + sqrt(gamma^2 + 2*g*epsilon))/g + d; %eindtijd
            sa(j,1) = beta*(tE-d)+ delta; %geschoten afstand
            Ea(j,1) = 0.5*M2*(beta^2 + (-g*(tE - d) + gamma)^2); %impact
            tEa(j,1) = tE; %eindtijd opslaan
            %Benodigdheden voor plot verloop afschieten
            T = linspace(d,tE,100);
            raxy = zeros (2,numel(T));
            raxy(:, :) = verloop(d,T,p,q,L2,L3,g);
            legendatekst = ['\theta_R = ', num2str(p)];
            plot(raxy(1,:), raxy(2,:), 'DisplayName', legendatekst);
            j=j+1;
        end
    end
end
end
hold off;

```

```

legend show;
xlabel('x(m)')
ylabel('y(m)')

%plot bereik impact
figure
yyaxis left
plot(pa, sa, 'b');
ylabel('meter')
yyaxis right
plot(pa, Ea, 'r');
ylabel('Joule')
yyaxis left
legend('bereik', 'impact')
xlabel('\theta_R(in rad)')
xlim([0.1 0.5*pi])
ylim([0 200])
yyaxis right
ylim([0 3*10^4])

%Rendement
Epd1 = M1*g*(-L1*cos(y(1,1))+L3);
Ekd = 0.5*(M1*(y(44,4))^2+L1^2*(y(44,2))^2+2*L1*y(44,2)*y(44,4)*cos(y(44,1))+M2*((y(44,
Epd2 = M1*g*(-L1*cos(y(44,1))+L3);
Epd1 - Ekd - Epd2

Odefun4

%Functie voor ode45 voor het 1 hoek model
function dydt4 = odefun4(t,y)
%ppunt = iB*v
%y(1) = theta, y(2) = thetap, y(3) = x(t), y(4) = xp(t)
g = 9.81; M1 = 2000; M2 = 15; M3 = 2000; L1 = 1.2; L2=5.7; L3=3.2;

%matrix D en inv(D)
d11 = -(M1*(L1)^2 + M2*(L2)^2) ;
d12 = (M1*L1 - M2*L2)*cos(y(1));
d21 = -M1*L1*cos(y(1)) + M2*L2*cos(y(1));
d22 = -M1 - M2 - M3;
detD =(((M1)^2)+M1*M2+M1*M3)*((L1)^2)+(M1*M2+((M2)^2)+M2*M3)*((L2)^2)-((M1)^2)*((L1)^2)-

%vector z
z1 = (M1*L1+M2*L2)*y(2)*y(4)*sin(y(1))+g*(M1*L1-M2*L2)*sin(y(1))-(M1*L1-M2*L2)*y(2)*y(4)
z2 = -M1*L1*((y(2))^2)*sin(y(1))-M2*L2*((y(2))^2)*sin(y(1));

%differentiaalvergelijkingen
dydt4 = zeros(4,1);
dydt4(1) = y(2);
dydt4(2) = (1/detD)*(d22*z1-d21*z2);
dydt4(3) = y(4);
dydt4(4) = (1/detD)*(-d12*z1+d11*z2);
end

```